

3 Pêndulo Invertido

Muitas estruturas complacentes¹ tais como: torres articuladas, torres estaiadas, plataformas de pernas atirantadas² e outras estruturas flutuantes utilizadas na indústria offshore (Kareem, 1983), têm o comportamento dinâmico básico semelhante a um pêndulo invertido. Ainda de acordo com Kareem (1983), a razão primária para esse comportamento similar é que uma estrutura complacente e um pêndulo invertido são sistemas vibratórios flexíveis no plano horizontal e rígidos verticalmente.

O problema do pêndulo invertido, por sua forte não linearidade e acoplamento entre seus graus de liberdade, tem sido amplamente utilizado para ilustrar muitas das propriedades básicas da dinâmica não linear, tais como perda de estabilidade, bifurcações e caos (Anh *et al.*, 2007).

Desse modo, neste capítulo, muitas das propriedades de um sistema dinâmico capturadas pelo uso dos modos normais não lineares são demonstradas e exemplificadas com o uso de um modelo constituído de um pêndulo espacial invertido restringido por três molas extensionais. Imperfeições geométricas são consideradas no modelo e ambos os sistemas perfeito e imperfeito são analisados. A existência de modos similares e não similares é demonstrada e, por meio deles, muitos fenômenos típicos da análise modal não linear são ilustrados, tais como multiplicidade de modos, modos instáveis e bifurcações.

3.1. Formulação

O modelo físico adotado é o mesmo apresentado por Thompson e Gaspar (1977) e estudado por Orlando (2010). O modelo é ilustrado pela Figura 3-1 e

¹ Uma estrutura offshore é dita complacente quando exibe deslocamentos laterais significativos em resposta às cargas de vento e ondas (Leonard e Young, 1985).

² *Tension leg platforms* (TLP) em inglês.

consiste de uma barra leve de comprimento l suportando uma carga estática concentrada P equivalente ao peso de uma massa concentrada m :

$$P = mg, \quad (3-1)$$

onde g é a aceleração da gravidade.

A estrutura é restringida por três molas lineares, inclinadas a $\pi/4$ rad na configuração inicial. A primeira mola, com rigidez igual a k_1 , encontra-se no plano y - z , enquanto as demais, com rigidezes iguais a k_2 e k_3 encontram-se dispostas simetricamente em relação ao plano y - z em um ângulo de $\pm\alpha$ (positivo no sentido anti-horário).

A rigidez da primeira mola é igual a:

$$k_1 = (1 - 2\nu)k, \quad (3-2)$$

onde ν é uma constante positiva e k é um valor de rigidez de referência, enquanto a rigidez da segunda e da terceira mola é igual a:

$$k_2 = k_3 = \nu k \quad (3-3)$$

Com o objetivo de se obter duas cargas críticas idênticas para o pêndulo e permitir, desse modo, a existência de vários caminhos pós-críticos acoplados emergindo de um único ponto crítico, o valor da constante ν é determinado pela seguinte equação (Thompson e Gaspar, 1977):

$$\nu = \frac{1}{4 \sin^2 \alpha} \quad (3-4)$$

No caso de uma distribuição equidistante das três molas, ou seja, se o ângulo α for igual a $2\pi/3$ rad, a aplicação da eq. (3-4) resulta em $\nu=1/3$, significando que as três molas têm a mesma rigidez.

Uma metodologia bastante utilizada na derivação das equações de movimento é a aplicação do Princípio de Hamilton que prescreve, em linhas gerais, que a variação da diferença da energia cinética e potencial mais a variação do trabalho realizado pelas forças não conservativas durante qualquer intervalo de tempo de t_1 a t_2 deve ser nula, isto é:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - \Pi) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0, \quad (3-5)$$

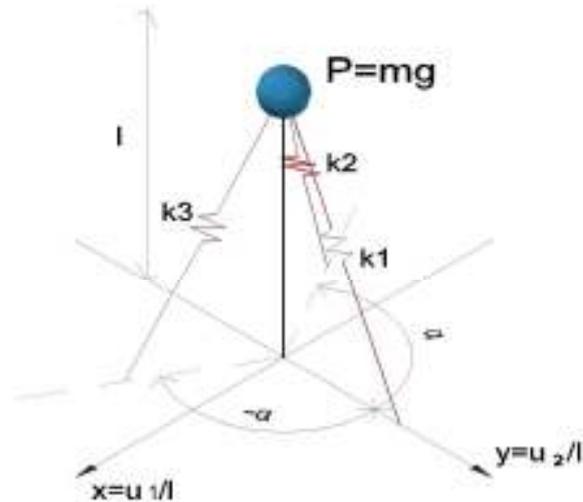


Figura 3-1 Modelo do pêndulo invertido.

onde δ é o símbolo utilizado para representar a variação das quantidades à sua direita, T é a energia cinética, Π , a energia potencial total e W_{nc} , o trabalho realizado por forças não conservativas.

A energia potencial total é expressa por:

$$\Pi = U + V, \quad (3-6)$$

onde U é a energia interna de deformação elástica e V , o potencial das cargas externas atuantes sobre a estrutura.

A posição da estrutura pode ser univocamente determinada por duas coordenadas (x, y) da massa concentrada no topo da barra, fato decorrente da barra ser rígida. A coordenada na direção z pode ser determinada geometricamente de acordo com a Figura 3-2 (a). Da Figura 3-2 (a) tem-se que a distância w é:

$$w = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3-7)$$

de onde tem-se que:

$$z = \sqrt{l^2 - w^2} = \sqrt{l^2 - x^2 - y^2} \quad (3-8)$$

O sistema imperfeito é descrito em termos de dois deslocamentos iniciais δx e δy na direção dos eixos x e y , respectivamente.

O comprimento da mola na configuração inicial imperfeita pode ser calculado em função da posição de suas extremidades superior e inferior, dadas respectivamente por:

$$\vec{x}_{0s} = \langle x_{0s}, y_{0s}, z_{0s} \rangle; \quad \vec{x}_{0i} = \langle x_{0i}, y_{0i}, z_{0i} \rangle \quad (3-9)$$

Com o auxílio da Figura 3-2 (b), as coordenadas da extremidade superior podem ser determinadas pelas seguintes expressões:

$$x_{0s} = \delta x; \quad y_{0s} = \delta y; \quad z_{0s} = \sqrt{l^2 - \delta x^2 - \delta y^2} \quad (3-10)$$

Já as coordenadas da extremidade inferior são dadas de acordo com a Figura 3-3 (a) por:

$$x_{0i} = l \sin \alpha; \quad y_{0i} = l \cos \alpha; \quad z_{0i} = 0 \quad (3-11)$$

Assim, o comprimento da mola na configuração inicial, l_0 , de uma das molas, no caso do sistema imperfeito, é dado por:

$$l_0 = \|\vec{x}_{0s} - \vec{x}_{0i}\| = \sqrt{2l(l - \delta x \sin \alpha - \delta y \cos \alpha)} \quad (3-12)$$

Obtém-se, de modo semelhante, o comprimento da mola numa configuração qualquer, l_f , cuja extremidade superior seja representada pelas coordenadas (x, y, z) e da extremidade inferior pelas mesmas coordenadas descritas pelas equações (3-11), resultando na seguinte equação:

$$l_f = \|\vec{x}_s - \vec{x}_{0i}\| = \sqrt{2l(l - x \sin \alpha - y \cos \alpha)} \quad (3-13)$$

A variação de comprimento da mola, e , no caso do modelo imperfeito, é dada, então, por:

$$e(\alpha, x, y) = l_f - l_0 \quad (3-14)$$

Substituindo-se as expressões (3-12) e (3-13) na eq. (3-14), obtém-se a seguinte equação para a variação de comprimento da mola:

$$e(\alpha, x, y) = \sqrt{2l(l - x \sin \alpha - y \cos \alpha)} - \sqrt{2l(l - \delta x \sin \alpha - \delta y \cos \alpha)}, \quad (3-15)$$

onde $\alpha=0$ para a primeira mola, $\alpha=2\pi/3$ para a segunda mola e $\alpha=4\pi/3$ para a terceira.

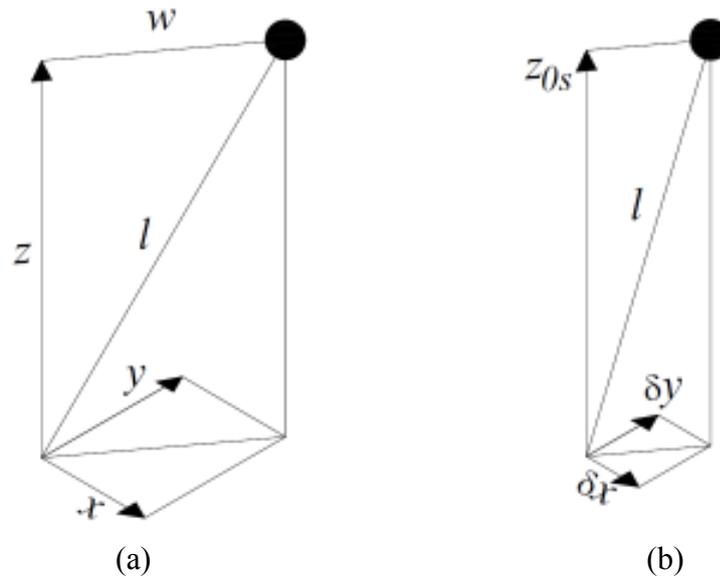


Figura 3-2 Configuração do pêndulo: (a) durante o movimento; (b) imperfeição geométrica inicial.

Desse modo, a energia de deformação interna do sistema é:

$$U = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} k \right) \left[e^2(0, x, y) + e^2\left(\frac{2\pi}{3}, x, y\right) + e^2\left(-\frac{2\pi}{3}, x, y\right) \right] \quad (3-16)$$

O trabalho realizado pela força P é igual a:

$$W = P\Delta, \quad (3-17)$$

onde Δ é o deslocamento vertical total sofrido pela força P em relação à configuração deformada e pode ser determinado geometricamente com o auxílio das Figura 3-2 (a) e Figura 3-2 (b), resultando em:

$$\Delta = l - (z - z_{0s}) \quad (3-18)$$

Substituindo-se as equações (3-8) e (3-10) na eq. (3-18), obtém-se:

$$\Delta = l - \sqrt{l^2 - x^2 - y^2} - \sqrt{l^2 - \delta x^2 - \delta y^2} \quad (3-19)$$

O potencial das cargas externas é dado por:

$$V = -W = -P \left(l - \sqrt{l^2 - x^2 - y^2} - \sqrt{l^2 - \delta x^2 - \delta y^2} \right) \quad (3-20)$$

Com a finalidade de facilitar as análises paramétricas, duas coordenadas adimensionais são introduzidas, a saber:

$$\bar{u}_1 = \frac{x}{l}; \quad \bar{u}_2 = \frac{y}{l} \quad (3-21)$$

Substituindo-se as expressões (3-21) na eq. (3-8), obtém-se a coordenada adimensional na direção z :

$$\bar{u}_3 = \frac{z}{l} = \sqrt{1 - \bar{u}_1^2 - \bar{u}_2^2} \quad (3-22)$$

De igual modo os deslocamentos iniciais correspondentes à imperfeição inicial podem tomar a forma adimensional fazendo-se:

$$u_{10} = \frac{\delta x}{l}; \quad u_{20} = \frac{\delta y}{l} \quad (3-23)$$

Combinando as equações (3-6), (3-15), (3-16) e (3-20) e fazendo o uso das variáveis adimensionais expressas pelas equações de (3-21) a (3-23), obtém-se a seguinte expressão para a energia potencial total:

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{kl^2}{6} & \left(12 - 4\sqrt{1 - \bar{u}_2^2} \sqrt{1 - u_{20}^2} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}\bar{u}_1 + 2\bar{u}_2} \right. \\ & \left. \sqrt{4 - 2\sqrt{3}u_{10} + 2u_{20}} - 2\sqrt{2 + \sqrt{3}\bar{u}_1 + \bar{u}_2} \sqrt{2 + \sqrt{3}u_{10} + u_{20}} \right) - \\ & Pl \left(1 - \sqrt{1 - \bar{u}_1^2 - \bar{u}_2^2} - \sqrt{1 - u_{10}^2 - u_{20}^2} \right) \end{aligned} \quad (3-24)$$

Utilizando-se o princípio da energia potencial estacionária, a posição de equilíbrio estático do sistema, dada pelo par de deslocamentos u_{1s} e u_{2s} , pode ser obtida pela solução do seguinte sistema de equações não lineares de equilíbrio:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{u}_1} = \frac{\sqrt{3}l^2}{6} \left(\frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}u_{10} + 2u_{20}}}{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}\bar{u}_1 + 2\bar{u}_2}} - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}u_{10} + u_{20}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}\bar{u}_1 + \bar{u}_2}} \right) - \quad (3-25)$$

$$\frac{Pl\bar{u}_1}{\sqrt{1 - \bar{u}_1^2 - \bar{u}_2^2}} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{u}_2} = \frac{l^2}{6} \left(2 \frac{\sqrt{1 - u_{20}^2}}{\sqrt{1 - \bar{u}_2^2}} - \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}u_{10} + 2u_{20}}}{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}\bar{u}_1 + 2\bar{u}_2}} - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}u_{10} + u_{20}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}\bar{u}_1 + \bar{u}_2}} \right) - \quad (3-26)$$

$$\frac{Pl\bar{u}_2}{\sqrt{1 - \bar{u}_1^2 - \bar{u}_2^2}} = 0$$

O deslocamento da massa do pêndulo pode ser agora descrito em relação à configuração estável de equilíbrio estático, descrita pelos deslocamentos u_{1s} e u_{2s} . Os deslocamentos puramente estáticos u_{1s} e u_{2s} correspondem a duas rotações a eles relacionadas pelas seguintes expressões – ver Figura 3-3 (b):

$$u_{is} = \text{sen}(\phi_{is}), \quad (i = 1, 2) \quad (3-27)$$

De modo semelhante, as rotações dinâmicas podem ser correlacionadas aos deslocamentos adimensionais dinâmicos, dados por u_1 e u_2 , do seguinte modo:

$$u_i = \text{sen}(\phi_i), \quad (i=1,2) \quad (3-28)$$

Das relações geométricas da Figura 3-3 (b), tem-se que o movimento relativo do pêndulo em relação à configuração de equilíbrio, em termos de rotações dinâmicas ϕ_1 e ϕ_2 , é igual a:

$$\phi_i = \phi_{it} - \phi_{is}, \quad (i=1,2); \quad (3-29)$$

onde ϕ_{1t} e ϕ_{2t} correspondem às rotações totais da massa do pêndulo.

Em termos dos deslocamentos adimensionais, a eq. (3-29) pode ser reescrita como:

$$u_{it} = \text{sen}(\phi_{it}) = \text{sen}(\phi_{is} + \phi_i), \quad (i=1,2) \quad (3-30)$$

Pela substituição das expressões (3-28) e (3-29) nas equações (3-30) e utilizando-se relações trigonométricas, chega-se à seguinte relação entre os deslocamentos translacionais totais (u_{it}), dinâmicos (u_i) e estáticos (u_{is}):

$$u_{it} = u_{is} \sqrt{1 - u_i^2} + u_i \sqrt{1 - u_{is}^2}, \quad (i=1,2) \quad (3-31)$$

De modo similar à eq. (3-22), pode-se escrever os deslocamentos totais na direção z do seguinte modo:

$$u_{3t} = \sqrt{1 - u_{1t}^2 - u_{2t}^2}; \quad u_3 = \sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2}; \quad u_{3s} = \sqrt{1 - u_{1s}^2 - u_{2s}^2} \quad (3-32)$$

O trabalho exercido pelo peso P devido ao deslocamento total do pêndulo é igual a:

$$W_t = Pl(1 - u_{3t}) = Pl \left(1 - \sqrt{1 - u_{1t}^2 - u_{2t}^2} \right) \quad (3-33)$$

Do mesmo modo o trabalho realizado pelo peso do pêndulo devido ao deslocamento puramente estático é:

$$W_s = Pl(1 - u_{3s}) = Pl \left(1 - \sqrt{1 - u_{1s}^2 - u_{2s}^2} \right) \quad (3-34)$$

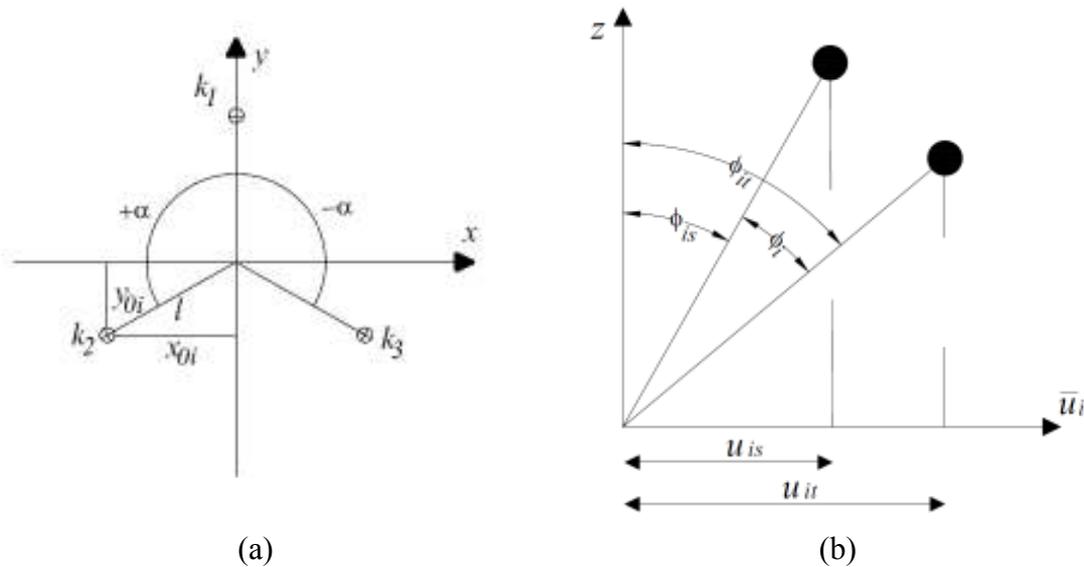


Figura 3-3 Configuração do pêndulo com imperfeição geométrica inicial: (a) plano xy ; (b) plano uz .

