

**Gilson Gonçalves de Matos**

**Modelos GAS Aplicados a Séries Temporais de  
Vazão e Vento**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da PUC-Rio

Orientador: Prof. Cristiano Augusto Coelho Fernandes

Rio de Janeiro  
agosto de 2013

**Gilson Gonçalves de Matos**

**Modelos GAS Aplicados a Séries Temporais de  
Vazão e Vento**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Cristiano Augusto Coelho Fernandes**

Orientador

Departamento de Engenharia Elétrica — PUC-Rio

**Prof. Adrian Heringer Pizzinga**

UFF

**Prof. Alexandre Street de Aguiar**

Departamento de Engenharia Elétrica - PUC-Rio

**Prof. Gutemberg Borges França**

UFRJ

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador Setorial do Centro  
Técnico Científico

Rio de Janeiro, 16 de agosto de 2013

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Gilson Gonçalves de Matos**

Bacharel em Estatística pela Universidade de Brasília em 2009. Estatístico do IBGE desde 2010.

Ficha Catalográfica

Matos, Gilson

Modelos GAS Aplicados a Séries Temporais de Vazão e Vento / Gilson Gonçalves de Matos; orientador: Cristiano Augusto Coelho Fernandes. – 2013.

103 f.: il. ; 30 cm

1. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Elétrica – Tese. 2. Parâmetros Variantes no Tempo. 3. *Score* Ponderado. 4. Vazão. 5. Fator de Capacidade. 6. Complementaridade. I. Fernandes, Cristiano. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Elétrica. III. Título.

CDD: 621.3

## Agradecimentos

Início fazendo meus agradecimentos a Deus, pela vida, pela motivação, e por me fazer acreditar a cada manhã que as coisas se tornarão melhores.

Agradeço imensamente ao grande amor da minha vida, Mariana, por caminhar ao meu lado durante esse período, e por todo carinho e paciência dedicados a mim. Aos meus pais, a quem tudo devo, por terem se sacrificado tanto para que eu estivesse aqui. Eu amo vocês! Faço também menção ao vovô Matatias, pelo que representa para mim desde os meus primeiros anos de vida, e aos meus tios Wilmar e Aparecida, que me acolheram em sua casa em um momento tão necessário.

Dedico um agradecimento especial ao meu orientador Cristiano Fernandes, primeiro pelo grande acréscimo em minha formação enquanto cursei suas disciplinas, e principalmente por todo o tempo e atenção despendidos na orientação desta dissertação.

À minha equipe do IBGE, em especial a Ana Lúcia Saboia, por ter confiado em meu trabalho, e me passado a tranquilidade necessária durante todo o meu mestrado. Certamente a finalização deste trabalho seria inviável sem a contribuição da Ana. Faço menção aos meus amigos Ailton José, Leonardo Athias e Marco Cícero (Tico), pelos constantes incentivos.

Aos professores Antonio Eduardo e George von Borries, do Departamento de Estatística da UnB, por terem me recomendado para o mestrado da PUC. À professora Denise Britz, pelos conselhos no início deste ano que me fizeram priorizar a conclusão desta dissertação. Ao Álvaro Veiga, pelas valiosas sugestões nos dois seminários que fiz sobre este trabalho na PUC.

Agradeço aos amigos de longa data Rafael e Juliana Barcellos, por todo o companheirismo deste a época de UnB, e principalmente nestes últimos anos no Rio. Ao Gabriel Sarmanho, amigo com quem dividi o apartamento nos primeiros meses de Rio de Janeiro. Aos amigos do mestrado Carolina Portilho, Daiane Santos, Eric Jardim, Frances Blanc e Rodrigo Farinazzo, por terem contribuído de formas distintas para minha formação, enquanto estudante e ser humano.

A todo o corpo docente do Departamento de Engenharia Elétrica da PUC-Rio, e aos membros da banca examinadora. Finalmente, agradeço à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

## Resumo

Matos, Gilson Gonçalves de; Fernandes, Cristiano Augusto Coelho (Orientador). **Modelos GAS Aplicados a Séries Temporais de Vazão e Vento**. Rio de Janeiro, 2013. 103p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Os modelos GAS (*generalized autoregressive score*) são modelos de séries temporais com parâmetros variantes no tempo, os quais possuem sua evolução ditada pelo vetor *score* ponderado da função de verossimilhança. A avaliação da verossimilhança nestes modelos é bastante simples, bem como incorporação de efeitos como assimetria, memória longa e outras dinâmicas. Por serem baseados no *score* da verossimilhança, exporta-se a estrutura completa da distribuição preditiva para o mecanismo de atualização dos parâmetros, e não apenas a média ou momentos de ordem superior. Estas características, somadas à capacidade de lidar com processos multivariados e não estacionários, tornam a classe em estudo uma nova alternativa para a construção de modelos com parâmetros variantes, particularmente para séries temporais não gaussianas. Nesta dissertação, foram desenvolvidos modelos GAS univariados para a análise das séries mensais de vazão do Rio Paraíba (MG) e de fator de capacidade de uma usina eólica não divulgada do Nordeste, utilizando as distribuições gama e beta, respectivamente. Além disso, foi derivado um novo modelo GAS bivariado com marginais gama e beta para a modelagem conjunta dos processos de vazão e vento, de modo a explorar a complementaridade sazonal entre as séries.

## Palavras-chave

Parâmetros Variantes no Tempo; *Score* Ponderado; Vazão; Fator de Capacidade; Complementaridade;

## Abstract

Matos, Gilson Gonçalves de; Fernandes, Cristiano Augusto Coelho (Advisor). **GAS Models Applied to Time Series of Streamflow and Wind**. Rio de Janeiro, 2013. 103p. MSc Dissertation — Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The GAS models (generalized autoregressive score) are time series models with time-varying parameters, which have their update mechanism driven by the scaled score of the likelihood function. The likelihood evaluation in these models is quite simple, as well as the incorporation of effects like asymmetry, long memory and other dynamics. Because they are based in the scaled score of the likelihood, it exploits the full structure of the predictive distribution to the update mechanism of the parameters, and not just mean or higher order moments. These characteristics, coupled with the ability to handle with multivariate and non-stationary processes, make the studied class a new alternative to the construction of models with time-varying parameters, particularly for non-Gaussian time series. In this dissertation, univariate GAS models were developed to analyze monthly series of streamflow of Paraibuna river (MG) and of capacity factor of a wind farm undisclosed in Northeast, using the gamma and beta distributions, respectively. In addition, a new bivariate GAS model with gamma and beta marginals was derived for the joint modeling of the streamflow and wind processes, in order to explore the seasonal complementarity between the series.

## Keywords

Time-Varying Parameter; Scaled *Score*; Streamflow; Capacity Factor; Complementarity;

# Sumário

1	Introdução	11
1.1	Considerações Iniciais	11
1.2	Objetivos e Contribuições	11
1.3	Estrutura da Dissertação	13
2	Metodologia	14
2.1	Modelos Guiados por Observações e por Parâmetros	14
2.2	Modelo GAS: Especificação e Propriedades	16
2.3	Modelos de Componentes Não Observáveis com Uma Única Fonte de Erros	23
3	Modelos GAS Univariados Gama	25
3.1	Modelo GAS Gama com Evolução do Tipo SARIMA	26
3.2	Modelo GAS Gama de Componentes Não Observáveis	32
4	Modelos GAS Univariados Beta	34
4.1	Modelo GAS Beta com Evolução do Tipo SARIMA	35
4.2	Modelo GAS Beta de Componentes Não Observáveis	39
5	Modelos GAS Bivariado Gama-Beta	42
5.1	Vetor Score e Informação de Fisher	44
5.2	Modelo GAS Gama-Beta com evolução SARIMA	45
6	Aspectos da Implementação e Avaliação dos Modelos GAS	49
6.1	Estimação por Máxima Verossimilhança	49
6.2	Diagnósticos do Modelo	51
6.3	Previsibilidade Fora da Amostra	52
6.4	Medidas de Avaliação	53
7	Aplicações às Séries de Vazão e Vento	55
7.1	Análise Descritiva	57
7.2	Modelagem Univariada da Série de Vazão	60
7.3	Modelagem Univariada da Série de Fator de Capacidade	67
7.4	Modelagem Bivariada das Série de Vazão e Fator de Capacidade	74
7.5	Análise Comparativa dos Resultados	79
8	Considerações Finais	82
A	Apêndice A	88
B	Apêndice B	94

## Lista de figuras

3.1	Exemplos de séries simuladas do processo GAS(1,1) com densidade gama para os tamanhos de amostra $T = 50, 100, 400$ e $1000$ .	30
3.2	Densidades das estimativas dos parâmetros $w, A, B$ e $\alpha$ para processos simulados GAS(1,1) com distribuição gama, e densidades das respectivas estatísticas $t$ .	31
4.1	Exemplos de séries simuladas do processo GAS(1,1) com densidade beta para cada tamanho de amostra em estudo, ou seja, $T=50, 100, 400$ e $1000$ .	38
4.2	Densidades das estimativas dos parâmetros $w, A, B$ e $\alpha$ para processos simulados GAS(1,1) com distribuição beta, e densidades das respectivas estatísticas $t$ .	39
7.1	Série de Vazão, total e últimos 5 anos.	57
7.2	Série de Fator de Capacidade, total e últimos 5 anos.	57
7.3	Box-Plots mensais e histograma da série de Vazão.	58
7.4	Box-Plots mensais e histograma da série de Fator de Capacidade.	58
7.5	Vazão e Fator de Capacidade mensais.	59
7.6	Diagrama de dispersão das séries e reta de regressão.	59
7.7	ENA's e Box-Plots mensais.	60
7.8	Série de Vazão e previsões 1-passo à frente para período de estimação do modelo Gama-SARIMA.	62
7.9	Previsões fora da amostra levantadas por simulação do modelo Gama-SARIMA.	63
7.10	Previsões fora da amostra 1-passo à frente do modelo Gama-SARIMA.	63
7.11	FAC dos resíduos quantílicos do modelo Gama-SARIMA.	64
7.12	Histograma dos resíduos quantílicos do modelo Gama-SARIMA.	64
7.13	Tendência, componente autoregressiva e sazonalidade para modelo Gama com evolução em componentes	66
7.14	Previsões fora da amostra levantadas por simulação do modelo Gama de componentes.	67
7.15	Previsões fora da amostra 1-passo à frente do modelo Gama de componentes.	67
7.16	Série de Fator de Capacidade e previsões 1-passo à frente para período de estimação do modelo Beta-SARIMA.	69
7.17	Previsões fora da amostra levantadas por simulação do modelo Beta-SARIMA.	70
7.18	Previsões fora da amostra 1-passo à frente do modelo Beta-SARIMA.	70
7.19	FAC dos resíduos quantílicos do modelo Beta-SARIMA.	71
7.20	FAC dos resíduos quantílicos ao quadrado do modelo Beta-SARIMA.	71
7.21	Tendência, componente autoregressiva e sazonalidade para modelo Beta com evolução em componentes.	73
7.22	Séries de Vazão e Fator de Capacidade e previsões 1-passo à frente para período de estimação com o modelo Gama-Beta.	76



7.23	Correlação dinâmica entre os processos de Vazão e Fator de Capacidade para o período de estimação.	76
7.24	Previsões fora da amostra levantadas por simulação - modelo Gama-Beta.	78
7.25	Previsões fora da amostra 1-passo à frente - modelo Gama-Beta.	78
7.26	FAC dos resíduos quantílicos - modelo Gama-Beta.	79
7.27	Cenários simulados das séries de Vazão e Fator de Capacidade pelos modelos univariados com evolução SARIMA para cômputo das previsões.	80
7.28	Cenários simulados das séries de Vazão e Fator de Capacidade pelo modelo bivariado para cômputo das previsões.	80

## Lista de tabelas

2.1	Especificação GAS para alguns modelos.	19
5.1	Valores reais e estatísticas das estimativas dos parâmetros de um modelo GAS(1,1) para a densidade gama-beta com base em 500 simulações.	48
7.1	Verossimilhança e critérios de informação para modelo Gama-SARIMA.	61
7.2	Medidas de ajustamento para modelo Gama-SARIMA.	63
7.3	P-valor dos testes de autocorrelação, heterocedasticidade e normalidade dos resíduos quantílicos do modelo Gama-SARIMA.	64
7.4	Verossimilhança e critérios de informação para modelo Gama de componentes.	65
7.5	Medidas de ajustamento para modelo Gama de componentes.	67
7.6	P-valor dos testes de autocorrelação, heterocedasticidade e normalidade nos resíduos quantílicos do modelo Gama de componentes.	68
7.7	Verossimilhança e critérios de informação para modelo Beta-SARIMA.	68
7.8	Medidas de ajustamento para modelo Beta-SARIMA.	70
7.9	P-valor dos testes de autocorrelação, heterocedasticidade e normalidade nos resíduos quantílicos do modelo Beta-SARIMA.	71
7.10	Verossimilhança e critérios de informação para modelo Beta de componentes.	72
7.11	Medidas de ajustamento para modelo Beta de componentes.	72
7.12	P-valor dos testes de autocorrelação, heterocedasticidade e normalidade nos resíduos quantílicos do modelo Beta de componentes.	74
7.13	Verossimilhança e critérios de Informação por tipo de modelo.	75
7.14	Medidas de ajustamento para modelo bivariado Gama-Beta.	77
7.15	P-valor dos testes de autocorrelação, heterocedasticidade e normalidade nos resíduos quantílicos do modelo Gama-Beta.	79
B.1	Estimativas de máxima verossimilhança e erros padrão das estimativas - modelos Gama-SARIMA.	96
B.2	Estimativas de máxima verossimilhança e erros padrão das estimativas - modelos Gama de componentes.	97
B.3	Estimativas de máxima verossimilhança e erros padrão das estimativas - modelos Beta-SARIMA.	97
B.4	Estimativas de máxima verossimilhança e erros padrão das estimativas - modelos Beta de componentes.	98
B.5	Estimativas de máxima verossimilhança e erros padrão das estimativas - modelo Gama-Beta bivariado.	98

# 1

## Introdução

### 1.1

#### Considerações Iniciais

Os modelos GAS (*generalized autoregressive score*), introduzidos por Creal *et al.* (2008), são modelos com parâmetros variantes no tempo usados para a análise de séries temporais, a fim de explicá-las e/ou fazer previsões. A atualização dos parâmetros variantes no tempo é ditada pelo vetor *score* ponderado da função de verossimilhança. Segundo a classificação de Cox (1981), estes modelos podem ser vistos como modelos guiados por observações, nos quais os parâmetros variantes no tempo são funções de valores defasados da variável dependente, bem como de valores atuais e defasados de variáveis exógenas.

Para os modelos da classe GAS, a avaliação da verossimilhança é bastante simples. A incorporação de efeitos como assimetria, memória longa e outras dinâmicas também pode ser feita sem maiores complexidades. Além disso, por serem baseados no vetor *score* ponderado da função de verossimilhança, exporta-se a estrutura completa da distribuição preditiva para o mecanismo de atualização dos parâmetros, e não apenas a média ou momentos de ordem superior.

Alguns modelos de econometria e finanças podem ser vistos como casos particulares dos modelos GAS. São exemplos os modelos autoregressivos condicionalmente heterocedásticos (GARCH) de Engle e Bollerslev (1986), os modelos de erro multiplicativo (MEM) de Engle (2002), autoregressivos de intensidade e duração condicional (ACI e ACD), de Engle e Russell (1998) e Russell (2001) e os modelos com fonte única de erros, de Ord *et al.* (1997).

### 1.2

#### Objetivos e Contribuições

O objetivo principal desta dissertação é a derivação de modelos GAS para a análise e geração de cenários de vazão e vento, tanto de forma univariada quanto de forma multivariada. Para a modelagem do processo de vazão do Rio Paraibuna (MG), foram desenvolvidos modelos com densidade preditiva

gama com duas estruturas distintas de evolução dos parâmetros variantes no tempo, a saber, evolução do tipo SARIMA, e em componentes não observáveis, à semelhança dos modelos estruturais (Harvey, 1989). Na modelagem da série de fator de capacidade eólico (de uma usina não divulgada do Nordeste) foi proposto um modelo com densidade preditiva beta, também com ambas as estruturas de evolução mencionadas.

Por fim, foi derivado um modelo bivariado dentro do escopo GAS, com distribuições marginais gama e beta, com o intuito de modelar conjuntamente os processos de vazão e vento. A construção deste modelo está baseada na premissa de complementaridade sazonal entre os regimes de vazão observados na Região Sudeste e de ventos da Região Nordeste, relação esta já explorada em Amaral (2011) com as mesmas séries por hora trabalhadas. Outros trabalhos que apontam a complementaridade entre os regimes hidráulicos e eólicos no contexto brasileiro são Amarante *et al.* (2001) e Marinho e Aquino (2009). O intuito principal de se explorar estas relações consiste na estabilização sazonal da oferta de energia. No modelo bivariado proposto, a complementaridade sazonal entre os processos foi capturada através de uma estrutura de correlação negativa entre as variáveis gama e beta.

É importante ressaltar que os modelos e aplicações desta dissertação, derivados dentro do arcabouço GAS para dados sazonais, são inéditos. A inclusão de variáveis exógenas, bem como de intervenções para a acomodação de observações mal ajustadas foi abordada. Além disso, as previsões fora da amostra  $k$ -passos à frente, assunto em geral não abordado na literatura de para modelos não-lineares e não-gaussianos, foram levantadas por simulação. Os diagnósticos dos modelos foram feitos com base nos resíduos quantílicos (Kalliovirta, 2009).

Comparativamente aos modelos VARX utilizados por Amaral (2011) na modelagem conjunta das séries de vazão e vento, e modelos gaussianos em geral, os modelos GAS desenvolvidos nesta dissertação apresentam vantagem quanto à simulação de cenários futuros, pois possuem suporte adequado às séries de interesse (visto que a vazão está definida nos reais positivos e o fator de capacidade eólico entre 0 e 100), evitando a simulação de valores negativos para ambas as séries ou superiores a 100 para a série de fator de capacidade. No caso dos modelos VARX, para que os cenários não apresentem os problemas mencionados, deve-se trabalhar com variáveis transformadas. Após a simulação dos cenários, aplica-se a transformação inversa para que as séries geradas retornem à escala original.

### 1.3

#### Estrutura da Dissertação

A presente dissertação está estruturada em oito capítulos, incluindo esta introdução. No segundo capítulo é apresentada a metodologia em detalhes, com vistas à especificação dos modelos GAS, estimação e forma com que estes se adaptam a novas parametrizações. No terceiro e quarto capítulo, são descritos modelos univariados com distribuições preditivas gama e beta, respectivamente. No capítulo cinco é apresentado um modelo GAS bivariado que integra os modelos univariados, tanto do ponto de vista das distribuições condicionais, quanto das parametrizações adotadas nos modelos. No sexto capítulo são apresentadas as heurísticas utilizadas na implementação dos modelos, e alguns aspectos relacionados à avaliação e diagnóstico destes. No sétimo capítulo, os modelos propostos são aplicados à modelagem de processos reais de vento e vazão. Por fim, constam as conclusões da pesquisa, e algumas etapas que serão desenvolvidas posteriormente. Há ainda dois apêndices. No primeiro estão demonstrações de alguns modelos de séries temporais e finanças que são casos particulares dos modelos GAS. No segundo constam as estimativas de máxima verossimilhança dos modelos e os respectivos erros padrão.

## 2

## Metodologia

O presente capítulo é destinado à parte metodológica desta dissertação, isto é, à formalização dos métodos, bem como suas descrições. Inicialmente, apresenta-se a diferenciação proposta por Cox (1981) entre modelos guiados por observações e modelos guiados por parâmetros. A seguir, introduz-se a especificação geral dos modelos GAS e sua derivação para algumas densidades preditivas em particular. Os procedimentos de inferência por máxima verossimilhança e a forma com que os modelos GAS se adaptam a novas parametrizações dos parâmetros variantes no tempo também são mostrados. Por fim, é descrito um modelo GAS de componentes não observáveis com uma única fonte de erros e distribuição preditiva normal, estendido posteriormente para as distribuições gama e beta.

### 2.1

#### Modelos Guiados por Observações e por Parâmetros

Os modelos com parâmetros variantes no tempo foram classificados por Cox (1981) como modelos guiados por observações ou por parâmetros. Nos modelos guiados por observações, caso da classe de modelos GAS, os parâmetros variantes no tempo são funções de valores defasados da variável em análise, bem como de variáveis exógenas. Dessa forma, tais parâmetros são estocásticos, porém são conhecidos condicionalmente à informação passada. Como exemplos, podem ser citados os modelos GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity*) de Engle e Bollerslev (1986), MEM (*Multiplicative Error Model*) de Engle (2002) e os modelos GLARMA para séries de contagens de Davis *et al.* (2003).

Já nos modelos guiados por parâmetros, os parâmetros variantes no tempo são processos estocásticos com fontes de erro próprias, e por isso não são perfeitamente preditos condicionalmente à informação passada. Exemplos de modelos guiados por observações são os modelos de volatilidade estocástica, os modelos estruturais de componentes não observáveis (Harvey, 1989), e os modelos dinâmicos generalizados de West *et al.* (1985).

Brockwell e Davis (2002) propõem a mesma taxonomia para os modelos em espaço de estados. Segundo os autores, a equação das observações é a mesma para os modelos em espaço de estados guiados por observações e guiados por parâmetros, com a diferença que os vetores de estado de um modelo guiado por parâmetros evoluem independentemente do passado do processo observado, enquanto os vetores de estado de um modelo guiado por observações dependem diretamente das observações passadas.

A principal vantagem dos modelos guiados por observações é que estes possuem uma forma fechada para a função de verossimilhança. Tal característica é observada apenas em casos específicos dos modelos guiados por parâmetros, como os modelos em espaço de estados lineares e gaussianos. Dessa forma, a avaliação da verossimilhança e os procedimentos de estimação tornam-se simples, evitando a necessidade de métodos baseados em simulação para a estimação dos parâmetros. Para modelos guiados por observações com expressões fechadas para as médias condicionais, caso dos modelos trabalhados nesta dissertação, a previsão um passo à frente é bastante direta. As previsões  $k$ -passos a frente são em geral levantadas por simulação, para  $k \geq 2$ . Contudo a derivação de propriedades estatísticas do modelo, como estacionariedade e ergodicidade, é mais complexa, sendo realizada até o momento apenas para casos particulares dos modelos em estudo (Blasques *et al.*, 2012). Além disso, nem sempre os parâmetros variantes no tempo possuem interpretação direta.

No caso dos modelos guiados por parâmetros, a derivação das propriedades estatísticas é normalmente mais natural, bem como a interpretabilidade dos parâmetros variantes no tempo. Para estes, qualquer que seja a densidade preditiva escolhida, é possível construir um modelo tomando alguns de seus parâmetros como processos estocásticos variantes no tempo com fontes de erro próprias, o que não é tão simples no caso de modelos guiados por observações. Esta característica é também compartilhada pelos modelos GAS. Contudo, para a avaliação da verossimilhança dos modelos guiados por parâmetros devem ser utilizados métodos de simulação para solução de integrais de ordens elevadas, como amostragem por importância e MCMC, à exceção dos modelos lineares e gaussianos. Normalmente a obtenção de previsões  $k$ -passos a frente também é mais complicada para estes modelos.

## 2.2

**Modelo GAS: Especificação e Propriedades**

## 2.2.1

**Especificação do Modelo Básico**

Considere o vetor aleatório  $y_t$  de dimensão  $K \times 1$  denotando a variável a ser modelada,  $f_t$  o vetor com parâmetros variantes no tempo,  $x_t$  o vetor de variáveis exógenas e  $\theta$  o vetor com os parâmetros estáticos do modelo. Defina os conjuntos de informação  $Y^t = (y_1, y_2, \dots, y_t)$ ,  $F^t = (f_0, f_1, \dots, f_t)$  e  $X^t = (x_1, x_2, \dots, x_t)$ . Dessa forma, a informação disponível no instante  $t$  é dada por  $\{f_t, F_t\}$ , onde

$$F_t = \{Y^{t-1}, F^{t-1}, X^t\}, \quad \text{para } t = 1, 2, \dots, n.$$

Assume-se que  $y_t$  é gerado pela densidade preditiva

$$y_t \sim p(y_t/f_t, F_t, \theta) \quad (2-1)$$

O mecanismo de atualização do vetor de parâmetros variantes no tempo  $f_t$  é dado pela equação de atualização usualmente adotada nos modelos autoregressivos, a saber:

$$f_{t+1} = w + \sum_{i=1}^p A_i s_{t-i+1} + \sum_{j=1}^q B_j f_{t-j+1} \quad (2-2)$$

onde  $w$  denota um vetor de constantes, as matrizes  $A_i$  e  $B_j$  possuem dimensões apropriadas para  $i = 1, 2, \dots, p$  e  $j = 1, 2, \dots, q$ , enquanto  $s_t$  é uma função dos dados passados,  $s_t = s_t(y_t, f_t, F_t; \theta)$ . Os coeficientes desconhecidos de (2-2) são funções de  $\theta$ , ou seja,  $w = w(\theta)$ ,  $A_i = A_i(\theta)$ ,  $B_j = B_j(\theta)$  para  $i = 1, 2, \dots, p$  e  $j = 1, 2, \dots, q$ . A diferença substantiva entre os modelos GAS e outros modelos com parâmetros variantes no tempo se concentra na escolha do mecanismo de condução da equação de atualização  $s_t$ , que é aplicável a uma ampla classe de modelos.

Quando é realizada uma nova observação do processo  $\{y_t, t = 1, 2, \dots\}$ , o parâmetro variante no tempo  $f_t$  é atualizado de acordo com a Eq.(2-2) para o período  $t + 1$ , onde



$$s_t = S_t \cdot \nabla_t, \quad \nabla_t = \frac{\partial \ln p(y_t/f_t, F_t, \theta)}{\partial f_t}, \quad S_t = S(t, f_t, F_t; \theta) \quad (2-3)$$

sendo  $S_t$  uma matriz de ponderação, a qual pode ser escolhida de algumas formas. Visto que o mecanismo de atualização (2-2) depende do vetor *score* ponderado, para uma dada escolha de  $S_t$  as equações (2-1) - (2-3) definem um modelo GAS de ordens  $p$  e  $q$ , ou simplesmente um modelo GAS( $p, q$ ).

Segundo Creal *et al.* (2013), o uso do *score* ponderado para atualização do vetor de parâmetros variantes no tempo  $f_t$  é intuitivo, visto que este representa a direção da subida mais acentuada para melhorar o ajuste local do modelo em termos da verossimilhança ou da densidade no instante  $t$ , dada a posição de  $f_t$ . Dessa forma,  $s_t$  fornece uma direção natural para a atualização do parâmetro  $f_t$ . Além disso, o vetor *score* depende da função de densidade como um todo, e não apenas da média ou de momentos de ordem superior, e por isso utiliza-se a estrutura completa da distribuição preditiva para a atualização de  $f_t$ , diferenciando os modelos GAS dos demais modelos guiados por observações explorados na literatura.

Visto que a escolha da matriz  $S_t$  pode ser feita de maneiras distintas, há uma flexibilidade adicional na escolha de como o vetor *score* será ponderado para a atualização do vetor  $f_t$ . É importante ter em mente que cada escolha da matriz de ponderação  $S_t$  irá implicar em um novo modelo, possivelmente com propriedades estatísticas e empíricas distintas.

Em várias situações, é natural considerar a matriz  $S_t$  como função da variância do vetor *score*. Por exemplo, a matriz de ponderação pode ser definida como

$$S_t = I_{t/t-1}^{-1}, \quad (2-4)$$

onde

$$\begin{aligned} I_{t/t-1} &= E_{t-1}(\nabla_t \nabla_t') \\ &= -E_{t-1} \left[ \frac{\partial^2 \ln p(y_t/f_t, F_t, \theta)}{\partial f_t^2} \right] \end{aligned} \quad (2-5)$$

sendo  $E_{t-1}$  a esperança com respeito a  $p(y_t/f_t, F_t, \theta)$ . Para esta escolha, o modelo GAS tem como casos particulares o modelo GARCH de Engle e

Bollerslev (1986), o modelo MEM de Engle (2002) e os modelos de Poisson para dados de contagem derivados por Davis *et al.* (2003). Adotando  $S_t = I_{t/t-1}^{-1}$  e com uma estrutura de evolução GAS(1,1), a Eq.(2-2) se assemelha à equação de busca do ótimo nos algoritmos de Newton, a menos de constantes.

Outra possível escolha para a matriz de ponderação é

$$S_t = J_{t/t-1}, \quad J'_{t/t-1} J_{t/t-1} = I_{t/t-1}^{-1} \quad (2-6)$$

ou seja,  $S_t$  definida como a raiz quadrada da inversa da matriz de informação para a densidade preditiva (2-1) com respeito a  $f_t$ . Para esta escolha, as propriedades do respectivo modelo GAS tornam-se mais tratáveis, visto que o vetor *score* ponderado  $s_t$  passa a ser uma diferença martingal com variância unitária. Outra escolha conveniente seria  $S_t = I$ , porém as propriedades são mais complicadas para esta escolha em particular, e empiricamente, observa-se maior instabilidade na estimação.

### 2.2.2

#### Especificação GAS para alguns modelos

Conforme ressaltado, o arcabouço de modelos da classe GAS é aplicável a diferentes densidades preditivas, e escolhas de parametrização destas. Adicionalmente, tem-se a flexibilidade de diferentes escolhas para a ponderação do vetor *score*, o qual dita o mecanismo de atualização dos parâmetros variantes no tempo. Logo, a classe de modelos em estudo é aplicável a um amplo espectro de modelos que são caracterizados por uma especificação paramétrica da verossimilhança, sendo também útil na derivação de novos modelos com parâmetros variantes no tempo.

Um dos principais obstáculos ao uso dos modelos GAS se concentra no cômputo da matriz de informação, dada alguma parametrização em específico. A Tabela 2.1 fornece o vetor *score*, bem como os elementos da matriz de informação para algumas densidades preditivas.

Uma importante característica dos modelos GAS se deve ao mecanismo de ponderação do vetor *score*, em geral baseado na matriz de informação de Fisher. Outra alternativa para a ponderação do *score* é a matriz identidade  $S_t = I$ , com a qual o mecanismo de atualização passa a utilizar somente o gradiente para a atualização dos parâmetros variantes no tempo. Esta escolha torna o mecanismo de atualização menos estável, e por isso a preferência por  $S_t = I_{t/t-1}^{-d}$ , para  $d$  igual a 1/2 ou 1. Quando a matriz de informação de Fisher

Tabela 2.1: Especificação GAS para alguns modelos.