A energia interna de deformação devida aos deslocamentos totais é obtida pela substituição das variáveis x , y e z pelos deslocamentos adimensionais totais na eq. (3-16), utilizando-se também as expressões da eq. (3-31), o que resulta em:

$$\begin{aligned}
 U_t = \frac{kl^2}{6} & \left\{ 12 - 4 \left(1 - u_{2s} \sqrt{1 - u_2^2} - u_2 \sqrt{1 - u_{2s}^2} \right)^2 \sqrt{1 - u_{20}^2} - \right. \\
 & \left(4 - 2\sqrt{3}u_{10} + 2u_{20} \right)^2 \left[4 - 2\sqrt{3} \left(u_{1s} \sqrt{1 - u_1^2} + u_1 \sqrt{1 - u_{1s}^2} \right) + \right. \\
 & \left. 2 \left(u_{2s} \sqrt{1 - u_2^2} - u_2 \sqrt{1 - u_{2s}^2} \right) \right]^2 - 2 \left(2 + \sqrt{3}u_{10} + u_{20} \right)^2 \left[2 + \sqrt{3} \right. \\
 & \left. \left. \left(u_{1s} \sqrt{1 - u_1^2} + u_1 \sqrt{1 - u_{1s}^2} \right) + \left(u_{2s} \sqrt{1 - u_2^2} - u_2 \sqrt{1 - u_{2s}^2} \right) \right]^2 \right\} \quad (3-35)
 \end{aligned}$$

O mesmo procedimento pode ser seguido para a obtenção da energia de deformação interna relativa aos deslocamentos estáticos, resultando em:

$$\begin{aligned}
 U_s = \frac{kl^2}{6} & \left(12 - 4 \sqrt{1 - u_{2s}^2} \sqrt{1 - u_{20}^2} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}u_{1s} + 2u_{2s}} \right. \\
 & \left. \sqrt{4 - 2\sqrt{3}u_{10} + 2u_{20}} - 2 \sqrt{2 + \sqrt{3}u_{1s} + u_{2s}} \sqrt{2 + \sqrt{3}u_{10} + u_{20}} \right) - \\
 & Pl \left(1 - \sqrt{1 - u_{1s}^2 - u_{2s}^2} - \sqrt{1 - u_{10}^2 - u_{20}^2} \right) \quad (3-36)
 \end{aligned}$$

Para obtenção das equações de movimento, tendo como referência a configuração de equilíbrio estático, obtém-se a variação da energia potencial total entre as duas configurações, sendo esta dada por:

$$\Delta\Pi = (U_t - U_s) - (W_t - W_s) \quad (3-37)$$

Como o sistema na configuração estática não varia como tempo, a energia cinética do sistema depende somente dos deslocamentos dinâmicos e pode ser escrita como:

$$T = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2) \quad (3-38)$$

onde os pontos acima dos deslocamentos indicam a sua derivada temporal.

Pela substituição da expressão para u_3 dentre as equações (3-32) na eq. (3-38), pode-se reescrever a energia cinética em função dos deslocamentos dinâmicos adimensionais na direção x e y como:

$$T = \frac{1}{2} ml^2 \left[\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \frac{(u_1 \dot{u}_1 + u_2 \dot{u}_2)}{1 - u_1^2 - u_2^2} \right] \quad (3-39)$$

O amortecimento considerado neste estudo é do tipo viscoso linear, tendo c como constante. O trabalho realizado por esta força de amortecimento é exercido apenas pelos deslocamentos dinâmicos, sendo a função de dissipação de Rayleigh dada por:

$$W_{nc} = \frac{1}{2} cl^2 (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2) \quad (3-40)$$

O Lagrangiano para o sistema considerado é, portanto:

$$L_g = T - \Delta\Pi + W_{nc} \quad (3-41)$$

O funcional de energia não linear J para o pêndulo tem a seguinte forma:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} L_g(u_1, u_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2, t) dt \quad (3-42)$$

Aplicando-se as técnicas variacionais, obtém-se o seguinte sistema de equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \right) = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (3-43)$$

Com o propósito de se facilitar as análises paramétricas, os seguintes parâmetros adimensionais são adotados:

$$\lambda = \frac{P}{P_{cr}} = \frac{mg}{kl/4}; \quad \omega_p^2 = \frac{g}{l} \quad (3-44)$$

onde λ é um parâmetro adimensional de carga, P_{cr} é a carga crítica do pêndulo invertido e ω_p é a frequência natural do pêndulo simples.

A análise adimensional também inclui o fator de amortecimento definido por:

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}}, \quad (3-45)$$

onde c_{cr} é a constante de amortecimento crítico expressa por:

$$c_{cr} = 2m\omega_0, \quad (3-46)$$

e ω_0 é a primeira frequência natural do sistema linearizado.

Desse modo, a partir das equações (3-37), (3-39), (3-40), (3-41) e (3-43) e utilizando-se os parâmetros adimensionais (3-44) e a relação dada por (3-45), obtêm-se as equações não lineares de movimento do pêndulo invertido:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + \frac{1}{\lambda(1-u_1^2-u_2^2)} \left\{ u_1 \left[2(u_1\dot{u}_1 + u_2\dot{u}_2)^2 + \dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + u_1\ddot{u}_1 + u_2\ddot{u}_2 \right] + \right. \\ \left. \dot{u}_1(u_1\dot{u}_1 + u_2\dot{u}_2) \right\} - \frac{u_1u_2^2\dot{u}_2^2}{(1-u_1^2-u_2^2)} + 2\xi\omega_0\dot{u}_1 - \\ \frac{2\sqrt{3}\omega_p^2}{\lambda} \left(2 + \sqrt{3}u_{10} + u_{20} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{u_{1s}u_1}{(1-u_1^2)^{\frac{1}{2}}} - (1-u_{1s}^2)^{\frac{1}{2}} \right] \\ \left. \left\{ \frac{1}{\left[2 - \sqrt{3}u_{1s}(1-u_1^2)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{3}u_1(1-u_{1s}^2)^{\frac{1}{2}} + u_{2s}(1-u_2^2)^{\frac{1}{2}} + u_2(1-u_{2s}^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}} \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{\left[2 + \sqrt{3}u_{1s}(1-u_1^2)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{3}u_1(1-u_{1s}^2)^{\frac{1}{2}} + u_{2s}(1-u_2^2)^{\frac{1}{2}} + u_2(1-u_{2s}^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}} \right\} + \right. \\ \left. 2\omega_p^2 \left[2u_{1s}^2u_1 + \frac{u_{1s}u_1^2(1-u_{1s}^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-u_1^2)^{\frac{1}{2}}} - u_{1s}(1-u_{1s}^2)^{\frac{1}{2}}(1-u_1^2)^{\frac{1}{2}} - u_1 \right] \frac{1}{[1-u_1^2]} \right\} \end{aligned} \quad (3-47)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{-u_{1s}^2(1-2u_1^2) - u_{2s}^2(1-2u_2^2) - 2u_{1s}u_1(1-u_{1s}^2)^{\frac{1}{2}}(1-u_1^2)^{\frac{1}{2}} - u_2} \\
& \frac{1}{-2u_{2s}u_2(1-u_{2s}^2)^{\frac{1}{2}}(1-u_2^2)^{\frac{1}{2}}} = 0 \\
\ddot{u}_2 + \frac{1}{\lambda(1-u_1^2-u_2^2)} \left\{ u_2 \left[2(u_1\dot{u}_1 + u_2\dot{u}_2)^2 + \dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + u_1\ddot{u}_1 + u_2\ddot{u}_2 \right] + \right. \\
& \left. \dot{u}_2(u_1\dot{u}_1 + u_2\dot{u}_2) \right\} - \frac{u_2u_1^2\dot{u}_1^2}{(1-u_1^2-u_2^2)} + 2\xi\omega_0\dot{u}_2 - \\
& \frac{4\omega_p^2(2-2u_{20})^{\frac{1}{2}}}{\lambda \left[2 - 2u_{2s}(1-u_2^2)^{\frac{1}{2}} - 2u_2(1-u_{2s}^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{u_{2s}u_2}{(1-u_2^2)^{\frac{1}{2}}} - (1-u_{2s}^2)^{\frac{1}{2}} \right] + \\
& \frac{2\omega_p^2}{\lambda} (2 - \sqrt{3}u_{10} + u_{20})^{\frac{1}{2}} \left[\frac{u_{2s}u_2}{(1-u_2^2)^{\frac{1}{2}}} - (1-u_{2s}^2)^{\frac{1}{2}} \right] \\
& \left. \left\{ \frac{1}{\left[2 - \sqrt{3}u_{1s}(1-u_1^2)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{3}u_1(1-u_{1s}^2)^{\frac{1}{2}} + u_{2s}(1-u_2^2)^{\frac{1}{2}} + u_2(1-u_{2s}^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}} \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{1}{\left[2 + \sqrt{3}u_{1s}(1-u_1^2)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{3}u_1(1-u_{1s}^2)^{\frac{1}{2}} + u_{2s}(1-u_2^2)^{\frac{1}{2}} + u_2(1-u_{2s}^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}} \right\} + \right. \\
& \left. 2\omega_p^2 \left[2u_{2s}u_2 + \frac{u_{2s}u_2^2(1-u_{2s}^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-u_2^2)^{\frac{1}{2}}} - u_{2s}(1-u_{2s}^2)^{\frac{1}{2}}(1-u_2^2)^{\frac{1}{2}} - u_2 \right] \frac{1}{[1-u_1^2]} \right. \\
& \left. \frac{1}{-u_{1s}^2(1-2u_1^2) - u_{2s}^2(1-2u_2^2) - 2u_{1s}u_1(1-u_{1s}^2)^{\frac{1}{2}}(1-u_1^2)^{\frac{1}{2}} - u_2} \right. \\
& \left. \frac{1}{-2u_{2s}u_2(1-u_{2s}^2)^{\frac{1}{2}}(1-u_2^2)^{\frac{1}{2}}} = 0 \right.
\end{aligned} \tag{3-48}$$

A fim de se possibilitar o uso das técnicas de derivação dos modos normais não lineares para o sistema de equações (3-47) e (3-48), é importante reescrever as equações de modo a explicitar as acelerações. Isso pode ser conseguido pelo emprego da regra de Cramer, onde as duas acelerações são consideradas como incógnitas do sistema de equações algébricas a ser resolvido. Para isso, primeiramente reescrevem-se as equações (3-47) e (3-48) em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (3-49)$$

onde a_{ij} são os coeficientes da aceleração \ddot{u}_j na i -ésima equação de movimento e f_i são os termos independentes das acelerações na i -ésima equação de movimento.

Desse modo, empregando-se a regra de Cramer, obtém-se:

$$\ddot{u}_1 = \frac{f_1 a_{22} - a_{12} f_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}; \quad \ddot{u}_2 = \frac{a_{11} f_2 - f_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \quad (3-50)$$

Os coeficientes a_{ij} nas equações (3-47) e (3-48) são iguais a:

$$a_{11} = \frac{1-u_2^2}{1-u_1^2-u_2^2}; \quad a_{12} = a_{21} = \frac{u_1 u_2}{1-u_1^2-u_2^2}; \quad a_{22} = \frac{1-u_1^2}{1-u_1^2-u_2^2} \quad (3-51)$$

Já os termos independentes das acelerações são:

$$\begin{aligned} f_1 = & \frac{1}{\lambda(1-u_1^2-u_2^2)} \left\{ \dot{u}_1 [2(u_1 \dot{u}_1 + u_2 \dot{u}_2)^2 + \dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2] + \right. \\ & \left. \dot{u}_1 (u_1 \dot{u}_1 + u_2 \dot{u}_2) \right\} + \frac{u_1 u_2^2 \dot{u}_2^2}{(1-u_1^2-u_2^2)} - 2\xi \omega_0 \dot{u}_1 + \\ & \frac{2\sqrt{3}\omega_p^2}{\lambda} \left(2 + \sqrt{3}u_{10} + u_{20} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{u_{1s} u_1}{(1-u_1^2)^{\frac{1}{2}}} - (1-u_{1s}^2)^{\frac{1}{2}} \right] \\ & \left. \left\{ \frac{1}{\left[2 - \sqrt{3}u_{1s} (1-u_1^2)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{3}u_1 (1-u_{1s}^2)^{\frac{1}{2}} + u_{2s} (1-u_2^2)^{\frac{1}{2}} + u_2 (1-u_{2s}^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}} - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{\left[2 + \sqrt{3}u_{1s} (1-u_1^2)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{3}u_1 (1-u_{1s}^2)^{\frac{1}{2}} + u_{2s} (1-u_2^2)^{\frac{1}{2}} + u_2 (1-u_{2s}^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}} \right\} \right. \end{aligned} \quad (3-52)$$

$$2\omega_p^2 \left[\frac{2u_{1s}^2 u_1 + \frac{u_{1s} u_1^2 (1-u_{1s}^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-u_1^2)^{\frac{1}{2}}} - u_{1s} (1-u_{1s}^2)^{\frac{1}{2}} (1-u_1^2)^{\frac{1}{2}} - u_1}{1} \right] \left[\frac{1}{1-u_1^2} \right]$$

$$\frac{1}{-u_{1s}^2 (1-2u_1^2) - u_{2s}^2 (1-2u_2^2) - 2u_{1s} u_1 (1-u_{1s}^2)^{\frac{1}{2}} (1-u_1^2)^{\frac{1}{2}} - u_2}$$

$$\frac{1}{-2u_{2s} u_2 (1-u_{2s}^2)^{\frac{1}{2}} (1-u_2^2)^{\frac{1}{2}}}]^{\frac{1}{2}}$$

$$f_2 = -\frac{1}{\lambda(1-u_1^2-u_2^2)} \left\{ u_2 [2(u_1 \dot{u}_1 + u_2 \dot{u}_2)^2 + \dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2] + \right.$$

$$\left. \dot{u}_2 (u_1 \dot{u}_1 + u_2 \dot{u}_2) \right\} + \frac{u_2 u_1^2 \dot{u}_1^2}{(1-u_1^2-u_2^2)} - 2\xi \omega_0 \dot{u}_2 +$$

$$\frac{4\omega_p^2 (2-2u_{20})^{\frac{1}{2}}}{\lambda \left[2-2u_{2s} (1-u_2^2)^{\frac{1}{2}} - 2u_2 (1-u_{2s}^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{u_{2s} u_2}{(1-u_2^2)^{\frac{1}{2}}} - (1-u_{2s}^2)^{\frac{1}{2}} \right] -$$

$$\frac{2\omega_p^2}{\lambda} (2-\sqrt{3}u_{10}+u_{20})^{\frac{1}{2}} \left[\frac{u_{2s} u_2}{(1-u_2^2)^{\frac{1}{2}}} - (1-u_{2s}^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$\left\{ \frac{1}{\left[2-\sqrt{3}u_{1s} (1-u_1^2)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{3}u_1 (1-u_{1s}^2)^{\frac{1}{2}} + u_{2s} (1-u_2^2)^{\frac{1}{2}} + u_2 (1-u_{2s}^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}} \right\} -$$

(3-53)

$$\frac{1}{\left[2+\sqrt{3}u_{1s} (1-u_1^2)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{3}u_1 (1-u_{1s}^2)^{\frac{1}{2}} + u_{2s} (1-u_2^2)^{\frac{1}{2}} + u_2 (1-u_{2s}^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}} \left\{ \right.$$

$$2\omega_p^2 \left[\frac{2u_{2s}^2 u_2 + \frac{u_{2s} u_2^2 (1-u_{2s}^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-u_2^2)^{\frac{1}{2}}} - u_{2s} (1-u_{2s}^2)^{\frac{1}{2}} (1-u_2^2)^{\frac{1}{2}} - u_2}{1} \right] \left[\frac{1}{1-u_1^2} \right]$$

$$\frac{1}{-u_{1s}^2 (1-2u_1^2) - u_{2s}^2 (1-2u_2^2) - 2u_{1s} u_1 (1-u_{1s}^2)^{\frac{1}{2}} (1-u_1^2)^{\frac{1}{2}} - u_2}$$

$$\frac{1}{-2u_{2s}u_2(1-u_{2s}^2)^{\frac{1}{2}}(1-u_2^2)^{\frac{1}{2}}}]^{\frac{1}{2}}$$

3.2. Modelo perfeito

Primeiramente o modelo sem imperfeições geométricas é considerado, ou seja, $u_{10}=u_{20}=0$. Como resultado os deslocamentos u_{1s} e u_{2s} resultantes da análise de equilíbrio estático são também nulos. Expandindo-se as equações (3-50) em séries de Taylor e retendo-se até os termos de quarta ordem na expansão, são obtidas as seguintes aproximações para as equações não lineares de movimento:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + (1-\lambda)\frac{\omega_p^2}{\lambda}u_1 + 2\xi\omega_0\dot{u}_1 - \frac{3}{4}\frac{\omega_p^2}{\lambda}u_1u_2 + (16\lambda-17)\frac{\omega_p^2}{32\lambda}u_1^3 + u_1\dot{u}_1^2 + \\ (16\lambda-17)\frac{\omega_p^2}{32\lambda}u_1u_2^2 + u_1\dot{u}_2^2 + \frac{39}{128}\frac{\omega_p^2}{\lambda}u_1^3u_2 - \frac{83}{128}\frac{\omega_p^2}{\lambda}u_1u_2^3 = 0 \end{aligned} \quad (3-54)$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}_2 + (1-\lambda)\frac{\omega_p^2}{\lambda}u_2 + 2\xi\omega_0\dot{u}_2 - \frac{3}{8}\frac{\omega_p^2}{\lambda}(u_1^2 - u_2^2) + (16\lambda-17)\frac{\omega_p^2}{32\lambda}u_2^3 + \\ u_2(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2) + (16\lambda-17)\frac{\omega_p^2}{32\lambda}u_1u_2^2 - \frac{105}{512}\frac{\omega_p^2}{\lambda}u_1^4 + \frac{183}{256}\frac{\omega_p^2}{\lambda}u_1^2u_2^2 - \\ \frac{17}{512}\frac{\omega_p^2}{\lambda}u_2^4 = 0 \end{aligned} \quad (3-55)$$

3.2.1. Modos normais lineares

Os modos normais lineares são obtidos pela análise modal linear tradicional. Linearizando-se o sistema de equações (3-54) e (3-55) e desconsiderando os termos de amortecimento, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + (1-\lambda)\frac{\omega_p^2}{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-56)$$

Observa-se, através das matrizes de massa e rigidez equivalente (combinação da rigidez elástica e da rigidez geométrica), que as equações lineares são desacopladas e que os coeficientes são idênticos para as duas equações. Assim, na solução do problema de autovalor generalizado, obtém-se um caso

degenerado onde os autovalores são repetidos, ou seja, o sistema possui as duas frequências naturais idênticas, e iguais a:

$$\omega_{1,2} = \omega_0 = \omega_p \sqrt{\frac{1}{\lambda} - 1} \quad (3-57)$$

Observa-se na eq. (3-57) que quando $\lambda=1$, ou seja, o peso da massa do pêndulo for igual à carga crítica, as frequências naturais do sistema são nulas e a estrutura torna-se estaticamente instável, pois a rigidez equivalente do sistema é igual a zero.

A substituição dos valores de frequência natural no problema de autovalor generalizado definido pelas matrizes da expressão (3-56) possibilita a obtenção dos autovetores (modos normais lineares) do sistema. Contudo, a ocorrência de autovalores repetidos com equações linearmente desacopladas leva ao caso chamado de autovalor completo, assim chamado porque, ainda que os autovalores sejam repetidos, pode-se obter dois autovetores distintos e linearmente independentes associados aos autovalores do sistema. Isso pode ser demonstrado pelo seguinte desenvolvimento: primeiro assume-se que os dois autovetores associados ao autovalor ω_0 são $\{\Phi_1\}$ e $\{\Phi_2\}$, desse modo qualquer solução das equações de movimento (3-56) pode ser escrita como:

$$\{u(t)\} = c_1 e^{\omega_0 t} \{\Phi_1\} + c_2 e^{\omega_0 t} \{\Phi_2\} = e^{\omega_0 t} (c_1 \{\Phi_1\} + c_2 \{\Phi_2\}) \quad (3-58)$$

onde c_1 e c_2 são constantes determinadas pelas condições iniciais do problema.

É um princípio básico da álgebra linear (ver, por exemplo, Kreyszig, 2006) que dados dois vetores linearmente independentes $\{\Phi_1\}$ e $\{\Phi_2\}$ é possível se obter um outro vetor qualquer como fruto de sua combinação linear. Desse modo, esse caso apresenta a situação em que qualquer vetor da forma:

$$\{u(t)\} = e^{\omega_0 t} \{\Phi\}, \quad (3-59)$$

é uma solução de (3-56).

Isso somente pode ocorrer se $\{\Phi\}$ for um autovetor da matriz de coeficientes com autovalores repetidos iguais a ω_0 . A conclusão é que todo vetor é um autovetor do sistema.

Nesse caso, como todo vetor é um autovetor do sistema, todas as trajetórias retas que cruzam a origem do plano de fase constituem um modo normal linear. Esse tipo de solução é chamado de nó estrela ou nó próprio no plano de fase, e

representa um caso degenerado e isolado na teoria dos problemas de autovalores (Boyce and Di Prima, 2009).

As peculiaridades aqui apresentadas para os resultados da análise modal linear são causadas pelas simetrias do modelo estrutural perfeito, causando fenômenos complexos e comportamentos especiais na análise modal não linear que será apresentada nas próximas seções.

3.2.2.

Modos normais não lineares

Como demonstrado na seção anterior, o sistema possui as duas frequências naturais iguais, o que corresponde a um caso de ressonância interna do tipo 1:1. Por essa razão a técnica baseada nas variedades invariantes não pode ser utilizada para a redução de ordem do problema para um determinado modo considerado já que a ressonância interna viola o conceito de invariância do método, sendo essa uma das condições de degeneração a que se refere Soares e Mazzilli (2000), e que limitam o uso do método das variedades invariantes. Uma alternativa para contornar o problema seria o uso de um multimodo incluindo os dois modos internamente ressonantes. Como o problema possui apenas dois graus de liberdade, as equações de movimento (3-54) e (3-55) já descrevem o multimodo, não havendo, portanto, a redução de ordem do problema (Wang, 2008). Assim o estudo da ressonância interna do sistema é feito numericamente pela integração direta das equações de movimento.

O passo seguinte na análise modal não linear é verificar se o sistema apresenta modos normais não lineares similares, ou seja, modos não lineares que, similarmente aos modos lineares, tenham a forma independente da amplitude (Slater and Inman, 1995) e que sejam representados por planos no espaço das variedades invariantes. Assim, os modos similares se caracterizam por apresentarem uma relação constante entre as amplitudes dos graus de liberdade, matematicamente expressa por:

$$\frac{u_i}{u_j} = c_{ij} \quad , \quad (3-60)$$

onde c_{ij} é uma constante de proporcionalidade.

Como visto na seção anterior, todo vetor no plano de fase que passa pela sua origem é um modo normal linear do sistema linearizado, tendo, portanto cada um

uma determinada constante de proporcionalidade similar à eq. (3-60). O que se pretende agora é verificar se algumas dessas constantes satisfazem também à parte não linear das equações de movimento, dando, assim, origem aos modos normais não lineares similares do problema.

Em vista do caráter linear da relação expressa pela eq. (3-60), deve-se ter em mente que os modos similares correspondem a um desacoplamento das equações não lineares de movimento quando o movimento se dá nos planos por eles definidos. O desacoplamento mais simples é aquele que ocorre nos planos definidos pelas próprias coordenadas físicas do problema, ou seja, quando a constante c_{ij} da eq. (3-60) é nula e as equações de movimento são atendidas. Esse caso se verifica para o sistema aqui considerado quando:

$$c_{12} = 0 \quad (3-61)$$

Na notação do método das variedades invariantes, isto é, utilizando-se as funções de restrição:

$$u_1 = P_1(u, v) = 0; \quad \dot{u}_1 = Q_1(u, v) = 0; \quad (3-62)$$

significando que o par de coordenadas generalizadas do primeiro grau de liberdade foi escolhido como escravo, enquanto que o par de coordenadas generalizadas do segundo grau de liberdade foi escolhido como mestre, o que pode ser escrito do seguinte modo:

$$u_2 = u; \quad \dot{u}_2 = v \quad (3-63)$$

A substituição das expressões (3-62) e (3-63) na eq. (3-55) resulta no seguinte oscilador de um grau de liberdade, também chamado de oscilador modal:

$$\ddot{u} + (1 - \lambda) \frac{\omega_p^2}{\lambda} u + \frac{3}{8} \frac{\omega_p^2}{\lambda} u^2 + (16\lambda - 17) \frac{\omega_p^2}{32\lambda} u^3 + uu^2 - \frac{17}{512} \frac{\omega_p^2}{\lambda} u^4 = 0 \quad (3-64)$$

A substituição das expressões (3-62) e (3-63) na eq. (3-54) resulta na identidade $0=0$, significando que o movimento do pêndulo nesse modo normal não linear similar fica contido unicamente no plano definido pelo segundo grau de liberdade, ou, seja no plano yz , onde se encontra a mola de rigidez k_l , chamado, portanto, nesse trabalho de *modo y*. Neste plano o sistema se comporta como um sistema de um único grau de liberdade.

A única aproximação feita para se obter a eq. (3-64) advém da expansão em série de Taylor para obtenção das equações aproximadas (3-54) e (3-55) uma vez

que o desacoplamento obtido pelo uso da expressão (3-60) é exato correspondendo aos casos particulares onde as equações diferenciais parciais para obtenção das variedades invariantes admitem soluções de forma fechada.

Deve-se também verificar se o sistema possui outros planos de desacoplamento que não aquele nos eixos das coordenadas físicas do problema. Para isso, substitui-se a relação eq. (3-60), nas equações de movimento (3-54) e (3-55) e, a seguir, os termos de mesma ordem são igualados, verificando-se quais valores de c_{ij} satisfazem as equações de movimento.

O método será ilustrado utilizando-se a seguinte relação:

$$u_2 = c_{21}u_1, \quad (3-65)$$

Os termos lineares são satisfeitos por qualquer valor de c_{21} , uma vez que todo vetor é um autovetor do sistema da eq.(3-56). Após a substituição da expressão (3-65) nas equações (3-54) e (3-55), da divisão da última por c_{21} (o que se justifica, pois se está à procura de valores não nulos para essa constante) e igualando-se os termos quadráticos, obtém-se a seguinte equação algébrica de segunda ordem:

$$\frac{3\omega_p^2}{8\lambda}(3c_{21}^2 - 1) = 0, \quad (3-66)$$

cujas raízes, utilizando-se $\lambda=7/10$ e $\omega_p=1$, são iguais a:

$$c_{21} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad (3-67)$$

Igualando-se os termos cúbicos a identidade também é atendida para qualquer valor da constante c_{21} . No caso dos termos de quarta ordem, o resultado é uma equação algébrica de quarta ordem:

$$\frac{105\omega_p^2}{512\lambda}(3c_{21}^4 + 2c_{21}^2 - 1) = 0 \quad (3-68)$$

cujas raízes são:

$$c_{21} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \pm i \quad (3-69)$$

Assim os únicos valores de c_{21} reais que satisfazem o desacoplamento das equações são iguais a:

$$c_{21} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (3-70)$$

Os valores da constante c_{21} em (3-70) expressam dois autovetores que desacoplam o sistema em dois planos que fazem 120° entre si. Esses planos são definidos pelos eixos z e pelos eixos que contêm as duas molas extensionais k_2 e k_3 . Verifica-se pelas equações (3-66) e (3-68) que elas são independentes dos parâmetros do sistema. Essas constatações revelam que a existência de modos normais não lineares similares está intimamente ligada à presença de simetrias do problema, como observado por Rosemberg (1960) e por Kerschen e coautores (2009), onde os modos normais não lineares se degeneram em linhas retas modais, e são independentes da amplitude e da energia do sistema na presença de simetrias espaciais.

A substituição dos valores da expressão (3-70) resultam em dois osciladores modais, um para o modo em fase (sinal positivo da constante modal na expressão (3-70)) e outro para o modo fora de fase (sinal negativo da constante modal na expressão (3-70)). No caso do modo em fase a equação do oscilador modal é:

$$\begin{aligned} \ddot{u} + (1-\lambda)\frac{\omega_p^2}{\lambda}u - \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\omega_p^2}{\lambda}u^2 + \frac{\omega_p^2}{24\lambda}(16\lambda-17)u^3 + \frac{4}{3}u\dot{u}^2 + \\ \frac{17\sqrt{3}\omega_p^2}{516\lambda}u^4 = 0 \end{aligned} \quad (3-71)$$

Já para o modo fora de fase, tem-se:

$$\begin{aligned} \ddot{u} + (1-\lambda)\frac{\omega_p^2}{\lambda}u + \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\omega_p^2}{\lambda}u^2 + \frac{\omega_p^2}{24\lambda}(16\lambda-17)u^3 + \frac{4}{3}u\dot{u}^2 - \\ \frac{17\sqrt{3}\omega_p^2}{516\lambda}u^4 = 0 \end{aligned} \quad (3-72)$$

As equações (3-71) e (3-72) são quase idênticas, com exceção dos sinais opostos para os termos com não linearidade quadrática e quártica. As relações expressas por (3-70) correspondem a uma rotação de $\pi/6$ rad dos eixos x e y no sentido anti-horário. Como o sistema é invariante em relação a rotações, pode-se de fato demonstrar que as equações (3-64), (3-71) e (3-72) são as mesmas. Para isso utiliza-se a seguinte relação geométrica:

$$u^2 = u_1^2 + u_2^2 \quad (3-73)$$

onde o novo eixo u das coordenadas modais coincide com o eixo rotacionado de $\pi/6$ rad no sentido anti-horário.

Combinando-se as expressões (3-65), (3-70) e (3-73), obtêm-se as seguintes relações:

$$u_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}u; \quad u_2 = \pm \frac{1}{2}u \quad (3-74)$$

A substituição das expressões dadas por (3-74) nas equações de movimento resultam em duas equações modais idênticas à equação (3-64), de modo que o comportamento dos três modos pode ser estudado por uma só equação e recuperado pelas expressões (3-74).

O desacoplamento das equações de movimento para o sistema com dois graus de liberdade em planos onde a dinâmica é governada por equações de um único grau de liberdade revela que a questão de se derivar os modos normais similares é puramente geométrica e por isso intimamente ligada à simetria e à geometria do problema.

Além disso, a descrição geométrica do modo, linhas retas no espaço de configuração, coincide com os modos normais lineares, já que as relações (3-61) e (3-70) são também autovetores do sistema linear, pois, como visto na seção 3.2.1, todo vetor é um autovetor do sistema. Contudo, essa coincidência se limita apenas à geometria no espaço de configuração e não se estende à dinâmica do sistema que no caso dos modos similares é não linear, uma vez que as equações dos respectivos osciladores modais dadas por (3-64), (3-71) e (3-72) são não lineares (Sanches, 2009). A Figura 3-4 mostra as linhas modais para os três modos similares.

Alguns autores (Agnes e Inman, 2001; Sanches, 2009) ressaltam que em muitos casos a escolha das coordenadas modais (o par mestre de coordenadas generalizadas u e v) é arbitrária. Esse é o caso dos modos normais similares em fase e fora de fase definidos pelos valores expressos em (3-70) onde o grau de liberdade na direção x foi escolhido como coordenada modal. Caso a escolha da coordenada modal recaísse sobre o segundo grau de liberdade, os novos valores das constantes de restrição seriam inversos aos valores expressos em (3-70). Contudo, os planos de desacoplamento dos modos seriam os mesmos, uma vez que são determinados unicamente pela simetria espacial da estrutura.

No caso do modo com constante de restrição nula, entretanto, a escolha da coordenada modal não pode ser arbitrária uma vez que sua inversão resultaria numa singularidade ($1/0$). Fisicamente isso significa que o movimento do pêndulo não pode ser desacoplado no plano formado pelas coordenadas físicas x e z , o que é facilmente visualizado pela assimetria da estrutura em relação ao eixo x .

As equações dos osciladores modais desenvolvidas nessa seção correspondem a uma redução da ordem do problema, indicando que, dentro do subespaço das variedades invariantes, o sistema se comporta como um sistema de um único grau de liberdade. Essa redução modal associada ao caráter analítico das expressões até aqui desenvolvidas para os três modos similares obtidos torna possível a obtenção e estudo de vários fenômenos ligados à dinâmica não linear do problema, o que será abordado nas seções subsequentes.

3.2.3. Multiplicidade de modos

Ao contrário do que acontece na análise modal linear, o número de modos normais não lineares pode exceder o número de graus de liberdade, característica conhecida como multiplicidade de modos. Os resultados da seção anterior demonstram que existem três modos similares para o sistema com dois graus de liberdade. De acordo com Boivin e coautores (1995), sistemas que exibem ressonância interna apresentam alguns modos com termos de acoplamento não removíveis, responsáveis pela excitação mútua entre esses modos na região de ressonância ou próximo a ela. Os modos normais não lineares encontrados na seção anterior não atendem a essa descrição, pois eles desacoplam por completo as equações de movimento. Desse modo, o principal objetivo da presente seção é verificar se o sistema estudado apresenta modos adicionais resultantes da bifurcação dos modos associados à ressonância interna (Li *et. al.*, 2006), conhecidos como modos bifurcados (Siller, 2004).

Os modos bifurcados não podem ser vistos como uma continuação ou perturbação de qualquer modo linear, pois estão diretamente associados a fenômenos de ressonância interna e são, portanto, manifestações exclusivas da não linearidade do sistema. Em decorrência dessa ausência de ligação com modos normais lineares, os modos bifurcados são também conhecidos como modos

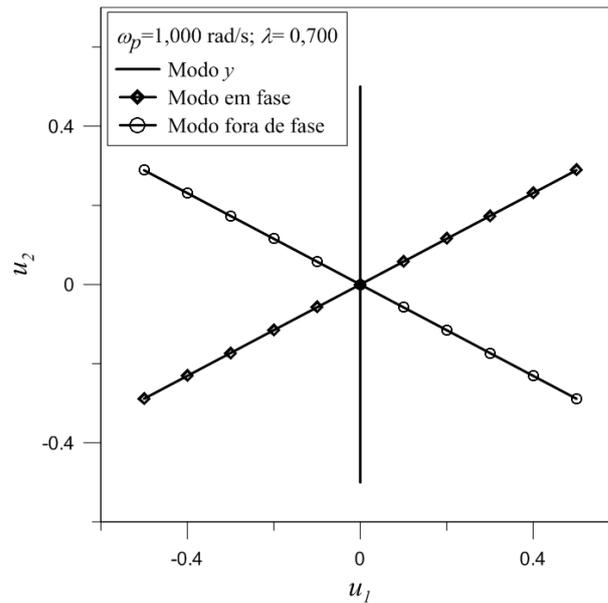


Figura 3-4 Espaço de configuração – modos normais similares.

essencialmente não lineares (Kerschen et. al., 2009). Por isso, de acordo com Siller (2004), uma linearização do sistema, como a apresentada em (3-56) é falha em captar as ressonâncias internas do sistema. De acordo com Kerschen e coautores (2009), os modos essencialmente não lineares são muito úteis para o entendimento de como as não linearidades estruturais alteram a dinâmica do sistema.

Como anteriormente abordado, o uso do método das variedades invariantes não pode ser utilizado para determinação dos modos essencialmente não lineares, uma vez que a ressonância interna do sistema viola a hipótese de invariância, requisito indispensável para a determinação dos modos por essa técnica. Uma alternativa para a verificação da existência desses modos é o uso das seções de Poincaré.

As seções de Poincaré são um subespaço bidimensional de um fluxo ocorrendo no espaço de fase do problema de dimensão igual a $2n$, onde n é o número de graus de liberdade do problema. As seções de Poincaré são obtidas por meio da interseção entre os subespaços por elas contidos e órbitas periódicas do fluxo do sistema.

Month e Rand (1980) foram os primeiros a utilizar a técnica baseada nas seções de Poincaré para análise de modos normais não lineares, com o intuito de estudar a estabilidade desses modos no caso de sistemas discretos com dois graus

de liberdade. O método também foi utilizado para o estudo da estabilidade dos modos por Vakakis (1991) para sistemas com forte não linearidade e por Vakakis e Rand (1992) para sistemas com dois graus de liberdade em baixos níveis de energia. Anderson e coautores (1994) também utilizaram a técnica para estudo dos modos normais não lineares. Mais recentemente a técnica foi empregada por Orlando (2010) para estudo do modelo de pêndulo invertido aqui considerado.

A técnica será apresentada a seguir, seguindo o desenvolvimento original proposto por Month e Rand (1980).

Considera-se o sistema autônomo de dois graus de liberdade referente às equações de movimento (3-47) e (3-48) com o seguinte Hamiltoniano:

$$H(u_1, \dot{u}_1, u_2, \dot{u}_2) = T + \Pi, \quad (3-75)$$

onde T é a energia cinética do sistema e Π sua energia potencial total.

Substituindo-se as equações (3-24) e (3-39) na eq. (3-75) e, no caso do sistema perfeito, utilizando-se as constantes (3-44), obtém-se:

$$H(u_1, \dot{u}_1, u_2, \dot{u}_2) = \left[\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \frac{(u_1 \dot{u}_1 + u_2 \dot{u}_2)}{1 - u_1^2 - u_2^2} \right] - \frac{4\omega_p^2}{3\lambda} \left[\frac{3\lambda}{4} \left(1 - \sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2} \right) - \right. \\ \left. 6 + 2\sqrt{1 - u_2} + \sqrt{2} \sqrt{4 - 2\sqrt{3}u_1 + 2u_2} + \sqrt{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}u_1 + u_2} \right] \quad (3-76)$$

Igualando-se a eq. (3-76) a uma quantidade de energia h , pode-se reescrever a eq. (3-75) isolando-se uma das quatro variáveis de estado como uma função das outras três. Geometricamente isso significa que a variável selecionada será representada por uma superfície tridimensional no espaço das variáveis restantes, formando uma família de toróides concêntricos (Month e Rand, 1980).

Para se chegar à seção de Poincaré o próximo passo é a obtenção de uma superfície bidimensional Σ através de um corte resultante da interseção de um plano qualquer (por exemplo, $u_2=0$) com a superfície tridimensional $H=h$. Um movimento descrito por uma órbita que começa em Σ , voltará à mesma superfície depois de percorrer um circuito completo ao redor do toróide. Desse modo um mapeamento de Σ em si mesmo é produzido.

Como exemplo, é obtida a seção de Poincaré definida pela seguinte expressão:

$$\Sigma_1 = [u_2 = 0] \cap [H = h]; \quad (3-77)$$

Para que o fluxo na vizinhança de um determinado movimento seja adequadamente descrito pela superfície de Poincaré, deve-se impor que a interseção da órbita com a superfície Σ seja transversal. Outra restrição é que a interseção da órbita seja feita sempre em um único sentido, no caso da seção Σ_I , isso é garantido pela seguinte equação de restrição:

$$\dot{u}_2 > 0 \quad \forall u_2 = 0 \quad (3-78)$$

Os modos normais correspondem a órbitas que cruzam a superfície uma única vez por ciclo, aparecendo como pontos fixos na seção de Poincaré. Além da determinação dos modos normais não lineares, o uso das seções de Poincaré também possibilita a obtenção da estabilidade desses modos. De acordo com Month e Rand (1980), os movimentos periódicos estáveis são representados por pontos fixos cercados por curvas fechadas na seção de Poincaré, tomando, portanto, a configuração de centros nessa superfície. De modo semelhante os pontos fixos correspondentes a órbitas periódicas instáveis surgem como selas na seção de Poincaré.