Densidade	$f_t$	$\nabla_t$	$I_{t/t-1}$
Normal	$\mu_t$	$(y_t - \mu_t)/\sigma_t^2$	$I_{t,11} = 1/\sigma_t^2$
$\frac{\exp[-(y_t - \mu_t)^2/2\sigma_t^2]}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}}$	$\sigma_t^2$	$1/2\sigma^2[-1 + (y_t - \mu_t)^2/\sigma_t^2]$	$I_{t,22} = 1/2\sigma_t^4$
			$I_{t,12} = 0$
Exponencial	$\ln(\lambda_t)$	$1 - y_t\lambda_t$	$I_{t,11} = 1$
$\lambda_t \exp(-\lambda_t)$			
Gama	$\ln(\alpha_t)$	$\alpha_t[\ln(y_t) - \ln(\beta_t) + \psi_1(\alpha_t)]$	$I_{t,11} = \alpha_t^2\psi_2(\alpha_t)$
$\frac{y_t^{\alpha_t-1} \exp(-y_t/\beta_t)}{\Gamma(\alpha_t)\beta_t^{\alpha_t}}$	$\ln(\beta_t)$	$y_t/\beta_t - \alpha_t$	$I_{t,22} = \alpha_t$
			$I_{t,12} = \alpha_t$
Beta	$\ln(\alpha_t)$	$\alpha_t[\psi_1(\alpha_t + \beta_t)$	$I_{t,11} = \alpha_t^2[\psi_2(\alpha_t)$
$\frac{y_t^{\alpha_t-1}(1-y_t)^{\beta_t-1}}{\beta(\alpha_t, \beta_t)}$		$-\psi_1(\alpha_t) + \ln(y_t)]$	$-\psi_2(\alpha_t + \beta_t)]$
	$\ln(\beta_t)$	$\beta_t[\psi_1(\alpha_t + \beta_t)$	$I_{t,22} = \beta_t^2[\psi_2(\beta_t)$
		$-\psi_1(\beta_t) + \ln(1 - y_t)]$	$-\psi_2(\alpha_t + \beta_t)]$
			$I_{t,12} = -\alpha_t\beta_t\psi_2(\alpha_t + \beta_t)$
Poisson	$\ln(\lambda_t)$	$(y_t - \lambda_t)$	$I_{t,11} = \lambda_t$
$\exp(-\lambda_t) \frac{\lambda_t^{y_t}}{y_t!}$			
Multinomial	$\ln\left(\frac{p_{it}}{1 - \sum_{j=1}^{J-1} p_{jt}}\right)$	$(y_{it} - np_{it})$	$I_{t,ii} = np_{it}(1 - p_{it})$
$\frac{n! \prod_{j=1}^J p_j^{y_j}}{\prod_{j=1}^J y_j!}$			$I_{t,ij} = -np_{it}p_{jt}$

Fonte: Creal *et al.* (2008, pg 11).

Nota: O elemento  $(i, j)$  de  $I_{t/t-1}$  foi denotado por  $I_{t,ij}$ . Ainda, a notação  $\psi_k(x)$  é referente à função  $\partial^k \ln \Gamma(x)/\partial x^k$ .

não é de posto completo, ou é numericamente instável, uma alternativa é a introdução de um mecanismo de suavização nesta, ou seja,  $S_t = (I_{t/t-1}^c)^{-1}$ , onde

$$I_{t/t-1}^c = \alpha I_{t-1/t-2}^c + (1 - \alpha)I_{t/t-1} \quad (2-7)$$

para algum  $0 \leq \alpha \leq 1$ . O valor ótimo de  $\alpha$  pode ser fixado *a priori*, ou incorporado ao vetor de parâmetros estáticos  $\theta$  e estimado por máxima verossimilhança.

É possível introduzir variáveis exógenas e outras dinâmicas diretamente na equação de atualização dos parâmetros dado pela Eq.(2-2), tais como sazonalidade, dinâmica de memória longa, etc. Uma versão da Eq.(2-2) que considera a memória longa de um processo pode ser dada por

$$f_{t+1} = w + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i + d - 1)}{i!(d - 1)!} s_{t-i} \quad (2-8)$$

para um parâmetro de integração fracionária  $d \leq 1/2$ , de onde obtêm-se um

processo GAS fracionariamente integrável, ou FIGAS, de modo similar aos processos ARFIMA ou FIGARCH.

Os modelos apresentados para as distribuições gama e beta serão explorados nos capítulos posteriores, visto que serão utilizadas para a modelagem univariada e bivariada de séries de vazão e fator de capacidade eólico.

No Apêndice A são descritos modelos da literatura de econometria e séries temporais que são casos particulares dos modelos GAS.

### 2.2.3

#### Estimação por Máxima Verossimilhança

Uma das propriedades inerentes aos modelos guiados por observações, e aos modelos GAS em particular, é a facilidade de avaliação da função de verossimilhança. Para uma série temporal  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , o estimador de máxima verossimilhança pode ser expresso como

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \sum_{t=1}^n l_t \quad (2-9)$$

onde  $l_t = \ln p(y_t/f_t, F_t, \theta)$  para uma dada realização  $y_t$ . Para a avaliação da função de verossimilhança, é suficiente implementar o mecanismo de atualização dado pela Eq.(2-2) e avaliar o logaritmo da verossimilhança  $l_t$  para um valor particular  $\theta^*$  de  $\theta$  dentro do espaço paramétrico.

É possível formular relações recursivas para o cômputo do gradiente da verossimilhança com respeito ao vetor de parâmetros estáticos  $\theta$ . Fiorentini *et al.* (1996) desenvolveu relações recursivas para o cômputo do gradiente de modelos GARCH univariados, resultado posteriormente estendido por Lucchetti (2002) para modelos GARCH multivariados e com efeitos na média condicional.

Para o modelo GAS(1,1) o gradiente foi derivado pela regra da cadeia por Creal *et al.* (2013), sendo dado por

$$\frac{\partial l_t}{\partial \theta'} = \frac{\partial \ln p_t}{\partial \theta'} + \frac{\partial \ln p_t}{\partial f'_t} \frac{\partial f_t}{\partial \theta'} \quad (2-10)$$

onde  $p_t = p(y_t/f_t, F_t, \theta)$  e

$$\frac{\partial f_t}{\partial \theta'} = \frac{\partial w}{\partial \theta'} + A_1 \frac{\partial s_{t-1}}{\partial \theta'} + B_1 \frac{\partial f_{t-1}}{\partial \theta'} + (s'_{t-1} \otimes I) \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial \theta'} + (f'_{t-1} \otimes I) \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial \theta'} \quad (2-11)$$

$$\frac{\partial s_{t-1}}{\partial \theta'} = s_{t-1} \frac{\partial \nabla_{t-1}}{\partial \theta'} + (\nabla'_{t-1} \otimes I) \frac{\partial \vec{S}_{t-1}}{\partial \theta'} \quad (2-12)$$

com  $\vec{A}_1 = \text{Vec}(A)$  denotando o vetor com as colunas empilhadas da matrix  $A$  e

$\otimes$  representando o produto de Kronecker. Sabe-se que as derivadas  $\partial \nabla_{t-1} / \partial \theta'$  e  $\partial \vec{S}_{t-1} / \partial \theta'$  devem também considerar o efeito de  $\theta$  através de  $f_t$  como em (2 – 10).

As derivadas da log-verossimilhança podem ser computadas simultaneamente com os parâmetros variantes no tempo  $f_t$ . Contudo, as derivadas analíticas podem ser complicadas para alguns casos, particularmente a recursão para  $\partial s_{t-1} / \partial \theta'$ . Nas aplicações exploradas nesta dissertação, a otimização da verossimilhança foi obtida a partir de métodos numéricos, os quais fazem uso de algoritmos de diferenças finitas para a avaliação das derivadas.

No artigo seminal sobre os modelos GAS (Creal *et al.*, 2008), propõe-se o cálculo dos erros padrão e das estatísticas  $t$  para os parâmetros estimados com base na inversa da matriz Hessiana da log-verossimilhança avaliada no ótimo encontrado. Logo, se o vetor  $\theta$  contém todos os parâmetros estáticos do modelo, conjectura-se que sobre certas condições de regularidade, o estimador de máxima verossimilhança  $\hat{\theta}$  de  $\theta$  satisfaz

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, H^{-1}) \quad (2-13)$$

onde  $H = \lim_{n \rightarrow \infty} E[(\partial l / \partial \theta)(\partial l / \partial \theta')] / n$  e  $l = \sum_{t=1}^n l_t$ . A prova formal desse resultado ainda não foi estabelecida para os modelos GAS, sendo inclusive difícil de ser derivada para esta classe de modelos, dada sua generalidade. Isso porque os resultados dependem da distribuição preditiva, da parametrização do vetor de parâmetros variantes no tempo e da ponderação do vetor *score* (que governa a dinâmica do processo). A prova foi realizada para alguns casos particulares dos modelos GAS, como os modelos para séries de contagens com densidade preditiva Poisson (Davis *et al.*, 2003) e modelos GARCH. Em alguns exercícios de simulação realizados com base em processos GAS(1,1) (vide Capítulos 3 e 4), a distribuição assintótica postulada para o EMV de  $\hat{\theta}$  se mostrou adequada.

Quanto às condições de estacionariedade e ergodicidade dos modelos GAS, Blasques *et al.* (2012) derivaram regiões do espaço paramétrico para as quais os processos são estacionários e ergódicos, com ilustrações para alguns modelos específicos, como processos GAS com médias variantes no tempo e processos com volatilidade dinâmica.

## 2.2.4

### Parametrizações

Outra propriedade interessante da classe de modelos em estudo é a forma natural que esta se adapta a diferentes parametrizações do vetor de parâmetros

variantes da densidade (2-1). Considere, por exemplo, que a parametrização  $\tilde{f}_t = h(f_t)$  é preferida a  $f_t$ , para uma dada função  $h(\cdot)$  diferenciável e inversível. Seja  $\dot{h}_t = \partial h(f_t)/\partial f_t$ , a qual à semelhança de  $f_t$  é conhecida condicionalmente ao conjunto de informação  $F_t$ .

Utilizando a regra da cadeia, pode-se mostrar que o vetor *score* obtido em relação a  $\tilde{f}_t$  é dado por

$$\tilde{\nabla}_t = \left(\dot{h}_t'\right)^{-1} \nabla_t \quad (2-14)$$

onde  $\nabla_t$  é o vetor *score* em relação a  $f_t$ . Para densidades preditivas duas vezes diferenciáveis em relação a  $f_t$  e sob a hipótese de que é possível mudar a ordem de derivação e integração, a matriz de informação de Fisher pode ser obtida tanto pela esperança do produto externo do vetor *score*, quanto através da esperança da derivada segunda do logaritmo da densidade preditiva em relação a  $f_t$ . Sua inversa pode ser denotada por

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{t/t-1}^{-1} &= \left[ E_{t-1}(\tilde{\nabla}_t \tilde{\nabla}_t') \right]^{-1} \\ &= \dot{h}_t I_{t/t-1}^{-1} \dot{h}_t' \end{aligned} \quad (2-15)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{t/t-1}^{-1} &= \left( J_{t/t-1} \dot{h}_t' \right)' \left( J_{t/t-1} \dot{h}_t \right) \\ &= \tilde{J}_{t/t-1}' \tilde{J}_{t/t-1} \end{aligned} \quad (2-16)$$

sendo  $I_{t/t-1}^{-1} = J_{t/t-1}' J_{t/t-1}$  a inversa da matriz de informação obtida em relação a  $f_t$ .

Quando a matriz de ponderação do vetor *score* é a inversa da matriz de informação, o passo de atualização do parâmetro variante no tempo é dado por  $\tilde{s}_t = \dot{h}_t s_t$ . Já quando a ponderação é feita pela raiz quadrada da inversa da informação de Fisher,  $\tilde{s}_t = s_t$ . Vê-se que a escolha da raiz quadrada da informação mantém a mesma estrutura do passo de atualização do vetor variante no tempo, sendo também uma diferença martingal com variância unitária.

Utilizando os resultados acima, em um modelo GARCH com inovações

normais, cujo parâmetro variante no tempo é dado por  $f_t = \sigma_t^2$ , poder-se-ia preferir a parametrização  $\tilde{f}_t = \log(\sigma_t^2)$ . Logo, para o modelo equivalente  $y_t = \exp(\tilde{f}_t) \epsilon_t$ , a equalização de atualização de  $\tilde{f}_t$  passa a ser

$$\tilde{f}_{t+1} = w + A_1[\exp(-\tilde{f}_t)y_t^2 - 1] + B_1\tilde{f}_t. \quad (2-17)$$

Os resultados desta seção são de suma importância para os modelos trabalhados ao longo desta dissertação. A utilização de novas parametrizações permite passar de problemas de otimização restrita para irrestrita em várias ocasiões, sendo também útil para acomodar o próprio espaço paramétrico dos parâmetros variantes no tempo para os diferentes modelos da classe GAS derivados.

### 2.3

#### Modelos de Componentes Não Observáveis com Uma Única Fonte de Erros

As séries temporais possuem características como tendência, sazonalidade e ciclo que não são diretamente observadas a partir dos dados. Por exemplo, os ciclos econômicos medem as flutuações na atividade econômica, e por isso são de particular interesse para os economistas. Contudo estes ciclos não são vistos diretamente através das séries macroeconômicas.

Os modelos de componentes não observáveis (CNO), ou modelos estruturais, capturam as características das séries assumindo que suas componentes seguem processos estocásticos. A junção das componentes forma o processo gerador da série. Sabe-se que estas componentes são processos estocásticos com fontes de erro próprias, e portanto, os modelos descritos são guiados por parâmetros, segundo a classificação proposta por Cox (1981). No exemplo a seguir será apresentado um modelo guiado por observações análogo aos modelos de componentes não observáveis.

Para uma série temporal univariada  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , um sinal univariado  $\psi_t$  pode ser extraído. Creal *et al.* (2013) propõe que  $\psi_t$  seja decomposto em um vetor de fatores  $f_t = (f_{1,t}, f_{2,t}, \dots, f_{r,t})'$ , cuja especificação é dada pela Eq.(2-2). Por exemplo, o sinal  $\psi_t$  pode ser visto como a soma dos fatores

$$\psi_t = f_{1,t} + f_{2,t} + \dots + f_{r,t}. \quad (2-18)$$

Considere um processo GAS com densidade preditiva  $p(y_t/\psi_t, F_t, \theta)$  normal, e equação do modelo  $y_t = \psi_t + \epsilon_t$ ,  $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ . Para  $r = 2$ ,

onde o primeiro fator é uma componente de tendência (passeio aleatório adicionado de uma taxa constante de crescimento) e o segundo fator um processo autorregressivo de ordem 2, possivelmente com propriedades cíclicas, obtêm-se um processo GAS(1,2), com equação de atualização dada por

$$f_{t+1} = \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} s_t + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \phi_1 \end{bmatrix} f_t + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \phi_2 \end{bmatrix} f_{t-1} \quad (2-19)$$

O coeficiente  $w$  é a taxa de crescimento constante do fator  $f_{1,t}$ , que expressa a tendência, e os coeficientes autorregressivos  $\phi_1$  e  $\phi_2$  devem impor estacionariedade ao fator  $f_{2,t}$ . Utilizando para a ponderação do vetor *score* a inversa da informação de Fisher, segue que

$$s_t = y_t - \psi_t = \epsilon_t \quad (2-20)$$

Logo,  $s_t$  pode ser interpretado como a única fonte de erros do processo. Os coeficientes  $w, a_1, a_2, \phi_1, \phi_2$  do modelo são componentes do vetor de parâmetros estáticos  $\theta$ , estimados por máxima verossimilhança. As estimativas de  $f_t$  resultam em uma decomposição de  $y_t$  em tendência, ciclo e componente irregular, esta última expressa por  $s_t$ .

Os modelos GAS de componentes são equivalentes aos modelos com uma única fonte de erro, de Ord *et al.* (1997). Nos capítulos posteriores, estes serão estendidos para as distribuições preditivas Gama e Beta, respectivamente.

A presente decomposição pode ser vista como uma alternativa aos modelos de componentes não observáveis de Watson (1986), com os quais se obtém a decomposição de séries macroeconômicas em componentes de tendência e ciclo. O modelo de decomposição em ciclo e tendência para  $y_t = f_{1,t} + f_{2,t}$  é dado por

$$f_{1,t+1} = w + f_{1,t} + a_1 \xi_{1,t+1}, \quad \xi_{1,t+1} \sim N(0, 1) \quad (2-21)$$

$$f_{1,t+1} = \phi_1 f_{2,t} + \phi_2 f_{2,t-1} + a_2 \xi_{2,t+1}, \quad \xi_{2,t+1} \sim N(0, 1) \quad (2-22)$$

com  $\xi_{1,t}$  e  $\xi_{2,t}$  independentes.



### 3

## Modelos GAS Univariados Gama

A vazão de um rio apresenta comportamento sazonal, típico dos processos climáticos. Nas estações chuvosas, o volume de água é maior, ocorrendo o contrário nos períodos de seca. Os reservatórios de acumulação são construídos para minimizar os problemas causados pela redução de potência nos períodos de seca. No contexto brasileiro, o planejamento do setor energético de curto e de longo prazo depende de boas previsões das vazões, para a utilização adequada dos reservatórios, na tomada de decisões quanto aos processos de precificação da energia, etc.

Para a modelagem da vazão mensal do Rio Paraibuna (MG), foram derivados modelos GAS univariados com distribuição preditiva gama. Há vários exemplos de uso da distribuição gama em aplicações relacionadas à hidrologia, como Mathier *et al.* (1992), onde a distribuição é aplicada à análise de frequência da duração e severidade do déficit de água, e Yue *et al.* (2001), com um estudo baseado em dados reais e simulados de inundações usando distribuições gama bivariadas.

Para a classe GAS de modelos, a escolha da distribuição preditiva, bem como dos parâmetros variantes no tempo, deve refletir as características do processo estocástico que se deseja modelar. A distribuição gama possui um suporte adequado à modelagem dos processos de vazão, e as características sazonais serão capturadas de duas formas distintas.

Uma nova parametrização foi utilizada, de tal forma que um dos parâmetros é a própria média da distribuição, tornando mais natural a interpretação dos parâmetros variantes no tempo do modelo construído. A seguir, serão apresentadas as propriedades gerais da distribuição gama, bem como as derivações necessárias para a construção do modelo GAS. Portanto, seja

$$y \sim Gama(\alpha, \alpha^{-1}\lambda). \quad (3-1)$$

Logo, a densidade de  $y$  é

$$p(y/\alpha, \lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(\alpha^{-1}\lambda)^\alpha} y^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\alpha}{\lambda}y\right), \quad y > 0, \quad \alpha, \lambda > 0, \quad (3-2)$$

sendo a média e a variância dadas, respectivamente, por

$$E(Y) = \lambda \quad e \quad V(Y) = \frac{\lambda^2}{\alpha}. \quad (3-3)$$

As derivadas em relação aos parâmetros  $\alpha$  e  $\lambda$  são:

$$\frac{\partial \ln f(Y)}{\partial \alpha} = \left( \ln Y - \frac{Y}{\lambda} \right) + [\ln \alpha - \psi_1(\alpha) - \ln \lambda + 1] \quad (3-4)$$

$$\frac{\partial \ln f(Y)}{\partial \lambda} = \frac{\alpha}{\lambda} \left( \frac{Y}{\lambda} - 1 \right) \quad (3-5)$$

A matriz de informação de Fisher pode ser obtida facilmente a partir das derivadas segundas em relação aos parâmetros da distribuição, sendo dada por:

$$I(\alpha, \lambda) = \begin{bmatrix} \psi_2(\alpha) - 1/\alpha & 0 \\ 0 & \alpha/\lambda^2 \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

As equações apresentadas para o caso estático permitem a construção de modelos GAS gama com ambos os parâmetros variantes no tempo, embora nas construções posteriores apenas o parâmetro de escala foi adotado como dinâmico.

A seguir são apresentados modelos com duas dinâmicas distintas. Na primeira, a evolução do parâmetro variante no tempo será descrito por uma equação do tipo SARIMA. Na segunda, a evolução do parâmetro variante no tempo será separada em componentes de tendência e sazonalidade.

### 3.1

#### Modelo GAS Gama com Evolução do Tipo SARIMA

Para este modelo, apenas o parâmetro de escala foi adotado como variante no tempo, decisão esta motivada pela parcimônia. Uma construção natural é feita tomando  $f_t = \lambda_t$ . Dessa forma, o parâmetro que evolui no tempo é a própria média condicional do processo, facilitando sua interpretação. Contudo,

com esta escolha de  $f_t$ , os parâmetros estáticos da equação Eq.(2-2), a qual descreve o mecanismo de evolução de  $f_t$ , deveriam ser estimados com restrições, devido à não negatividade da média da gama.

Outra questão de interesse é a inclusão de variáveis exógenas no modelo. Para a série de vazão que se deseja modelar, há evidências de que a inclusão de certas variáveis exógenas melhoram tanto o desempenho do modelo dentro da amostra, quanto sua capacidade preditiva fora da amostra (Amaral, 2011). Ao incluir variáveis exógenas de modo aditivo ou multiplicativo na média condicional, as mesmas restrições de não negatividade deveriam ser impostas.

Utilizando a ideia sugerida em Creal *et al.* (2013) para a densidade gama, e incorporando variáveis exógenas diretamente na expressão da média condicional, a parametrização escolhida para a construção do modelo de interesse é obtida fazendo

$$\begin{aligned} f_t &= h(\lambda_t) \\ &= - \left[ \sum_{k=1}^r \phi_k g(x_{t-k+1}) \right] + \ln \lambda_t \end{aligned} \quad (3-7)$$

ou analogamente

$$\lambda_t = \exp \left[ f_t + \sum_{k=1}^r \phi_k g(x_{t-k+1}) \right] \quad (3-8)$$

onde  $f_t$  é o parâmetro variante no tempo com evolução dada pela especificação GAS,  $x_t$  um vetor de variáveis exógenas,  $g(\cdot)$  uma função real e  $\phi_k$  um vetor de coeficientes incorporado a  $\theta$ , o qual contém os parâmetros estáticos do modelo. Para simplificar a notação, as fórmulas posteriores desta seção serão expressas em relação a  $\lambda_t$ , embora o parâmetro variante no tempo seja  $f_t$ . Logo,  $\lambda_t$  deve ser interpretado à luz da Eq.(3-8).

A derivada da função  $h(\lambda_t)$  em relação a  $\lambda_t$  é dada por  $\dot{h}_t = 1/\lambda_t$ . Visto que o vetor *score* e a matriz de informação de Fisher para o parâmetro  $\lambda_t$  podem ser obtidos diretamente das equações (3-4) e (3-6), com as respectivas adaptações para o caso dinâmico, e utilizando  $\dot{h}_t$  e os resultados da Seção 2.2.4, segue que o vetor *score* e a matriz de informação são dados por

$$\nabla_t = \alpha \left( \frac{y_t}{\lambda_t} - 1 \right), \quad I_{t/t-1} = \alpha \quad (3-9)$$

O modelo gama dentro do arcabouço GAS é completamente especificado pela densidade condicional  $p(y_t/f_t, F_t, \theta)$ , pelo vetor *score* ponderado  $s_t$  e pela equação de atualização de  $f_t$ . Estas equações são dadas, respectivamente, por:

$$(y_t/f_t, F_t, \theta) \sim \text{Gama}(\alpha, \alpha^{-1}\lambda_t) \quad (3-10)$$

$$s_t = \alpha^d \left( \frac{y_t}{\lambda_t} - 1 \right), \quad d = 0, 1/2 \text{ ou } 1 \quad (3-11)$$

$$f_{t+1} = w + \sum_{i=1}^p A_i s_{t-i+1} + \sum_{j=1}^q B_j f_{t-j+1} \quad (3-12)$$

Neste modelo,  $d$  assume os valores 0, 1/2 ou 1 quando a ponderação do vetor *score* é feita pela inversa informação de Fischer, pela raiz quadrada da inversa da informação de Fischer ou pela matriz identidade, neste caso o escalar 1, respectivamente. Especificamente para este modelo, as características são preservadas qualquer seja a escolha de ponderação do vetor *score*, haja vista que a informação de Fisher é constante, e assim, os *scores* ponderados irão diferir apenas por uma constante de proporcionalidade.

A sazonalidade é obtida fazendo não nulos os coeficientes  $A_i$  e  $B_j$ , para  $i, j$  múltiplos de 12 e em suas proximidades, à semelhança dos modelos SARIMA. O modelo sem variáveis exógenas é um caso particular do modelo apresentado, o qual é obtido fixando  $\phi_k = 0$ ,  $\forall k = 1, 2, \dots$  em (3-10) e (3-11).

Uma característica desejável deste modelo é que os resíduos condicionais de Pearson são proporcionais ao vetor *score* ponderado  $s_t$ , haja vista que

$$\begin{aligned} r_{t/t-1} &= \frac{[y_t - E_{t-1}(y_t)]}{\sqrt{V_{t-1}(y_t)}} \\ &= \alpha^{1/2} \left( \frac{y_t}{\lambda_t} - 1 \right) \end{aligned} \quad (3-13)$$

Desse modo, vê-se que  $r_{t/t-1} \propto s_t$ , valendo a igualdade quando a raiz quadrada da inversa da informação de Fisher é escolhida para ponderação do vetor *score*.

Conclui-se que para este modelo em específico, o próprio *score* ponderado poderia ser utilizado para a obtenção de diagnósticos do modelo.

Para o modelo GAS apresentado,  $s_t$  (e também  $r_{t/t-1}$ ) é uma diferença martingal com variância condicional constante, qualquer seja o mecanismo de ponderação adotado. Em particular, sabe-se que para qualquer modelo GAS,  $s_t$  é uma diferença martingal com variância unitária quando a raiz quadrada da informação de Fisher é escolhida como mecanismo de ponderação do *score*.

A título de ilustração, a densidade condicional (3-10) poderia ser construída fazendo-se  $y_t = \lambda_t u_t$ , onde os  $u_t$ 's são variáveis aleatórias iid com distribuição

$$u_t \sim Gama(\alpha, \alpha^{-1}) \quad (3-14)$$

de onde segue que  $E(u_t) = 1$  e  $V(u_t) = \alpha^{-1}$ . A menos da transformação definida entre  $\lambda_t$  e  $f_t$ ,  $y_t$  define é um modelo de erro multiplicativo (Engle, 2002). Sob a correta especificação, a sequência

$$\begin{aligned} u_t' &= (u_t - 1) \\ &= \left( \frac{y_t}{\lambda_t} - 1 \right) \end{aligned} \quad (3-15)$$

é um ruído branco, visto que é um processo iid com média nula e variância constante, podendo ser também utilizada para a avaliação do modelo. Novamente, a sequência  $u_t'$  coincide com o vetor *score* ponderado, a menos de uma constante de proporcionalidade.

### 3.1.1

#### Estudo de Simulação

Para investigação das propriedades estatísticas dos estimadores de máxima verossimilhança do modelo GAS para a distribuição gama, especificado pelas equações (3-10)-(3-12), foi realizado um estudo de simulação de Monte Carlo. Considerou-se uma versão simplificada do modelo, sem variáveis exógenas na média condicional, e com ordens  $p = q = 1$  na equação de evolução do parâmetro variante no tempo  $f_t$ , a qual é descrita por

$$f_{t+1} = w + A s_t + B f_t \quad (3-16)$$

O vetor *score* foi ponderado pela inversa da informação de Fisher, ou seja, fazendo-se  $d = 0$  na Eq.(3-11), visto que nas aplicações reais esta escolha foi a que apresentou melhor resultado do ponto de vista da capacidade preditiva dentro e fora da amostra.

As séries simuladas foram construídas com os valores  $w = 1.62$ ,  $A = 0.75$ ,  $B = 0.61$  e  $\alpha = 10.24$  para os parâmetros. Estes valores foram obtidos a partir de estimativas deste modelo para a série do Rio Paraibuna, para a qual o modelo foi proposto. Embora as séries simuladas não reflitam a sazonalidade da série real, a magnitude dos processos simulados está de acordo com esta.

Foram considerados os tamanhos de amostra  $T = 50, 100, 400$  e  $1000$ . Analisando estes tamanhos comparativamente às séries mensais, é possível verificar o comportamento dos estimadores para séries pequenas (Cerca de 4 e 8 anos), com a mesma extensão da série real (403 observações mensais, ou seja, cerca de 33 anos) e para séries longas. A título de ilustração, na Figura 3.1 constam 4 cenários simulados para cada tamanho de amostra.

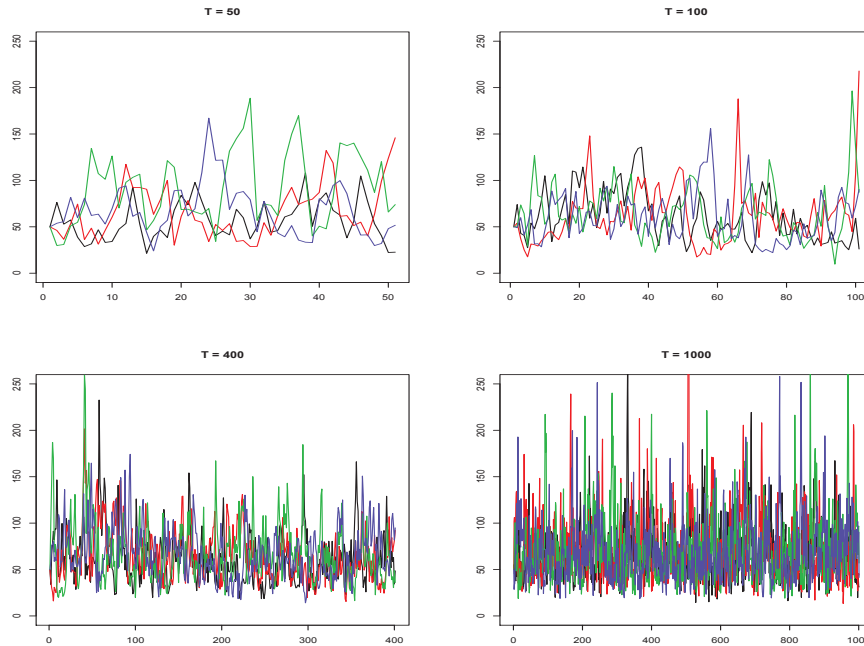


Figura 3.1: Exemplos de séries simuladas do processo GAS(1,1) com densidade gama para os tamanhos de amostra  $T = 50, 100, 400$  e  $1000$ .