Para alguns sistemas, as seções de Poincaré podem ser determinadas analiticamente (Month e Rand, 1980). Entretanto, em vista do caráter altamente não linear da eq. (3-76), as seções são aqui determinadas por um procedimento numérico. O primeiro passo é definir uma malha imaginária de pontos dentro da superfície definida pelas equações (3-77). As coordenadas dos pontos são as condições iniciais para integração numérica das equações de movimento (3-50). As superfícies de Poincaré são obtidas pela retenção de todos os pontos durante a integração numérica que obedecerem as restrições dadas pela eq. (3-78).

Considere os parâmetros $\omega_p=1,0$ rad/s e $\lambda=0,7$ e um nível de energia igual a uma porcentagem da energia de um dos três pontos de sela do sistema identificados a partir das equações (3-25) e (3-26), que delimita a fronteira de estabilidade do sistema físico em análise (Orlando, 2010). Para os valores numéricos aqui utilizados, o nível máximo de energia resulta em $h=0,018$ (as quantidades de energia foram adimensionalizadas sendo divididas pelo produto do comprimento pela carga crítica do pêndulo invertido- $l.Pcr$). A Figura 3-5 (a) e Figura 3-5 (b) mostram as seções para 50% e 5% da energia do ponto de sela. Em ambas as seções é possível a identificação de sete pontos fixos: cinco centros (estáveis) e duas selas (instáveis). As coordenadas desses pontos no espaço de fase

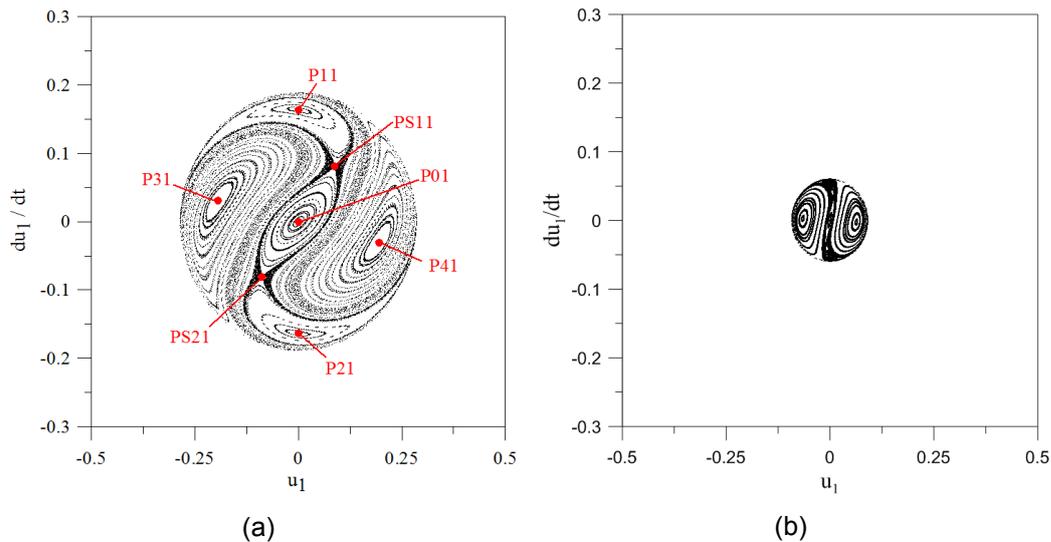


Figura 3-5 Seção de Poincaré Σ_1 para o modelo perfeito: (a) 50% da energia do ponto de sela; (b) 5% da energia do ponto de sela.

de quatro dimensões são mostradas na Tabela 3-1 para um nível de energia igual a 50% daquela do ponto de sela.

Diversamente dos modos normais lineares que são sempre estáveis, os modos normais não lineares podem ser estáveis ou instáveis, como demonstrado pelos pontos fixos do tipo centro e sela na seção de Poincaré da Figura 3-5. A estabilidade dos modos normais não lineares não depende somente dos parâmetros do sistema, mas também do nível de energia de oscilação do sistema (Vakakis, 1991). Orlando (2010) apresenta uma discussão detalhada das modificações na seção de Poincaré para o modelo de pêndulo invertido aqui estudado. A classificação dos modos normais não lineares identificados pela seção de Poincaré entre similares e não similares deve ser feita por meio da integração numérica das equações de movimento para o sistema perfeito, utilizando-se como condições iniciais as coordenadas listadas na Tabela 3-1. Essa análise é realizada na próxima seção.

3.2.4. Resposta no tempo

Como os métodos analíticos só podem ser utilizados para determinação dos três modos similares, a caracterização dos demais modos identificados na seção anterior se dá por meio de uma investigação numérica da resposta no tempo para cada modo.

Ponto	Estabilidade	u_1	du_1/dt	u_2	du_2/dt
P01	Centro	0,000	0,000	0,000	0,189
P11	Centro	0,000	0,164	0,000	0,094
P21	Centro	0,000	-0,164	0,000	0,094
P31	Centro	-0,195	0,031	0,000	0,135
P41	Centro	0,195	0,031	0,000	0,135
PS11	Sela	0,088	0,081	0,000	0,160
PS21	Sela	-0,088	-0,081	0,000	0,160

Tabela 3-1 Coordenadas dos pontos fixos da seção de Poincaré, 50% da energia do ponto de sela.

Considere inicialmente o ponto P01 da Figura 3-5 (a). A solução no tempo para ($0 s < t < 50 s$) para os deslocamentos u_1 e u_2 , bem como a configuração dos deslocamentos no espaço de configuração são mostradas na Figura 3-6. Observa-se na Figura 3-6 (a) que o modo P01 é um modo similar, cujo movimento fica confinado ao plano yz e corresponde ao *modo y* determinado na seção 3.2.2. De modo semelhante, a resposta no tempo para os modos P11 e P21 é ilustrada na Figura 3-6. Observa-se que os modos P11 e P21 são modos similares, correspondendo aos modos em fase e fora de fase determinados na seção 3.2.2.

A seguir apresentam-se na Figura 3-7 os resultados no tempo ($0 s < t < 55 s$) para os modos estáveis correspondentes aos pontos P31 e P41. Observa-se que os modos apresentam a mesma projeção no espaço de configuração $u_2 \times u_1$, diferindo apenas na resposta de $u_1 \times t$, onde eles aparecem fora de fase. Já na resposta $u_2 \times t$ eles aparecem em fase.

A Figura 3-8 (a) revela que os modos são não similares, já que a projeção no espaço de configuração não é uma reta e sim uma curva. Outro fato importante é que a curva da projeção no espaço de fase é fechada, indicando que há um acoplamento entre os graus de liberdade. Assim sendo, o método das variedades invariantes não pode ser utilizado para encontrar esses modos, uma vez que a invariância do método seria violada por esses acoplamentos. Esses modos são chamados por Georgiou e Schwartz (2001) de modos não lineares não clássicos. A projeção no espaço de fase dos modos similares é mostrada junto à projeção dos modos não similares da Figura 3-8 (a) de modo a evidenciar o papel das retas modais dos modos similares como eixos de simetria em relação ao movimento não similar dos demais modos.

A resposta no tempo para os dois modos instáveis PS11 e PS21 é praticamente idêntica, como se mostra na Figura 3-8. Assim como os modos estáveis P31 e P41, os modos PS11 e PS12 são modos não similares e apresentam acoplamentos entre os graus de liberdade, o que se traduz por curvas fechadas na projeção do espaço de configuração, refletindo a periodicidade observada nas Figura 3-8 (b) e (c).

Os quatro modos não similares discutidos até aqui são modos internamente ressonantes, ou modos acoplados (Pak, 2006; Mazzilli et. al., 2008 e Sanches 2009). Os modos acoplados desse exemplo têm como origem a ressonância interna do sistema. Outro fenômeno característico dos modos internamente ressonantes é a troca de energia entre os graus de liberdade durante o movimento. As respostas no tempo mostradas nas Figura 3-8 (b) e (c) revelam a troca de energia entre os graus de liberdade, enquanto o pêndulo vibra nos modos PS11 e PS21 (Vilela *et al.*, 2012). Esse comportamento é semelhante ao fenômeno chamado de batimento, quando um movimento rápido apresenta uma espécie de movimento com amplitude variável no tempo, porém de forma periódica correspondente a um movimento lento.

3.2.5. Relação frequência-amplitude

Uma das características da dinâmica não linear é que a frequência do movimento varia com a amplitude. A curva que fornece essa variação é chamada relação frequência–amplitude. Como os modos normais (com exceção dos modos acoplados) reduzem o sistema de equações a um oscilador modal com um grau de

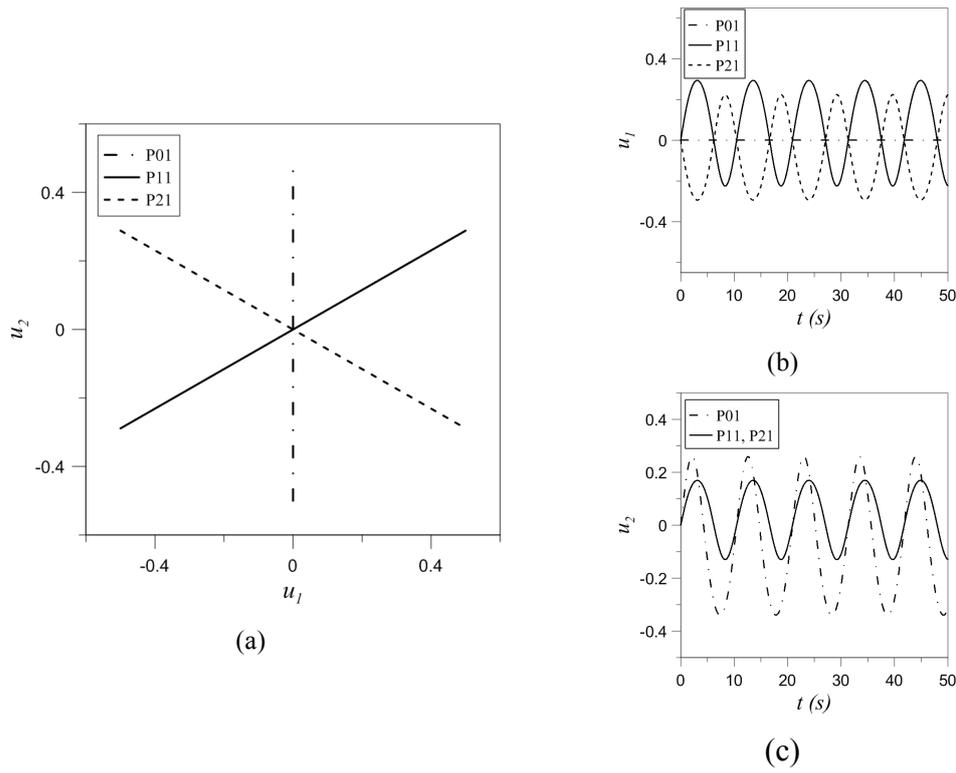


Figura 3-6 Resposta no tempo para os modos similares: (a) $u_2 \times u_1$; (b) $u_1 \times t$; (c) $u_2 \times t$.

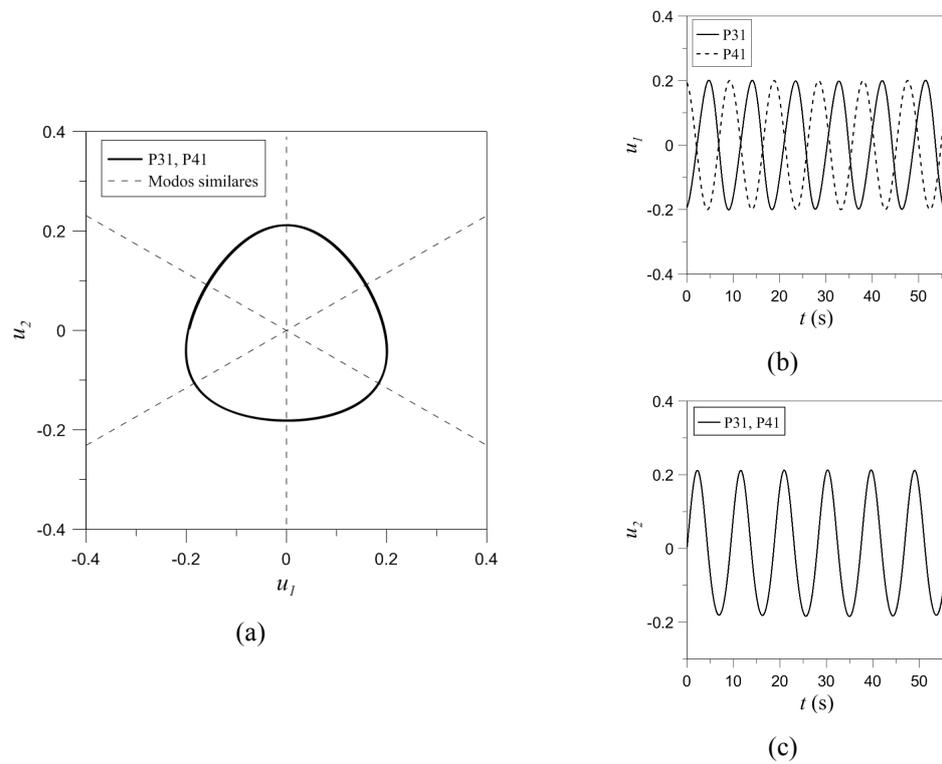


Figura 3-7 Resposta no tempo para os modos P31 e P41: (a) $u_2 \times u_1$; (b) $u_1 \times t$; (c) $u_2 \times t$.

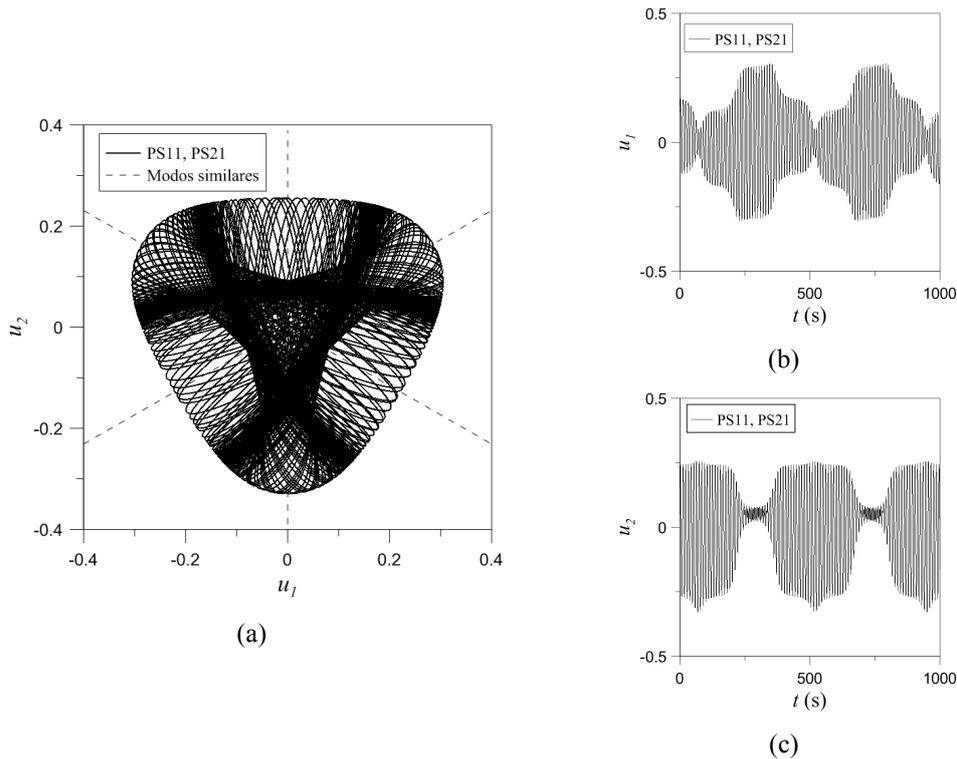


Figura 3-8 Resposta no tempo para os modos PS11 e PS21: (a) $u_2 \times u_1$; (b) $u_1 \times t$; (c) $u_2 \times t$.

liberdade, técnicas como métodos de perturbação ou balanço harmônico, podem ser utilizadas, revelando aspectos importantes da dinâmica não linear do problema tais como perda ou ganho de rigidez.

O método do balanço harmônico é usado neste trabalho assumindo-se, em função da ordem dos termos não lineares nas equações (3-64), (3-71) e (3-72), a seguinte aproximação para a solução geral:

$$u(t) = X_1 + X_2 \cos(\omega t) \quad (3-79)$$

Para detalhes sobre a metodologia de aplicação do método do balanço harmônico ver Thomson (1981). A aplicação do método ao modo P01 (utilizando-se os valores $\omega_p=1,0$ rad/s e $\lambda=0,7$) resulta no seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \frac{3}{7}X_1 + \frac{15}{28}X_1^2 + \frac{15}{56}X_2^2 - \frac{29}{112}X_1^3 + \left(\frac{3}{14}\Omega^2 - \frac{87}{224}\right)X_1X_2^2 - \\ \frac{85}{1792}X_1^4 - \frac{255}{1792}X_1^2X_2^2 - \frac{255}{14336}X_2^4 = 0; \end{aligned} \quad (3-80)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{7}(1-\Omega^2)X_2 + \frac{15}{14}X_1X_2 - \frac{87}{112}X_1^2X_2 + \left(\frac{3}{28}\Omega^2 - \frac{87}{448}\right)X_2^3 - \\ \frac{85}{448}X_1^3X_2 - \frac{255}{1792}X_1X_2^3 = 0 \end{aligned} \quad (3-81)$$

No caso do modo P11, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{3}{7}X_1 - \frac{5}{14}\sqrt{3}X_1^2 - \frac{5}{28}\sqrt{3}X_2^2 - \frac{29}{84}X_1^3 + \left(\frac{2}{7}\Omega^2 - \frac{29}{56}\right)X_1X_2^2 + \\ \frac{85}{2016}\sqrt{3}X_1^4 + \frac{85}{672}\sqrt{3}X_1^2X_2^2 + \frac{85}{5376}\sqrt{3}X_2^4 = 0; \end{aligned} \quad (3-82)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{7}(1-\Omega^2)X_2 - \frac{5}{7}\sqrt{3}X_1X_2 - \frac{29}{28}X_1^2X_2 + \left(\frac{1}{7}\Omega^2 - \frac{29}{112}\right)X_2^3 + \\ \frac{85}{504}\sqrt{3}X_1^3X_2 + \frac{85}{672}\sqrt{3}X_1X_2^3 = 0 \end{aligned} \quad (3-83)$$

Finalmente para o modo P21, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{3}{7}X_1 + \frac{5}{14}\sqrt{3}X_1^2 + \frac{5}{28}\sqrt{3}X_2^2 - \frac{29}{84}X_1^3 + \left(\frac{2}{7}\Omega^2 - \frac{29}{56}\right)X_1X_2^2 - \\ \frac{85}{2016}\sqrt{3}X_1^4 - \frac{85}{672}\sqrt{3}X_1^2X_2^2 - \frac{85}{5376}\sqrt{3}X_2^4 = 0; \end{aligned} \quad (3-84)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{7}(1-\Omega^2)X_2 + \frac{5}{7}\sqrt{3}X_1X_2 - \frac{29}{28}X_1^2X_2 + \left(\frac{1}{7}\Omega^2 - \frac{29}{112}\right)X_2^3 - \\ \frac{85}{504}\sqrt{3}X_1^3X_2 - \frac{85}{672}\sqrt{3}X_1X_2^3 = 0 \end{aligned} \quad (3-85)$$

Nas equações de (3-80) a (3-85) utiliza-se a variável adimensional Ω , definida como:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (3-86)$$

Estes sistemas de equações algébricas não lineares podem ser resolvidos pelo método iterativo de Newton-Raphson. O conjunto dos pontos (X_i, ω_i) fornece a resposta frequência-amplitude para o problema. Uma análise mais clara da vibração do sistema é obtida, utilizando a seguinte expressão, que fornece o valor da amplitude máxima em módulo:

$$X^* = X_1 + |X_2| \quad (3-87)$$

As curvas de frequência-amplitude para os modos similares P01, P11 e P21 são mostradas na Figura 3-9; observa-se para os modos similares uma acentuada não linearidade das curvas com perda de rigidez. As curvas de frequência-amplitude para os modos P11 e P21 são idênticas, uma vez que a única diferença entre eles é que os graus de liberdade no modo P11 executam movimentos em fase, enquanto no modo P21 o movimento executado ocorre fora de fase.

Há duas fontes de imprecisão nos resultados: a expansão em série de Taylor das equações (3-54) e (3-55) e a aproximação dada pela eq. (3-79). A validade das aproximações pode ser verificada para os modos similares obtendo-se as relações frequência-amplitude diretamente das equações de movimento originais (3-54) e (3-55), utilizando-se métodos de integração numérica. As condições iniciais para a integração numérica são as coordenadas dos respectivos pontos fixos na seção de Poincaré dados na Tabela 3-1.

Para que a comparação possa ser feita de modo apropriado, é necessário que as condições iniciais sejam transformadas do espaço das coordenadas físicas do problema $\{u\}$ para as coordenadas modais $\{w\}$. Isso pode ser feito utilizando-se a transformação modal proposta por Shaw e Pierre (1993) descrita no capítulo 2. Como os modos são similares, somente a matriz linear, M_0 , é necessária, e os seus coeficientes têm por fonte as relações modais entre os graus de liberdade. No caso dos modos similares P11 e P21, este procedimento resulta em:

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \dot{w}_1 \\ w_2 \\ \dot{w}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \dot{u}_1 \\ u_2 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (3-88)$$

O significado físico da matriz de transformação (3-88) é uma rotação de eixos do sistema original de equações para os eixos onde as equações de movimento podem ser desacopladas, confirmando o caráter geométrico dos modos normais similares.

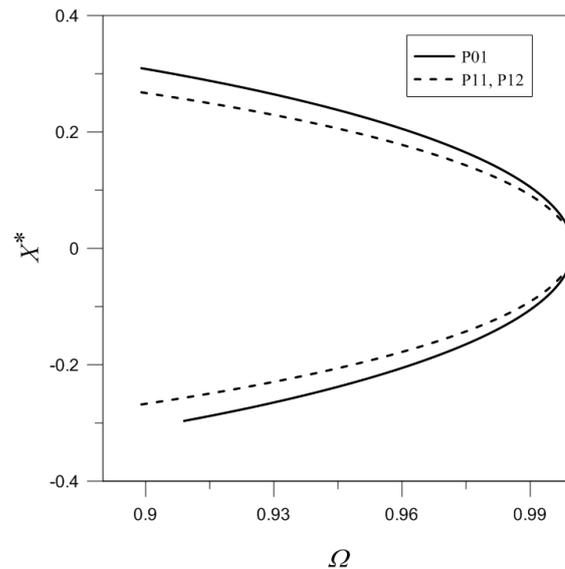


Figura 3-9 Relações frequência-amplitude para os modos similares.

No caso do modo similar P01, a matriz de transformação M_0 é a matriz identidade, uma vez que os eixos que desacoplam o movimento no modo similar são os eixos em que as equações originais foram escritas. Desse modo, a aplicação das matrizes de transformação para as condições iniciais $\{u_{ij}\}$ retiradas da Tabela 3-1, no sistema de coordenadas modais $\{w_{ij}\}$, para os modos P01, P11 e P21 são respectivamente iguais a:

$$\{w_i\}_{P01} = \begin{Bmatrix} 0,000 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ 0,189 \end{Bmatrix}; \quad \{w_i\}_{P11} = \begin{Bmatrix} 0,000 \\ 0,898 \\ 0,000 \\ -0,734 \end{Bmatrix}; \quad \{w_i\}_{P21} = \begin{Bmatrix} 0,000 \\ 0,734 \\ 0,000 \\ -0,898 \end{Bmatrix} \quad (3-89)$$

A resposta no tempo das equações originais para cada um dos vetores de condições iniciais representados pelas equações (3-89), pode ser utilizada para o cálculo das curvas de frequência-amplitude no espaço modal. O método utilizado é o mesmo proposto por Nandakumar e Chatterjee (2005) e basicamente consiste na integração numérica das equações originais de movimento levemente amortecidas em cada grau de liberdade. Nos exemplos numéricos dessa seção foram utilizados valores de $\xi=0,005$.

Consideram-se dois picos sucessivos de amplitude positiva (A_1 e A_2) correspondentes aos tempos t_1 e t_2 respectivamente na resposta amortecida obtida numericamente. Seja a média entre esses dois valores sucessivos, designada por

A_p , e o valor de pico negativo entre os dois picos positivos designado por A_n . Desse modo, a amplitude do movimento pode ser calculada numericamente por:

$$A = \frac{A_p - A_n}{2} \quad (3-90)$$

O período da oscilação é definido como:

$$T_0 = t_2 - t_1 \quad (3-91)$$

Já o parâmetro de frequência adimensional pode ser expresso por:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\omega_0 T_0} \quad (3-92)$$

A comparação das curvas utilizando-se os osciladores modais e a integração numérica das equações originais de movimento, designadas como solução de referência, é mostrada para os modos P01 e P11 (mesmo resultado para o modo P21) respectivamente nas Figura 3-10 (a) e (b). Como se pode observar, o modelo de ordem reduzida apresenta boa correlação com os resultados numéricos em todo o domínio analisado. As curvas para os graus de liberdade escravos podem ser obtidas em função das relações modais expressas pela eq. (3-60), no caso da solução obtida por meio do modelo reduzido.

O método numérico utilizado para obtenção das curvas de frequência-amplitude dos modos similares também pode ser utilizado para obtenção dessas curvas no caso dos modos não similares essencialmente não lineares P31, P41, PS11 e PS21. As curvas obtidas para esses modos encontram-se no espaço das variáveis físicas. As curvas frequência-amplitude para os deslocamentos u_1 e u_2 no caso de oscilações do pêndulo nos modos P31 e P41 são mostradas respectivamente nas Figura 3-11 (a) e (b).

Observa-se que, diversamente dos modos similares, as curvas frequência-amplitude para os modos não similares estáveis P31 e P41 apresentam ganho de rigidez. Observa-se também que os ramos positivos e negativos dessas curvas são levemente assimétricos, revelando o efeito dos termos não lineares pares nas equações de movimento do sistema.

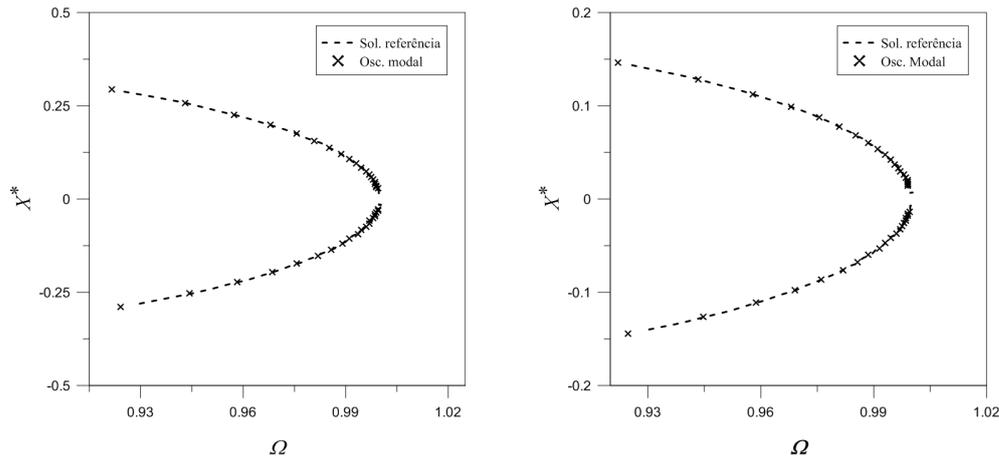


Figura 3-10 Relações frequência-amplitude: (a) modo P01; (b) modos P11 e P21.

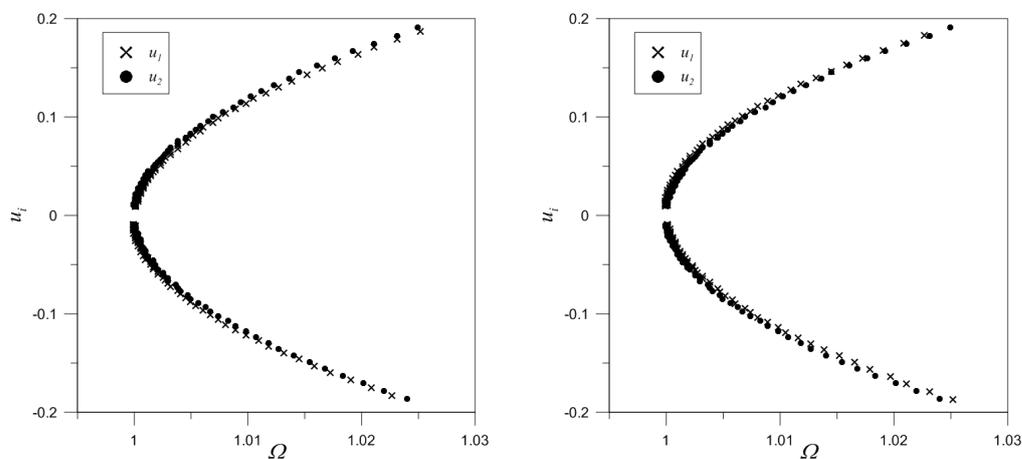


Figura 3-11 Relações frequência-amplitude: (a) modo P31; (b) modo P41.

As curvas de frequência-amplitude para os modos não similares instáveis PS11 e PS12 são apresentadas na Figura 3-12. Observa-se um comportamento não linear com perda de rigidez em ambos os graus de liberdade.

Uma das características típicas dos sistemas não lineares é a dependência entre a frequência e a energia do sistema. É comum que na literatura referente aos modos normais não lineares essa dependência seja descrita por relações frequência-energia (Sextro *et al.*, 2001, Peeters *et al.*, 2008; Kerschen *et al.*, 2008; 2009). Essas relações de dependência são obtidas calculando-se primeiramente as amplitudes dos harmônicos em função da frequência nas equações (3-80) a (3-85), as quais são substituídas na eq. (3-79) para os deslocamentos, que por sua vez são substituídos no potencial de energia do sistema. Uma vez que a energia do sistema não dissipativo não varia com o tempo, somente a equação de energia potencial do sistema, dada pela eq. (3-24) é utilizada para obtenção da energia total do sistema.

As curvas de variação frequência-energia são mostradas na Figura 3-13 para os modos similares, onde se observa que a energia cresce até um valor máximo a medida que a frequência decresce, para depois voltar a cair com o contínuo aumento da frequência de vibração. Assim, como observado por Rosemberg (1966), ainda que os modos similares tenham seu formato independente do nível de energia de vibração do sistema, a frequência desses modos apresenta essa dependência, característica que os distingue dos modos lineares.

3.2.6. Espaço de fase

O espaço de fase é outra ferramenta adequada para se aferir o nível de aproximação da solução de ordem reduzida, obtida com os modos normais não lineares, e a solução numérica das equações originais. Apresenta-se nas Figura 3-14 (a), (b) e (c) a configuração do espaço de fase para os modos similares P01, P11 e P21, respectivamente. Nesses diagramas as linhas em preto correspondem às órbitas obtidas da integração numérica das equações originais de movimento do sistema. Aqui são utilizadas as transformações entre coordenadas físicas e modais discutidas na seção anterior. As condições iniciais são aumentadas até que as órbitas atinjam o ponto de sela. A partir deste ponto o modo se torna instável.

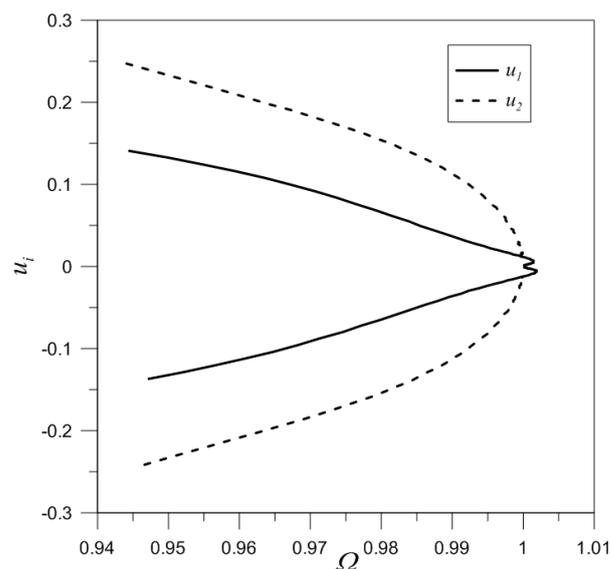


Figura 3-12 Curvas de ressonância para os modos PS11 e PS21.

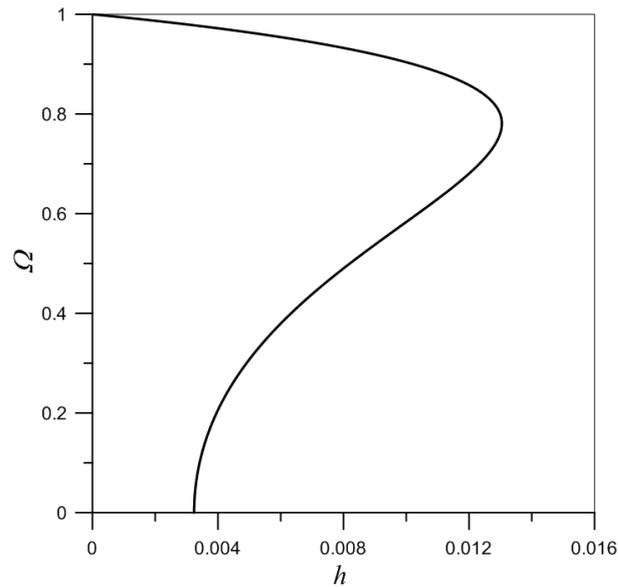


Figura 3-13 Curvas de frequência-energia – modos similares.

As coordenadas em u do ponto de sela obtidas tanto pela integração dos osciladores modais quanto das equações originais de movimento do sistema são mostradas na Tabela 3-2. Observa-se um erro menor que 0,4% na aproximação do movimento pelo modelo reduzido resultante do uso dos modos normais não lineares, mesmo para deslocamentos maiores que a metade da altura do pêndulo, mostrando que a validade das aproximações obtidas não se restringe a pequenas amplitudes de oscilações.

3.2.7. Vibração Forçada

Assim como no caso da análise linear, a ressonância externa nos sistemas

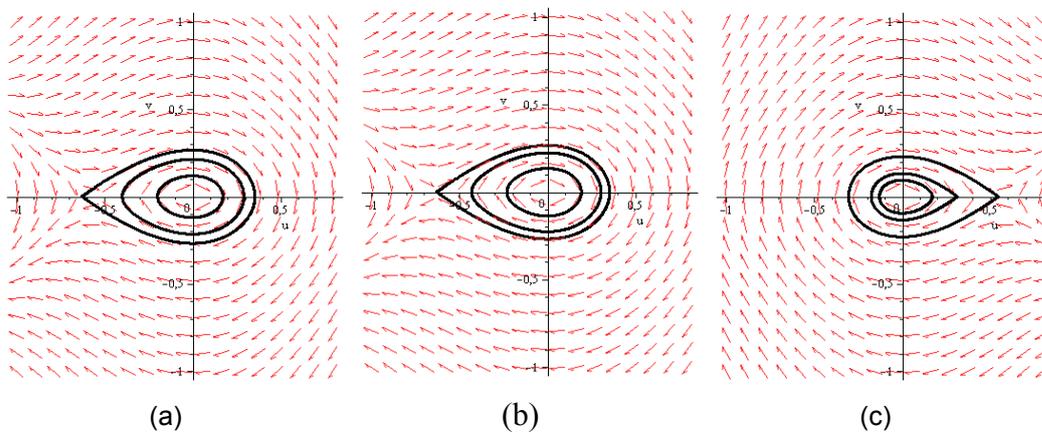


Figura 3-14 Espaço de fase: (a) modo P01; (b) modo P11; (c) modo P21 - as órbitas correspondem à integração do sistema de equações original e o campo vetorial ao sistema aproximado.

Modo	Solução de Referência	Modelo Reduzido	Erro (%)
P01	-0,628	-0,630	0,366
P11	-0,544	-0,5458	0,366
P21	0,544	0,546	0,366

Tabela 3-2 Coordenadas do ponto de sela para os modos similares.

não lineares ocorre na proximidade dos modos normais (Rosemberg, 1966). Desse modo uma das grandes motivações para o estudo dos modos normais não lineares é que eles são uma importante ferramenta no estudo das estruturas sob vibrações forçadas (Kerschen et. all. 2008). De acordo com Rosemberg (1966), quando a amplitude da força externa é pequena e, conseqüentemente, as amplitudes de movimento também o são, a solução do problema de vibração forçada dos osciladores modais fornece de modo apropriado o comportamento no regime permanente da vibração forçada do sistema.

Assim como na análise modal linear, pode-se ignorar a excitação externa no procedimento de obtenção do modelo reduzido utilizando-se os modos normais não lineares, e as forças são aplicadas na projeção dos modos retidos na análise (Shaw *et. al.*, 1999). Essa abordagem viola a propriedade de invariância das variedades invariantes, uma vez que no sistema forçado as variedades invariantes dependam do tempo. Entretanto, de acordo alguns autores (Boivin *et. al.*, 1996; Shaw *et. al.* 1999; Peschek, 2000), quando a amplitude da força externa é pequena a variação das variedades invariantes com o tempo pode ser desprezada.