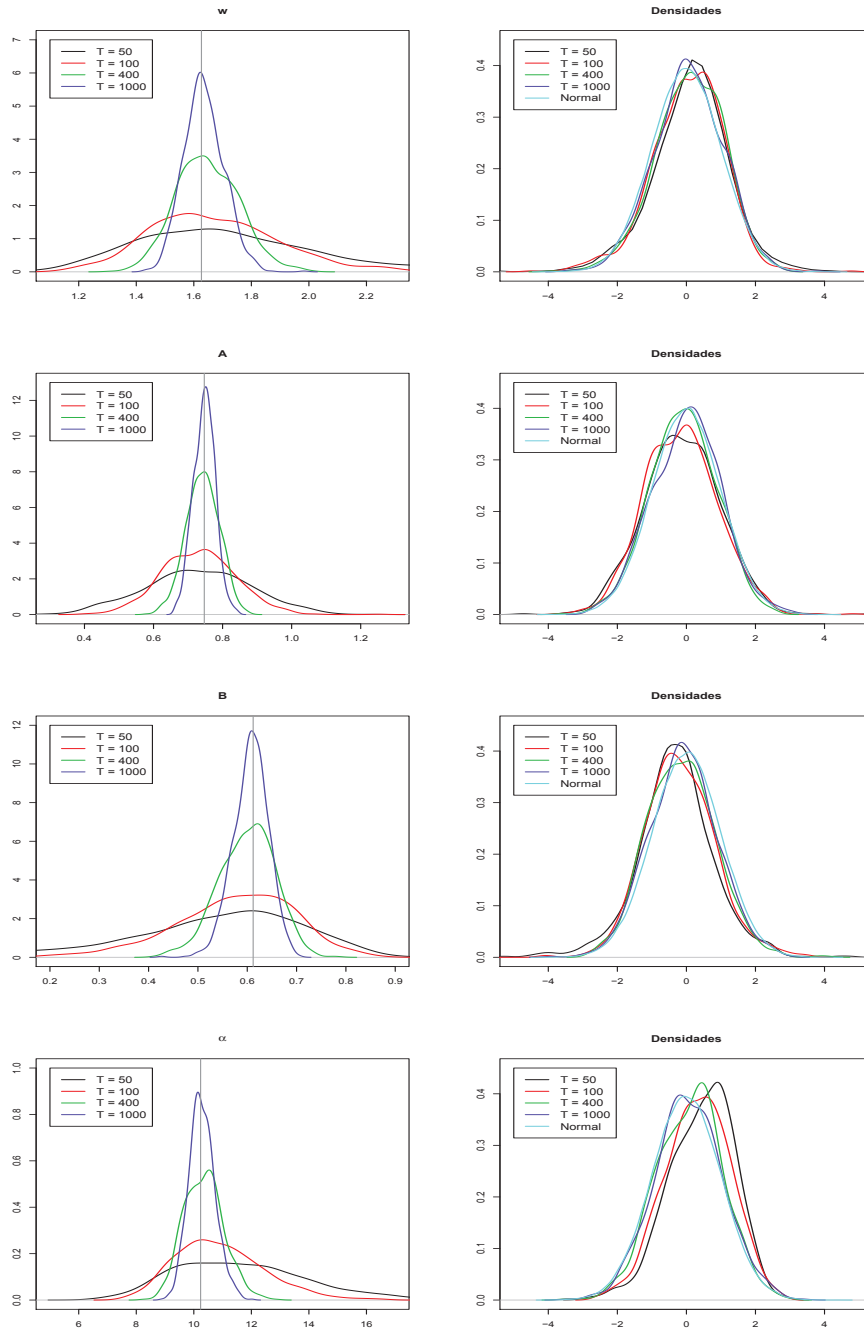


Figura 3.2: Densidades das estimativas dos parâmetros  $w$ ,  $A$ ,  $B$  e  $\alpha$  para processos simulados GAS(1,1) com distribuição gama, e densidades das respectivas estatísticas  $t$ .

Gerou-se 1000 trajetórias para cada um dos tamanhos especificados. Foram obtidas as estimativas de máxima verossimilhança, bem como as estatísticas  $t$ , calculadas com base na derivada segunda avaliada no ótimo <sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Deve-se salientar que um pequeno número de estatísticas  $t$  não foram obtidas para o tamanho de amostra  $T = 50$  (precisamente 8 entre as 4000 calculadas), visto que a matriz de derivadas segundas avaliada no ótimo apresentou inversa com valores negativos na diagonal, não sendo assim possível obter o erro padrão, e conseqüentemente a estatística.

A partir da Figura 3.2, verifica-se que à medida que crescem os tamanhos de amostra, as estimativas convergem para seus valores reais. É possível observar uma assimetria à direita nas densidades correspondentes ao parâmetro  $\alpha$  para pequenos tamanhos de amostra. À semelhança das conclusões obtidas em Creal *et al.* (2013) para outros modelos da classe GAS, a partir das densidades das estatísticas  $t$ , o uso da aproximação normal é adequado mesmo para tamanhos de amostra pequenos. Os maiores descolamentos em relação à normal foram vistos para o parâmetro  $\alpha$ .

### 3.2

#### Modelo GAS Gama de Componentes Não Observáveis

No Capítulo 2 foi apresentado um modelo de componentes não observáveis com densidade preditiva normal e mecanismo de atualização dado pela especificação GAS. Conforme mencionado, é também possível construir modelos de componentes não observáveis com outras densidades preditivas, e em particular, a distribuição gama.

Nos modelos de componentes não observáveis, sejam estes gaussianos ou não-gaussianos, as equações que descrevem a evolução das componentes possuem fontes de erros próprias. Estas fontes de erros são descritas por ruídos brancos mutuamente independentes entre si (Durbin e Koopman, 2001), em geral gaussianos. Em Ord *et al.* (1997) foram derivados alguns modelos em espaço de estados não-lineares com uma única fonte de erros, cuja estimação é feita com base nos métodos de suavização exponencial.

Na presente seção será descrito um modelo GAS com densidade preditiva gama, cuja média condicional será decomposta em uma componente de tendência e outra de sazonalidade. Este modelo é análogo aos modelos com uma única fonte de erros introduzidos por Ord *et al.* (1997), sendo esta fonte de erros o vetor *score* ponderado, o qual pode ser visto como um ruído branco fraco, visto que possui média nula e é serialmente não-correlacionado.

A densidade preditiva adotada será aquela descrita no início do capítulo, com o parâmetro variante no tempo dado por  $f_t = \ln(\lambda_t)$ . Dessa forma, a média condicional do processo será dada por  $\lambda_t = \exp(f_t)$ , e a equação do vetor *score* ponderado é dada pela Eq.(3-11). Nesta construção, a inclusão de variáveis exógenas é feita na equação de evolução do parâmetro variante no tempo  $f_t$ , sendo possível separar o efeito da tendência, da sazonalidade e de variáveis externas ao modelo.

A completa especificação do modelo de componentes não observáveis com distribuição gama é feita através das equações:



$$(y_t/f_t, F_t, \theta) \sim \text{Gama}(\alpha, \alpha^{-1} \exp f_t) \quad (3-17)$$

$$s_t = \alpha^d \left( \frac{y_t}{\lambda_t} - 1 \right), \quad d = 0, 1/2 \text{ ou } 1 \quad (3-18)$$

$$f_{t+1} = w + f_{1,t+1} + f_{2,t+1} + f_{3,t+1} + \sum_{k=1}^r \phi_k g(x_{t-k+1}) \quad (3-19)$$

$$f_{1,t+1} = f_{1,t} + a_1 s_t \quad (3-20)$$

$$f_{2,t+1} = - \sum_{i=1}^{11} f_{2,t+1-i} + a_2 s_t \quad (3-21)$$

$$f_{3,t+1} = \phi f_{3,t} + a_3 s_t \quad (3-22)$$

Novamente,  $\lambda_t$  deve ser interpretado como  $\exp(f_t)$ , e  $d$  assume valores 0, 1/2 ou 1 quando a ponderação do vetor *score* é feita pela inversa informação de Fischer, pela raiz quadrada da inversa da informação de Fischer ou pela matriz identidade. As componentes de tendência e sazonalidade são especificadas por  $f_{1,t}$  e  $f_{2,t}$ , respectivamente. A componente  $f_{3,t}$  é uma componente autoregressiva, utilizada nas aplicações para capturar dinâmicas de curto prazo, restantes nos resíduos. Este modelo pode ser entendido como um GAS(1,11). Como nos modelos estruturais, a tendência do processo deve ser vista como a soma das componentes do tipo passeio aleatório e autoregressiva, ou seja,  $f_{1,t}$  e  $f_{3,t}$ .

Modelos mais gerais, com tendência linear local e componentes cíclicas podem ser construídos sem maiores complicações. Contudo, para o processo que se deseja modelar (série de vazão mensal), o modelo apresentado é adequado.

## 4

**Modelos GAS Univariados Beta**

A distribuição beta é normalmente utilizada para a modelagem de taxas e proporções, bem como de processos definidos entre dois limites reais. A versão mais conhecida da distribuição possui como suporte o intervalo  $[0, 1]$ , a qual pode ser estendida a um intervalo  $[a, b]$  qualquer. Em da-Silva *et al.* (2011), a distribuição foi utilizada em um modelo dinâmico bayesiano para a análise da taxa mensal de desemprego para seis capitais e regiões metropolitanas do Brasil, com dados da Pesquisa Mensal de Emprego, do IBGE. Em Casarin *et al.* (2012), um modelo beta autoregressivo foi aplicado à modelagem das taxas de desemprego e de capacidade produtiva de séries americanas.

As séries de fator de capacidade eólico são definidas no domínio  $[0, 100]$ , de onde surge a motivação para a utilização da distribuição beta. Na prática, esse limite superior dificilmente é atingido. Em alguns estados brasileiros, como Rio Grande do Norte e Ceará, o fator de capacidade médio anual fica em torno de 40%, valor bem acima da média mundial de 27%. Os modelos propostos neste capítulo serão desenvolvidos com base na distribuição beta com suporte  $[0, k]$ , e nas aplicações será adotado o limitante superior  $k = 70$ .

Dessa forma, seja

$$Y \sim \text{Beta}(\beta, \alpha), \quad y \in [0, k]. \quad (4-1)$$

A função densidade de  $Y$  é dada por

$$p(y/\beta, \alpha) = \frac{1}{k^{\beta+\alpha-1}} \frac{\Gamma(\beta+\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} y^{\beta-1} (k-y)^{\alpha-1}, \quad y \in [0, k], \quad \beta, \alpha > 0, \quad (4-2)$$

cuja média e variância são

$$E(Y) = k \frac{\beta}{\beta + \alpha} \quad e \quad V(Y) = k^2 \frac{\beta\alpha}{(\beta + \alpha)^2(\beta + \alpha + 1)}. \quad (4-3)$$

Há outra parametrização da distribuição beta onde um dos parâmetros é a própria média condicional da distribuição, formulação esta inclusive mais elegante à aplicação pretendida. Contudo, a adoção desta parametrização na modelagem da série de fator de capacidade apresentou resultados piores do que os obtidos com a parametrização dada, e por isso serão omitidos.

Para o logaritmo da densidade apresentada, as derivadas em relação aos parâmetros  $\beta$  e  $\alpha$  são:

$$\frac{\partial \ln f(Y)}{\partial \beta} = \ln Y - [\ln k + \psi_1(\beta) - \psi_1(\beta + \alpha)] \quad (4-4)$$

$$\frac{\partial \ln f(Y)}{\partial \alpha} = \ln(k - Y) - [\ln k + \psi_1(\alpha) - \psi_1(\beta + \alpha)] \quad (4-5)$$

A matriz de informação de Fisher pode ser obtida a partir das derivadas segundas em relação aos parâmetros da distribuição, visto que estas resultam em constantes.

$$I(\alpha, \lambda) = \begin{bmatrix} \psi_2(\beta) - \psi_2(\beta + \alpha) & -\psi_2(\beta + \alpha) \\ -\psi_2(\beta + \alpha) & \psi_2(\alpha) - \psi_2(\beta + \alpha) \end{bmatrix} \quad (4-6)$$

À semelhança dos modelos apresentados no capítulo anterior, serão derivados modelos GAS com distribuição preditiva beta e equações de evolução dos parâmetros variantes no tempo do tipo SARIMA e em componentes de tendência e sazonalidade.

#### 4.1

##### Modelo GAS Beta com Evolução do Tipo SARIMA

A Tabela 2.1 apresenta as equações do vetor *score* e da inversa da informação de Fisher para a distribuição beta com ambos os parâmetros de forma variando. Em aplicações reais, sobretudo a dados sazonais, haveriam muitos coeficientes a estimar na equação de evolução dos parâmetros variantes do modelo, haja vista que na Eq.(2-2) as quantidades  $A'_i$ s e  $B'_j$ s são matrizes de dimensão  $2 \times 2$  para este caso.

Com vistas à parcimônia do modelo proposto, apenas o parâmetro  $\beta$  da distribuição foi tomado como variando no tempo. Por construção, qualquer momento condicional obtido a partir deste modelo será variante no tempo, e não apenas a média.

Foi utilizada a mesma estratégia apresentada no capítulo anterior para evitar a estimação com restrições na equação de atualização dos parâmetros, e também no intuito de incluir variáveis exógenas na expressão da média condicional do modelo, utilizada para a obtenção das previsões. A parametrização adotada foi a seguinte:

$$\begin{aligned} f_t &= h(\beta_t) \\ &= - \left[ \sum_{k=1}^r \phi_k g(x_{t-k+1}) \right] + \ln \beta_t \end{aligned} \quad (4-7)$$

equivalente a

$$\beta_t = \exp \left[ f_t + \sum_{k=1}^r \phi_k g(x_{t-k+1}) \right] \quad (4-8)$$

sendo  $f_t$  o parâmetro variante no tempo com evolução dada pela especificação GAS,  $x_t$  um vetor de variáveis exógenas,  $g(\cdot)$  uma função real e  $\phi_k$  um vetor de coeficientes. As demais fórmulas desta seção serão expressas em relação a  $\beta_t$ . Contudo, o parâmetro variante no tempo é  $f_t$ , e dessa forma,  $\beta_t$  deve ser lido como a parte à direita da igualdade na Eq.(4-8).

A média condicional do processo, utilizada para o cômputo das previsões um passo a frente do modelo, é dada por

$$E(y_t/f_t, F_t, \theta) = k \frac{\beta_t}{\beta_t + \alpha} \quad (4-9)$$

Na descrição da distribuição beta e de suas propriedades, o vetor *score* e a matriz de informação de Fisher para o parâmetro  $\beta_t$  foram derivados, com a diferença que as equações não estão indexadas pelo tempo. Visto que se deseja obter estes respectivos elementos em relação ao parâmetro  $f_t$ , e usando que a derivada de  $h(\beta_t)$  em relação a  $\beta_t$  é dada por  $\dot{h}_t = 1/\beta_t$ , segue da Seção 2.2.4 que

$$\nabla_t = \beta_t \{ \ln y_t - [\ln k + \psi_1(\beta_t) - \psi_1(\beta_t + \alpha)] \} \quad (4-10)$$

$$I_{t/t-1} = \beta_t^2 [\psi_2(\beta_t) - \psi_2(\beta_t + \alpha)]$$

As equações (4-11) - (4-13) especificam completamente o modelo GAS para a distribuição preditiva beta definida no intervalo  $[0, k]$ . Para deixar a notação menos carregada, as equações do modelo serão apresentadas em termos de  $\beta_t$ .

$$(y_t/f_t, F_t, \theta) \sim \text{Beta}(\beta_t, \alpha) \quad (4-11)$$

$$s_t = \frac{\ln y_t - [\ln k + \psi_1(\beta_t) - \psi_2(\beta_t + \alpha)]}{\beta_t^{1-2d} [\psi_2(\beta_t) - \psi_2(\beta_t + \alpha)]^{1-d}}, \quad d = 0, 1/2 \text{ ou } 1 \quad (4-12)$$

$$f_{t+1} = w + \sum_{i=1}^p A_i s_{t-i+1} + \sum_{j=1}^q B_j f_{t-j+1} \quad (4-13)$$

Novamente  $d$  assume os valores 0, 1/2 ou 1 quando a ponderação do *score* é feita pela inversa informação de Fischer, pela raiz quadrada da inversa da informação de Fischer ou pela matriz identidade, respectivamente. A notação  $\psi_k(x)$  é referente à função  $\partial^k \ln \Gamma(x) / \partial x^k$ , implementada na maioria dos softwares estatísticos e matemáticos.

Para esta estrutura de evolução dos parâmetros, a sazonalidade é incorporada ao modelo tomando como não nulos os coeficientes  $A_i$  e  $B_j$ , para  $i, j$  múltiplos de 12 e em suas proximidades. O modelo sem variáveis exógenas é um caso particular deste apresentado, e é obtido fixando  $\phi_k = 0$ ,  $\forall k = 1, 2, \dots$

Ao contrário dos modelos gama, não há um resíduo natural para este modelo, há menos da construção obtida quando  $d = 1/2$ , para a qual  $s_t$  pode ser visto como um ruído branco fraco. Contudo, na aplicação deste modelo à série de fator de capacidade, os melhores resultados (tanto em relação à otimização da verossimilhança, quanto em relação às medidas de desempenho do modelo e diagnósticos) foram obtidos fixando  $d = 0$ . Dessa forma, os diagnósticos do modelo serão realizados com base nos resíduos quantílicos, apresentados no sexto capítulo.

## 4.1.1

## Estudo de Simulação

Um experimento de simulação análogo ao apresentado foi realizado para o modelo GAS com distribuição beta. A equação de atualização dos parâmetros variantes no tempo de ordens  $p = q = 1$  foi adotada, e como limite superior da distribuição foi fixado  $k = 70$ , valor utilizado nas aplicações reais. O vetor *score* foi ponderado pela inversa da informação de Fisher, ou seja, fazendo-se  $d = 0$  na Eq.(4-12).

As simulações foram construídas com os valores  $w = 0.61$ ,  $A = 1.01$ ,  $B = 0.72$  e  $\alpha = 7.04$  para os parâmetros. Estes valores foram obtidos a partir de estimativas deste modelo para a série de fator de capacidade eólico, para a qual o modelo foi construído, e dessa forma, as séries simuladas refletem a magnitude do processo real que será modelado. Foram novamente considerados os tamanhos de amostra  $T = 50, 100, 400$  e  $1000$ , e para cada tamanho de amostra foram geradas 1000 trajetórias.

Os resultados da Figura 4.2 indicam a convergência das estimativas para seus valores reais à medida que crescem os tamanhos de amostra, o que já foi observado nas simulações do modelo gama. O gráfico com as estatísticas  $t$  referentes ao parâmetro  $\alpha$  indicam um pequeno vício em seu estimador de máxima verossimilhança, o qual decresce com o aumento do tamanho da amostra, indicando que este é assintoticamente não viciado.

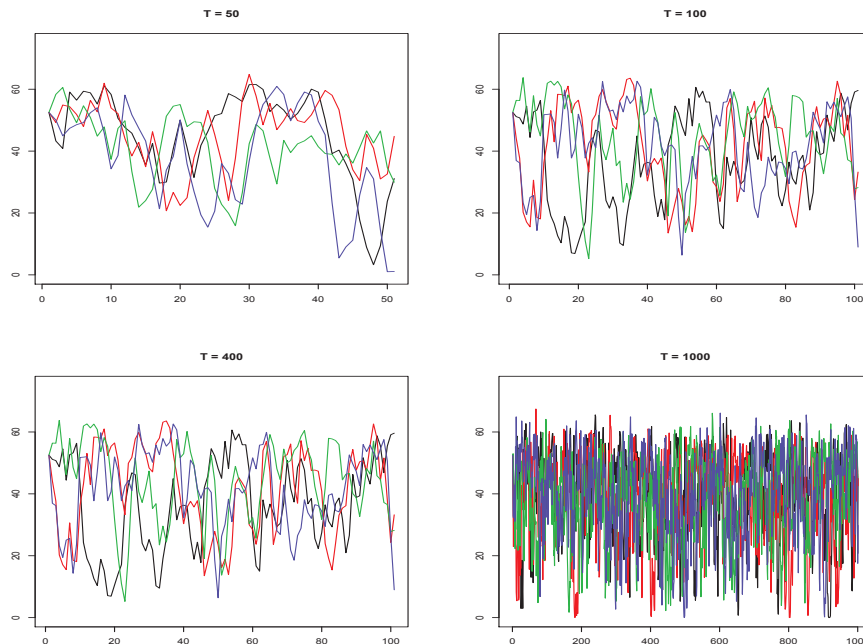


Figura 4.1: Exemplos de séries simuladas do processo GAS(1,1) com densidade beta para cada tamanho de amostra em estudo, ou seja,  $T=50, 100, 400$  e  $1000$ .

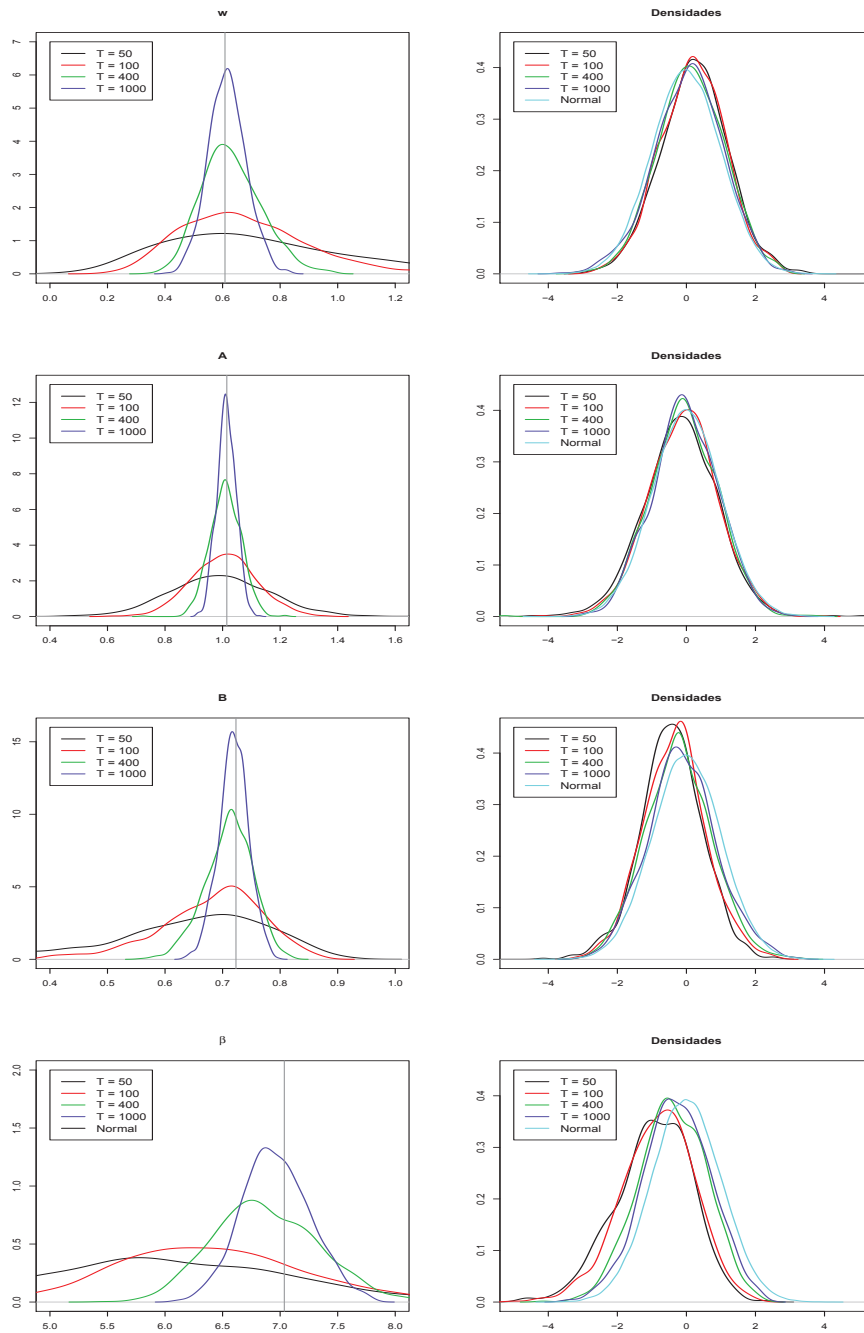


Figura 4.2: Densidades das estimativas dos parâmetros  $w$ ,  $A$ ,  $B$  e  $\alpha$  para processos simulados  $\text{GAS}(1,1)$  com distribuição beta, e densidades das respectivas estatísticas  $t$ .

## 4.2

### Modelo GAS Beta de Componentes Não Observáveis

Nesta seção será apresentado o modelo GAS para a distribuição beta com evolução do parâmetro variante no tempo decomposta em componentes não observáveis de tendência e sazonalidade. O modelo é também semelhante àqueles com uma única fonte de erros, descritos na literatura de suavização

exponencial. A fonte de erros será o vetor *score* ponderado pela raiz da inversa da informação de Fisher, que é um ruído branco fraco.

A distribuição beta é aquela descrita no início do capítulo, com o parâmetro variante no tempo dado por  $f_t = \ln(\beta_t)$ . Dessa forma, a média condicional do processo será dada pela Eq.(4-9). As variáveis exógenas para este modelo são incluídas diretamente na equação de evolução do parâmetro variante no tempo  $f_t$ . A equação do vetor *score* ponderado é a Eq.(4-12) com  $\beta_t = \exp(f_t)$ . Novamente, todos os momentos de ordem condicionais do modelo serão variantes no tempo.

A completa especificação do modelo de componentes não observáveis com distribuição beta se dá através das equações:

$$(y_t/f_t, F_t, \theta) \sim \text{Beta}(\beta_t, \alpha) \quad (4-14)$$

$$s_t = \frac{\ln y_t - [\ln k + \psi_1(\beta_t) - \psi_2(\beta_t + \alpha)]}{\beta_t^{1-2d} [\psi_2(\beta_t) - \psi_2(\beta_t + \alpha)]^{1-d}}, \quad d = 0, 1/2 \text{ ou } 1 \quad (4-15)$$

$$f_{t+1} = w + f_{1,t+1} + f_{2,t+1} + \sum_{k=1}^r \phi_k g(x_{t-k+1}) \quad (4-16)$$

$$f_{1,t+1} = f_{1,t} + a_1 s_t \quad (4-17)$$

$$f_{2,t+1} = - \sum_{i=1}^{11} f_{2,t+1-i} + a_2 s_t \quad (4-18)$$

$$f_{3,t+1} = \phi f_{3,t} + a_3 s_t \quad (4-19)$$

A escolha da ponderação do *score* faz com que  $d$  assumira os valores 0, 1/2 ou 1 de modo análogo àquele apresentado na seção anterior, para o modelo com evolução do tipo SARIMA. As componentes de tendência e sazonalidade são especificadas por  $f_{1,t}$  e  $f_{2,t}$ , e a componentes autoregressiva por  $f_{3,t}$ . Conforme



já ressaltado, a tendência do processo deve ser entendida como a soma das componentes do tipo passeio aleatório e autoregressiva, isto é,  $f_{1,t}$  e  $f_{3,t}$ . O modelo apresentado é um GAS(1,11), visto que as defasagens no fator de sazonalidade chegam até esta ordem. Como no modelo gama correspondente, a inclusão de outras componentes pode ser feita sem maiores dificuldades.

## 5

### Modelos GAS Bivariado Gama-Beta

Nos dois capítulos anteriores, foram apresentados modelos GAS com as distribuições gama e beta, propostos para a modelagem da série de vazão do Rio Paraibuna e da série de vento de uma usina não revelada da Região Nordeste, respectivamente.

Uma distribuição bivariada com distribuições marginais gama e beta foi derivada por Nadarajah (2009) para a modelagem de dados de secas de forma estática, ou seja, em um dado instante de tempo. Para a modelagem conjunta das séries de vazão e vento, propôs-se uma alteração nesta distribuição, sobretudo para que a nova distribuição refletisse a complementaridade sazonal entre os processos (traduzida em forma de dependência/correlação negativa). A nova distribuição foi então utilizada dentro do arcabouço GAS.

A base para a construção da distribuição bivariada, que será posteriormente utilizada na derivação de um modelo GAS, vem do fato de que uma distribuição beta pode ser expressa como  $Y/(X + Y)$ , onde  $Y$  e  $X$  são distribuições gama independentes e com o mesmo parâmetro de escala. A partir desta abordagem foi possível derivar um modelo compatibilizando as parametrizações já adotadas para os modelos univariados.

Sejam portanto

$$X \sim Gama(\alpha, \lambda/\alpha), \quad Y \sim Gama(\beta, \lambda/\alpha). \quad (5-1)$$

Define-se as variáveis aleatórias  $U$  e  $V$  da seguinte forma:

$$U = X, \quad V = k \frac{Y}{X + Y} \quad (5-2)$$

onde  $k$  é uma constante dada. Dessa forma, segue que  $U$  possui distribuição gama e  $V$  possui distribuição beta, esta última definida no intervalo  $[0, k]$ . A densidade conjunta das variáveis aleatórias  $U$  e  $V$  é dada por:

$$p(u, v) = \frac{ku^{\alpha+\beta-1}v^{\beta-1}(k-v)^{-(\beta+1)} \exp\{-k\alpha u/[(k-u)\lambda]\}}{(\lambda/\alpha)^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}, u > 0, v \in [0, k] \quad (5-3)$$

Por simplificação, a densidade acima será denotada por *Gama – Beta*( $\alpha, \beta, \lambda$ ).

Da densidade (5-3), obtêm-se a expressão geral para os momentos conjuntos das variáveis aleatórias  $U$  e  $V$ , dada por:

$$E(U^m V^n) = k^n (\lambda/\alpha)^m \frac{\Gamma(\alpha + \beta + m)\Gamma(\alpha + m)\Gamma(\beta + n)}{\Gamma(\alpha + \beta + m + n)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \quad (5-4)$$

*Prova.*

$$E(U^m V^n) = \int_0^k \int_0^\infty \frac{ku^{\alpha+\beta+m-1}v^{\beta+n-1}(k-v)^{-(\beta+1)} e^{-k\alpha u/[(k-u)\lambda]}}{(\lambda/\alpha)^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} dudv \quad (5-5)$$

Utilizando a propriedade abaixo da função gama, (5-5) se reduz à (5-7).

$$\int_0^\infty z^{\alpha-1} \exp(-\beta z^\gamma) dz = \frac{\Gamma(\alpha/\gamma)}{\gamma\beta^{\alpha/\gamma}} \quad (5-6)$$

$$E(U^m V^n) = k^{1-(\alpha+\beta+m)} \frac{\lambda^m}{\alpha^m} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + m)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^k v^{(\beta+n)-1} (1-v)^{(\alpha+m)-1} dv \quad (5-7)$$

A partir da transformação  $z = v/k$ , e posteriormente usando a definição da função beta, (5-7) resulta em (5-4), o que completa a demonstração. ■

Em particular, têm-se que:

$$E(U) = \lambda, \quad V(U) = \lambda^2/\alpha \quad (5-8)$$

$$E(V) = k \frac{\beta}{\alpha + \beta}, \quad V(V) = k^2 \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \quad (5-9)$$

$$Cov(U, V) = -\frac{k\lambda\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)}, \quad Corr(U, V) = -\left(1 + \frac{\alpha + 1}{\beta}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (5-10)$$

## 5.1

### Vetor Score e Informação de Fisher

Para utilizar arcabouço GAS com a presente distribuição, é necessário derivar o vetor *score*, bem como a matriz de informação de Fisher. O logaritmo da densidade bivariada em estudo é dado por:

$$\begin{aligned}\ln f(U, V) = & \ln k - (\alpha + \beta) \ln \lambda + (\alpha + \beta) \ln \alpha - \ln \Gamma(\alpha) - \ln \Gamma(\beta) + \\ & (\alpha + \beta - 1) \ln U + (\beta - 1) \ln V - (\beta + 1) \ln(k - V) - \\ & k\alpha U / [(k - V)\lambda]\end{aligned}$$

As derivadas em relação aos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\lambda$  são:

$$\frac{\partial \ln f(U, V)}{\partial \alpha} = \ln(U) - \frac{k}{\lambda} \left( \frac{U}{k - V} \right) - \ln \lambda + \ln \alpha + 1 + \frac{\beta}{\alpha} - \psi_1(\alpha) \quad (5-11)$$

$$\frac{\partial \ln f(U, V)}{\partial \beta} = \ln \left( \frac{UV}{k - V} \right) + \ln \alpha - \ln \lambda - \psi_1(\beta) \quad (5-12)$$

$$\frac{\partial \ln f(U, V)}{\partial \lambda} = \frac{k\alpha}{\lambda^2} \left( \frac{U}{k - V} \right) - \frac{\alpha + \beta}{\lambda} \quad (5-13)$$

Para a obtenção da matriz de informação de Fisher associada à densidade  $f(u, v)$ , deve-se computar as derivadas segundas desta densidade, que são calculadas como:

$$\frac{\partial^2 \ln f(U, V)}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha^2} - \psi_2(\alpha) \quad (5-14)$$

$$\frac{\partial^2 \ln f(U, V)}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{1}{\alpha} \quad (5-15)$$

$$\frac{\partial^2 \ln f(U, V)}{\partial \alpha \partial \lambda} = \frac{k}{\lambda^2} \left( \frac{U}{k - V} \right) - \frac{1}{\lambda} \quad (5-16)$$

$$\frac{\partial^2 \ln f(U, V)}{\partial \beta^2} = -\psi_2(\beta) \quad (5-17)$$

$$\frac{\partial^2 \ln f(U, V)}{\partial \beta \partial \lambda} = -\frac{1}{\lambda} \quad (5-18)$$

$$\frac{\partial^2 \ln f(U, V)}{\partial \lambda^2} = -\frac{2k\alpha}{\lambda^3} \left( \frac{U}{k - V} \right) + \frac{\alpha + \beta}{\lambda^2} \quad (5-19)$$

Das equações acima, apenas (5-16) e (5-19) não são constantes. A esperança destas pode ser obtida através do resultado:

$$E \left( \frac{U}{k - V} \right) = \frac{1}{k} E(X + Y) = \frac{(\alpha + \beta)\lambda}{\alpha k} \quad (5-20)$$

o qual segue diretamente da definição das variáveis  $U$  e  $V$ . Dessa forma, a matriz de informação de Fisher é dada por:

$$I(\alpha, \beta, \lambda) = \begin{bmatrix} \psi_2(\alpha) + (\beta - \alpha)/\alpha^2 & -1/\alpha & -\beta/(\alpha\lambda) \\ -1/\alpha & \psi_2(\beta) & 1/\lambda \\ -\beta/(\alpha\lambda) & 1/\lambda & (\alpha + \beta/\lambda^2) \end{bmatrix} \quad (5-21)$$

## 5.2

### Modelo GAS Gama-Beta com evolução SARIMA

Um modelo GAS com a distribuição bivariada Gama-Beta poderia ser construído tomando como dinâmicos os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\lambda$  da distribuição, juntamente com o vetor *score* e a matriz de informação de Fisher dados na seção anterior. Para integrar as abordagens adotadas nos modelos univariados, é suficiente tomar funções dos parâmetros  $\beta$  e  $\lambda$  como variantes no tempo, ou seja,  $\beta_t$  e  $\lambda_t$ . Com esta escolha, ambas as distribuições condicionais marginais, utilizadas para a previsão dos processos de vazão e vento, já possuem momentos condicionais variantes no tempo. É possível também monitorar a covariância e a correlação entre as variáveis de modo dinâmico, haja vista que estas expressões dependem de parâmetros dinâmicos, dada a estrutura indicada.

Se uma função do parâmetro  $\alpha$  fosse também tomada como variante no tempo, o modelo apresentaria maior flexibilidade. Contudo, por uma questão

de parcimônia, foram adotados apenas dois dos parâmetros como variantes no tempo, haja vista que o número de parâmetros estáticos do modelo GAS cresce muito à medida que se incluem mais parâmetros variantes.

Caso os parâmetros  $\beta$  e  $\lambda$  fossem os parâmetros variantes no tempo do modelo GAS, as equações dadas na seção anterior se aplicariam diretamente, com as devidas adaptações para o caso dinâmico. Porém, por razões já apresentadas, foram adotadas novas parametrizações, dadas por:

$$\begin{aligned} f_t &= h(\beta_t, \lambda_t) \\ &= \left( \ln \beta_t - \sum_{k=1}^{r_1} \phi_{1k} g_1(x_{t-k+1}), \ln \lambda_t - \sum_{k=1}^{r_2} \phi_{2k} g_2(x_{t-k+1}) \right)' \end{aligned} \quad (5-22)$$

ou analogamente

$$(\beta_t, \lambda_t) = \left( \exp \left[ f_{1,t} + \sum_{k=1}^{r_1} \phi_{1k} g_1(x_{t-k+1}) \right], \exp \left[ f_{2,t} + \sum_{k=1}^{r_2} \phi_{2k} g_2(x_{t-k+1}) \right] \right)' \quad (5-23)$$

onde  $f_t = (f_{1t}, f_{2t})'$  é o vetor de parâmetros variantes no tempo com evolução dada pela especificação GAS,  $x_t$  é um vetor de variáveis exógenas,  $g_i(\cdot)$  são funções reais e  $\phi_{ik}$  são vetores de coeficientes, para  $i = 1, 2$ , estes últimos incorporados ao vetor de parâmetros estáticos  $\theta$ .

A matriz com as derivadas de  $f_t = h(\beta_t, \lambda_t)$  em relação ao vetor  $(\beta_t, \lambda_t)'$  é dada por:

$$\dot{h}_t = \begin{bmatrix} 1/\beta_t & 0 \\ 0 & 1/\lambda_t \end{bmatrix} \quad (5-24)$$

A partir de  $\dot{h}_t$ , junto aos resultados de mudança de parametrização para os modelos GAS (vide Seção 2.2.4), o vetor *score* e a matriz de informação para a parametrização adotada são dados, respectivamente, por:

$$\nabla_t = \begin{bmatrix} \beta_t \{ \ln [u_t v_t / (k - v_t)] - \ln \lambda_t + \ln \alpha - \psi_1(\beta_t) \} \\ k \alpha u_t / [(k - v_t) \lambda_t] - (\alpha + \beta_t) \end{bmatrix} \quad (5-25)$$

$$I_{t/t-1} = \begin{bmatrix} \beta_t^2 \psi_2(\beta_t) & \beta_t \\ \beta_t & (\alpha + \beta_t) \end{bmatrix} \quad (5-26)$$

onde  $\beta_t$  e  $\lambda_t$  devem ser interpretados a partir da Eq.(5-23). Dessa forma, as equações (5-27) - (5-29) especificam completamente o modelo bivariado GAS com densidade Gama-Beta.

$$((u_t, v_t)/f_t, F_t, \theta) \sim \text{Gama} - \text{Beta}(\alpha, \beta_t, \lambda_t) \quad (5-27)$$

$$s_t = I_{t/t-1}^{d-1} \nabla_t, \quad d = 0, 1/2 \text{ ou } 1 \quad (5-28)$$

$$f_{t+1} = w + \sum_{i=1}^p A_i s_{t-i+1} + \sum_{j=1}^q B_j f_{t-j+1} \quad (5-29)$$

No modelo acima,  $d$  assume valores 0, 1/2 ou 1 quando a ponderação do vetor *score* é feita pela inversa informação de Fischer, pela raiz quadrada da inversa da informação de Fischer ou pela matriz identidade. Na modelagem conjunta das séries de vento e vazão, optou-se por  $d = 0$ .

Para fins de ilustração, um modelo GAS(1,1) sem variáveis exógenas na média condicional das marginais possui equação de evolução dos parâmetros variantes no tempo dada por

$$\begin{pmatrix} f_{1,t+1} \\ f_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{1,t} \\ s_{2,t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{1,t} \\ f_{2,t} \end{pmatrix} \quad (5-30)$$

onde

$$\begin{aligned} s_t &= (s_{1,t}, s_{2,t})' \\ &= \begin{pmatrix} \beta_t^2 \psi_2(\beta_t) & \beta_t \\ \beta_t & (\alpha + \beta_t) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \beta_t \left[ \ln \left( \frac{u_t v_t}{k - v_t} \right) - \ln \lambda_t + \ln \alpha - \psi_1(\beta_t) \right] \\ \frac{k \alpha u_t}{(k - v_t) \lambda_t} - (\alpha + \beta_t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5-31)$$

Nas equações (5-30) e (5-31), os parâmetros  $\beta_t$  e  $\lambda_t$  devem ser interpretados como  $\exp(f_{1,t})$  e  $\exp(f_{2,t})$ , respectivamente.

## 5.2.1

## Estudo de Simulação

Nesta seção será apresentado um breve de experimento de simulação, o qual teve por finalidade verificar o funcionamento da estimação no modelo bivariado. Foram simuladas 500 séries de um processo GAS(1,1), à semelhança do descrito na última seção, com as matrizes da equação de evolução  $A_1$  e  $B_1$  cheias. Os valores utilizados para a simulação, indicados na primeira linha da Tabela 5.1, foram obtidos a partir de estimativas do processo bivariado GAS(1,1) para as séries de vazão e fator de capacidade reais para as quais o modelo foi proposto, apresentadas no capítulo de resultados.

Tabela 5.1: Valores reais e estatísticas das estimativas dos parâmetros de um modelo GAS(1,1) para a densidade gama-beta com base em 500 simulações.

Valores e Estatísticas	Parâmetros								
	$w_1$	$w_2$	$a_{11}$	$a_{22}$	$b_{11}$	$b_{12}$	$b_{21}$	$b_{22}$	$\alpha$
Valores reais	-0,95	4,34	0,40	0,80	1,08	0,28	-0,77	0,49	6,14
Mediana	-0,96	4,36	0,39	0,79	1,08	0,28	-0,77	0,49	6,19
Média	-0,95	4,36	0,39	0,79	1,08	0,28	-0,77	0,49	6,21
Erro padrão	0,21	0,33	0,04	0,04	0,04	0,03	0,06	0,04	0,33

Vê-se que a média e a mediana das estimativas dos parâmetros para as séries simuladas estão bem próximas de seus valores reais, com um pequeno descolamento para o parâmetro de forma  $\alpha$ . O erro padrão das estimativas é também pequeno para todos os parâmetros, sendo que comparativamente à estimativa da média, aquele para o coeficiente  $w_1$  é o maior. Em linhas gerais, a estimação para os processos simulados funcionou bem, o que fornece segurança para o uso em modelagens. Nas aplicações, foram utilizadas estruturas de evolução mais complicadas, implicando assim numa maior dificuldade relacionada ao processo de estimação. Nestas, foi utilizado um número maior de matrizes na equação de atualização dos parâmetros, principalmente pela sazonalidade dos processos modelados.



## 6

### Aspectos da Implementação e Avaliação dos Modelos GAS

No presente capítulo serão descritos de forma breve algumas heurísticas e definições empregadas na implementação e avaliação dos modelos GAS para os dados de vazão e vento. A forma de obtenção das estimativas de máxima verossimilhança é apresentada, principalmente no que se refere à inicialização dos parâmetros variantes no tempo e do vetor *score*. São também mostrados os resíduos quantílicos, os quais possuem propriedades mais adequadas para modelos não-lineares e não-gaussianos, bem como o algoritmo utilizado para o cômputo das previsões fora da amostra. Por fim, são apresentadas as medidas utilizadas na avaliação dos modelos.

#### 6.1

##### Estimação por Máxima Verossimilhança

Para a avaliação da verossimilhança e estimação dos parâmetros nos modelos GAS, observa-se a mesma dificuldade encontrada nos modelos SARIMA, de Box e Jenkins. Qualquer seja a equação de evolução apresentada (do tipo SARIMA, ou em componentes não observáveis), a série  $y_1, y_2, \dots, y_n$  não pode ser utilizada diretamente na atualização dos parâmetros variantes no tempo, em virtude da dificuldade quanto à inicialização destas equações. Não há até o momento desenvolvimentos acerca da função de verossimilhança exata para processos GAS( $p, q$ ), sobretudo para o caso onde  $p, q > 0$ . Em Creal *et al.* (2013), a maior parte das aplicações são realizadas com modelos GAS(1,1). Em alguns códigos em Ox e MATLAB disponibilizados pelos autores, as condições iniciais  $f_0$  e  $s_0$  foram incorporadas ao vetor de parâmetros, e estimados junto aos componentes de  $\theta$  por máxima verossimilhança. Contudo, essa abordagem aumenta exacerbadamente o número de parâmetros dos modelos sugeridos neste trabalho (GAS(12,12) e GAS(1,11)), e por isso é inviável.

Para cada uma das distribuições apresentadas (Gama, Beta e Gama-Beta), os parâmetros foram inicialmente estimados de modo estático por máxima verossimilhança, separadamente para cada mês. A partir destas estimativas, e das transformações que definem a relação entre os parâmetros das distribuições e os parâmetros variantes no tempo ( $f_t = \ln \lambda_t$ , por exemplo),

foram obtidos os valores iniciais  $f_{0,1-q} = \{f_0, f_{-1}, \dots, f_{1-q}\}$ .

Para os modelos com evolução SARIMA, os valores de  $f_{0,1-q}$  juntamente com as 12 primeiras observações das séries (com os valores da série e de  $f_t$ , para  $t = 0, -1, \dots, 1-q$ , correspondendo aos respectivos meses) foram utilizados para o cômputo das condições iniciais  $s_{0,1-p} = \{s_0, s_{-1}, \dots, s_{1-p}\}$ . Isto porque nas aplicações descritas no Capítulo 7 para esta estrutura de evolução, adotou-se  $p = q = 12$ , e pelo fato de  $s_t$  ser função das quantidades  $y_t$  e  $f_t$ . Dessa forma, a verossimilhança e os resíduos foram computados a partir da 13ª observação.

Já nos modelos com evolução em componentes não observáveis, além de  $f_{0,1-q}$ , é necessário um único valor  $s_0$  para a inicialização da equação de evolução. Para fazer a estimação com base nos mesmos dados utilizados pelos modelos com a estrutura de evolução SARIMA, a verossimilhança foi calculada novamente a partir da 13ª observação. O valor  $s_0$  foi obtido com o mesmo procedimento apresentado no parágrafo anterior. Visto que a estrutura de evolução de  $f_t$  neste caso é separada em componentes de tendência, sazonalidade e autoregressiva, a heurística utilizada é baseada na proposta de Hyndman, *et al.* (2008), empregada no ajuste de modelos gaussianos com fonte única de erros. O valor inicial da componente de tendência foi tomado como a média das quantidades em  $f_{0,1-q}$ , e a sazonalidade obtida como a diferença de cada componente deste conjunto para sua média. A componente autoregressiva foi inicializada como 0.

Tendo em vista que os valores iniciais foram obtidos por um método *ad hoc*, a estimação realizada nesta dissertação pode ser vista como um procedimento de máxima verossimilhança condicional. É importante salientar que para ambas as estruturas de evolução, fez-se a tentativa de empregar a heurística apresentada do final para o início da série para a geração dos valores iniciais, visto que as estimativas de  $f_t$  e  $s_t$  tendem a ser menos afetadas pelas condições iniciais para valores grandes de  $t$ . Contudo, não houve ganhos em relação à verossimilhança, bem como às medidas de ajustamento e diagnóstico, e por isso a heurística inicial foi mantida. Outra tentativa foi simplesmente assumir que os valores utilizados para a inicialização do vetor  $f_{0,1-q}$  eram corretos (implicando assim em elementos de  $s_{0,1-p}$  iguais a 0), mas o resultado final foi pior que o obtido pelo método indicado.

É importante ressaltar que a estimação foi integralmente realizada com o uso do *software* R. As heurísticas empregadas, bem como as estimativas de máxima verossimilhança condicional de todos os modelos aplicados às séries de vazão e vento (vide Capítulo 7) estão reportadas no Apêndice B.

## 6.2

### Diagnósticos do Modelo

Quanto à avaliação e diagnóstico de modelos não-lineares e não-gaussianos de uma forma geral, em particular dos modelos GAS, sabe-se que não há uma definição única acerca dos resíduos. Normalmente são utilizados os resíduos de deviance ou os resíduos condicionais de Pearson para avaliação. Em Kalliovirta (2009) há uma descrição detalhada dos resíduos quantílicos, os quais são aplicáveis em situações onde os resíduos convencionais não são adequados. Dentro do arcabouço apresentado, os resíduos quantílicos teóricos são definidos por

$$R_{t,\theta} = \Phi^{-1}(F(y_t/f_t, F_t, \theta)) \quad (6-1)$$

onde  $\Phi^{-1}(\cdot)$  é a F.D. inversa da distribuição normal e  $F(y_t/f_t, F_t, \theta)$  é a F.D. condicional do processo. Os resíduos quantílicos observados  $r_{t,\hat{\theta}}$  são obtidos substituindo  $\theta$  por  $\hat{\theta}$  na expressão de  $R_{t,\theta}$ . Testes de normalidade, autocorrelação serial e heterocedasticidade condicional foram desenvolvidos com base nestes resíduos, sob as hipóteses de correta especificação do modelo e estimação consistente do vetor de parâmetros  $\theta$  (Kalliovirta, 2009). A maior dificuldade na implementação dos testes baseados nos resíduos quantílicos para modelos da classe GAS ocorre no cálculo de relações recursivas para o cálculo de derivadas em relação ao vetor  $\theta$ . O mesmo problema foi descrito na Seção 2.2.3, na derivação de relações recursivas para o cálculo do gradiente da verossimilhança com respeito a  $\theta$ . Nesta ocasião, métodos numéricos baseados em diferenças finitas foram sugeridos para a avaliação das derivadas da verossimilhança em relação a  $\theta$ .

Pela dificuldade de aplicação dos testes mencionados, os testes convencionais foram utilizados, ou seja, Jarque-Bera para a avaliação da normalidade dos resíduos e Ljung-Box para autocorrelação serial e heterocedasticidade condicional, os quais podem ser tomados como indicativos do ajuste do modelo. No caso do teste de Ljung-Box, foram consideradas as autocorrelações até o *lag* 24 para os modelos univariados e até o *lag* 30 para o modelo bivariado. A correção pelo número de parâmetros estimados no modelo não foi feita, primeiramente por seu uso ser aproximado, e em segundo lugar pelo fato da distribuição assintótica da estatística do teste não ser conhecida para modelos com variáveis exógenas, caso das aplicações desenvolvidas (Johntson e diNardo, 1997).

Empiricamente, o comportamento observado entre os resíduos quantílicos

e os resíduos condicionais de Pearson foi bastante semelhante quanto aos correlogramas, e aos testes de autocorrelação serial. Os resíduos quantílicos se mostraram também mais rigorosos em relação aos resíduos de Pearson, por exemplo, apresentando p-valores menores para os testes de normalidade e de Ljung-Box nos resíduos e em seus quadrados. Nos correlogramas, para os *lags* com autocorrelações significativas, essas apresentavam maiores magnitudes nos correlogramas obtidos com os resíduos quantílicos. Para a avaliação da magnitude dos resíduos, cujo principal intuito é a posterior realização de intervenções, os resíduos quantílicos são mais interessantes, pois sob a correta especificação estes possuem distribuição normal, e assim valores de referência (quantis) bem definidos.

### 6.3

#### Previsibilidade Fora da Amostra

Como na maior parte dos modelos não-lineares e não-gaussianos, os modelos GAS desenvolvidos nos três capítulos anteriores não possuem expressões analíticas para o cálculo de  $\hat{y}_{t+k/t}$ , para  $k \geq 2$ . A título de ilustração, considere a distribuição condicional 2-passos à frente, dada por:

$$p(y_{t+2}/f_t, F_t, \theta) = \int_0^\infty p(y_{t+2}/f_{t+1}, F_{t+1}, \theta)p(y_{t+1}/f_t, F_t, \theta)dy_{t+1} \quad (6-2)$$

Embora as distribuições condicionais que aparecem no interior da integral da Eq.(6-2) sejam conhecidas, por construção, pode-se mostrar que a integral não possui solução analítica em nenhum dos modelos apresentados (No caso do modelo bivariado, a expressão acima teria uma integral dupla). A previsão 2-passos à frente, definida a partir de (6-2), também não possui uma expressão fechada. As previsões  $k$ -passos à frente, para  $k = 1, 2, \dots, K$ , foram obtidas por simulação de Monte Carlo. Segue a descrição do algoritmo utilizado:

1. Considere os conjuntos de informação correspondentes ao *score* ponderado e ao parâmetro variante no tempo para a parte final da série  $s_{t,p} = \{s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-p}\}$  e  $f_{t,q} = \{f_t, f_{t-1}, \dots, f_{t-q}\}$ , bem como as estimativas de máxima verossimilhança de  $\theta$ .
2. Para  $k \geq 1$ , gere de modo independente  $m$  trajetórias, cada uma com extensão  $K$ , segundo os passos abaixo:

- (a) Simule um valor  $y_{t+k}$  da distribuição preditiva do modelo utilizando as estimativas  $\hat{\theta}$  de  $\theta$ , e os conjuntos de informação  $s_{t+k-1,p}$  e  $f_{t+k-1,q}$ ;
  - (b) Atualize  $f_{t+k}$  e  $s_{t+k}$ ;
  - (c) Retorne ao passo (a), até que  $k = K$ ;
3. Para cada instante  $k = 1, 2, \dots, K$ , obtenha a média das  $m$  trajetórias simuladas, as quais denotarão as previsões  $\hat{y}_{t+k/t}$ . Os quantis de ordem  $(\alpha/2)$  e  $(1 - \alpha/2)$  destas trajetórias serão os limites do intervalo de confiança com  $\alpha\%$  de confiança.

## 6.4

### Medidas de Avaliação

Nas modelagens realizadas com as séries de vazão e vento, as últimas 24 observações foram separadas para a avaliação da capacidade preditiva dos modelos fora da amostra.

As medidas utilizadas foram o RMSE (*Root Mean Square Error*), MAE (*Mean Absolute Error*), MASE (*Mean Absolute Scaled Error*), sMAPE (*Symmetric Mean Absolute Percent Error*), e o pseudo  $R^2$ . Para a avaliação dentro da amostra, estas são definidas por:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\hat{y}_{t/t-1} - y_t)^2} \quad (6-3)$$

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |\hat{y}_{t/t-1} - y_t| \quad (6-4)$$

$$MASE = \left( \frac{n-1}{n} \right) \frac{\sum_{t=1}^n |\hat{y}_{t/t-1} - y_t|}{\sum_{t=2}^n |y_t - y_{t-1}|} \quad (6-5)$$

$$sMAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|\hat{y}_{t/t-1} - y_t|}{(\hat{y}_{t/t-1} + y_t)} \quad (6-6)$$

$$pseudo R^2 = [corr(y_{t/t-1}, y_t)]^2 \quad (6-7)$$

Para o cômputo das previsões fora da amostra, deve-se substituir  $\hat{y}_{t/t-1}$  por  $\hat{y}_{n+k/n}$ , com os somatórios variando em  $k$ , para  $k = 1, 2, \dots, K$ , onde  $K$  é o total de observações utilizadas para a avaliação do modelo. O sMAPE foi escolhido em detrimento ao MAPE, por ponderar de forma mais correta os erros de previsão, eliminando assim o efeito indesejado de se ter uma medida muito elevada em virtude apenas de valores pequenos da série em relação ao erro de previsão. Além disso, o sMAPE possui limites inferior e superior bem definidos para séries positivas (0 e 100, respectivamente). O MASE, proposto por Hyndman e Koehler (2006), é uma medida que compara a capacidade do modelo com a capacidade *in-sample* de um *benchmark*, no caso o passeio aleatório. Esta medida é bastante favorável em diversas situações, sendo bem definida quando os erros de previsão ou a própria série é nula para alguns instantes, e útil para a comparação entre séries, por ser livre de escala.

Nas aplicações, foram também obtidas as previsões fora da amostra 1-passo à frente, para o monitoramento da capacidade do modelo no curto prazo. Neste caso, as previsões foram atualizadas pelas respectivas observações reais.

## 7

**Aplicações às Séries de Vazão e Vento**

Visto que a produção de energia eólica se encontra em estágio inicial no cenário brasileiro, há dificuldade para a obtenção de séries com dados de ventos. Para as aplicações tratadas nesta dissertação, uma série mensal de fator de capacidade eólico de uma usina não divulgada do Nordeste foi utilizada.

O fator de capacidade de um determinado local é definido como a razão entre a energia produzida durante certo período e a energia produzida caso o aerogerador operasse em sua potência nominal durante 100% do tempo. Esta medida é influenciada por algumas condições naturais, como o perfil de velocidade do vento e a turbulência do local. A turbulência deve ser baixa, visto que afeta a conversão de energia, principalmente devido às variações na direção do vento. Avanços tecnológicos de forma geral também podem aumentar o fator de capacidade médio, garantindo melhor aproveitamento eólico e redução de perdas de energia.

A série de vazão afluyente média mensal ( $m^3/s$ ) de um posto de avaliação localizado em Paraibuna no Sudeste foi também utilizada. A série apresenta características sazonais marcantes, com maiores valores nos primeiros meses do ano, e menores médias mensais no terceiro trimestre.

Os dados coletados têm a finalidade de avaliar a instalação de uma PCH (Pequena Central Hidrelétrica) neste ponto do rio, e como uma PCH não possui reservatório, toda a vazão afluyente será turbinada. Sendo assim, a energia produzida pode ser obtida pela multiplicação entre a vazão afluyente e um coeficiente de produtividade da PCH. (Amaral, 2011, p. 96).

No Brasil, há predominância da geração hidrelétrica, e por isso a estabilização sazonal da oferta de energia se torna um grande desafio, em virtude das flutuações sazonais dos regimes hidrológicos, por vezes de grande amplitude.

Em Amarante *et al.* (2001), aponta-se para a viabilidade quanto à estabilização sazonal da oferta de energia pela complementaridade entre os regimes eólicos e hidráulicos, a partir de estudos de caso das regiões Sul/Sudeste e Nordeste. Ainda, uma análise da complementaridade entre a vazão do rio São

Francisco e a energia eólica dos locais com maior potencial eólico do Nordeste foi feita em Marinho e Aquino (2009). O estudo mostra por meio de dados simulados que a operação integrada de usinas eólicas e hidrelétricas pode adicionar uma estabilidade sazonal ao sistema elétrico, pelo aumento do fator de capacidade das usinas hidrelétricas existentes. Para a região Nordeste, a questão ganha uma importância maior, pois a água poupada na geração de energia pode ser destinada a outros usos.

Existe ainda a complementaridade geográfica das áreas propícias à instalação de parques eólicos e das usinas hidrelétricas do país. Os locais com grande potencial eólico estão situados ao longo da costa, sobretudo na região Nordeste. Quanto às usinas hidrelétricas, a maior parte fica no interior do país, com concentração na região Sudeste. Para as séries em estudo, esta complementaridade fica evidenciada pela análise descritiva (Seção 7.1).

Neste contexto, os modelos da classe GAS propostos anteriormente foram aplicados às séries de vazão e fator de capacidade, tanto de forma univariada, quanto bivariada. Com os modelos univariados, obteve-se uma ideia acerca da previsibilidade de ambas as séries, bem como de algumas características, como a tendência e sazonalidade destas. Já com a modelagem conjunta dos processos de vento e vazão, torna-se possível gerar cenários integrados que permitam considerar o despacho das usinas eólicas no planejamento energético.

Em Amaral (2011) foram realizados estudos com as mesmas séries de vento e vazão usadas neste trabalho através de um modelo VARX bivariado. A inclusão de séries de energia natural afluente (ENA) por subsistema como variáveis exógenas indicou melhora do desempenho em relação à previsibilidade, dentro e fora da amostra. Estas séries representam as médias mensais em  $MW/(m^3/s)$ , e funcionam como variáveis de controle, permitindo a captura das variações na produção mensal de energia acumulada de cada subsistema, bem como o aperfeiçoamento das especificações do modelo.

De igual modo, as séries de ENA foram utilizadas como variáveis exógenas nos modelos GAS desenvolvidos nesta dissertação. Empiricamente, a inclusão dessas variáveis resultou em resíduos com propriedades mais adequadas e com menores magnitudes. Quando as séries de ENA foram utilizadas como variáveis exógenas, estas foram divididas por 1000, e no caso do uso da função logaritmo, esta foi aplicada às séries de ENA divididas por 100. Em ambos os casos, o intuito foi trazer as variáveis exógenas à mesma ordem de grandeza das séries modeladas, evitando assim problemas relacionados à otimização.

Para os modelos apresentados neste capítulo, se fará menção ao modelo sem variáveis exógenas como **Modelo 1**, ao modelo com as séries de ENA como variáveis exógenas como **Modelo 2**, e aos modelos com o logaritmo das



séries de ENA como exógenas como **Modelo 3**. Além disso, a expressão vento será utilizada enquanto sinônimo de fator de capacidade eólico.

As estimativas de máxima verossimilhança dos modelos, bem como os erros-padrão associados às estimativas, estão reportadas no Apêndice B.

## 7.1 Análise Descritiva

As séries em estudo correspondem às médias mensais no período entre janeiro de 1976 e julho de 2009, totalizando 403 registros. A partir das Figuras 7.1 e 7.2 é possível verificar o comportamento geral das séries de vazão e vento.