A vibração forçada amortecida dos três modos similares obtidos na seção 3.2.2 é a seguir analisada, considerando a atuação de uma força harmônica com pequena amplitude excitando a estrutura na direção de cada modo similar. Desse modo, reescrevem-se as equações reduzidas dos osciladores modais para os modos P01, P11 e P21, respectivamente como:

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_p \sqrt{\frac{1}{\lambda}} \dot{u} + (1-\lambda) \frac{\omega_p^2}{\lambda} u + \frac{3}{8} \frac{\omega_p^2}{\lambda} u^2 + (16\lambda - 17) \frac{\omega_p^2}{32\lambda} u^3 + uu\dot{u}^2 - \frac{17}{512} \frac{\omega_p^2}{\lambda} u^4 = \Gamma \cos(\omega t); \quad (3-93)$$

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_p \sqrt{\frac{1}{\lambda} - 1} \dot{u} + (1-\lambda) \frac{\omega_p^2}{\lambda} u - \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\omega_p^2}{\lambda} u^2 + \frac{\omega_p^2}{24\lambda} (16\lambda - 17) u^3 + \frac{4}{3} u \dot{u}^2 + \frac{17\sqrt{3}\omega_p^2}{516\lambda} u^4 = \Gamma \cos(\omega t); \quad (3-94)$$

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_p \sqrt{\frac{1}{\lambda} - 1} \dot{u} + (1-\lambda) \frac{\omega_p^2}{\lambda} u + \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\omega_p^2}{\lambda} u^2 + \frac{\omega_p^2}{24\lambda} (16\lambda - 17) u^3 + \frac{4}{3} u \dot{u}^2 - \frac{17\sqrt{3}\omega_p^2}{516\lambda} u^4 = \Gamma \cos(\omega t), \quad (3-95)$$

onde Γ é um parâmetro adimensional de carga, igual a:

$$\Gamma = \left(\frac{\lambda}{1-\lambda} \right) \frac{F_0}{mg} \quad (3-96)$$

onde F_0 é a amplitude da carga harmônica.

Para se obter as curvas de ressonância, utiliza-se o método do balanço harmônico, assumindo a seguinte solução aproximada:

$$u(t) = X_1 + X_2 \cos(\omega t) + X_3 \sin(\omega t) \quad (3-97)$$

A substituição da eq. (3-97) nos osciladores modais das (3-94), (3-95) e (3-96), utilizando-se as expressões trigonométricas do Anexo I, resulta em um sistema de três equações algébricas não lineares para cada modo. Tais curvas apresentam formas complexas com o surgimento de pontos limites. Assim, utiliza-se para a obtenção das curvas de ressonância o método de controle de comprimento de arco, cujo procedimento encontra-se detalhado no Anexo II.

O resultado para os modos similares P01, P11 e P21 ($\omega_p=1,0$ rad/s e $\lambda=0,7$) são apresentados na Figura 3-15, onde se utiliza a seguinte expressão para a obtenção das amplitudes máximas do movimento:

$$X^* = X_1 + \sqrt{X_2^2 + X_3^2} \quad (3-98)$$

Como esperado, as curvas de ressonância associadas aos modos similares apresentam perda de rigidez decorrente do sinal negativo dos termos com não linearidade cúbica, com a coexistência de ramos estáveis (linhas contínuas) e instáveis (linhas tracejadas). A estabilidade é determinada a partir da teoria dos multiplicadores de Floquet. Os multiplicadores de Floquet são calculados segundo o procedimento numérico apresentado por Machado (1993) e detalhado no Anexo

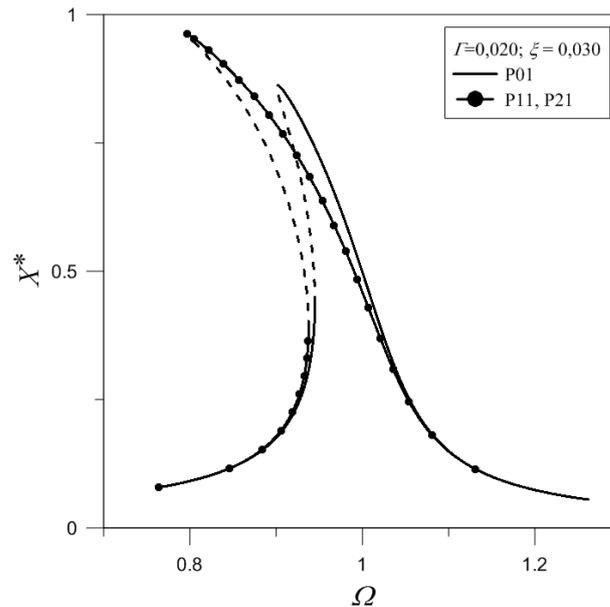


Figura 3-15 Curvas de ressonância para vibração forçada amortecida – modos similares. Ramos estáveis – linhas contínuas; ramos instáveis – linhas tracejadas.

III. As condições iniciais correspondentes aos pontos fixos, u_0^i e v_0^i , são obtidas a partir dos resultados do método do comprimento de arco, tendo como variáveis ω^i , X_1^i , X_2^i , X_3^i , e das equações (3-97) e (3-98), resultando em:

$$u_0^i = X_1^i + \sqrt{(X_2^i)^2 + (X_3^i)^2}; \quad (3-99)$$

$$v_0^i = \omega^i \sqrt{(-X_2^i)^2 + (X_3^i)^2} \quad (3-100)$$

Outro aspecto importante das curvas de ressonância da Figura 3-15 é o salto dinâmico entre soluções estáveis coexistentes. Esses saltos correspondem a uma transição súbita entre atratores estáveis causados pelo fenômeno da histerese dinâmica (Kerschen *et. al.*, 2006). O salto dinâmico se traduz fisicamente por mudanças bruscas na amplitude do movimento para pequenas variações na frequência da força externa. Essas transições súbitas são provocadas por pequenas variações nas condições iniciais do movimento e podem impulsionar a solução entre domínios de atração competidores no espaço de fase (Kerschen *et. al.*, 2006). O salto dinâmico também é sensível ao valor da amplitude da carga, já que um decréscimo na amplitude é capaz de diminuir o salto, tornando a transição menos brusca, ou mesmo eliminá-lo, como pode-se observar nas curvas da Figura 3-16 (a). O mesmo efeito é obtido aumentando-se o amortecimento do sistema, como se pode observar na Figura 3-16 (b).

Os modos normais são importantes no estudo de sistema não lineares, uma vez que a ressonância do sistema ocorre na vizinhança desses modos e que eles podem ser utilizados para descrever o comportamento dinâmico da estrutura. Para verificação dessas características considera-se a ação de uma força externa harmônica atuando em uma direção que forma um ângulo γ com o eixo x . Desse modo as equações de vibração do sistema forçado são obtidas pela adição das forças nas equações (3-54) e (3-55), resultando em:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + (1-\lambda)\frac{\omega_p^2}{\lambda}u_1 + 2\xi\omega_0\dot{u}_1 - \frac{3}{4}\frac{\omega_p^2}{\lambda}u_1u_2 + (16\lambda-17)\frac{\omega_p^2}{32\lambda}u_1^3 + u_1\dot{u}_1^2 + \\ (16\lambda-17)\frac{\omega_p^2}{32\lambda}u_1u_2^2 + u_1\dot{u}_2^2 + \frac{39}{128}\frac{\omega_p^2}{\lambda}u_1^3u_2 - \\ \frac{83}{128}\frac{\omega_p^2}{\lambda}u_1u_2^3 = \Gamma \cos(\gamma)\cos(\omega t) \end{aligned} \quad (3-101)$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}_2 + (1-\lambda)\frac{\omega_p^2}{\lambda}u_2 + 2\xi\omega_0\dot{u}_2 - \frac{3}{8}\frac{\omega_p^2}{\lambda}(u_1^2 - u_2^2) + (16\lambda-17)\frac{\omega_p^2}{32\lambda}u_2^3 + \\ u_2(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2) + (16\lambda-17)\frac{\omega_p^2}{32\lambda}u_1u_2^2 - \frac{105}{512}\frac{\omega_p^2}{\lambda}u_1^4 + \frac{183}{256}\frac{\omega_p^2}{\lambda}u_1^2u_2^2 - \\ \frac{17}{512}\frac{\omega_p^2}{\lambda}u_2^4 = \Gamma \sin(\gamma)\cos(\omega t) \end{aligned} \quad (3-102)$$

Aplica-se o método do balanço harmônico, sendo que as aproximações para u_1 e u_2 são iguais àquela da eq. (3-97), o que resulta num sistema de seis equações algébricas não lineares, resolvidas pelo método do controle de comprimento de arco. As curvas de ressonância para alguns valores de γ , juntamente com as relações frequência-amplitude obtidas dos modelos de ordem reduzida referentes aos modos similares são mostradas na Figura 3-17, onde se observa que o comportamento dinâmico forçado é governado por estes modos não lineares.

3.2.8.

Diagramas de bifurcação

Outra ferramenta muito útil para o estudo da estabilidade das soluções dos sistemas forçados são os diagramas de bifurcação, resultantes da solução das equações de movimento quando um dos parâmetros sofre variação. Para os diagramas de bifurcação aqui obtidos são consideradas as equações (3-93), (3-94)

e (3-95) com o parâmetro de carga Γ variando, enquanto o parâmetro de frequência da excitação é mantido constante. Como exemplo, Ω é escolhido igual a 0,95, por se tratar de uma região que exhibe complexo comportamento dinâmico não linear. Para este exemplo adota-se: $\omega_p=1$ rad/s e $\lambda=0,7$.

O procedimento numérico para o traçado do diagrama de bifurcação foi proposto por Machado (1993) e associa a técnica do multimapeamento de Poincaré com o método iterativo de Newton-Raphson. A técnica do multimapeamento de Poincaré, descrita em detalhes no Anexo III, é utilizada para se descobrir a posição dos pontos fixos para determinados níveis do parâmetro de carga dentro de uma faixa de interesse. O diagrama de bifurcação é então traçado entre dois pontos fixos conhecidos em dois níveis adjacentes do parâmetro de carga utilizando-se o método de Newton-Raphson em uma análise incremental iterativa. A estabilidade de cada ponto fixo é obtida por meio dos multiplicadores de Floquet numericamente determinados de acordo com o algoritmo descrito no Anexo III.

Os diagramas de bifurcação para os modos P01 e P11 (idêntico ao modo P21) são mostrados nas Figura 3-19 e Figura 3-18 respectivamente. Observa-se nesses diagramas a existência de múltiplas soluções com trechos estáveis e instáveis, sendo estes trechos delimitados por bifurcações nó-sela.

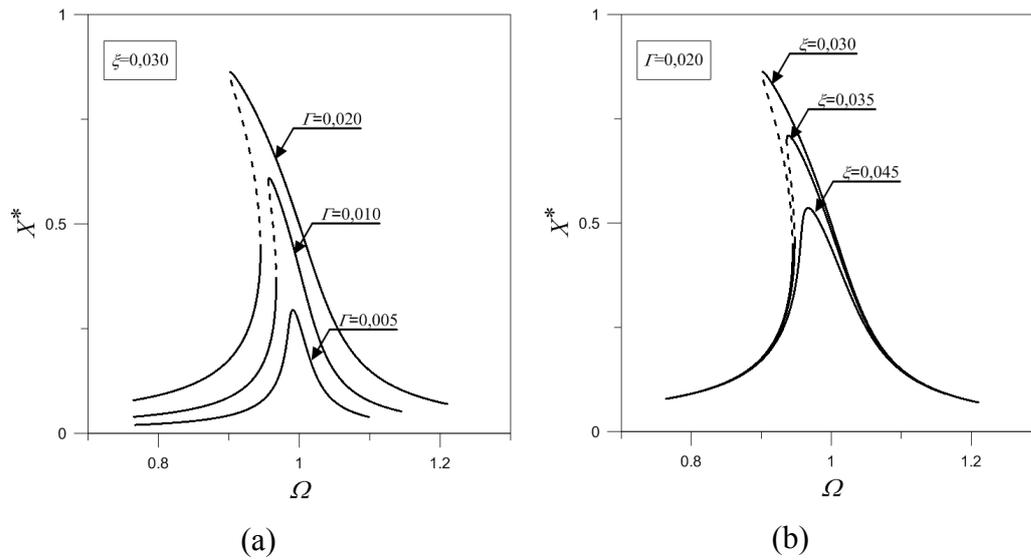


Figura 3-16 Curvas de ressonância – modo P01: (a) influência da amplitude da carga; (b) influência do amortecimento. Ramos estáveis – linhas contínuas; ramos instáveis – linhas tracejadas

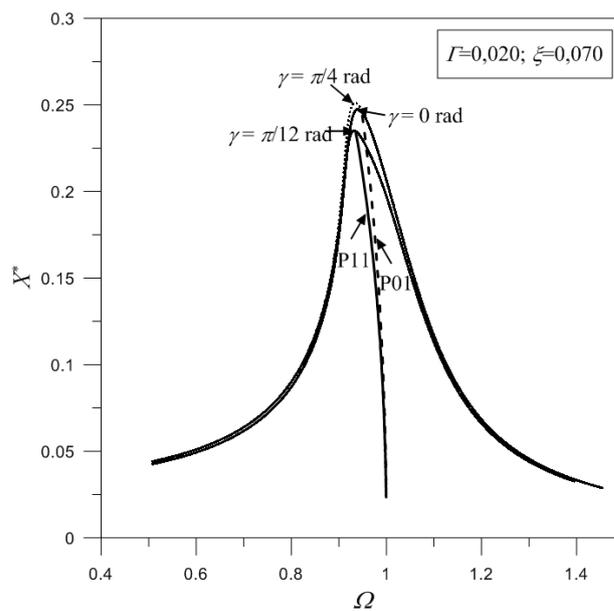


Figura 3-17 Curvas de ressonância - influência do ângulo γ .

3.2.9. Estabilidade

Além do método dos multiplicadores de Floquet, utilizado em conjunto com as curvas de ressonância e diagramas de bifurcação para o estudo da estabilidade da solução do modelo reduzido pelo uso dos modos normais não lineares, pode-se estudar a estabilidade do movimento perturbando-se as equações dos osciladores modais (3-93), (3-94) e (3-95) e resolvendo-se as equações de Mathieu resultantes do processo. A seguir, obtêm-se os diagramas de estabilidade para a equação de Mathieu. Para isso retêm-se os termos até segunda ordem nessas equações. Apesar dessa aproximação, esse procedimento é útil, uma vez que estuda analiticamente a estabilidade do movimento sem a necessidade de se fixar a amplitude da força externa (curvas de ressonância) ou a sua frequência de oscilação (diagramas de bifurcação). O procedimento aqui utilizado segue o proposto por Jordan e Smith (2007).

Para exemplificar o procedimento, considera-se a eq. (3-93) referente ao oscilador modal do modo P01. Utilizando-se os valores numéricos $\omega_p=1,0$ rad/s e $\lambda=0,7$, a variável adimensional $\tau=\omega t$ e a relação $\omega_p^2=\omega^2\lambda/(1-\lambda)$, tem-se:

$$u_{,\tau\tau} + \frac{2\xi}{\Omega}u_{,\tau} + \frac{1}{\Omega^2}u + \frac{5}{4\Omega^2}u^2 = \frac{7}{3\Omega^2}\Gamma \cos \tau \quad (3-103)$$

Assumindo-se uma solução do tipo:

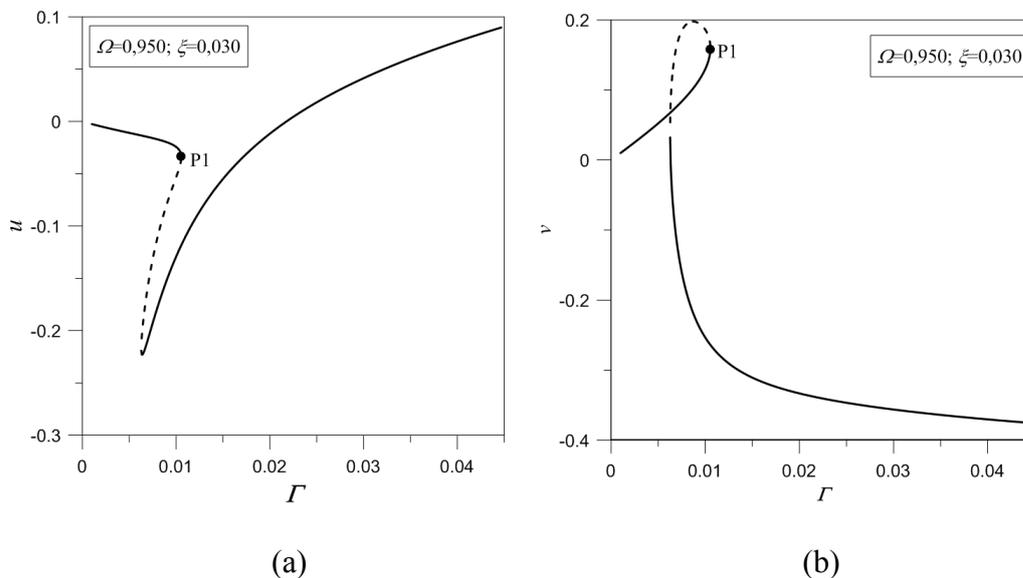


Figura 3-18 Diagrama de bifurcação – modos P11 e P21: (a) deslocamentos; (b) velocidades. Ramos estáveis – linhas contínuas; ramos instáveis – linhas tracejadas.

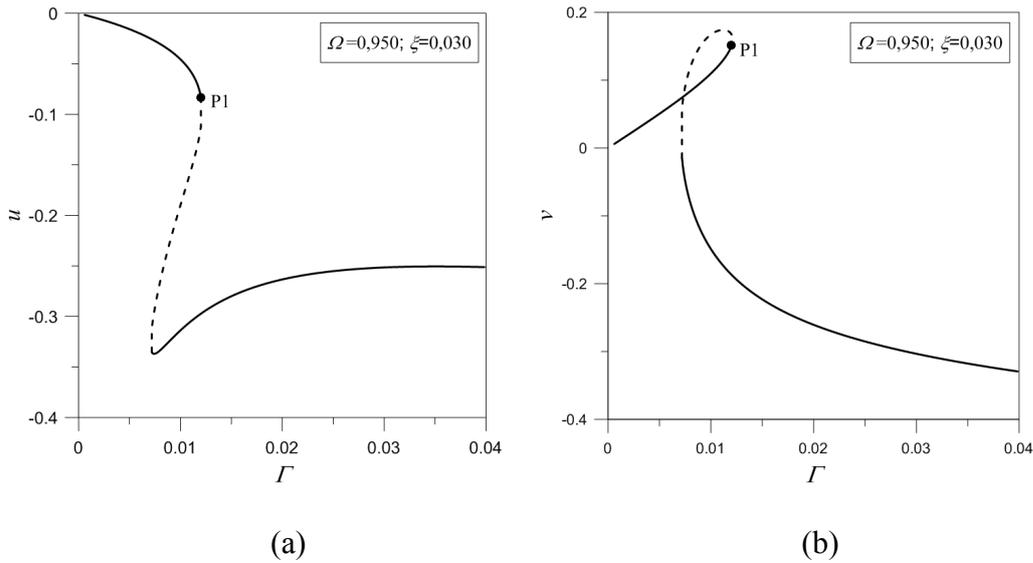


Figura 3-19 Diagrama de bifurcação – modo P01: (a) deslocamentos; (b) velocidades. Ramos estáveis – linhas contínuas; ramos instáveis – linhas tracejadas.

$$u(\tau) = X_1 \cos \tau + X_2 \sin \tau \quad (3-104)$$

Substituindo-se a eq. (3-104) na eq. (3-103) e utilizando-se as relações trigonométricas do Anexo I, obtêm-se as seguintes expressões:

$$-\frac{2\xi}{\Omega} X_2 + \left(1 - \frac{1}{\Omega^2}\right) u + \frac{7}{3\Omega^2} \Gamma = 0; \quad \frac{2\xi}{\Omega} X_1 + \left(1 - \frac{1}{\Omega^2}\right) u = 0 \quad (3-105)$$

Combinando-se as equações (3-105), tem-se:

$$X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} = \frac{7}{3} \Gamma \sqrt{\frac{1}{2\Omega^2(2\xi^2 - 1) + (\Omega^4 + 1)}} \quad (3-106)$$

O próximo passo é considerar a seguinte solução perturbada

$$u(\tau) = u^*(\tau) + \delta(\tau) \quad (3-107)$$

onde $u^*(t)$ é solução da eq. (3-103), após a substituição da eq. (3-107) na correspondente equação homogênea de (3-103).

Linearizando-se a equação resultante, obtêm-se a seguinte equação em termos da perturbação:

$$\delta_{,\tau\tau} + \frac{2\xi}{\Omega} \delta_{,\tau} + \frac{1}{\Omega^2} \left(1 + \frac{5}{2} u^*\right) \delta = 0 \quad (3-108)$$

Utilizando-se a seguinte relação:

$$u^*(\tau) = X_1 \cos \tau + X_2 \sin \tau = X \cos(\tau + \phi) \quad (3-109)$$

onde X é definido pela eq.(3-106) e ϕ é o ângulo de fase, substituindo-se a eq.(3-109) na eq. (3-108), obtém-se a equação de Mathieu amortecida:

$$\delta_{,\tau^*} + \kappa \delta_{,\tau^*} + \left(\nu + \beta_1 \cos(\tau^*) \right) = 0, \quad (3-110)$$

onde os seguintes parâmetros foram utilizados para se obter a forma padrão da equação de Mathieu:

$$\tau^* = (\tau + \phi); \quad \kappa = \frac{2\xi}{\Omega}; \quad \nu = \frac{1}{\Omega^2}; \quad \beta_1 = \frac{5}{2\Omega^2} X \quad (3-111)$$

De acordo com Jordan e Smith (2007), as soluções periódicas da eq. (3-103) são estáveis no domínio definido por:

$$\left(\nu - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{4} (\beta_1^2 - \kappa^2) > 0 \quad (3-112)$$

Substituindo as relações (3-106) e (3-111) na eq.(3-112), obtém-se a seguinte equação para o domínio de estabilidade em termos dos parâmetros adimensionais da equação de movimento:

$$\left(\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1225\Gamma^2}{144\Omega^4 [2\Omega^2(2\xi^2 - 1) + (\Omega^4 + 1)]} + \frac{\xi^2}{\Omega^2} > 0 \quad (3-113)$$

Repetindo-se o processo para os modos P11 e P21, tem-se o seguinte domínio de estabilidade:

$$\left(\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1225\Gamma^2}{108\Omega^4 [2\Omega^2(2\xi^2 - 1) + (\Omega^4 + 1)]} + \frac{\xi^2}{\Omega^2} > 0 \quad (3-114)$$

Nas Figura 3-20 (a) e (b) são mostradas várias curvas delimitando as regiões de estabilidade para os modos P01 e P11 (igual para o modo P21) para níveis crescentes do coeficiente de amortecimento ξ . Os resultados mostram que os domínios de estabilidade são bastante sensíveis ao nível de amortecimento nas regiões de ressonância. Observam-se no domínio estudado duas regiões principais de ressonância. Uma em torno de $\Omega=1,0$ e outra em torno de $\Omega=2,0$.

Os diagramas de Mathieu são uma importante ferramenta de análise da estabilidade da solução, uma vez que dispensam a obtenção dos diagramas de bifurcação, como se pode ver na correlação entre os pontos de perda de estabilidade mostrados nas Figura 3-18 e Figura 3-19 e as fronteiras de estabilidade mostradas na Figura 3-21 (a) e na Figura 3-21 (b) para os modos P01 e P11, respectivamente. Nos diagramas da Figura 3-21 também são mostrados os pontos de perda de estabilidade para $\Omega=1,5$ (P2) obtidos a partir das equações

completas, onde se observa que a concordância entre os métodos é um pouco menor que a obtida para a região da ressonância.

3.3. Modelo imperfeito

As estruturas apresentam, em geral, imperfeições e incertezas ligadas aos parâmetros que as caracterizam. As imperfeições estão associadas a imprecisões nos valores dos parâmetros, ao ruído presente nas forças externas, e aos defeitos de fabricação. Em alguns casos essas imperfeições não influenciam o comportamento global da dinâmica do sistema e são então desprezadas. Contudo, há exemplos em que as incertezas e imperfeições têm grande influência no

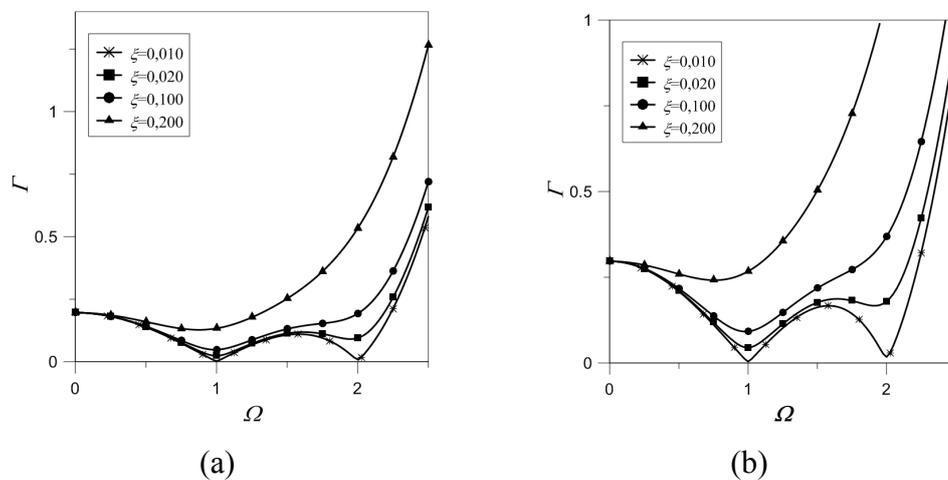


Figura 3-20 Influência do amortecimento no diagrama de estabilidade de Mathieu: (a) modo P01; (b) modos P11 e P21.

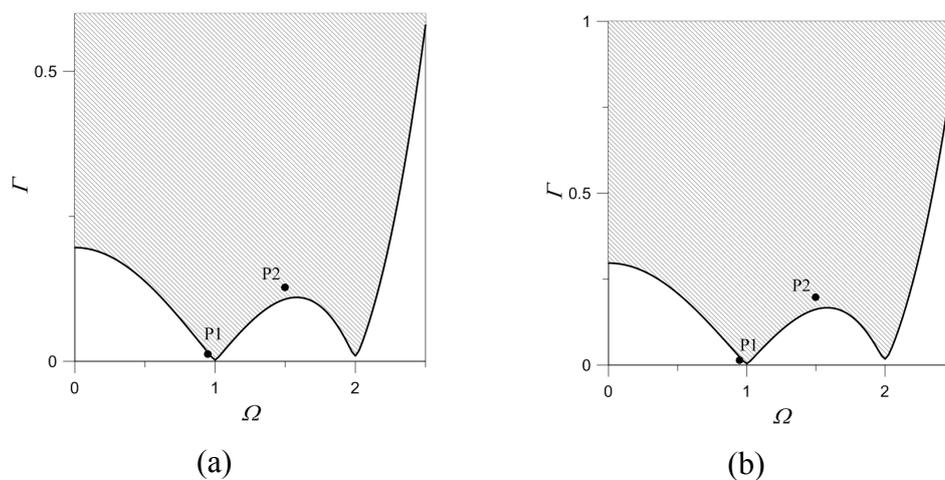


Figura 3-21 Correlação entre os diagramas de bifurcação e de Mathieu: (a) modo P01; (b) modos P11 e P21 – $\zeta=0,030$, P1 ($\Omega=0,95$) e P2 ($\Omega=1,50$).

comportamento dinâmico dos sistemas físicos.

Um dos principais efeitos das imperfeições é a perda de simetria do sistema. De acordo com Kerschen e coautores (2009), algumas degenerações dos modos normais não lineares, como modos cuja forma independe da energia (modos similares), são fenômenos fortemente ligados à existência de simetrias no sistema dinâmico. Outro aspecto importante ligado à perda de simetria é o desaparecimento de certos modos normais acoplados (Vakakis, 1991). De acordo com Xu e coautores (2001), quando ressonâncias internas acontecem, os modos normais não lineares em geral sofrem bifurcações e geram modos adicionais. Entretanto, os modos normais bifurcados não são comuns quando a assimetria do sistema é aumentada (Yang, 1968).

O principal objetivo dessa seção é identificar a influência de uma pequena imperfeição geométrica sobre a dinâmica do problema, principalmente sobre os modos normais não lineares. Desse modo considera-se que o pêndulo está inicialmente inclinado de 1° num ângulo α_i com a direção positiva do eixo x em relação à posição vertical do eixo z . Desse modo as imperfeições consideradas são:

$$u_{10} = \cos(\alpha_i) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{180}\right); \quad u_{20} = \operatorname{sen}(\alpha_i) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{180}\right) \quad (3-115)$$

Em função da simetria da estrutura, apenas alguns valores de α_i precisam ser estudados para mostrar o efeito da imperfeição na resposta dinâmica do problema. Para isso, dois exemplos são discutidos em detalhe. Inicialmente considera-se $\alpha_i=0 \text{ rad}$. Fisicamente isso significa que a imperfeição ocorre na direção do eixo x . Esse primeiro caso representa todos aqueles onde ocorre a perda total de simetria do sistema. Para esse valor de α_i a solução das equações (3-25) e (3-26) resulta no par de deslocamentos puramente estáticos $u_{1s}=0,059$ e $u_{2s}=0,003$. Para obtenção desses valores foram utilizados os parâmetros $\lambda=0,700$ e $\omega_p=1,000 \text{ rad/s}$.

As equações de movimento são obtidas expandindo-se as equações (3-50) em séries de Taylor e retendo até os termos de quarta ordem na expansão, obtendo-se as seguintes aproximações para as equações não lineares de vibração livre não amortecida:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + 0,424u_1 - 0,057u_2 - 0,015u_1^2 - 1,072u_1u_2 - 0,018u_2^2 + \\ 0,059\dot{u}_2^2 - 0,260u_1^3 + 0,042u_1^2u_2 + 1,003u_1\dot{u}_2^2 + 0,001u_1\dot{u}_1\dot{u}_2 - \\ 0,265u_1u_2^2 + 1,000u_1\dot{u}_2^2 + 0,007u_2\dot{u}_1\dot{u}_2 - 0,054u_2^3 = 0; \end{aligned} \quad (3-116)$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}_2 - 0,057u_1 + 0,432u_2 - 0,539u_1^2 - 0,009u_1u_2 + 0,537u_2^2 + \\ 0,003\dot{u}_2^2 - 0,034u_1^3 - 0,003u_1^2u_2 + 0,110u_1u_2^2 + 0,001u_2\dot{u}_1\dot{u}_2 + \\ 1,000u_2\dot{u}_2^2 + 1,000u_2\dot{u}_1^2 - 0,261u_2^3 = 0 \end{aligned} \quad (3-117)$$

Observa-se que, diferentemente do caso perfeito, as equações (3-116) e (3-117) apresentam acoplamento nos termos lineares, bem como mais termos não lineares.

O segundo caso corresponde a um ângulo $\alpha_i = \pi/2 \text{ rad}$. Fisicamente, esse caso se traduz pela existência da imperfeição na direção do eixo y , onde está localizada a mola de constante de rigidez k_l . Esse é um caso onde a simetria é parcialmente perdida, pois o sistema se mantém simétrico em relação ao eixo y . Outros casos semelhantes são aqueles correspondentes aos eixos das duas outras molas, k_2 e k_3 . Para esse segundo caso os deslocamentos puramente estáticos são $u_{1s} = 0,059$ e $u_{2s} = 0,003$ e as equações de movimento são iguais a:

$$\ddot{u}_1 + 0,376u_1 - 1,086u_1u_2 - 0,237u_1^3 + 1,000u_1\dot{u}_2^2 - 0,378u_1u_2^2 = 0; \quad (3-118)$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}_2 + 0,481u_2 - 0,550u_1^2 + 0,523u_2^2 + 0,055\dot{u}_2^2 - 0,185u_1u_2^2 + 0,006u_1\dot{u}_1\dot{u}_2 - \\ 1,000u_2\dot{u}_2^2 + 1,003u_2\dot{u}_1^2 - 0,268u_2^3 = 0 \end{aligned} \quad (3-119)$$

Nesse segundo caso de imperfeição, a quebra parcial de simetria produz equações com mais termos não lineares para o segundo grau de liberdade que para o primeiro, e um dos primeiros resultados da manutenção de um eixo de simetria da estrutura é o desacoplamento linear das equações de movimento.

3.3.1. Modos normais lineares

O comportamento linear do problema com imperfeição geométrica é obtido pela solução do problema de autovalor resultante da linearização das equações de movimento. A variação das frequências naturais (autovalores) com o ângulo α_i é mostrada na Figura 3-22. Observa-se que a ressonância interna 1:1 característica do sistema perfeito deixa de existir, mesmo para o pequeno valor da imperfeição

considerado. A primeira frequência natural é sempre menor que a frequência do sistema perfeito, enquanto a segunda é sempre maior, qualquer que seja o ângulo de imperfeição considerado. A variação de ambas as frequências com a direção da imperfeição é periódica (período igual a $2\pi/3$), o que se reflete fisicamente na posição dos eixos das molas extensionais do pêndulo. As menores diferenças entre as frequências ocorrem para $\alpha_i=(3+4n)\pi/6$ ($n=0,1,2..$) e maiores para $\alpha_i=(1+4n)\pi/6$ ($n=0,1,2..$). Esse comportamento periódico confirma ser necessário somente o estudo de alguns casos dentro do domínio especificado na seção anterior para o entendimento do comportamento da vibração estrutural do pêndulo quando considerada a adição de uma imperfeição geométrica ao sistema.

Para os casos $\alpha_i=0$ rad e $\alpha_i=\pi/2$ rad, apresenta-se um resumo dos resultados da análise modal linear na Tabela 3-3. Observa-se que a quebra de simetria do problema em função da imperfeição leva ao surgimento de nós estáveis, e não mais um nó estrela resultante do problema de autovalor repetido para a estrutura perfeita, onde qualquer vetor era um autovetor do problema. No caso da existência da imperfeição na direção do eixo y , os autovetores coincidem com os eixos x e y do problema.

3.3.2. Modos normais não lineares

Uma das consequências fundamentais da perda de simetria do sistema é a ausência de planos que desacoplem o problema. Como consequência, para a imperfeição inicial na direção do eixo x ($\alpha_i=0$ rad), o sistema não apresenta modos normais não lineares similares como no caso do problema sem imperfeição. Já o caso da imperfeição inicial na direção do eixo y , $\alpha_i=\pi/2$ rad, possui um modo similar caracterizado pela seguinte relação entre os graus de liberdade:

$$c_{12} = 0 \quad (3-120)$$

Esse modo equivale a um desacoplamento no eixo y do sistema, de modo semelhante ao caso perfeito. O oscilador modal resultante é igual a:

$$\ddot{u} + 0,481u + 0,523u^2 - 0,268u^3 + 1,000uu^2 - 0,047u^4 = 0 \quad (3-121)$$

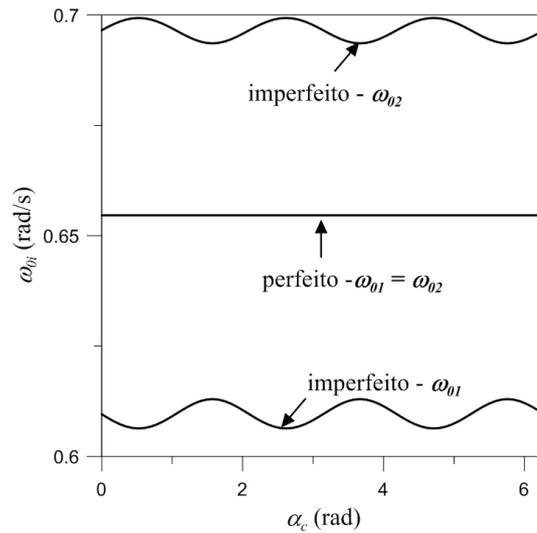


Figura 3-22 Variação das frequências naturais com a direção da imperfeição.

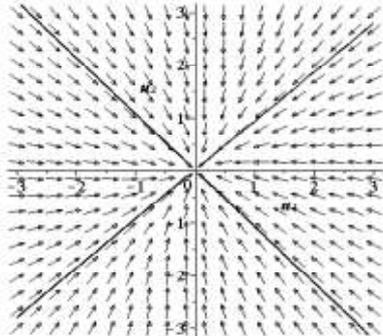
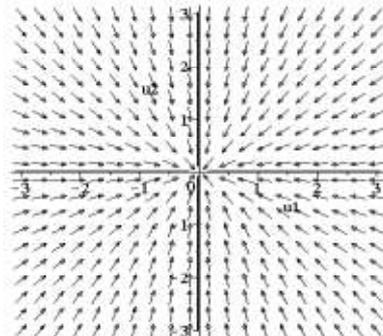
α_i (rad) - ângulo de direção da imperfeição	ω_{0i} (rad/s) frequências naturais	$\{\Phi_i\}$ modos normais lineares	Plano fase
0	$\omega_{01}=0,610$ e $\omega_{02}=0,697$	$\Phi_1 = (0,732;$ $0,682)^T$ e $\Phi_2 =$ $(0,682; -0,732)^T$	
$\pi/2$	$\omega_{01}=0,613$ e $\omega_{02}=0,694$	$\Phi_1 = (1,000;$ $0,000)^T$ e $\Phi_2 =$ $(0,000; 1,000)^T$	

Tabela 3-3 Resultados da análise modal linear – problema com imperfeição.

Por outro lado, como as condições exatas de ressonância interna não se reproduzem para este caso, pode-se então aplicar o método das variedades invariantes para obtenção de modos normais não similares e utilizá-los para se efetuar a redução modal do problema.

O deslocamento e a velocidade do grau de liberdade na direção x são escolhidos como par mestre da análise modal não linear, enquanto as coordenadas generalizadas do grau de liberdade na direção y são escolhidas como par escravo. Tem-se assim:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ \dot{u}_1 \\ u_2 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ P(u, v) \\ Q(u, v) \end{Bmatrix}, \quad (3-122)$$

onde as funções P e Q representam as variedades invariantes, ou funções modais para o sistema de equações (3-116) e (3-117).