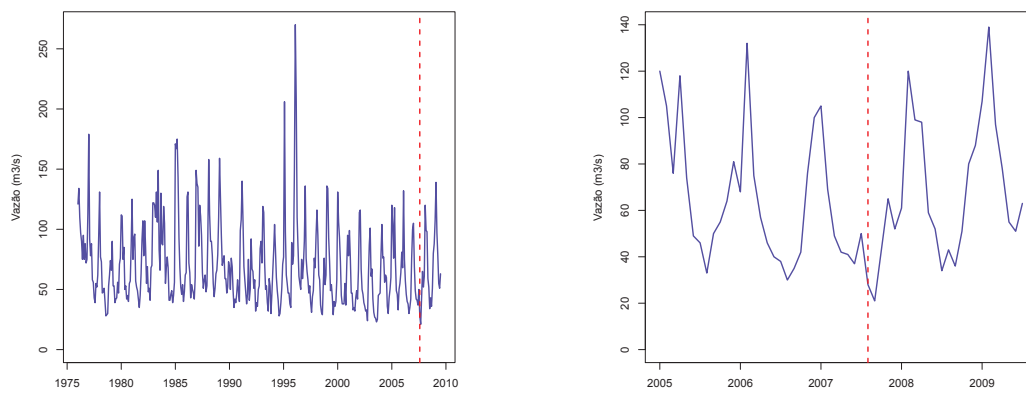


Figura 7.1: Série de Vazão, total e últimos 5 anos.

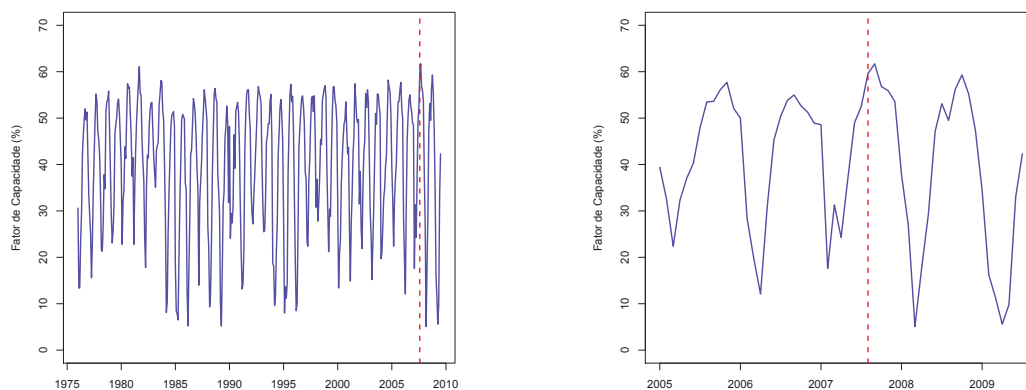


Figura 7.2: Série de Fator de Capacidade, total e últimos 5 anos.

Para a estimação dos modelos, foram utilizados os dados à esquerda das linhas tracejadas nas Figuras 7.1 e 7.2, sendo os dados à direita destas (2 anos de observações) utilizados para avaliação do modelo fora da amostra. Ambas

as séries apresentam comportamento sazonal, aparentemente sem inclinações na tendência ou deslocamentos no nível.

Pelas Figuras 7.3 e 7.4, os primeiros quatro meses do ano aparecem como aqueles com a maior dispersão nas duas séries em análise, o que se confirma principalmente pela magnitude dos intervalos interquartílicos nos *box-plots*. As linhas em vermelho nos *box-plots* representam as médias mensais. Na série de vazão, dois valores se destacam dos demais na cauda direita da distribuição, correspondentes ao mês de fevereiro dos anos de 1995 e 1996.

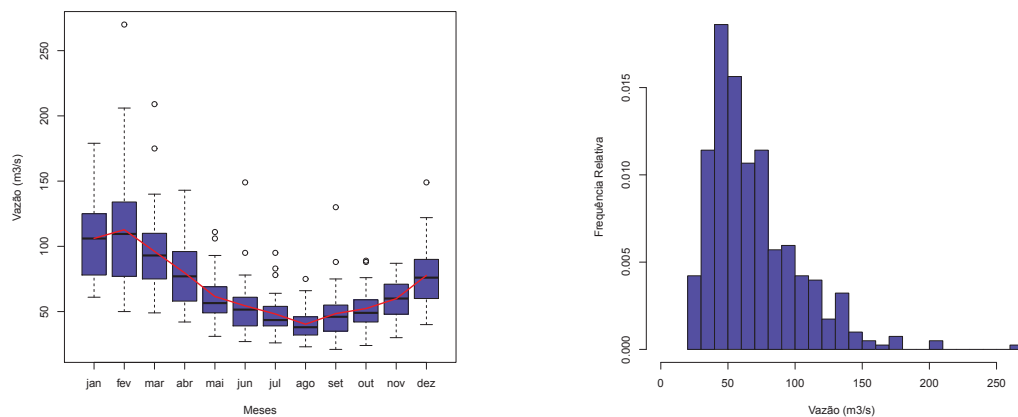


Figura 7.3: Box-Plots mensais e histograma da série de Vazão.

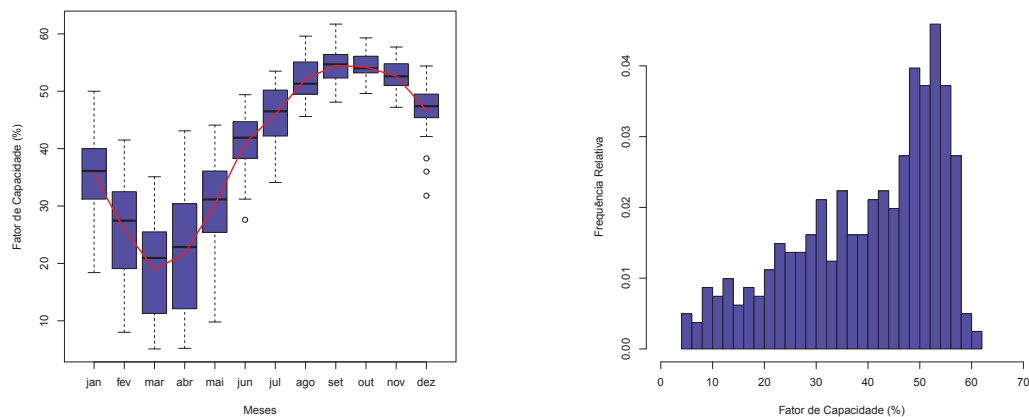


Figura 7.4: Box-Plots mensais e histograma da série de Fator de Capacidade.

Tanto pelos *box-plots* mensais, quanto pela Figura 7.5, observa-se comportamentos complementares entre as séries. Para a série de vazão, as maiores médias mensais ocorrem nos primeiros quatro meses do ano, e as menores, no início do segundo semestre, por volta do mês de agosto. Neste último período são verificadas as maiores médias mensais do fator de capacidade eólico. Essa

associação negativa pode ser vista mais claramente na Figura 7.6, que apresenta a direção da dependência entre as séries. A linha preta corresponde à reta de regressão da série de Vazão pelo Fator de Capacidade.

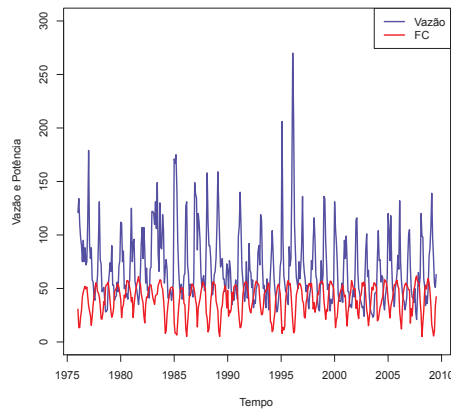


Figura 7.5: Vazão e Fator de Capacidade mensais.

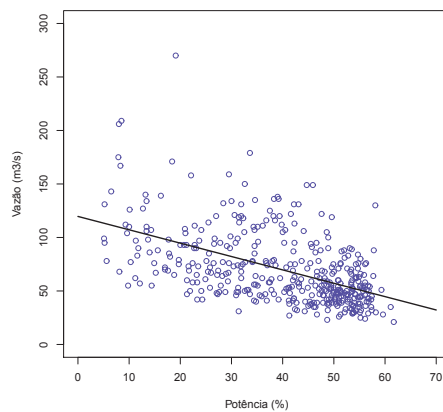


Figura 7.6: Diagrama de dispersão das séries e reta de regressão.

As séries de energia natural afluyente, em  $MW/(m^3/s)$ , foram incluídas nos modelos como variáveis exógenas. Conforme ressalta Amaral (2011), estas séries servem como variáveis de controle da heterogeneidade estrutural de cada subsistema brasileiro (Sudeste, Sul, Nordeste e Norte). Pelas magnitudes, claramente o Sudeste é o subsistema responsável pela maior parte da produção de energia do país. A série deste subsistema é aquela que apresenta comportamento mais semelhante à série de vazão do Rio Paraíba, também localizado no Sudeste.

A série ENA-SU apresenta sazonalidade menos marcante, sendo aquela com comportamento mais aleatório ao longo do ano. Vale destacar a pequena variabilidade das séries ENA-NE e ENA-NO no segundo semestre.

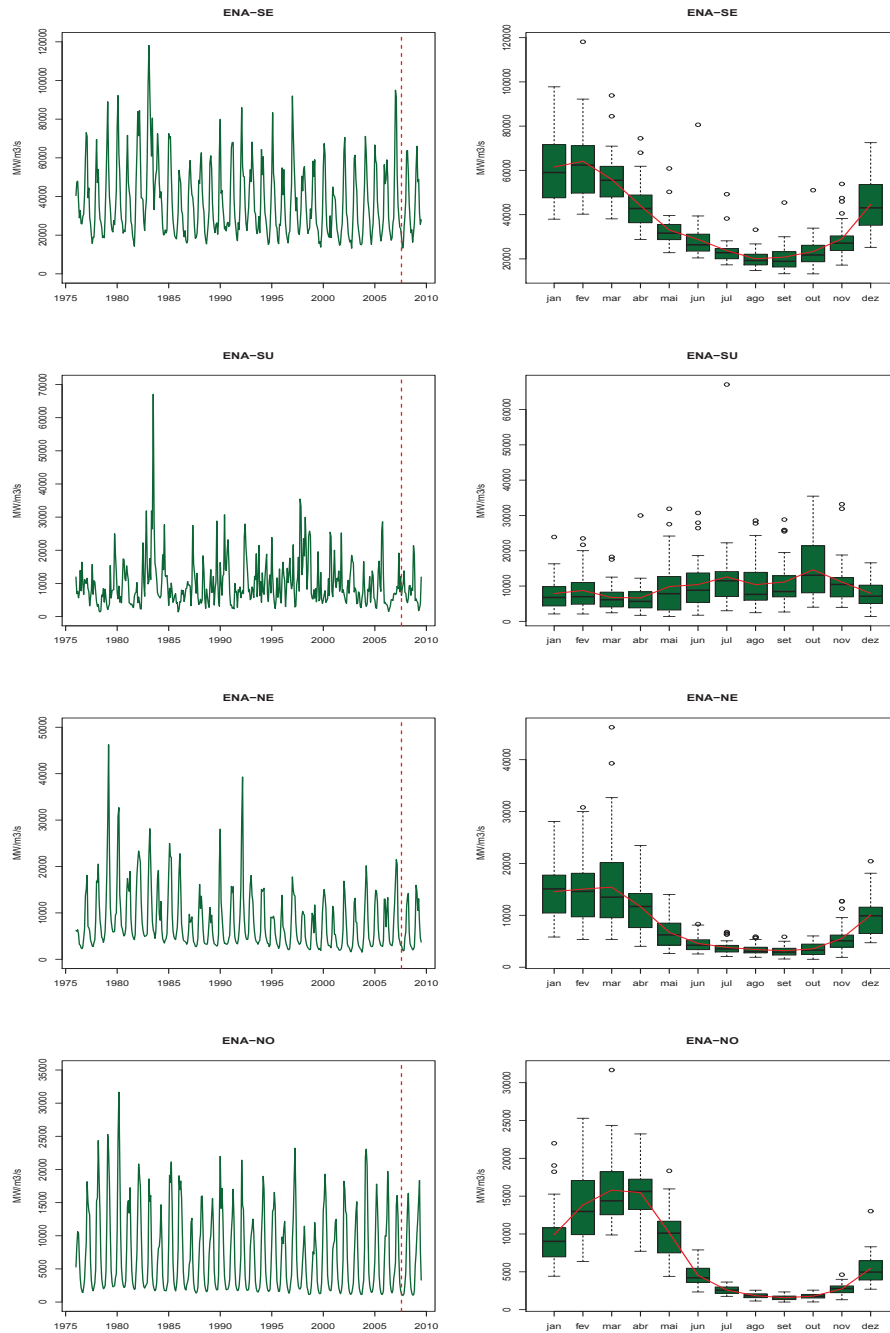


Figura 7.7: ENA's e Box-Plots mensais.

## 7.2

### Modelagem Univariada da Série de Vazão

#### 7.2.1

##### Evolução do Tipo SARIMA

Os resultados apresentados nesta seção correspondem a modelos GAS(12,12) definidos pelas equações (3-10) - (3-12). Os coeficientes  $A_i$  e  $B_j$  da equação de evolução dos parâmetros variantes no tempo foram escolhidos

por tentativa e erro, de tal forma que os resíduos quantílicos fossem bem comportados, do ponto de vista dos correlogramas (FAC e FACP) e dos testes de autocorrelação serial nos resíduos e em seus quadrados. Com a defasagem na equação de atualização até a ordem 12, buscou-se capturar a dinâmica sazonal da série de vazão. Nos modelos com variáveis exógenas, levando em conta tanto o desempenho do modelo dentro e fora da amostra, quanto a parcimônia, estas foram utilizadas com defasagem até a ordem  $r = 2$ .

Na Tabela 7.1, verifica-se que a inclusão das variáveis exógenas melhorou o ajuste do modelo, tanto pela verossimilhança, quanto pelos critérios de informação AIC e BIC. Ao modelo com melhor desempenho segundo os critérios mencionados (modelo 3), foram realizadas intervenções através de três *dummies*, com base na magnitude dos resíduos quantílicos. As intervenções foram incluídas à semelhança das variáveis exógenas, apresentando impacto significativo em direção à normalidade dos resíduos quantílicos, além de aumentarem a aderência do modelo aos dados, o que se traduz pela aumento da verossimilhança junto à redução dos critérios AIC e BIC (vide Tabela 7.1). Os gráficos posteriores serão apresentados com base nos resultados deste modelo.

Tabela 7.1: Verossimilhança e critérios de informação para modelo Gama-SARIMA.

Estatística	Mod 1	Mod 2	Mod 3	Mod 3 + Int.
Log-Veros.	-1540,8	-1486,4	-1461,7	-1439,0
AIC	3105,6	3012,7	2967,3	2928,1
BIC	3152,5	3090,8	3053,3	3025,7

Na Figura 7.8 constam a série de vazão do Rio Paraibuna e as previsões um passo à frente com base no modelo 3 com intervenções para o período utilizado na estimação. De forma geral, a dinâmica da vazão do Rio Paraibuna foi capturada. Embora a inclusão das variáveis exógenas no presente modelo tenha melhorado sua capacidade preditiva, em alguns momentos são observados descolamentos entre a vazão observada e as previsões 1-passo à frente, conforme pode ser visto no início do ano de 2007. Isso se deve, sobretudo, ao impacto direto que das variáveis exógenas na média condicional do modelo. Na ocasião mencionada, a série ENA-SU apresentou valores bastante elevados em relação ao mesmo período para anos anteriores, sendo esta a série de maior impacto na média condicional do modelo entre as variáveis exógenas utilizadas.

As medidas de ajustamento dentro e fora da amostra são apresentadas na Tabela 7.2. As previsões fora da amostra foram levantadas de duas formas, a saber, previsões  $k$ -passos à frente obtidas por simulação de Monte Carlo, e fora da amostra com previsões 1-passo à frente, ou seja, com atualização

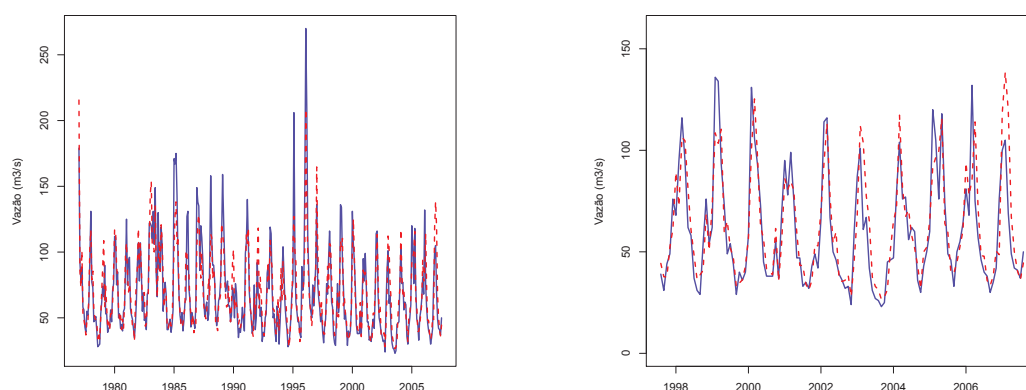


Figura 7.8: Série de Vazão e previsões 1-passo à frente para período de estimação do modelo Gama-SARIMA.

das previsões pelas observações reais. As previsões fora da amostra servem para avaliar a capacidade preditiva do modelo no longo prazo, enquanto as previsões fora da amostra obtidas com atualização das observações servem para o monitoramento da capacidade do modelo no curto prazo (para a série em questão, num horizonte de alguns meses).

Para os modelos apresentados, as previsões fora da amostra 1-passo à frente apresentaram desempenho consideravelmente superior para o período de validação em relação ao período de estimação, resultado que deve ser visto com ressalvas. Provavelmente, com um período de validação maior, estes resultados estariam próximos àqueles do período de estimação.

Complementam esses resultados as Figuras 7.9 e 7.10, nas quais são apresentadas as observações e as previsões para o período de validação. A amplitude dos intervalos de confiança é maior nos primeiros meses do ano, período em que a vazão apresenta maior variabilidade, conforme observado na análise descritiva. Visto que as previsões computadas 1-passo à frente são atualizadas com as observações, essas apresentam intervalos de confiança menores, e tendem a acompanhar de forma mais próxima às observações. Contudo, para a projeção de cenários de horizonte maior, o comportamento verificado e o desempenho do modelo de acordo com as previsões levantadas por simulação é mais fidedigno, haja vista que só estarão disponíveis as observações da vazão para o período usado para a estimação dos dados.

Tabela 7.2: Medidas de ajustamento para modelo Gama-SARIMA.

Período	Medidas	Mod 1	Mod 2	Mod 3	Mod 3+Int.
Dentro da amostra	RMSE	21,6	19,4	18,3	16,7
	MAE	14,1	12,7	12,0	11,6
	MASE	0,73	0,66	0,62	0,60
	sMAPE	9,6	8,6	8,0	7,8
	pseudo R2	0,60	0,67	0,71	0,76
Fora da amostra <sup>(1)</sup>	RMSE	18,9	14,0	13,4	12,9
	MAE	13,8	10,9	10,6	10,2
	MASE	0,72	0,57	0,55	0,53
	sMAPE	10,7	8,8	8,3	7,9
	pseudo R2	0,60	0,81	0,87	0,89
Fora da amostra <sup>(2)</sup>	RMSE	16,6	12,7	10,3	10,0
	MAE	12,3	10,2	8,1	7,9
	MASE	0,64	0,53	0,42	0,41
	sMAPE	9,7	8,2	7,0	6,8
	pseudo R2	0,70	0,85	0,88	0,89

Nota: (1) Previsões fora da amostra  $k$ -passos à frente, levantadas por simulação. (2) Previsões fora da amostra 1-passo à frente, com atualização pelas observações reais.

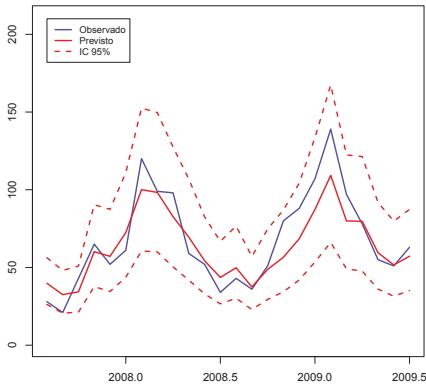


Figura 7.9: Previsões fora da amostra levantadas por simulação do modelo Gama-SARIMA.

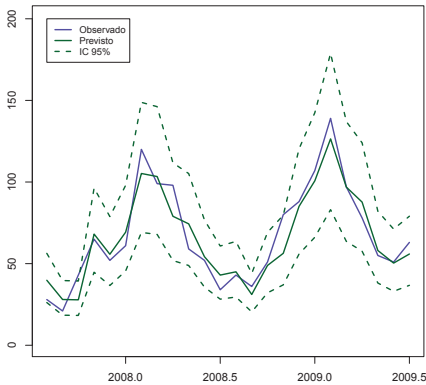


Figura 7.10: Previsões fora da amostra 1-passo à frente do modelo Gama-SARIMA.

A dependência linear da série foi capturada através da dinâmica GAS proposta (Figura 7.11), resultado corroborado pelo teste de Ljung-Box nos resíduos do modelo, apresentado na Tabela 7.3. A partir do histograma dos resíduos quantílicos, bem como do teste de Jarque-Bera, a normalidade dos resíduos não foi rejeitada. Tais características mostram uma boa aderência do modelo aos dados de vazão. Após a inclusão das intervenções do tipo *dummy*, verificou-se a presença de uma estrutura de dependência no quadrado dos resíduos quantílicos, conforme pode ser verificado pelo teste de Ljung-Box, apresentado na Tabela 7.3. Porém, como os resultados do modelo com

intervenções foram melhores em relação aos demais, do ponto de vista da previsibilidade, fez-se a opção final por este.

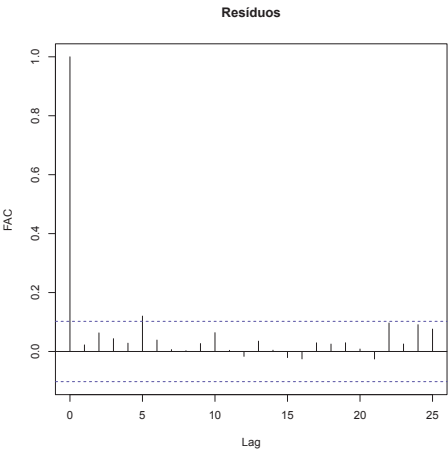


Figura 7.11: FAC dos resíduos quantílicos do modelo Gama-SARIMA.

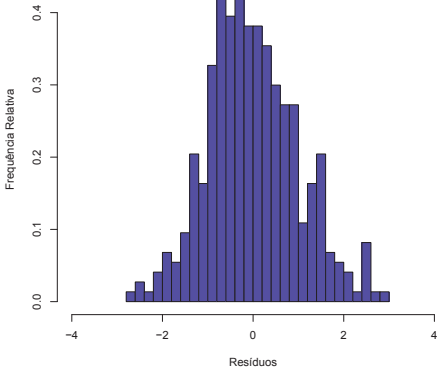


Figura 7.12: Histograma dos resíduos quantílicos do modelo Gama-SARIMA.

Tabela 7.3: P-valor dos testes de autocorrelação, heterocedasticidade e normalidade dos resíduos quantílicos do modelo Gama-SARIMA.

Teste	Mod 1	Mod 2	Mod 3	Mod 3+Int.
Autocorrelação	0,97	0,31	0,70	0,70
Heterocedasticidade	0,46	0,44	0,07	0,01
Normalidade	0,00	0,00	0,00	0,12

7.2.2  
Evolução em Componentes Não Observáveis

Os modelos apresentados nesta seção são modelos tipo GAS com evolução em componentes não observáveis. A principal vantagem desta estrutura de evolução se deve à interpretabilidade de suas componentes. Inicialmente, a dinâmica dos modelos foi capturada por componentes de tendência e sazonalidade.

Em linhas gerais, foram obtidas as mesmas conclusões vistas com a estrutura de evolução SARIMA, ou seja, acréscimo da previsibilidade dos modelos com a inclusão das séries de ENA enquanto variáveis exógenas, e melhores resultados quando se utilizou o logaritmo destas séries. Contudo, os resíduos quantílicos apresentavam estruturas de dependência (autocorrelação) para os primeiros *lags*, o que foi confirmado tanto pelos correlogramas quanto pelo teste de Ljung-Box. Além disso, os critérios de informação e a verossimilhança



apresentaram valores distantes daqueles obtidos com a estrutura de evolução anterior, com resultados piores.

Visto que a estrutura de dependência não foi satisfatoriamente capturada pela dinâmica proposta, fez-se a inclusão de uma componente autoregressiva de modo aditivo na equação de evolução do parâmetro  $f_t$ . Dessa forma, a componente de tendência, anteriormente dada por uma estrutura tipo passeio aleatório, passou a ser formada por esta estrutura acrescida de uma componente autoregressiva. A dependência de curto prazo presente nos resíduos quantílicos (verificada através da FAC e FACP) passou a ser explicada pelo modelo. A verossimilhança e os critérios de informação apresentaram melhora substantiva, ficando próximos das respectivas quantidades observadas no modelo com evolução SARIMA, conforme pode ser visto na Tabela 7.4. Novamente, foram incluídas intervenções ao melhor modelo (cinco *dummies*), acomodando assim observações mal ajustadas, com base na magnitude dos resíduos quantílicos. Os gráficos apresentados correspondem ao modelo com intervenções.

Tabela 7.4: Verossimilhança e critérios de informação para modelo Gama de componentes.

Estatística	Mod 1	Mod 2	Mod 3	Mod 3+Int.
Log-Veros.	-1526,2	-1482,1	-1468,4	-1442,0
AIC	3064,5	2992,2	2964,8	2922,0
BIC	3087,9	3046,8	3019,4	2996,2

A estrutura de evolução das componentes de tendência, autoregressiva e de sazonalidade para o Modelo 3 pode ser vista na Figura 7.13. Na mesma figura, consta a soma entre a componente do tipo passeio aleatório e a componente autoregressiva, que pode ser entendida como a tendência do processo. Visualmente, pela última componente da Figura 7.13 (em vermelho), a série de vazão apresenta tendência com inclinação negativa, resultado que deve ser mais explorado. Em Marengo e Alves (2005), aponta-se para tendências negativas nas vazões dos últimos 50 anos do Rio Paraíba do Sul, do qual é afluente o Rio Paraíba. A sazonalidade, apresentada para os últimos dez anos do período de estimação, não mostra grandes variações. A magnitude das componentes não observáveis, bem como suas "direções", se assemelha àquelas obtidas para um modelo em espaço de estados linear gaussiano com as mesmas componentes ajustado para o logaritmo da série de vazão trabalhada. Isto porque a média condicional do modelo se comunica com o parâmetro de ligação do modelo GAS através da função de ligação logarítmica, de onde vem a comparação com o modelo ajustado ao log da série.

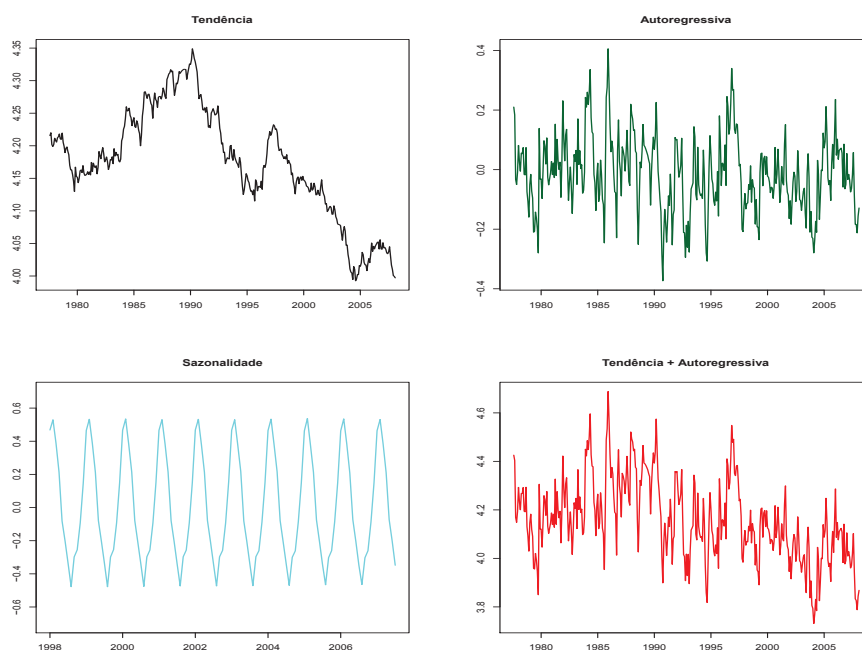


Figura 7.13: Tendência, componente autoregressiva e sazonalidade para modelo Gama com evolução em componentes

Comparativamente aos respectivos modelos com evolução SARIMA, o desempenho fora da amostra se mostrou próximo, porém com valores um pouco inferiores, à exceção do modelo sem variáveis exógenas. Para os modelos com variáveis exógenas, tanto para as previsões utilizadas para monitoramento de longo prazo, quanto para aquelas obtidas com atualização das informações, utilizadas para monitoramento de curto prazo, o modelo Gama de componentes apresentou resultados levemente inferiores. Os intervalos de confiança obtidos com esta estrutura apresentaram amplitudes consideravelmente menores que as observadas na seção anterior.

A estrutura proposta capturou a dependência na média condicional do processo de vazão, resultado corroborado pelo correlogramas dos resíduos quantílicos e pelos testes, apresentados na Tabela 7.6. Com a inclusão das intervenções, a hipótese de normalidade foi aceita pelo teste de Jarque-Bera, cujo p-valor foi 0.47, sendo um indicador da correta especificação da distribuição condicional escolhida. A questão da dependência no quadrado dos resíduos apareceu novamente com a inclusão das variáveis *dummies*, porém de forma menos severa.

Tabela 7.5: Medidas de ajustamento para modelo Gama de componentes.

Período	Medidas	Mod 1	Mod 2	Mod 3	Mod 3+Int.
Dentro da amostra	RMSE	21,3	19,1	18,5	16,5
	MAE	14,0	12,6	11,9	11,5
	MASE	0,73	0,65	0,62	0,60
	sMAPE	9,4	8,4	8,0	7,7
	pseudo R2	0,61	0,69	0,71	0,77
Fora da amostra <sup>(1)</sup>	RMSE	17,5	15,5	15,1	16,3
	MAE	14,3	11,9	11,5	12,8
	MASE	0,74	0,62	0,60	0,66
	sMAPE	11,2	9,5	9,1	9,9
	pseudo R2	0,71	0,75	0,77	0,75
Fora da amostra <sup>(2)</sup>	RMSE	16,3	14,4	13,5	13,8
	MAE	12,6	12,3	11,5	11,6
	MASE	0,66	0,64	0,60	0,60
	sMAPE	10,6	9,9	9,1	9,1
	pseudo R2	0,71	0,78	0,80	0,80

Nota: (1) Previsões fora da amostra  $k$ -passos à frente, levantadas por simulação. (2) Previsões fora da amostra 1-passo à frente, com atualização pelas observações reais.

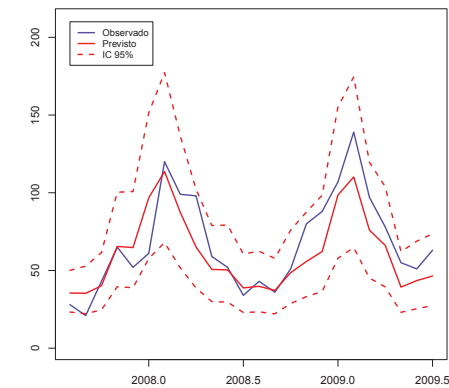


Figura 7.14: Previsões fora da amostra levantadas por simulação do modelo Gama de componentes.

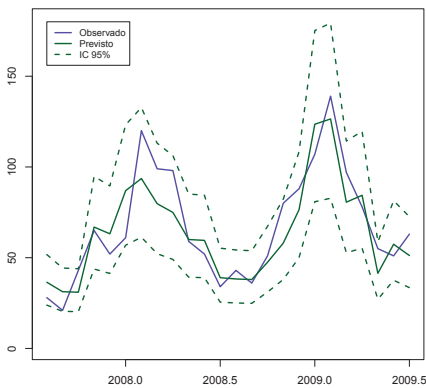


Figura 7.15: Previsões fora da amostra 1-passo à frente do modelo Gama de componentes.

7.3  
Modelagem Univariada da Série de Fator de Capacidade

7.3.1  
Evolução do Tipo SARIMA

Os resultados desta seção são correspondentes a modelos GAS(12,12) com distribuição preditiva beta, cuja especificação é dada pelas equações (4-11) - (4-13). A escolha dos coeficientes não nulos  $A_i$  e  $B_j$  da equação de atualização dos parâmetros também foi realizada após sucessivas tentativas, com base no

Tabela 7.6: P-valor dos testes de autocorrelação, heterocedasticidade e normalidade nos resíduos quantílicos do modelo Gama de componentes.

Teste	Mod 1	Mod 2	Mod 3	Mod 3+Int.
Autocorrelação	0,92	0,52	0,90	0,71
Heterocedasticidade	0,25	0,53	0,43	0,04
Normalidade	0,00	0,00	0,00	0,47

comportamento dos resíduos quantílicos.

Quanto à inclusão de variáveis exógenas, foram utilizadas as séries de ENA (ou seus logaritmos) por subsistema. Cabe ressaltar que para a previsão do fator de capacidade eólico, o uso de outras variáveis exógenas no modelo, como pressão, temperatura e direção do vento poderia resultar em modelos com melhor capacidade preditiva. Contudo, para a série em análise, estas variáveis não estão disponíveis. Além disso, as séries de ENA por subsistema apresentam correlações negativas consideráveis com a série de fator de capacidade em estudo. Novamente, a ordem de defasagem escolhida foi  $r = 2$ . A nomenclatura dos modelos quanto à presença das variáveis exógenas foi mantida.

Do ponto de vista da verossimilhança e dos critérios de informação, conforme mostrados na Tabela 7.7, a inclusão das variáveis exógenas melhorou o ajuste do modelo. Ao modelo 3, fez-se uma intervenção por variável *dummy*, para a acomodação de um *outlier*, sendo os gráficos posteriores correspondentes ao modelo com a intervenção.

Tabela 7.7: Verossimilhança e critérios de informação para modelo Beta-SARIMA.

Estatística	Mod 1	Mod 2	Mod 3	Mod 3 + Int.
Log-Veros.	-1098,2	-1081,5	-1077,7	-1074,6
AIC	2220,5	2203,0	2195,4	2191,1
BIC	2267,3	2281,1	2273,5	2273,1

A série de fator de capacidade em análise e as previsões 1-passo à frente são apresentadas na Figura 7.16. Visualmente, o modelo consegue capturar as características da série, e apresenta maiores descolamentos (ou erros de previsão 1-passo à frente) para valores baixos do fator de capacidade, que em geral ocorrem nos primeiros meses do ano, período em que o vento apresenta maior volatilidade no Nordeste brasileiro.

O aumento do ajuste com o acréscimo das séries de ENA como variáveis exógenas ao modelo não se traduziu em melhora da previsibilidade, conforme se atesta pela Tabela 7.8. As medidas de ajustamento dentro da amostra se mantiveram praticamente constantes, o que se traduz, por exemplo, pelo erro

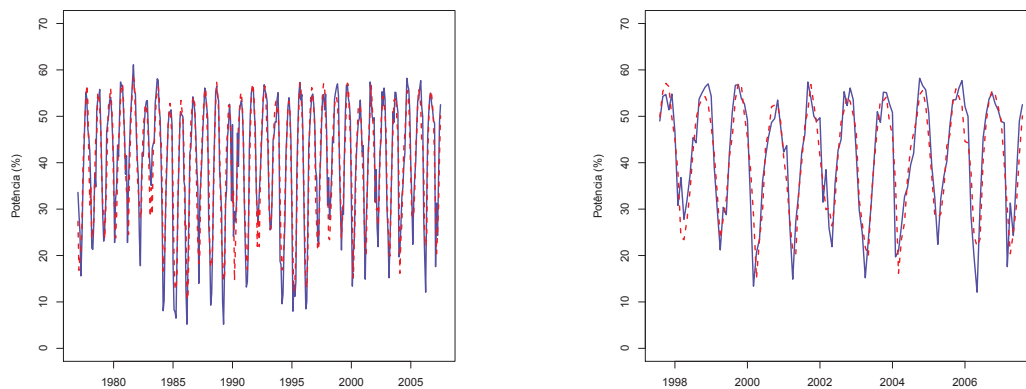


Figura 7.16: Série de Fator de Capacidade e previsões 1-passo à frente para período de estimação do modelo Beta-SARIMA.

médio absoluto (MAE) dos modelos. Nas previsões fora da amostra levantadas por simulação, o modelo 3 com intervenção apresentou pequena vantagem frente aos demais. Para este modelo, as previsões fora da amostra  $k$ -passos à frente se apresentaram bastante inferiores àquelas observadas dentro da amostra. Por exemplo, o MAE e o sMAPE passam de 4.0 e 6.8 para 5.8 e 12.7, respectivamente. Esta dificuldade na previsão de séries de vento (sejam elas de fator de capacidade ou de velocidade) já é conhecida na literatura de previsão relacionada a estas, em geral com base em séries horárias e diárias. Os resultados por hora obtidos estão muito próximos daqueles observados em Amaral (2011). No estudo referido, para a mesma série e período de validação, o MAE e o RMSE fora da amostra com previsões 1-passo à frente foram 6.4 e 4.7, obtidos através de um modelo VARX, frente aos valores 6.0 e 4.8 obtidos pelo modelo GAS com distribuição beta.

Nas previsões fora da amostra para a série de fator de capacidade, há uma diferença considerável entre aquelas que se utilizam apenas da informação do período de estimação, e aquelas computadas 1-passo à frente, atualizando as previsões com as observações reais. Os intervalos de confiança para estas últimas possuem amplitudes bastante inferiores. Em ambas as figuras, contudo, vê-se que a extrapolação do modelo expressa as características do processo modelado, sobretudo a variação sazonal e a tendência estocástica. Em parte, os grandes erros de previsão nos meses iniciais dos anos de 2008 e 2009 se devem a valores muito baixos observados na série de fator de capacidade para este período. Por exemplo, em todas as observações utilizadas para a estimação do modelo, apenas duas foram abaixo de 6, mesma quantidade observada no período separado para a avaliação. Ainda, nos últimos 10 anos do período de estimação, o menor valor observado foi 12.1 (correspondente a abril de 2006),

Tabela 7.8: Medidas de ajustamento para modelo Beta-SARIMA.

Período	Medidas	Mod 1	Mod 2	Mod 3	Mod 3+Int.
Dentro da amostra	RMSE	5,5	5,3	5,2	5,2
	MAE	4,1	4,0	4,0	4,0
	MASE	0,60	0,58	0,58	0,58
	MAPE	7,0	6,8	6,8	6,8
	pseudo R2	0,84	0,85	0,85	0,86
Fora da amostra <sup>(1)</sup>	RMSE	8,7	8,8	7,8	7,7
	MAE	6,6	6,6	5,8	5,8
	MASE	0,96	0,97	0,86	0,85
	MAPE	13,7	13,8	12,8	12,7
	pseudo R2	0,92	0,90	0,89	0,90
Fora da amostra <sup>(2)</sup>	RMSE	6,0	5,7	6,1	6,0
	MAE	4,5	4,2	4,9	4,8
	MASE	0,66	0,61	0,71	0,70
	MAPE	10,4	9,9	10,8	10,7
	pseudo R2	0,91	0,93	0,90	0,91

Nota: (1) Previsões fora da amostra  $k$ -passos à frente, levantadas por simulação. (2) Previsões fora da amostra 1-passo à frente, com atualização pelas observações reais.

bem acima dos mínimos observados a partir de agosto de 2007 (5.1 e 5.6, em março de 2008 e abril de 2009, respectivamente).

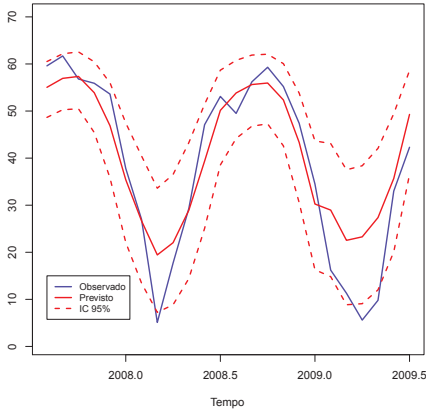


Figura 7.17: Previsões fora da amostra levantadas por simulação do modelo Beta-SARIMA.

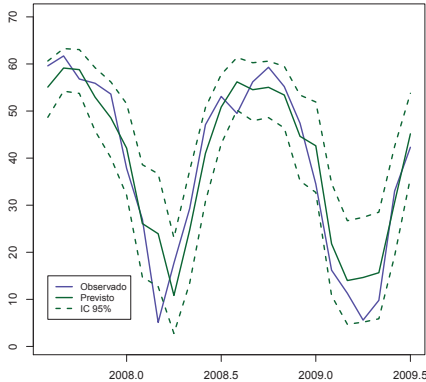


Figura 7.18: Previsões fora da amostra 1-passo à frente do modelo Beta-SARIMA.

Pelo comportamento da FAC dos resíduos do modelo, bem como pelo p-valor do teste de Ljung-Box, vê-se que a dependência linear foi capturada. A inclusão da intervenção implicou na aceitação da normalidade dos resíduos quantílicos, tendo em vista a magnitude do p-valor do teste de Jarque-Bera, atestando assim uma correta especificação da distribuição preditiva beta. Quanto à presença de uma estrutura de dependência no quadrado dos resíduos,

verificada através de uma estrutura senoidal nestes, a suspeita inicial era que este comportamento se devia à presença *outliers*. Contudo, mesmo após a inclusão de intervenções para algumas observações mal ajustadas, o padrão persistiu no modelo.

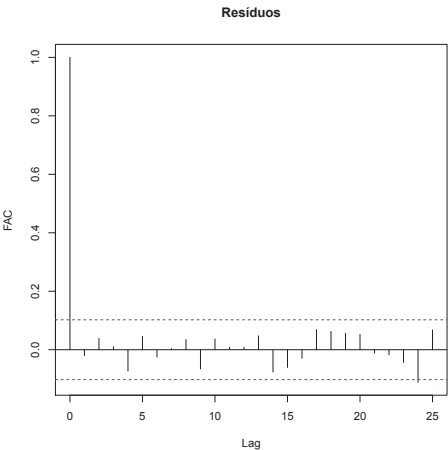


Figura 7.19: FAC dos resíduos quantílicos do modelo Beta-SARIMA.

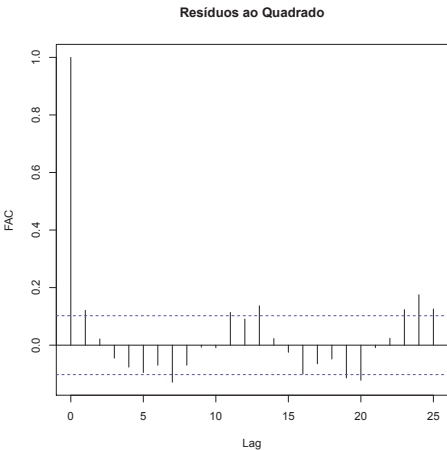


Figura 7.20: FAC dos resíduos quantílicos ao quadrado do modelo Beta-SARIMA.

Tabela 7.9: P-valor dos testes de autocorrelação, heterocedasticidade e normalidade nos resíduos quantílicos do modelo Beta-SARIMA.

Teste	Mod 1	Mod 2	Mod 3	Mod 3+Int.
Autocorrelação	0,56	0,53	0,60	0,54
Heterocedasticidade	0,01	0,00	0,00	0,00
Normalidade	0,00	0,02	0,04	0,17

7.3.2  
Evolução em Componentes Não Observáveis

A construção dos modelos de componentes não observáveis para a série de fator de capacidade com a distribuição beta ocorreu de forma semelhante àquela para a série de vazão, ou seja, iniciou-se por uma dinâmica com tendência e sazonalidade, posteriormente acrescida de uma componente autoregressiva para a captura de estruturas de dependência de curto prazo. A verossimilhança e os critérios de informação para este modelo são superiores aos respectivos valores obtidos para a estrutura de evolução do tipo SARIMA.

Ao modelo com as melhores medidas (modelo 3, com o logaritmo das séries de ENA na expressão da média condicional), foram feitas algumas intervenções nas observações correspondentes aos maiores resíduos quantílicos.

Contudo mesmo após sucessivas tentativas, os resíduos quantílicos não apresentaram normalidade, além de não haver acréscimo significativo em relação à previsibilidade, sobretudo no período usado para a estimação, e por isso o modelo final será o modelo 3, sem interações. Os gráficos apresentados em seguida são referentes a este modelo.

Tabela 7.10: Verossimilhança e critérios de informação para modelo Beta de componentes.

<b>Estatística</b>	<b>Mod 1</b>	<b>Mod 2</b>	<b>Mod 3</b>
Log-Veros.	-1066,2	-1052,5	-1050,8
AIC	2144,4	2133,0	2129,6
BIC	2167,8	2187,7	2184,3

Novamente, a melhora na verossimilhança e critérios de informação a partir da inclusão de variáveis exógenas não se traduziu em aumento significativo da previsibilidade dentro e fora da amostra. Por exemplo, para as previsões fora da amostra com base nas informações do período de estimação, levantadas por simulação, as medidas do modelo sem variáveis exógenas são melhores que dos outros dois modelos (vide Tabela 7.11).

Tabela 7.11: Medidas de ajustamento para modelo Beta de componentes.

<b>Período</b>	<b>Medidas</b>	<b>Mod 1</b>	<b>Mod 2</b>	<b>Mod 3</b>
Dentro da amostra	RMSE	5,1	4,9	4,9
	MAE	3,7	3,6	3,6
	MASE	0,55	0,53	0,53
	sMAPE	6,5	6,3	6,3
	pseudo R2	0,86	0,87	0,87
Fora da amostra <sup>(1)</sup>	RMSE	7,8	7,5	7,9
	MAE	5,6	6,0	6,2
	MASE	0,83	0,87	0,90
	sMAPE	12,4	12,8	13,2
	pseudo R2	0,92	0,92	0,90
Fora da amostra <sup>(2)</sup>	RMSE	6,2	5,9	6,1
	MAE	4,8	4,5	4,7
	MASE	0,71	0,66	0,69
	sMAPE	11,0	10,5	10,7
	pseudo R2	0,92	0,93	0,92

Nota: (1) Previsões fora da amostra  $k$ -passos à frente, levantadas por simulação. (2) Previsões fora da amostra 1-passo à frente, com atualização pelas observações reais.

Na Figura 7.21 são apresentadas as componentes de tendência (do tipo passeio aleatório), sazonalidade, autoregressiva, e por fim, a soma entre a



componente de tendência e a autoregressiva, que pode ser interpretada como a tendência estocástica da série de fator de capacidade. Pela componente em vermelho, o nível da série para a segunda metade do período em análise aparenta ser mais elevado em relação ao período anterior.

Também para este modelo, foram feitas comparações de forma visual entre as suas componentes e as respectivas componentes de um modelo em espaço de estados linear gaussiano ajustado para o *logit* da série de fator de capacidade (em virtude da comunicação entre a média condicional e o parâmetro variante no tempo). Contudo, para este caso, o comportamento da componente do tipo passeio aleatório, bem como da autoregressiva, foram bastante distintos entre ambos os modelos.

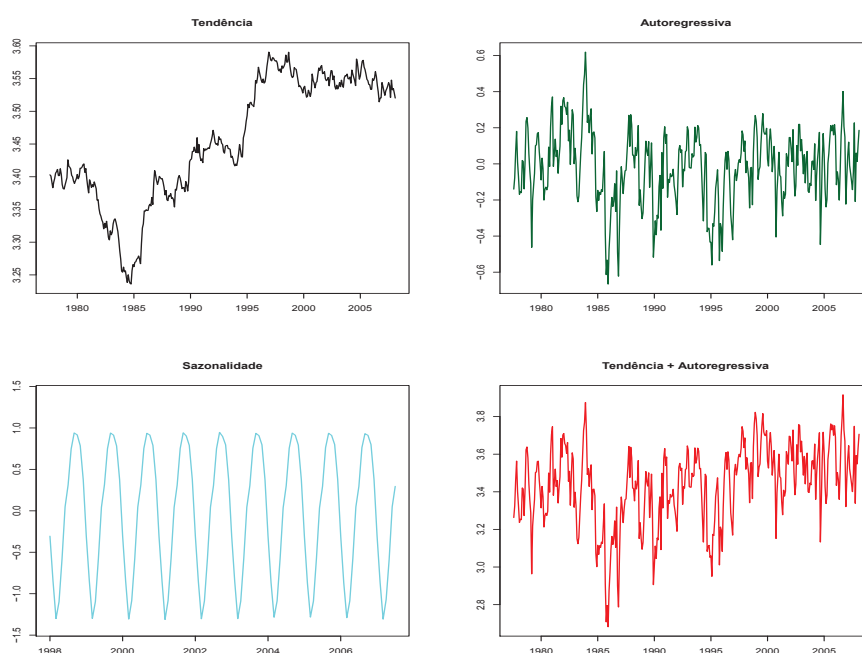


Figura 7.21: Tendência, componente autoregressiva e sazonalidade para modelo Beta com evolução em componentes.

Apesar da dependência na média condicional do processo ter sido capturada pelo modelo proposto (sendo este o principal objetivo), a estrutura de dependência no quadrado dos resíduos quantílicos, já pontuada para o modelo Beta com a estrutura de evolução SARIMA, permaneceu. A normalidade dos resíduos foi rejeitada para todos os modelos, inclusive após realizadas intervenções no modelo três, modelo com maior verossimilhança e menores valores para os critérios de informação. No modelo 3, os resíduos tiveram comportamento semelhante ao da distribuição normal, com pequena assimetria à esquerda. Para este, o p-valor do teste de Jarque-Bera apesar de pequeno, indica proximidade em relação à normal.

Tabela 7.12: P-valor dos testes de autocorrelação, heterocedasticidade e normalidade nos resíduos quantílicos do modelo Beta de componentes.

Teste	Mod 1	Mod 2	Mod 3
Autocorrelação	0,41	0,38	0,52
Heterocedasticidade	0,00	0,00	0,00
Normalidade	0,00	0,00	0,01

## 7.4

### Modelagem Bivariada das Série de Vazão e Fator de Capacidade

Através do modelo GAS bivariado com distribuições marginais gama e beta, foi possível modelar de forma conjunta os processos de vazão e vento, com a vantagem de se integrar inclusive as parametrizações adotadas. Dessa forma, as previsões foram obtidas pelas mesmas expressões das médias condicionais, com a comunicação entre as médias dada pela estrutura de evolução do modelo. Conforme já ressaltado, pela importância crescente da energia eólica, inclusive por sua maior inserção no ambiente de comercialização de energia, a modelagem e geração conjunta de cenários de vazão e vento se torna importante para o planejamento energético do país, de forma a aproveitar a complementaridade sazonal entre as fontes hidráulica e eólica.

Em geral, os modelos multivariados de séries temporais apresentam um ganho em relação à flexibilidade, de forma a permitir a comunicação entre os processos em estudo, ganho este acompanhado por uma maior dificuldade na estimação, em virtude do aumento do número de parâmetros. Tais características foram observadas na aplicação do modelo GAS gama-beta aos dados já apresentados.

A escolha das matrizes não nulas na equação de atualização dos parâmetros variantes no tempo foi guiada pelos resultados dos modelos univariados (ou seja, matrizes  $A_i$  e  $B_j$  não nulas para  $i, j = 1, 2, 3, 11, 12$ ). Destas, apenas as matrizes da parte autoregressiva  $B_1$  e  $B_{12}$  foram adotadas como cheias, ou seja, com todos os coeficientes, sendo as demais diagonais. Pela presença das matrizes cheias na equação de evolução, permite-se a comunicação direta entre as médias condicionais dos processos, capturando a dependência/comunicação de curto prazo e sazonal. A parcimônia foi também determinante na seleção da estrutura de evolução, pois todas as matrizes poderiam ser adotadas como cheias, o que implicaria em um número de parâmetros bem superior ao adotado.

Cabe ressaltar que outras estruturas de evolução foram testadas. Inicialmente, todas as matrizes da equação de evolução foram tomadas como diagonais. Neste caso, embora não haja uma dependência explícita entre as

médias condicionais, os processos não são modelados de forma independente, haja vista que em cada um dos elementos do vetor *score* há contribuição de ambos os processos, ou seja, a comunicação se dá nos “erros” (semelhante ao que ocorre nos modelos SUTSE). Logo após, foram fixadas matrizes cheias na parte autoregressiva, e matrizes diagonais na parte de médias móveis da equação de evolução dos processos GAS. Porém, o número de parâmetros ficou muito elevado, e não houve ganho em relação ao “modelo diagonal”. Foram testadas ainda estruturas autoregressivas puras, ou seja, com matrizes  $B_j$  cheias na parte autoregressiva da Eq.(5-29), e apenas  $A_1$  não nula, artifício comum em análise de séries multivariadas via processos VARMA. Contudo, os melhores resultados foram obtidos com base na estrutura apresentada no parágrafo anterior.

Os resultados apresentados a seguir correspondem ao modelo Gama-Beta com as séries de ENA (seus logaritmos) por subsistema como variáveis exógenas, defasadas até a ordem 2 (ou seja,  $r_1 = r_2 = 2$  na Eq.(5-23)), e com intervenções por variáveis *dummy*. As intervenções foram baseadas no comportamento dos resíduos quantílicos, sendo três delas feitas em observações mal ajustadas para a série de vazão e uma para a série de fator de capacidade. A verossimilhança, e os critérios de informação do modelo são reportados na Tabela 7.13. A tabela apresenta ainda as medidas considerando um modelo com a suposição de independência entre os processos de vento e vazão, sendo os modelos para cada processo os respectivos modelos univariados com estrutura SARIMA. Olhando apenas para a verossimilhança e para os critérios de informação, verifica-se vantagem dos modelos univariados <sup>1</sup>.

Tabela 7.13: Verossimilhança e critérios de Informação por tipo de modelo.

Modelo	Medidas		
	Log-Ver.	AIC	BIC
Bivariada	-2616,1	5326,2	5509,8
Univariada	-2513,6	5119,2	5298,8

As séries de vazão e fator de capacidade, junto às previsões 1-passo à frente obtidas pelo modelo bivariado, podem ser vistas na Figura 7.22. De forma geral, o modelo expressa a dinâmica dos processos de vazão e fator de capacidade no período de estimação. Como nos modelos univariados, são

<sup>1</sup>Para esta análise, entenda-se por modelagem univariada a construção do modelo bivariado supondo independência dos processos de vazão e vento. Neste caso, a verossimilhança conjunta é obtida a partir do produto das verossimilhanças dos modelos univariados. Além disso, os critérios de informação são gerados a partir desta verossimilhança conjunta e da soma dos parâmetros dos modelos univariados.

observados maiores descolamentos entre observações e previsões para a série de vazão. Na série de fator de capacidade, há maior dificuldade na previsão de valores pequenos.

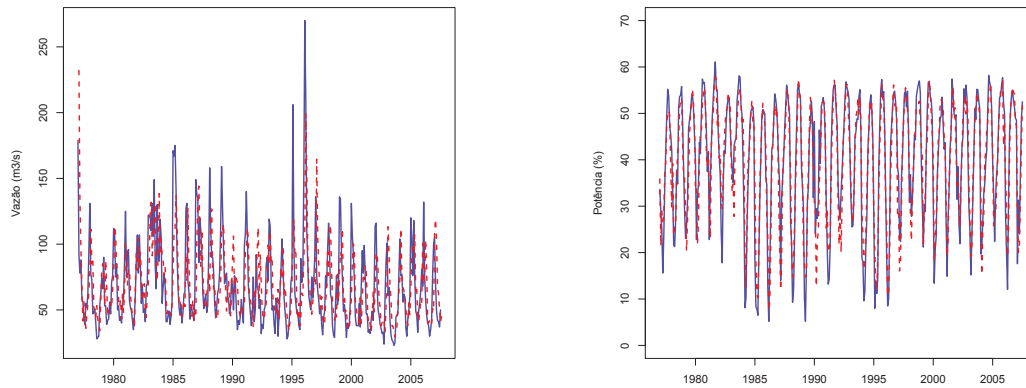


Figura 7.22: Séries de Vazão e Fator de Capacidade e previsões 1-passo à frente para período de estimação com o modelo Gama-Beta.

Por este modelo bivariado, é possível monitorar a covariância/correlação entre a vazão e o vento ao longo do tempo, visto que estas componentes dependem de parâmetros dinâmicos - Eq.(5-10). A correlação implicada pelo modelo é sempre negativa ao longo do tempo, atingindo as maiores intensidades nos meses de setembro, outubro e novembro (Figura 7.23).

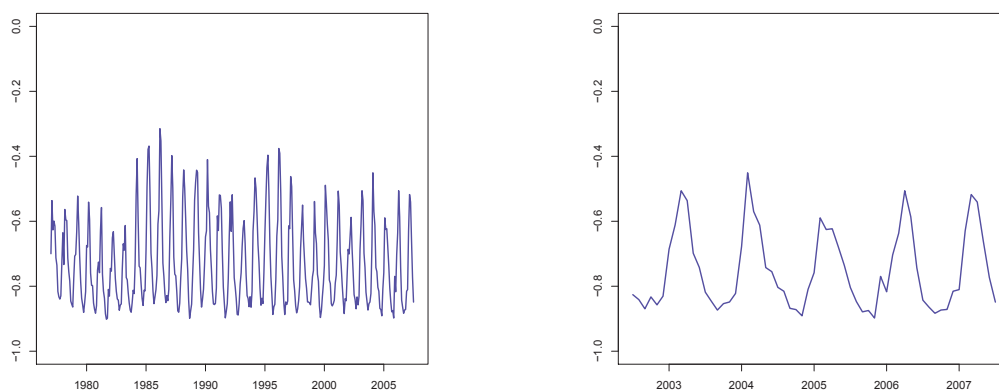


Figura 7.23: Correlação dinâmica entre os processos de Vazão e Fator de Capacidade para o período de estimação.

Constam na Tabela 7.14 as medidas de ajustamento dentro e fora da amostra. Comparativamente aos resultados obtidos através dos modelos univariados com estrutura SARIMA, a previsibilidade dentro da amostra do modelo bivariado é levemente inferior para a série de vazão, e um pouco

superior para a série de fator de capacidade. A previsibilidade fora da amostra levantada por simulação, que mede efetivamente a capacidade do modelo para prever cenários em um horizonte maior, é inferior em relação aos respectivos modelos univariados para as duas séries em estudo.

Tabela 7.14: Medidas de ajustamento para modelo bivariado Gama-Beta.

Período	Medidas	Vazão	Vento
Dentro da amostra	RMSE	18,2	5,1
	MAE	12,8	3,9
	MASE	0,67	0,57
	sMAPE	8,9	6,6
	pseudo R2	0,72	0,86
Fora da amostra <sup>1</sup>	RMSE	12,9	9,6
	MAE	10,9	7,4
	MASE	0,57	1,08
	sMAPE	8,9	14,9
	pseudo R2	0,85	0,89
Fora da amostra <sup>2</sup>	RMSE	11,5	6,1
	MAE	9,3	4,6
	MASE	0,48	0,68
	sMAPE	8,2	10,1
	pseudo R2	0,85	0,91

Nota: (1) Previsões fora da amostra  $k$ -passos à frente, levantadas por simulação. (2) Previsões fora da amostra 1-passo à frente, com atualização pelas observações reais.

As previsões fora da amostra podem ser vistas nas Figuras 7.24 e 7.26, respectivamente. As previsões obtidas por simulação, as quais se valem apenas da informação do período de estimação, apresentaram intervalos de confiança com amplitudes muito grandes, comparados aos respectivos resultados dos modelos univariados, principalmente para a série de vazão. Este resultado pode estar associado tanto à incerteza intrínseca da modelagem conjunta destes processos, como da estrutura utilizada para a modelagem. Especificamente para o processo de vazão, conforme pode visto pela Eq.(3-3), a variância é inversamente proporcional ao parâmetro  $\alpha$  do modelo, e a estimativa deste parâmetro foi bastante inferior no modelo bivariado (10.56 contra 18.41, vide Apêndice B).

Pelos resultados da Tabela 7.15, verifica-se que a dependência linear dos processos modelados foi capturada pelo modelo proposto, resultado confirmado pelo teste de Ljung-Box nos resíduos. A função de autocorrelação dos resíduos do modelo para a série de vazão apresenta alguns coeficientes relativamente elevados para os primeiros *lags*. Porém, deve-se ter em mente que os correlogramas foram obtidos com o *software* R, e os intervalos de confiança são aproxima-

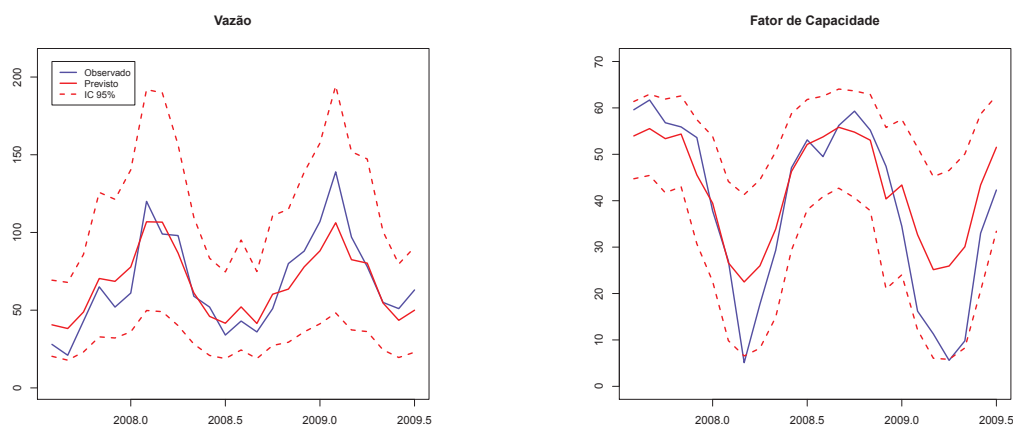


Figura 7.24: Previsões fora da amostra levantadas por simulação - modelo Gama-Beta.

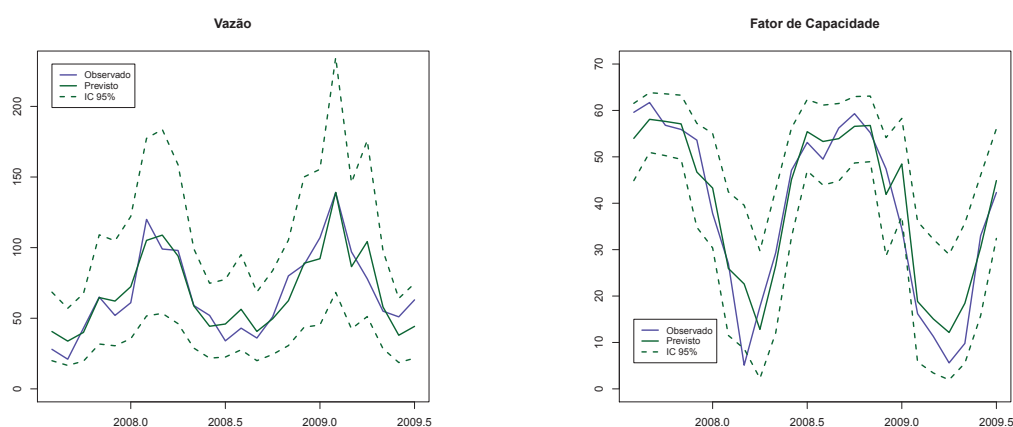


Figura 7.25: Previsões fora da amostra 1-passo à frente - modelo Gama-Beta.

dos, devendo ser avaliados apenas como indicativos. Quanto à normalidade dos resíduos quantílicos, mesmo antes das intervenções os resíduos correspondentes à série de fator de capacidade já apresentavam normalidade. Contudo, após a inclusão das intervenções nas observações mal ajustadas, a normalidade não foi rejeitada para ambas as séries de resíduos quantílicos. Vale mencionar que a estrutura de dependência no quadrado dos resíduos quantílicos correspondentes à série de fator de capacidade foi verificada neste modelo, à semelhança do que ocorreu nos modelos univariados.

Tabela 7.15: P-valor dos testes de autocorrelação, heterocedasticidade e normalidade nos resíduos quantílicos do modelo Gama-Beta.

Estatística	Vazão	Vento
Autocorrelação	0,11	0,19
Heterocedasticidade	0,24	0,00
Normalidade	0,10	0,66

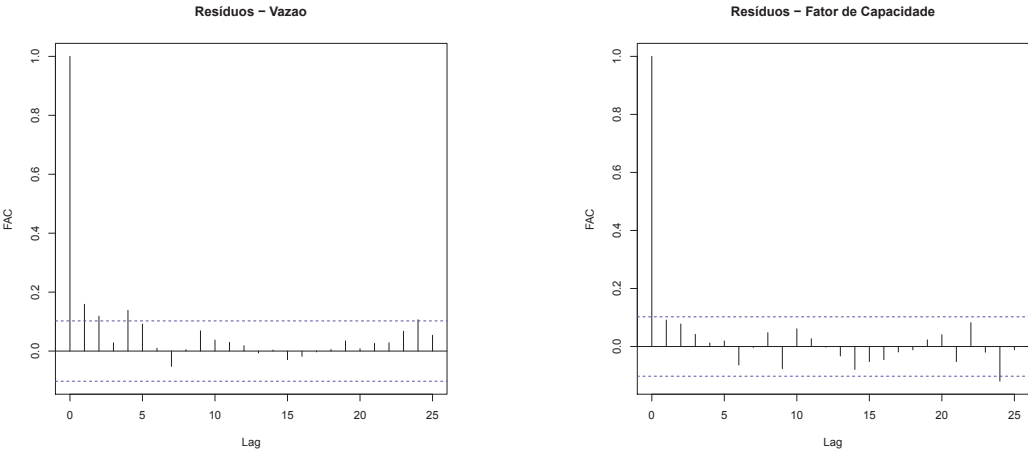


Figura 7.26: FAC dos resíduos quantílicos - modelo Gama-Beta.

7.5  
Análise Comparativa dos Resultados

Para os modelos univariados, os resultados foram semelhantes para ambas as estruturas de evolução, sendo que nos modelos de componentes não observáveis existe uma certa vantagem, em virtude da interpretabilidade de suas componentes. A inclusão das séries de Energia Natural Afluente como variáveis exógenas nos modelos melhorou a capacidade preditiva destes, tanto dentro quanto fora da amostra, principalmente nos modelos aplicados à série de vazão. Ainda, a inclusão de intervenções por variáveis *dummy* para observações mal ajustadas se refletiu na normalidade dos resíduos quantílicos para os modelos univariados, a menos dos modelos beta de componentes. Nos modelos beta, verificou-se para ambas as estruturas de evolução resíduos com alguma estrutura de dependência no quadrado dos resíduos, as quais permaneceram mesmo após a inclusão de intervenções para as observações mal ajustadas.

Quanto ao modelo bivariado proposto para a modelagem conjunta dos processos de vazão e vento, o processo de estimação se mostrou bastante complexo. Claramente, os ótimos obtidos são sensíveis aos valores iniciais. A heurística utilizada para a estimação (indicada no Apêndice B) ajudou a amenizar este problema. Os resultados em relação à previsibilidade por este modelo foram semelhantes àqueles obtidos com os modelos univariados com

a mesma estrutura de evolução. Comparativamente aos modelos univariados com evolução SARIMA, as medidas de ajustamento dentro da amostra para o modelo bivariado foram um pouco superiores para a série de fator de capacidade, ocorrendo o contrário em relação à vazão. As previsões fora da amostra, principalmente para a série de vazão, apresentaram intervalos de confiança com amplitudes elevadas, o que deve se refletir em cenários simulados com grandes variâncias entre si. Logo, a metodologia deve ser testada com outras séries antes de aplicações efetivas na tomada de decisões.

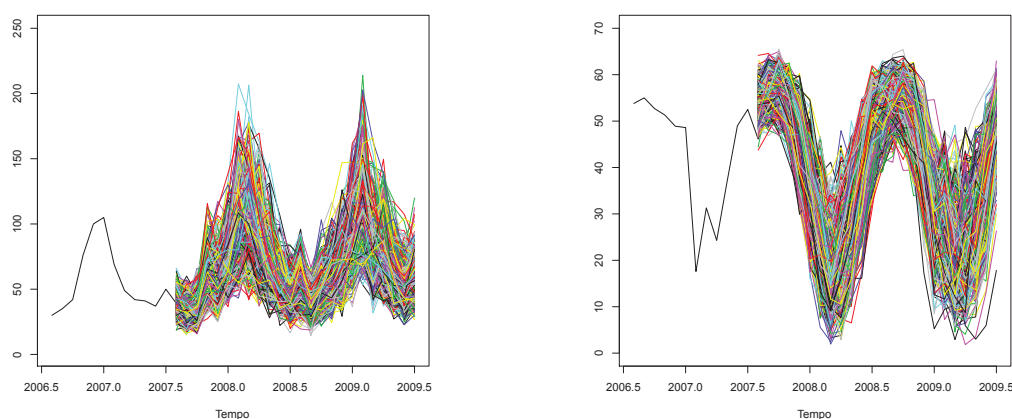


Figura 7.27: Cenários simulados das séries de Vazão e Fator de Capacidade pelos modelos univariados com evolução SARIMA para cômputo das previsões.

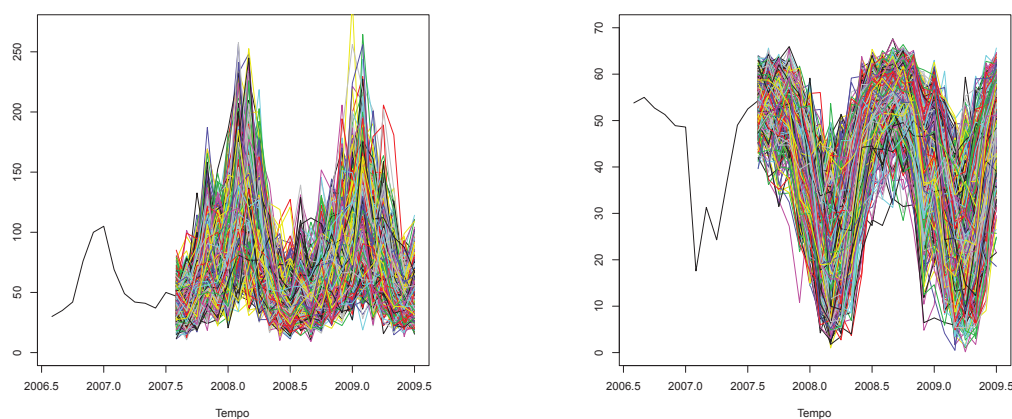


Figura 7.28: Cenários simulados das séries de Vazão e Fator de Capacidade pelo modelo bivariado para cômputo das previsões.

A título de ilustração, as Figuras 7.27 e 7.28 apresentam 1.000 dos 10.000 cenários simulados utilizados para o cômputo das previsões fora da amostra pelos modelos univariados e bivariado com evolução SARIMA. O comportamento esperado para cenários simulados de longo prazo pelos modelos desenvolvidos nesta dissertação é análogo ao observado nestas figuras.



A principal vantagem do modelo bivariado apresentado ocorre na simulação de cenários futuros integrados. Quando as modelagens são feitas por modelos da classe VARMA, com a suposição de normalidade das séries, os cenários simulados podem ter valores negativos, e fora do intervalo  $[0, 100]$  para o fator de capacidade, o que não ocorre com o modelo GAS Gama-Beta, pelo suporte das distribuições marginais. A partir dos cenários futuros simulados das séries ENA, obtidas pelo NEWAVE, a simulação dos cenários integrados de vazão e vento pelo modelo bivariado se dá à semelhança das simulações utilizadas para o cômputo das previsões fora da amostra.

## 8

### Considerações Finais

A incorporação de parâmetros variantes no tempo em modelos de séries temporais é importante em várias ocasiões para a captura do comportamento dinâmico dos processos. Neste contexto, os modelos GAS se mostraram uma boa alternativa para a construção de modelos não-lineares e não-gaussianos aplicáveis à modelagem de séries mensais de vazão e vento.

Os modelos GAS se diferenciam dos demais modelos guiados por observações principalmente por exportarem a estrutura completa da verossimilhança para a atualização dos parâmetros, não apenas a média ou momentos de ordem superior. Tais modelos possuem como casos particulares uma vasta gama de modelos da literatura de séries temporais e finanças, como os modelos GARCH, MEM, ACI, ACD, VARMA e os modelos com fonte única de erros. Além disso, tem-se a facilidade de criar novos modelos com parâmetros variantes no tempo a partir de qualquer densidade preditiva, desde que esta possua forma fechada para o gradiente e a matriz de informação de Fisher em relação ao parâmetro que se deseja dinâmico. Quando não há uma forma fechada para a matriz de informação, usada para a ponderação do *score*, é possível trabalhar com aproximações numéricas.

Nas aplicações com a série de vazão do Rio Paraíba e de fator de capacidade de uma usina eólica não divulgada da região Nordeste, verificou-se para os modelos univariados desempenhos semelhantes para ambas as estruturas de evolução propostas, ou seja, SARIMA e em componentes não observáveis. A previsibilidade fora da amostra para a série de fator de capacidade foi consideravelmente inferior àquela observada dentro da amostra, resultado comum na previsão de séries de velocidade de vento ou fator de capacidade eólico.

Para o modelo beta aplicado à série de fator de capacidade, os resíduos quantílicos apresentaram uma estrutura senoidal em seus quadrados. Esta estrutura permaneceu mesmo após a inclusão de intervenções para a acomodação de observações mal ajustadas, que por hipótese, eram a principal causa deste efeito. No caso dos modelos gama, o desempenho fora da amostra foi semelhante àquela observado no período utilizado para a estimação, e de forma geral, os resíduos se mostraram bem comportados, embora uma pequena es-

estrutura no quadrado destes foi verificada após a inclusão de intervenções.

A utilização das séries de Energia Natural Afluente como variáveis exógenas melhorou o desempenho dos modelos em relação aos valores das verossimilhanças e das medidas de ajustamento dos modelos. Além disso, a inclusão de intervenções por meio de variáveis exógenas do tipo *dummy* implicou na não rejeição da normalidade dos resíduos quantílicos na maior parte das aplicações apresentadas, sendo um dos indicativos de correta especificação das distribuições condicionais postuladas. Em aplicações futuras, outras séries podem ser utilizadas enquanto variáveis exógenas, como índices relacionados aos fenômenos *El Niño* e *La Niña*.

Conforme se ressaltou, a estabilização sazonal da oferta de energia é um grande desafio para o Brasil, principalmente pelas flutuações sazonais dos regimes hidrológicos, por vezes de grande amplitude. Modelos que permitem a análise e geração conjunta de cenários de vazão e vento se tornam importantes neste contexto. O modelo GAS bivariado apresentou bons resultados para as séries de vazão e fator de capacidade eólico, com previsibilidade dentro e fora da amostra semelhante à dos modelos univariados, e a vantagem de se levar em conta a complementaridade sazonal entre os processos na modelagem, permitindo assim a geração de cenários integrados. Este mesmo modelo será posteriormente utilizado na modelagem conjunta da série de vazão já apresentada e de uma série de fator de capacidade eólico de Icaraizinho (CE), série com maior quantidade de informações disponíveis e que podem ser utilizadas como variáveis exógenas.

Como esperado, o processo de estimação se mostrou mais complexo no modelo bivariado. O número de parâmetros do modelo é bastante elevado e os ótimos encontrados se mostraram sensíveis aos valores iniciais. Contudo, o método *ad hoc* indicado no Apêndice B para a obtenção dos ótimos forneceu maior segurança aos resultados obtidos. A Hessiana avaliada no ótimo, utilizada para o cálculo dos intervalos de confiança dos parâmetros, se mostrou instável. Uma metodologia baseada na técnica de reamostragem *bootstrap* é apresentada no Apêndice B, podendo ser utilizada em trabalhos futuros para o cálculo dos intervalos de confiança das estimativas.

As previsões fora da amostra  $k$ -passos à frente obtidas pelo modelo bivariado apresentaram intervalos de confiança com amplitudes superiores às dos respectivos modelos univariados, principalmente para a série de vazão. Dessa forma, os cenários simulados com este modelo devem apresentar maior variância entre si do que aqueles obtidos com modelos univariados.

As medidas de ajustamento do modelo bivariado estão muito próximas às obtidas em Amaral (2011), trabalho realizado com base nas mesmas séries

através de um modelo bivariado VARX. A principal vantagem dos modelos GAS ocorre exatamente na simulação de cenários integrados, pois em virtude do suporte das distribuições marginais do modelo, sempre serão gerados valores positivos para a vazão e entre os limites  $[0, k]$  para a série de fator de capacidade eólico, onde  $k \leq 100$ . Do ponto de vista teórico, algumas limitações dos modelos GAS são o pouco conhecimento acerca de suas propriedades, distribuição assintótica dos estimadores, etc., resultados já consolidados para os modelos da classe VARMA. A estimação é complicada em ambos os cenários.

Quanto aos aspectos teóricos dos modelos GAS, a estacionariedade e a ergodicidade foram exploradas em Blasques *et al.* (2012) para alguns casos particulares, em especial, modelos com médias variantes no tempo. No entanto, há ainda muito a se desenvolver em relação à identificação, consistência, propriedades assintóticas dos estimadores, etc. Nos estudos de simulação para os modelos univariados gama e beta, a distribuição assintótica normal se mostrou adequada aos estimadores dos parâmetros estáticos, conforme se conjecturou inicialmente.

A identificação das ordens dos processos GAS foi feita por tentativa e erro, a partir do comportamento dos resíduos quantílicos. Contudo, o desenvolvimento de ferramentas formais de identificação pode eliminar as dificuldades encontradas ao longo deste trabalho e tornar os resultados mais robustos em aplicações reais.

Nos modelos trabalhados, a inicialização foi realizada de modo heurístico, implicando em estimadores de máxima verossimilhança condicional. O desenvolvimento de alternativas teóricas de inicialização pode melhorar consideravelmente os resultados, sobretudo em aplicações a dados sazonais, que requerem muitos valores iniciais dos parâmetros variantes no tempo e do *score*, à semelhança do que ocorre com os modelos SARIMA em relação aos termos autoregressivos e de médias móveis antes do início da série. Outra questão de grande interesse é o desenvolvimento de novas heurísticas para a maximização das funções de verossimilhança, bem como a obtenção de valores iniciais de forma inteligente para os parâmetros estáticos do modelo.

## Referências Bibliográficas

- [1] AMARANTE, O. A. C., SCHULTZ, D. J., BITTENCOURT, R. M. e ROCHA, N. A. Wind/hydro complementary seasonal regimes in brazil. **DEWI Magazin**, n. 19, p. 79-86, 2001.
- [2] AMARAL, B. M. **Modelos VARX para geração de cenários de vento e vazão aplicados à comercialização de energia**. 2011. 155f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - PUC-Rio, Rio de Janeiro. 2011.
- [3] BLASQUES, F., KOOPMAN, S. J. e LUCAS, A. Stationarity and Ergodicity of Univariate Generalized Autoregressive Score Processes. **Tinbergen Institute Discussion Paper**, n. 59, 2012.
- [4] BROCKWELL, P. J. e DAVIS, R. A. **Introduction to Time Series and Forecasting**. New York: Springer, 2002.
- [5] CASARIN, R., Valle, L. D. e LEISEN, F. Bayesian Model Selection for Beta Autoregressive Processes. **Bayesian Analysis**, v. 7, n. 2, p. 385-410, 2012.
- [6] COX, D. R. Statistical analysis of time series: some recent developments. **Scandinavian Journal of Statistics**, v. 8, p. 93-115, 1981.
- [7] CREAL, D., KOOPMAN, S. J. e LUCAS, A. A General Framework for Observation Driven Time-Varying Parameter Models. **Tinbergen Institute Discussion**, n. 108, 2008.
- [8] CREAL, D., KOOPMAN, S. J. e LUCAS, A. Generalized Autoregressive Score Models with Applications. **Journal of Applied Econometrics**, v. 28, 2013. No prelo.
- [9] DA-SILVA, C. Q., MIGON, H. S. e CORREIA, L. T. Dynamic Bayesian Beta Models. **Computational Statistics Data Analysis**, v. 55, n. 6, p. 2074-2089, 2011.

- [10] DAVIS, R. A., DUNSMUIR, W. T. M. e STREETT S. B. Observation driven models for Poisson counts. **Biometrika**, v. 90, n. 4, p. 777-790, 2003.
- [11] DURBIN, J. e KOOPMAN, S. J. **Time Series Analysis by State Space Methods**. New York: Oxford University Press, 2001.
- [12] ENGLE, R. F. New Frontiers for ARCH Models. **Journal of Applied Econometrics**, v. 17, p. 425-446, 2002.
- [13] ENGLE, R. F. e RUSSEL, J. R. Autoregressive conditional duration: a new model for irregularly spaced transaction data. **Econometrica**, v. 66, n. 5, p. 1127-1162, 1998.
- [14] ENGLE, R. F. e BOLLERSLEV, T. Modelling the persistence of conditional variances. **Econometric Reviews**, v. 5, n. 1, p. 1-50, 1986.
- [15] FIORENTINI, G., CALZOLARI G. e PANATTONI, L. Analytic derivatives and the computation of GARCH estimates. **Journal of Applied Econometrics**, v. 11, n. 4, p. 399-417, 1996.
- [16] HARVEY, A. C. **Forecasting, structural time series models and the Kalman Filter**. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
- [17] HYNDMAN, R. J. e KOEHLER, A. B. Another look at measures of forecast accuracy. **International Journal of Forecasting**, v. 22, n. 4, p. 679-688, 2006.
- [18] HYNDMAN, R. J., KOEHLER, A. B., ORD, J. K. e SNYDER, R. D. **Forecasting with Exponential Smoothing: The State Space Approach**. Berlin: Springer-Verlag, 2008.
- [19] KALLIOVIRTA, L. **Diagnostic Tests Based on Quantile Residuals for Nonlinear Time Series Models**. 2009. 165 f. Thesis (Doctorate in Economics) - University of Helsinki, Helsinki. 2009.
- [20] MARENGO, J. A. e ALVES, L. M. Tendências Hidrológicas da Bacia do Rio Paraíba do Sul. **Revista Brasileira de Meteorologia**, v. 20, n. 2, p. 215-226, 2005.
- [21] MARINHO, M. H. N. e AQUINO, R. R. B. Oferta de energia através da complementaridade sazonal hidro-eólica. **PCH Notícias & SHP News**, n. 40, p. 24-28, 2009.

- [22] MATHIER, L., PERREAULT, L. e BOBÉE, B. The use of geometric and gamma-related distributions for frequency analysis of water deficit. **Stochastic Hydrology and Hydraulics**, v. 6, p. 239-254, 1992.
- [23] NADARAJAH, S. A bivariate distribution with gamma and beta marginals with application to drought data. **Journal of Applied Statistics**, v. 36, n. 3, p. 277-301, 2009.
- [24] ORD, J. K., KOEHLER, A. B. e SNYDER, R. D. Estimation and prediction for a class of dynamic nonlinear statistical models. **Journal of the American Statistical Association**, v. 92, n. 440, p. 1621 - 1629, 1997.
- [25] LUCCHETTI, R. Analytical Score for Multivariate GARCH Models, **Computational Economics**, v. 19, n.2, p.133-143, 2002.
- [26] WEST, M., HARRISON, P. J. e MIGON, H. S. Dynamic Generalized Linear Models and Bayesian Forecasting. **Journal of the American Statistical Association**, v. 81, p. 741-750, 1985.
- [27] YUE, S., OUARDA, T. B. M. J. e BOBÉE, B. A review of bivariate gamma distributions for hydrological application. **Journal of Hydrology**, v. 246, p. 1-18, 2001.

## A

### Apêndice A

Os exemplos apresentados a seguir são modelos conhecidos na literatura econométrica e de séries temporais. A partir de escolhas apropriadas dos parâmetros variantes no tempo, bem como do mecanismo de ponderação do vetor *score*, estes podem ser vistos como casos particulares dos modelos GAS.

#### Exemplo 1: Modelos GARCH

Considere o modelo  $y_t = \sigma_t \epsilon_t$ , onde a inovação  $\epsilon_t$  possui distribuição normal padrão e  $\sigma_t^2$  representa a variância condicional. Dessa forma, tomando  $f_t = \sigma_t^2$ , é possível verificar que para certas escolhas dos parâmetros  $A_1$  e  $B_1$  do modelo GAS(1,1), obtêm-se o modelo GARCH(1,1).

$$p(y_t/f_t, F_t, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi f_t}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2f_t} y_t^2\right)$$

$$\nabla_t = \frac{1}{2f_t^2} (y_t^2 - f_t)$$

$$I_{t/t-1} = \frac{1}{2f_t^2}$$

Tomando  $s_t = I_{t/t-1}^{-1} \nabla_t$ , observa-se

$$f_{t+1} = w + A_1(y_t^2 - f_t) + B_1 f_t \quad (\text{A-1})$$

que é equivalente ao modelo GARCH(1,1) padrão, cujo mecanismo de atualização é dado por



$$f_{t+1} = \alpha_0 + \alpha_1 y_t^2 + \beta_1 f_t, \quad f_t = \sigma_t^2 \quad (\text{A-2})$$

com coeficientes  $\alpha_1 = A_1$  e  $\beta_1 = (B_1 - A_1)$ , os quais são desconhecidos e requerem certas condições para garantir a estacionariedade do modelo.

Para  $\epsilon_t$  com distribuição  $t$  de Student com  $v$  graus de liberdade e variância unitária, a equação de atualização dada pelo modelo GAS(1,1) apresenta diferenças consideráveis em relação ao modelo  $t$ -GARCH(1,1), de Bollerslev (1986). Adotando novamente  $f_t = \sigma_t^2$ , segue que

$$p(y_t/f_t, F_t, \theta) = \frac{\Gamma((v+1)/2)}{\Gamma(v/2)\sqrt{\pi(v-2)f_t}} \left[ 1 + \frac{y_t^2}{(v-2)f_t} \right]^{-(v+1)/2}$$

$$\nabla_t = \frac{\partial \ln p(y_t/f_t, F_t, \theta)}{\partial f_t} = \frac{1}{2f_t^2} \left[ \frac{(1+v^{-1})}{(1-2v^{-1})(1+v^{-1}y_t^2/(1-2v^{-1})f_t)} y_t^2 - f_t \right]$$

$$I_{t/t-1} = E_{t-1}(\nabla_t \nabla_t') = \frac{1}{2f_t^2} \frac{1}{(1+3v^{-1})}$$

Utilizando a inversa da informação do vetor de Fisher como ponderação do vetor *score*, o mecanismo de atualização da variância condicional pode ser escrito da seguinte forma:

$$f_{t+1} = w + A_1(1+3v^{-1}) \left[ \frac{(1+v^{-1})}{(1-2v^{-1})(1+v^{-1}y_t^2/(1-2v^{-1})f_t)} y_t^2 - f_t \right] + B_1 f_t \quad (\text{A-3})$$

Quando  $v \rightarrow \infty$ , a distribuição  $t$  de Student se reduz à normal padrão, e consequentemente a equação de atualização da variância condicional (A-3) se reduz a (A-1). Segundo Creal *et al.* (2013), a recursão dada em (A-3) apresenta uma importante diferença em relação ao modelo  $t$ -GARCH(1,1), que possui  $\epsilon_t$  seguindo uma distribuição  $t$  de Student com variância unitária e equação de atualização dada por (A-2), visto que o denominador do segundo termo ao lado direito da equação (A-3) causa um crescimento mais moderado na variância condicional para uma realização grande de  $|y_t|$  quando  $v$  é finito. De acordo com os autores, se as inovações são modeladas por uma distribuição de

cauda pesada, uma realização com valor absoluto elevado não precisa implicar necessariamente em um grande acréscimo na variância condicional.

Em Creal *et al.* (2013) é apresentado ainda um modelo de heterocedasticidade condicional construído a partir da distribuição de Laplace assimétrica. Mostra-se que adotando a parametrização  $f_t = \log(\sigma_t^2)$  neste modelo, onde  $\sigma_t^2$  é a variância condicional do processo, o mecanismo de atualização obtido é análogo ao do modelo EGARCH, o qual possui termos para a captura da assimetria nos *clusters* de volatilidade em séries de retornos financeiros.

### Exemplo 2: Modelos MEM, ACI e ACD

Seja o modelo  $y_t = \lambda_t \epsilon_t$ , onde  $\epsilon_t \sim \text{Gama}(\alpha, \alpha^{-1})$  e  $\lambda_t$  é a média condicional do processo. Modelos com esta especificação são utilizados em finanças para a modelagem de dados não negativos, por exemplo, o volume de ações negociadas por intervalos de tempo, ou a diferença entre o maior e o menor preço de um ativo por período.

Adotando-se  $f_t = \lambda_t$ , a especificação GAS para  $y_t$  é equivalente ao modelo de erro multiplicativo (MEM), proposto por Engle (2002).

$$p(y_t/f_t, F_t, \theta) = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)\lambda_t^\alpha} y_t^{\alpha-1} \exp\left(-\alpha \frac{y_t}{\lambda_t}\right)$$

$$\nabla_t = \frac{\alpha}{f_t} \left( \frac{y_t}{f_t} - 1 \right)$$

$$I_{t/t-1} = \frac{\alpha}{f_t^2}$$

Tomando  $s_t = I_{t/t-1}^{-1} \nabla_t$ , segue que

$$f_{t+1} = w + A_1(y_t - f_t) + B_1 f_t \quad (\text{A-4})$$

Adotando-se  $\alpha = 1$ , tem-se como caso particular os modelos autoregressivos de duração condicional (ACD), de Engle e Russel (1998). Fazendo-se ainda  $\alpha = 1$ , porém com  $f_t = \log(1/\lambda_t)$ , obtêm-se o modelo autoregressivo de intensidade condicional (ACI), de Russel (2001). Os modelos gama com evolução

do tipo SARIMA, desenvolvidos posteriormente e utilizados na modelagem de um processo de vazão, estão estreitamente relacionados ao modelo MEM, com a principal diferença na função de ligação entre o parâmetro variante no tempo  $f_t$  e a média condicional do processo, que nos modelos MEM é a função identidade, e nos modelos desenvolvidos a função logarítmica.

### Exemplo 3: Modelos de regressão dinâmica

Considere o modelo de regressão dinâmica  $y_t = x_t' \beta_t + \epsilon_t$ , onde  $x_t$  é um vetor de variáveis exógenas com dimensão  $k \times 1$ ,  $\beta_t$  o vetor com os coeficientes de regressão dinâmicos, também com dimensão  $k \times 1$  e  $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ . Fazendo  $f_t = \beta_t$ , verifica-se que

$$\nabla_t = \frac{x_t(y_t - x_t' \beta_t)}{\sigma^2}, \quad I_{t/t-1} = \frac{(x_t x_t')}{\sigma^2} \quad (\text{A-5})$$

Fazendo  $S_t = I_{t/t-1}^{-1}$ , a equação de atualização dada pela especificação GAS(1,1) para um modelo de regressão dinâmica é dada por

$$f_{t+1} = w + A_1(x_t x_t')^{-1} x_t(y_t - x_t' f_t) + B_1 f_t \quad (\text{A-6})$$

Quando  $x_t = 1$ , a Eq.(A-6) de atualização se reduz ao esquema de suavização exponencial fazendo  $w = 0$  e  $B_1 = 1$ .

$$f_{t+1} = A_1(y_t - f_t) + f_t \quad (\text{A-7})$$

Neste caso, obtêm-se o modelo guiado por observações análogo ao modelo de nível local, que é da classe de modelos guiados por parâmetros, e cuja avaliação é feita através do Filtro de Kalman. O modelo de nível local é dado por

$$y_t = \mu_t + \epsilon_t, \quad \mu_{t+1} = \mu_t + \eta_t \quad (\text{A-8})$$

onde  $\epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$ ,  $\eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)$  e  $Cov(\epsilon_t, \eta_s) = 0, \forall t, s = 1, 2, \dots$

Segundo Creal *et al.* (2013), uma ligação direta entre esses modelos é obtida quando se faz  $\eta_t = A_1(y_t - f_t) = A_1 \epsilon_t$  e se considera  $f_t$  como a estimativa filtrada de  $\mu_t$ , mostrando assim que os modelos GAS apresentam estrita relação com os modelos com uma única fonte de erros, de Ord *et al.* (1997). Contudo os modelos GAS permitem ainda a extensão destes modelos, por exemplo, ampliando o esquema de atualização da suavização exponencial dado pela Eq.(A-7) quando  $\sigma^2$  é também um parâmetro variante no tempo, ou seja,  $f_t = (\beta_t, \sigma_t^2)'$ .

**Exemplo 4: Modelos dinâmicos da família exponencial**

A classe de modelos da família exponencial com vetor de observações  $y_t$  pode ser representado pela função densidade

$$p(y_t/f_t, F_t, \theta) = \exp[\gamma' y_t - c(\gamma) + h(y_t)] \quad (\text{A-9})$$

com funções escalares  $c(\cdot)$  e  $h(\cdot)$  e com um vetor de parâmetros  $\gamma$ , de dimensão  $m \times 1$ . Para construir um modelo com parâmetros variantes no tempo pode-se tomar o vetor estático  $\gamma$  como um vetor  $\gamma_t$ , dado por:

$$\gamma_t = d + Z f_t \quad (\text{A-10})$$

onde  $d$  possui dimensão  $m \times 1$ , a matriz de fatores  $Z$  possui dimensão  $m \times r$  e o vetor de parâmetros variantes no tempo  $f_t$  é  $r \times 1$ , sendo o mecanismo de atualização deste último obtido através do arcabouço GAS. Os coeficientes desconhecidos de  $d$  e  $Z$  passam a compor o vetor  $\theta$ . Pela regra da cadeia, prova-se que

$$\nabla_t = Z' [y_t - \dot{c}(\gamma_t)], \quad I_{t/t-1} = Z' \ddot{c}(\gamma_t) Z \quad (\text{A-11})$$

onde  $\dot{c}(\gamma_t) = \partial c(\gamma_t) / \partial \gamma_t$  e  $\ddot{c}(\gamma_t) = \partial^2 c(\gamma_t) / \partial \gamma_t \partial \gamma_t'$ . Adotando  $S_t = I_{t/t-1}^{-1}$  e a Poisson como densidade preditiva (A-9), são obtidos os modelos de Davis *et al.* (2003) para dados de contagem.

**Exemplo 5: Modelos VARMA**

Seja  $y_t$  um vetor multivariado de dimensão  $k \times 1$ , cuja evolução é dada por um modelo  $VARMA(p', q')$ , o qual pode ser expresso da seguinte forma:

$$y_t = w + \sum_{i=1}^{p'} \Theta_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^{q'} \Phi_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \quad (\text{A-12})$$

onde  $\varepsilon_t \sim N_k(0, \Sigma)$ ,  $\forall t = 1, 2, \dots$  e  $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ ,  $\forall t \neq s$ .

Tomando  $y_t$  como uma normal multivariada com vetor de médias variante no tempo  $\mu = f_t$ , cujo mecanismo de atualização seja dado pelo arcabouço GAS, e matriz de variâncias e covariâncias  $\Sigma$  constante, pode-se mostrar que o modelo GAS para esta distribuição preditiva pode ser visto como um modelo VARMA com dimensões específicas.

$$(y_t/f_t, F_t, \theta) \sim N(f_t, \Sigma), \quad \nabla_t = \Sigma^{-1}(y_t - f_t), \quad S_t = I_{t-1}^{-1} = \Sigma \quad (\text{A-13})$$

Visto que  $y_t = f_t + \varepsilon_t$ , o mecanismo de atualização do vetor de médias variantes no tempo pode ser escrito como

$$\begin{aligned} f_{t+1} &= w + \sum_{i=1}^p A_i s_{t-i+1} + \sum_{j=1}^q B_j f_{t-j+1} \\ &= w + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (A_i - B_i) \varepsilon_{t-i+1} + \sum_{j=1}^q B_j y_{t-j+1} \end{aligned} \quad (\text{A-14})$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} y_t &= f_t + \varepsilon_t \\ &= w + \sum_{i=1}^q B_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^{\max(p,q)} (A_j - B_j) \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (\text{A-15})$$

Logo, se  $y_t$  é gerado de acordo com um processo GAS( $p, q$ ) com distribuição preditiva normal e vetor de médias variando, o mesmo pode ser visto como um modelo VARMA( $p', q'$ ) com  $p' = q$  e  $q' = \max(p, q)$ .

De modo análogo, é possível mostrar que qualquer modelo VARMA( $p', q'$ ) pode ser expresso como um modelo GAS. Esta demonstração é feita a partir da comparação entre as equações (A-12) e (A-15), diferenciando as situações onde  $p' = q'$ ,  $p' \leq q'$  ou  $p' \geq q'$ . Por exemplo, se  $p' = q'$  na Eq.(A-12) do modelo VARMA, o modelo GAS equivalente é obtido fazendo-se na Eq.(A-15)  $B_i = \Theta_i$  e  $A_j = \Phi_j + \Theta_j$ , respectivamente.

Os resultados acima atestam a comunicação entre os modelos GAS e VARMA, de forma que estes últimos podem ser vistos como casos particulares do modelo GAS para a distribuição normal multivariada com vetor de médias variante no tempo e matriz de variâncias e covariâncias constante.

## B

### Apêndice B

Na estimação por máxima verossimilhança, fez-se uso de algumas heurísticas nos processos de otimização não-linear. Os pacotes *optim* e *optimx* (principalmente este último) do *software* R foram utilizados. Para cada um dos modelos avaliados, foram gerados 20 conjuntos de coeficientes de forma aleatória como valores iniciais. Os valores para os parâmetros das equações de atualização foram gerados por uniformes, e para os parâmetros de forma, através de normais, cujas médias foram adotadas com base em estimações estáticas.

Os métodos de Nelder-Mead e BFGS foram utilizados. Os conjuntos gerados foram utilizados como valores iniciais para o algoritmo de Nelder-Mead. Posteriormente, os ótimos encontrados foram utilizados como valores iniciais para o método BFGS, cujos ótimos foram novamente utilizados pelo algoritmo de Nelder-Mead, e assim por diante. Para os modelos univariados, a partir da sexta iteração entre os algoritmos, os parâmetros não se alteravam mais, e para os modelos bivariados, a partir da segunda. O gradiente avaliado nos ótimos para os modelos Gama esteve muito próximo de 0, não ocorrendo o mesmo para os modelos Beta e Gama-Beta. Além disso, para os modelos univariados de componentes não observáveis, as estimativas finais permaneciam próximas mesmo utilizando valores iniciais bastante distintos, inclusive pelo fato de estes modelos serem mais parcimoniosos.

Por questões de estabilidade, as verossimilhanças foram divididas por  $n \cdot k$ , onde  $n$  é o número de observações utilizadas no período de estimação, e  $k$  a dimensão do processo em estudo ( $k = 1$  para os modelos univariados, e  $k = 2$  para o modelo bivariado).

Principalmente para o modelo bivariado, os erros-padrão obtidos através da Hessiana avaliada no ótimo não parecem ser boas aproximações dos verdadeiros erros padrão. Para os modelos univariados, fez-se uma comparação entre os resultados obtidos com as Hessianas dos pacotes de otimização, e obtidos a partir de um pacote específico de derivação numérica (*numDeriv*, do R). Os erros padrão estimados foram muito próximos.

Ainda quanto ao modelo bivariado, avaliando os erros padrão obtidos

com base em outros vetores de estimativas  $\hat{\theta}$ , estes oscilavam bastante, mesmo quando as estimativas pontuais se mantinham próximas. Especificamente para os ótimos finais reportados na Tabela A.5, os erros padrão se mostraram elevados em relação àqueles observados para outros conjuntos de ótimos. Em trabalhos futuros, o método de reamostragem *bootstrap* com base nos resíduos quantílicos pode ser utilizado. Segue uma breve descrição abaixo.

Para o modelo bivariado, os resíduos quantílicos são definidos por:

$$R_{t,\theta} = [\Phi^{-1}(F_1(u_t/f_t, F_t, \theta)), \Phi^{-1}(F_2(v_t/f_t, F_t, \theta))] \quad (B-1)$$

onde  $\Phi^{-1}(\cdot)$  é a F.D. inversa da distribuição normal padrão e  $F_i(\cdot/f_t, F_t, \theta)$ , para  $i = 1, 2$ , são as F.D. condicionais gama e beta, respectivamente. Sob correta especificação,  $R_{t,\theta}$  é uma amostra bivariada iid.

Ao estimar os parâmetros do modelo, gera-se a série de resíduos quantílicos empíricos

$$r_{t,\hat{\theta}} = [\Phi^{-1}(F_1(u_t/f_t, F_t, \hat{\theta})), \Phi^{-1}(F_2(v_t/f_t, F_t, \hat{\theta}))] \quad (B-2)$$

Deve-se então obter  $B$  amostras com reposição da série  $r_{t,\hat{\theta}} = (r_{1t,\hat{\theta}}, r_{2t,\hat{\theta}})$ . Dadas as condições iniciais  $f_{0,1-q}$  e  $s_{0,1-p}$ , descritas na Seção 6.1, bem como a equação de atualização dos parâmetros variantes no tempo  $f_t$ , é possível gerar  $B$  séries *bootstrap* de  $(u_t, v_t)$  usando a relação

$$(u_t, v_t) \sim [F_1^{-1}(\Phi(r_{1t,\hat{\theta}})/f_t, F_t, \hat{\theta}), F_2^{-1}(\Phi(r_{2t,\hat{\theta}})/f_t, F_t, \hat{\theta})] \quad (B-3)$$

Para cada uma das séries bivariadas geradas, estimam-se os parâmetros, obtendo  $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_B^*$ . O erro padrão das estimativas de  $\theta$  será dado pelo erro padrão estimado entre os correspondentes parâmetros dos vetores  $\theta_i^*$ , para  $i = 1, 2, \dots, B$ .

Em uma aplicação como a realizada nesta dissertação, o procedimento será relativamente lento, haja vista que o número de parâmetros do vetor  $\theta$  é grande. Contudo, como os verdadeiros valores dos parâmetros das  $B$  amostras *bootstrap* de  $(u_t, v_t)$  são conhecidos, estes podem ser utilizados como valores iniciais dos algoritmos de otimização, facilitando a convergência dos mesmos. A aplicação do método aos modelos univariados segue como caso particular.

Abaixo, as estimativas de máxima verossimilhança e os erros padrão obtidos com base na inversa da Hessiana avaliada nos ótimos obtidos. As estimativas referentes às variáveis exógenas são os parâmetros  $\phi$  indexados. Para as séries de ENA, os parâmetros estão indexados com as iniciais de cada subsistema, e para as intervenções, com a indicação da respectiva intervenção.

Após as tabelas, constam também as equações que especificam os modelos, com as estimativas (e os erros padrão) para os melhores modelos obtidos com cada densidade preditiva e estrutura de evolução.

Tabela B.1: Estimativas de máxima verossimilhança e erros padrão das estimativas - modelos Gama-SARIMA.

Parâmetro	Modelo 1		Modelo 2		Modelo 3		Modelo 3 + Int	
	Estim.	E.P.	Estim.	E.P.	Estim.	E.P.	Estim.	E.P.
$w$	0,201	0,062	0,199	0,053	-0,047	0,258	-0,012	0,248
$a_1$	0,439	0,052	0,487	0,052	0,472	0,050	0,482	0,052
$a_2$	-0,511	0,090	-0,458	0,131	0,124	0,070	0,164	0,073
$a_3$	0,245	0,060	0,133	0,110	0,225	0,055	0,214	0,058
$a_4$	-	-	-	-	0,326	0,073	0,324	0,073
$a_{11}$	0,091	0,045	0,031	0,050	-0,044	0,047	-0,031	0,048
$a_{12}$	-0,171	0,052	-0,110	0,055	0,119	0,063	0,083	0,072
$b_1$	1,490	0,130	1,471	0,208	0,241	0,088	0,232	0,089
$b_2$	-0,701	0,196	-0,597	0,336	-0,130	0,079	-0,136	0,077
$b_3$	0,054	0,090	-0,001	0,149	-0,073	0,086	-0,052	0,084
$b_4$	-	-	-	-	0,149	0,070	0,140	0,070
$b_{11}$	0,389	0,051	0,424	0,078	-0,069	0,061	-0,066	0,064
$b_{12}$	-0,281	0,068	-0,350	0,069	0,050	0,055	0,051	0,055
$\alpha$	15,454	1,129	20,581	1,507	23,567	1,728	26,618	1,953
$\phi_{SE}$	-	-	0,014	0,001	0,849	0,060	0,908	0,057
$\phi_{NE}$	-	-	0,001	0,004	-0,116	0,056	-0,146	0,053
$\phi_{NO}$	-	-	-0,016	0,005	0,013	0,054	0,040	0,050
$\phi_{SU}$	-	-	0,005	0,002	0,029	0,023	0,017	0,021
$\phi_{SE(-1)}$	-	-	-0,006	0,002	-0,150	0,068	-0,186	0,064
$\phi_{NE(-1)}$	-	-	0,003	0,005	0,160	0,057	0,144	0,054
$\phi_{NO(-1)}$	-	-	0,012	0,006	-0,042	0,044	-0,056	0,042
$\phi_{SU(-1)}$	-	-	0,001	0,002	-0,012	0,023	-0,010	0,021
$\phi_{Int(122)}$	-	-	-	-	-	-	0,409	0,151
$\phi_{Int(242)}$	-	-	-	-	-	-	0,610	0,162
$\phi_{Int(352)}$	-	-	-	-	-	-	0,649	0,171



Tabela B.2: Estimativas de máxima verossimilhança e erros padrão das estimativas - modelos Gama de componentes.

Parâmetro	Modelo 1		Modelo 2		Modelo 3		Modelo 3 + Int	
	Estim.	E.P.	Estim.	E.P.	Estim.	E.P.	Estim.	E.P.
$w$	0,011	0,096	-0,238	0,096	-1,749	0,328	-1,738	0,315
$a_1$	0,010	0,006	0,007	0,006	0,008	0,006	0,010	0,006
$a_2$	0,000	0,002	0,003	0,001	0,002	0,001	0,002	0,001
$a_3$	0,110	0,016	0,100	0,015	0,093	0,013	0,090	0,013
$\phi$	0,618	0,112	0,701	0,094	0,696	0,090	0,690	0,088
$\alpha$	16,679	1,219	21,102	1,548	22,744	1,669	26,193	1,923
$\phi_{SE}$	-	-	0,011	0,001	0,633	0,064	0,684	0,061
$\phi_{NE}$	-	-	0,000	0,004	-0,125	0,061	-0,147	0,056
$\phi_{NO}$	-	-	-0,017	0,005	-0,188	0,059	-0,192	0,056
$\phi_{SU}$	-	-	0,005	0,002	0,019	0,023	0,012	0,022
$\phi_{SE(-1)}$	-	-	-0,007	0,002	-0,237	0,072	-0,275	0,066
$\phi_{NE(-1)}$	-	-	-0,002	0,005	0,043	0,058	0,040	0,055
$\phi_{NO(-1)}$	-	-	0,019	0,005	0,108	0,046	0,122	0,043
$\phi_{SU(-1)}$	-	-	0,003	0,002	0,004	0,023	0,007	0,021
$\phi_{Int(98)}$	-	-	-	-	-	-	-0,672	0,183
$\phi_{Int(109)}$	-	-	-	-	-	-	0,295	0,158
$\phi_{Int(242)}$	-	-	-	-	-	-	0,516	0,157
$\phi_{Int(352)}$	-	-	-	-	-	-	0,512	0,156
$\phi_{Int(371)}$	-	-	-	-	-	-	0,548	0,169

Tabela B.3: Estimativas de máxima verossimilhança e erros padrão das estimativas - modelos Beta-SARIMA.

Parâmetro	Modelo 1		Modelo 2		Modelo 3		Modelo 3 + Int	
	Estim.	E.P.	Estim.	E.P.	Estim.	E.P.	Estim.	E.P.
$w$	0,070	0,026	0,070	0,030	0,075	0,054	0,071	0,038
$a_1$	0,511	0,056	0,477	0,057	0,512	0,056	0,511	0,055
$a_2$	-0,610	0,097	-0,542	0,101	-0,476	0,135	-0,511	0,108
$a_3$	0,177	0,058	0,154	0,063	0,074	0,125	0,105	0,088
$a_{11}$	0,113	0,047	0,137	0,048	0,110	0,056	0,122	0,050
$a_{12}$	-0,147	0,049	-0,173	0,049	-0,172	0,050	-0,177	0,049
$b_1$	1,702	0,123	1,707	0,127	1,577	0,208	1,658	0,151
$b_2$	-0,916	0,197	-0,949	0,203	-0,737	0,356	-0,868	0,252
$b_3$	0,153	0,089	0,172	0,092	0,077	0,167	0,135	0,117
$b_{11}$	0,409	0,046	0,396	0,048	0,443	0,076	0,414	0,057
$b_{12}$	-0,371	0,043	-0,348	0,048	-0,381	0,074	-0,361	0,056
$\alpha$	16,294	1,130	17,457	1,184	17,981	1,252	18,418	1,267
$\phi_{SE}$	-	-	0,001	0,002	-0,178	0,086	-0,161	0,085
$\phi_{NE}$	-	-	-0,001	0,007	0,153	0,097	0,132	0,095
$\phi_{NO}$	-	-	-0,034	0,010	-0,397	0,109	-0,381	0,107
$\phi_{SU}$	-	-	-0,001	0,003	0,010	0,034	0,007	0,034
$\phi_{SE(-1)}$	-	-	0,003	0,003	0,056	0,102	0,075	0,099
$\phi_{NE(-1)}$	-	-	0,008	0,008	-0,014	0,102	-0,029	0,099
$\phi_{NO(-1)}$	-	-	0,026	0,009	0,397	0,102	0,409	0,101
$\phi_{SU(-1)}$	-	-	-0,003	0,003	-0,033	0,034	-0,032	0,033
$\phi_{Int(99)}$	-	-	-	-	-	-	-0,633	0,296

Tabela B.4: Estimativas de máxima verossimilhança e erros padrão das estimativas - modelos Beta de componentes.

Parâmetro	Modelo 1		Modelo 2		Modelo 3	
	Estim.	E.P.	Estim.	E.P.	Estim.	E.P.
$w$	-0,003	0,006	-0,096	0,061	0,002	0,190
$a_1$	-0,008	0,003	-0,007	0,001	-0,009	0,003
$a_2$	0,007	0,003	0,003	0,006	0,003	0,004
$a_3$	0,134	0,024	0,134	0,018	0,132	0,019
$\phi_i$	0,736	0,213	0,695	0,073	0,725	0,133
$\alpha$	19,034	1,830	21,588	1,583	21,471	2,023
$\phi_{SE}$	-	-	-0,002	0,001	-0,229	0,062
$\phi_{NE}$	-	-	0,009	0,006	0,243	0,094
$\phi_{NO}$	-	-	-0,025	0,008	-0,268	0,088
$\phi_{SU}$	-	-	0,002	0,002	0,050	0,032
$\phi_{SE(-1)}$	-	-	0,001	0,001	0,030	0,068
$\phi_{NE(-1)}$	-	-	0,017	0,006	0,153	0,092
$\phi_{NO(-1)}$	-	-	0,007	0,007	0,090	0,064
$\phi_{SU(-1)}$	-	-	-0,002	0,002	-0,014	0,031

Tabela B.5: Estimativas de máxima verossimilhança e erros padrão das estimativas - modelo Gama-Beta bivariado.

Vazão			Vento		
Parâmetro	Estim.	E.P.	Parâmetro	Estim.	E.P.
$w_1$	2,095	1,504	$w_2$	0,385	0,197
$a_{1(11)}$	0,399	0,114	$a_{1(22)}$	0,513	0,281
$a_{2(11)}$	-0,043	0,236	$a_{2(22)}$	0,405	0,046
$a_{3(11)}$	0,332	0,511	$a_{3(22)}$	0,227	0,408
$a_{11(11)}$	-0,005	0,227	$a_{11(22)}$	0,219	0,121
$a_{12(11)}$	0,123	0,264	$a_{12(22)}$	0,182	0,334
$b_{1(11)}$	0,569	0,517	$b_{1(21)}$	0,007	0,153
$b_{1(12)}$	0,109	0,328	$b_{1(22)}$	-0,028	0,123
$b_{2(11)}$	-0,527	1,583	$b_{2(22)}$	0,021	0,155
$b_{3(11)}$	0,211	0,386	$b_{3(22)}$	0,127	0,278
$b_{11(11)}$	-0,143	0,481	$b_{11(22)}$	0,116	0,215
$b_{12(11)}$	0,097	0,114	$b_{12(21)}$	-0,227	0,091
$b_{12(12)}$	-0,252	0,056	$b_{12(22)}$	0,832	0,293
$\alpha$	10,566	0,616	$\alpha$	10,566	0,616
$\phi_{SE}$	0,669	0,090	$\phi_{SE}$	0,032	0,138
$\phi_{NE}$	-0,052	0,072	$\phi_{NE}$	0,063	0,117
$\phi_{NO}$	0,102	0,142	$\phi_{NO}$	-0,662	0,191
$\phi_{SU}$	0,063	0,143	$\phi_{SU}$	-0,029	0,085
$\phi_{SE(-1)}$	-0,413	0,117	$\phi_{SE(-1)}$	0,348	0,121
$\phi_{NE(-1)}$	0,196	0,102	$\phi_{NE(-1)}$	-0,122	0,126
$\phi_{NO(-1)}$	-0,243	0,199	$\phi_{NO(-1)}$	0,547	0,198
$\phi_{SU(-1)}$	0,007	0,180	$\phi_{SU(-1)}$	-0,076	0,275
$\phi_{Int(109)}$	0,123	0,286	$\phi_{Int(290)}$	-1,082	1,244
$\phi_{Int(242)}$	0,534	0,869	-	-	-
$\phi_{Int(352)}$	0,612	0,204	-	-	-

Nota: Os elementos  $a_{i(j)}$  e  $b_{i(j)}$  pertencem às matrizes da equação de atualização  $A_i$  e  $B_i$ , nas posições  $j$ , respectivamente.

Modelo GAS Gama com evolução SARIMA:

$$(y_t/f_t, F_t, \theta) \sim Gama [26.618(1.95), \lambda_t/26.618(1.95)], \quad \lambda_t = \exp(f_t + exo_t)$$

$$\begin{aligned} f_{t+1} = & -0.01 + \\ & (0.25) \\ & 0.48s_t + 0.16s_{t-1} + 0.21s_{t-2} + 0.32s_{t-3} - 0.03s_{t-10} + 0.08s_{t-11} + \\ & (0.05) \quad (0.07) \quad (0.06) \quad (0.07) \quad (0.05) \quad (0.07) \\ & 0.23f_t - 0.14f_{t-1} - 0.05f_{t-2} + 0.14f_{t-3} - 0.07f_{t-10} + 0.05f_{t-11} \\ & (0.09) \quad (0.08) \quad (0.08) \quad (0.07) \quad (0.06) \quad (0.06) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} exo_t = & 0.91SE_t - 0.15NE_t + 0.04NO_t + 0.02SU_t \\ & (0.06) \quad (0.05) \quad (0.05) \quad (0.02) \\ & -0.19SE_{t-1} + 0.14NE_{t-1} - 0.06NO_{t-1} - 0.01SU_{t-1} + \\ & (0.06) \quad (0.05) \quad (0.04) \quad (0.02) \\ & 0.41I_{\{t=122\}} + 0.61I_{\{t=242\}} + 0.65I_{\{t=352\}} \\ & (0.15) \quad (0.16) \quad (0.17) \end{aligned}$$

Modelo GAS Gama com evolução em componentes:

$$(y_t/f_t, F_t, \theta) \sim Gama [26.19(1.92), \exp(f_t)/26.19(1.92)]$$

$$f_t = -1.74(0.32) + f_{1,t} + f_{2,t} + f_{3,t} + exo_t$$

$$f_{1,t+1} = f_{1,t} + 0.01(0.006)s_t$$

$$f_{2,t+1} = -\sum_{i=1}^{11} f_{2,t+1-i} + 0.002(0.001)s_t$$

$$f_{3,t+1} = 0.69(0.09)f_{3,t} + 0.09(0.01)s_t$$

$$\begin{aligned} exo_t = & 0.68SE_t - 0.15NE_t - 0.19NO_t + 0.01SU_t \\ & (0.06) \quad (0.06) \quad (0.06) \quad (0.02) \\ & -0.27SE_{t-1} + 0.04NE_{t-1} + 0.12NO_{t-1} + 0.01SU_{t-1} \\ & (0.07) \quad (0.06) \quad (0.04) \quad (0.02) \\ & -0.67I_{\{t=98\}} + 0.30I_{\{t=109\}} + 0.52I_{\{t=242\}} + 0.51I_{\{t=352\}} + 0.55I_{\{t=371\}} \\ & (0.18) \quad (0.16) \quad (0.16) \quad (0.16) \quad (0.17) \end{aligned}$$

Modelo GAS Beta com evolução SARIMA:

$$(y_t/f_t, F_t, \theta) \sim \text{Beta}(\beta_t, 18.42(1.27)), \quad \beta_t = \exp(f_t + \text{exo}_t)$$

$$\begin{aligned} f_{t+1} = & 0.07 + \\ & (0.04) \\ & 0.51s_t - 0.51s_{t-1} + 0.10s_{t-2} + 0.12s_{t-10} - 0.18s_{t-11} + \\ & (0.06) \quad (0.11) \quad (0.09) \quad (0.05) \quad (0.05) \\ & 1.66f_t - 0.87f_{t-1} + 0.14f_{t-2} + 0.41f_{t-10} - 0.36f_{t-11} \\ & (0.15) \quad (0.25) \quad (0.12) \quad (0.06) \quad (0.06) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{exo}_t = & -0.16SE_t + 0.13NE_t - 0.38NO_t + 0.01SU_t + \\ & (0.08) \quad (0.09) \quad (0.11) \quad (0.03) \\ & 0.07SE_{t-1} - 0.03NE_{t-1} + 0.41NO_{t-1} - 0.03SU_{t-1} \\ & (0.10) \quad (0.10) \quad (0.10) \quad (0.03) \\ & -0.63I_{\{t=99\}} \\ & (0.30) \end{aligned}$$

Modelo GAS Beta com evolução em componentes:

$$(y_t/f_t, F_t, \theta) \sim \text{Beta}[\exp(f_t), 21.47(2.02)]$$

$$f_t = 0.002(0.19) + f_{1,t} + f_{2,t} + f_{3,t} + exo_t$$

$$f_{1,t+1} = f_{1,t} - 0.009(0.003)s_t$$

$$f_{2,t+1} = - \sum_{i=1}^{11} f_{2,t+1-i} + 0.003(0.004)s_t$$

$$f_{3,t+1} = 0.72(0.13)f_{3,t} + 0.13(0.02)s_t$$

$$\begin{aligned} exo_t = & -0.23SE_t + 0.24NE_t - 0.27NO_t + 0.05SU_t + \\ & (0.06) \quad (0.09) \quad (0.09) \quad (0.03) \\ & 0.03SE_{t-1} + 0.15NE_{t-1} + 0.09NO_{t-1} - 0.01SU_{t-1} \\ & (0.07) \quad (0.09) \quad (0.06) \quad (0.03) \end{aligned}$$

Modelo GAS Gama-Beta com evolução SARIMA:

$$((u_t, v_t)/f_t, F_t, \theta) \sim \text{Gama} - \text{Beta} [10.57(0.62), \beta_t, \lambda_t] \quad (\text{B-4})$$

$$(\beta_t, \lambda_t) = (\exp[f_{1,t} + \text{exo}_{1,t}], \exp[f_{2,t} + \text{exo}_{2,t}])' \quad (\text{B-5})$$

$$\begin{bmatrix} f_{1,t+1} \\ f_{2,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.10 \\ 0.38 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.40 & 0 \\ 0 & 0.51 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{1,t} \\ s_{2,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.04 & 0 \\ 0 & 0.40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{1,t-1} \\ s_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.33 & 0 \\ 0 & 0.23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{1,t-2} \\ s_{2,t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.004 & 0 \\ 0 & 0.22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{1,t-10} \\ s_{2,t-10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.12 & 0 \\ 0 & 0.18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{1,t-11} \\ s_{2,t-11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.57 & 0.11 \\ 0.01 & -0.03 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1,t} \\ f_{2,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.53 & 0 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1,t-1} \\ f_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.21 & 0 \\ 0 & 0.13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1,t-2} \\ f_{2,t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.14 & 0 \\ 0 & 0.12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1,t-10} \\ f_{2,t-10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.10 & -0.25 \\ -0.23 & 0.83 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1,t-11} \\ f_{2,t-11} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{exo}_{1,t} = & 0.67SE_t - 0.05NE_t + 0.10NO_t + 0.06SU_t \\ & (0.09) \quad (0.07) \quad (0.14) \quad (0.14) \\ & -0.41SE_{t-1} + 0.20NE_{t-1} - 0.24NO_{t-1} + 0.01SU_{t-1} + \\ & (0.12) \quad (0.10) \quad (0.20) \quad (0.18) \\ & 0.12I_{\{t=109\}} + 0.53I_{\{t=242\}} + 0.61I_{\{t=352\}} \\ & (0.29) \quad (0.87) \quad (0.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{exo}_{2,t} = & 0.03SE_t + 0.06NE_t - 0.66NO_t - 0.03SU_t + \\ & (0.14) \quad (0.12) \quad (0.19) \quad (0.09) \\ & 0.351SE_{t-1} - 0.12NE_{t-1} + 0.55NO_{t-1} - 0.08SU_{t-1} \\ & (0.12) \quad (0.13) \quad (0.20) \quad (0.28) \\ & -1.08I_{\{t=290\}} \\ & (1.24) \end{aligned}$$