Com a perda de simetria do sistema as equações diferenciais parciais que governam as variedades invariantes do sistema não possuem solução de forma fechada, típicas das variedades invariantes planas dos modos similares (Apiwattanalungarn, 2003). Desse modo deve-se utilizar uma solução aproximada. Em função das características da não linearidade do sistema de equações (3-116) e (3-117), expandem-se as funções P e Q em séries de potência homogêneas correspondentes a polinômios bicúbicos em termos de u e v , cujos coeficientes são desconhecidos:

$$P(u, v) = a_1u + a_2v + a_3u^2 + a_4uv + a_5v^2 + a_6u^3 + a_7u^2v + a_8uv^2 + a_9v^3; \quad (3-123)$$

$$Q(u, v) = b_1u + b_2v + b_3u^2 + b_4uv + b_5v^2 + b_6u^3 + b_7u^2v + b_8uv^2 + b_9v^3 \quad (3-124)$$

A substituição das equações (3-116), (3-117), (3-123) e (3-124) nas equações diferenciais que governam as variedades invariantes resultam em duas soluções para os coeficientes das séries de potência assumidas como solução, uma para cada modo. Para o primeiro modo as funções de restrição são:

$$P = 0,932u - 0,442u^2 - 3,596v^2 - 3,139u^3 - 20,445uv^2; \quad (3-125)$$

$$Q = 0,932v + 1,789uv - 1,454u^2v - 18,612v^3 \quad (3-126)$$

Para o segundo modo têm-se as seguintes funções de restrição:

$$P = -1,073u - 1,381u^2 - 4,486v^2 + 1,963u^3 + 12,712uv^2; \quad (3-127)$$

$$Q = -1,073v + 1,591uv + 4,257u^2v + 15,599v^3; \quad (3-128)$$

A parte linear das equações de (3-125) a (3-128) correspondem aos modos normais lineares obtidos na seção 3.3.1 (Shaw e Pierre, 1993). As variedades invariantes são, portanto, definidas por u , v , P e Q , e geometricamente correspondem a uma hipersuperfície que pode ser visualizada em duas seções correspondentes a uma superfície para os deslocamentos e outra para as velocidades (Jiang, 2004). Para os modos lineares, correspondentes à parte linear das equações de (3-125) a (3-128), as variedades invariantes são geometricamente descritas por hiperplanos, cujas projeções bidimensionais podem ser vistas na Figura 3-23 e na Figura 3-24 para respectivamente o primeiro e o segundo modo. As funções de restrição (seções da hipersuperfície) para o primeiro e segundo modo podem ser vistos respectivamente na Figura 3-25 e na Figura 3-26. Observa-se que as superfícies correspondentes ao sistema não linear são tangentes aos planos do sistema linear na origem (Pesheck *et al.*, 2001).

A substituição das funções de restrição (3-125) e (3-126) na eq. (3-116) resulta no seguinte oscilador não linear para o primeiro modo, considerando $\alpha_i=0$ rad:

$$\begin{aligned} \ddot{u} + 0,372u - 1,005u^2 + 0,255\dot{u}^2 + 0,172u^3 + 7,211u\dot{u}^2 \\ + 28,349u^2\dot{u}^2 + 3,375u^4 - 2,292\dot{u}^4 = 0 \end{aligned} \quad (3-129)$$

O oscilador não linear correspondente ao segundo modo para $\alpha_i=0$ rad é obtido pela substituição das equações (3-127) e (3-128) na eq. (3-116), o que resulta em:

$$\begin{aligned} \ddot{u} + 0,485u + 1,193u^2 + 0,322\dot{u}^2 + 0,773u^3 + 5,879u\dot{u}^2 \\ - 18,713u^2\dot{u}^2 - 1,988u^4 - 2,292\dot{u}^4 = 0 \end{aligned} \quad (3-130)$$

Para $\alpha_i=\pi/2$ rad, tem-se, além do oscilador (3-121), ainda um modo normal não linear que é uma continuação do segundo modo normal linear, cujo oscilador modal é igual a:

$$\ddot{u} + 0,376u - 0,532u^3 - 1,397u\dot{u}^2 = 0 \quad (3-131)$$

As equações (3-129) e (3-130) apresentam termos não lineares de ordem par e ímpar, enquanto a eq. (3-131) apresenta somente termos ímpares que

correspondem às contribuições dos termos incluídos nas séries de potência utilizadas para a obtenção das soluções aproximadas das variedades invariantes. Desse modo, as contribuições não lineares do modo não simulado (modo escravo) são também incluídas no modelo reduzido, ao contrário da redução modal com modos lineares. Embora os termos de quarta ordem estejam incompletos em função da expansão até termos de ordem cúbica nas séries (3-123) e (3-124) eles são mantidos, uma vez que a contribuição primária do modo escravo correspondente ao termo de ordem m na expansão em série de Taylor acontece nos termos de ordem $m+1$ no oscilador normal. Desse modo, mesmo imprecisos, os termos de quarta ordem contêm uma importante contribuição do modo escravo e, por isso, não devem ser desprezados (Pesheck, 2000).

3.3.3. Multiplicidade de modos

Foram determinados pelo método das variedades invariantes dois modos normais não similares para cada um dos dois exemplos de imperfeição geométrica analisados na seção anterior, além de um modo similar para a imperfeição na direção do eixo y . Para verificar a existência de modos adicionais, utiliza-se nesta seção a técnica das seções de Poincaré. Utiliza-se como exemplo as seções definidas pelas seguintes expressões:

$$\Sigma_1 = [u_2 = 0] \cap [H = h] \quad (3-132)$$

$$\Sigma_2 = [u_1 = 0] \cap [H = h] \quad (3-133)$$

A seção resultante, para um nível de energia $h = 0,714$ (correspondente à metade da energia do ponto de sela de menor energia total do sistema estático imperfeito, que define a fronteira de estabilidade do modelo) para o caso $\alpha_i = 0$ rad é apresentada na Figura 3-27. Observa-se que, diferentemente da seção do sistema perfeito (Figura 3-5), somente dois modos estáveis (centros) são identificados correspondendo aos pontos P11 e P21. As seções para $\alpha_i = \pi/2$ e $h = 0,719$ (correspondente à metade da energia do ponto de sela de menor energia total do sistema estático imperfeito, que define a fronteira de estabilidade do modelo) são mostradas na Figura 3-28 (a) e (b). Neste caso são identificados três modos na seção Σ_1 um modo instável correspondente ao ponto de sela PS01 e dois estáveis

correspondentes aos centros P11 e P2. Na seção Σ_2 . Tem-se dois modos estáveis, P12 e P22.

Para um nível de energia de 5% da energia do ponto de sela, observa-se nas Figura 3-29 (a) e (b) que para $\alpha_i = \pi/2$ rad a dinâmica do problema é simplificada e somente um modo é identificado em cada seção.

Apresenta-se na próxima seção a correlação entre os modos identificados nas seções de Poincaré das Figura 3-27, Figura 3-28 e Figura 3-29 com os modos determinados pela técnica das variedades invariantes na seção 3.2.2.

3.3.4. Resposta no tempo

O resultado da integração no tempo das equações originais de movimento com as condições iniciais correspondentes às coordenadas dos respectivos modos listadas na Figura 3-30 é mostrado para ambos os modos na Figura 3-30. Observa-se que ambas as projeções no espaço de configuração são curvas. Os deslocamentos estão em fase no modo P11 e fora de fase na vibração no modo P21. Ambos os modos são uma continuação dos modos lineares, e não modos essencialmente não lineares como os modos não similares obtidos para o caso sem imperfeição geométrica. Os modos P11 e P21 são os mesmos modos obtidos pelo método das variedades invariantes. Como o sistema é não amortecido, os modos seguem também a definição de Rosemberg, atingindo suas máximas posições ao mesmo tempo e passando pelo equilíbrio ao mesmo tempo, ou seja, o movimento é uníssono.

Para o caso da existência da imperfeição na direção do eixo y , a projeção do resultado da integração no tempo para os três modos identificados é mostrada na Figura 3-31 (a) e (b) para os níveis de energia iguais a 50% e 5% do ponto de sela respectivamente. Observa-se que o ponto PS01 identificado na seção de Poincaré da Figura 3-28 (a) corresponde ao modo similar obtido na seção 3.3.2, enquanto o ponto P12 mostrado na Figura 3-28 (b) corresponde ao modo não similar obtido anteriormente.

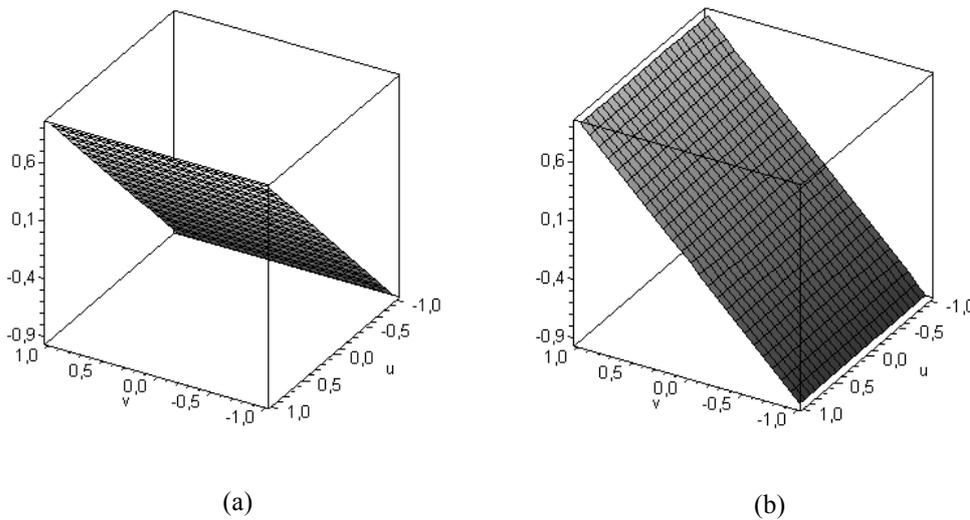


Figura 3-23 Variedades invariantes lineares para o primeiro modo, ($\alpha_f=0$ rad): (a) projeção dos deslocamentos; (b) projeção das velocidades.

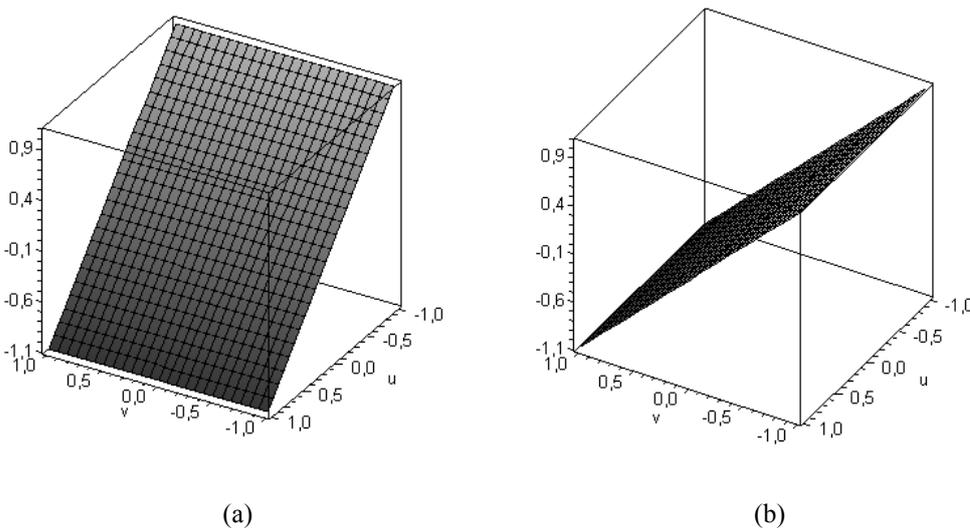


Figura 3-24 Variedades invariantes lineares para o segundo modo, ($\alpha_f=0$ rad): (a) projeção dos deslocamentos; (b) projeção das velocidades.

O modo P01 mostrado na Figura 3-29 (a) corresponde ao modo similar desacoplado, referente ao oscilador modal da eq. (3-121), que para uma energia igual a 50% do ponto de sela torna-se instável e bifurca dando origem a dois modos não similares estáveis, P11 e P21. O modo P21 é o mesmo modo P22 mostrado na Figura 3-28 (b). Já o modo P12 da Figura 3-29 (b) permanece estável quando o nível de energia equivale a 50% do ponto de sela, sendo o oscilador modal associado dado pela eq. (3-131).

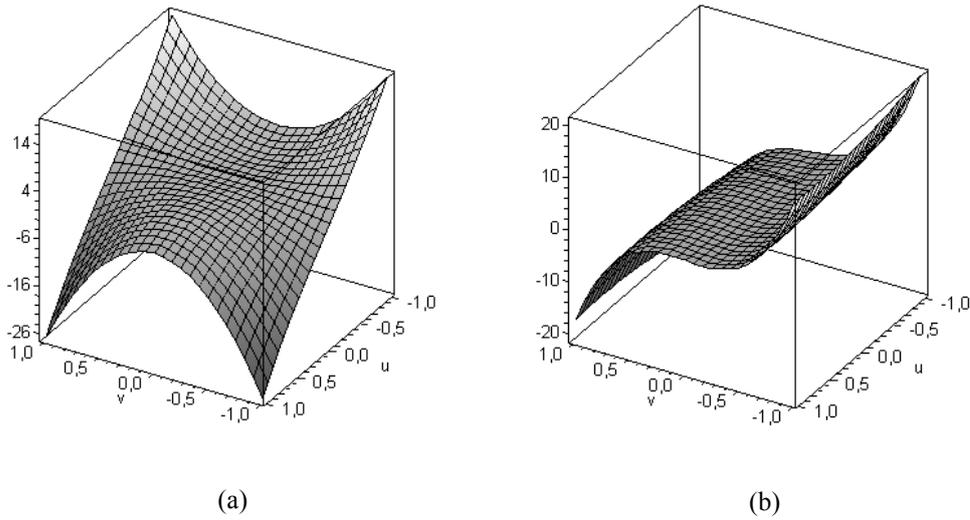


Figura 3-25 Variedades invariantes não lineares para o primeiro modo, ($\alpha_i=0$ rad): (a) projeção dos deslocamentos; (b) projeção das velocidades.

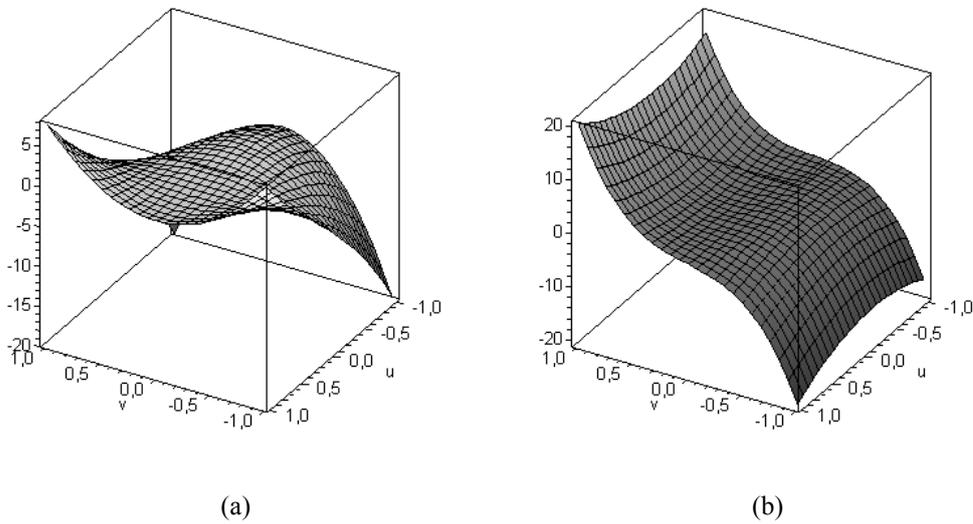


Figura 3-26 Variedades invariantes não lineares para o segundo modo, ($\alpha_i=0$ rad): (a) projeção dos deslocamentos; (b) projeção das velocidades.

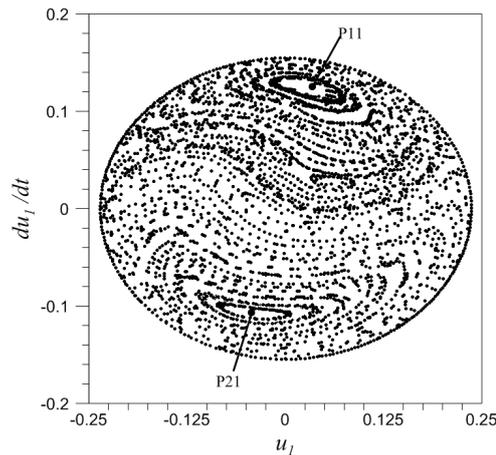


Figura 3-27 Seção de Poincaré Σ_1 para o modelo com imperfeição geométrica – 50% da energia do ponto de sela, $\alpha_i=0$ rad.

Ponto	Estabilidade	u_1	du_1/dt	u_2	du_2/dt
P11	Centro	0,035	0,125	0,000	0,088
P21	Centro	-0,043	-0,107	0,000	0,108

Tabela 3-4 Coordenadas dos pontos fixos das seções de Poincaré – sistema com imperfeição geométrica – 50% da energia do ponto de sela, $\alpha_i=0$ rad.

3.3.5. Relação frequência-amplitude

As curvas de ressonância são obtidas aplicando-se o método do balanço harmônico às equações (3-129) e (3-130), utilizando-se como solução aproximada a eq. (3-79). O sistema de equações algébricas é resolvido utilizando-se o método do controle de comprimento de arco. As curvas para ambos os modos considerando $\alpha_i=0$ rad são mostradas na Figura 3-32 (a). Observa-se que ambos os modos apresentam ganho de rigidez. Para o caso onde $\alpha_i=\pi/2$ rad as curvas de ressonância são mostradas na Figura 3-32 (b) para o modo não similar P01 e para o modo não similar P21, onde se observa que ambos apresentam perda de rigidez.

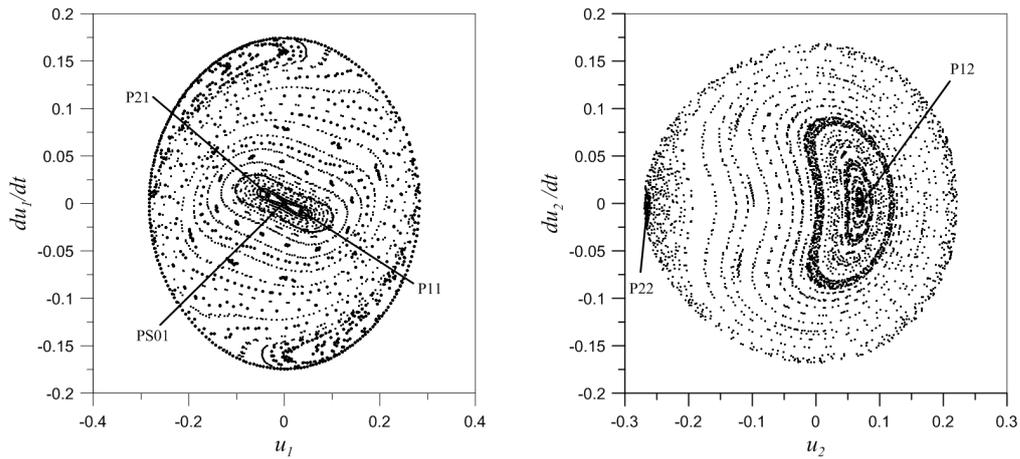


Figura 3-28 Seção de Poincaré para o modelo com imperfeição geométrica $\alpha_i = \pi/2$ rad – 50% da energia do ponto de sela: (a) Σ_1 ; (b) Σ_2 .

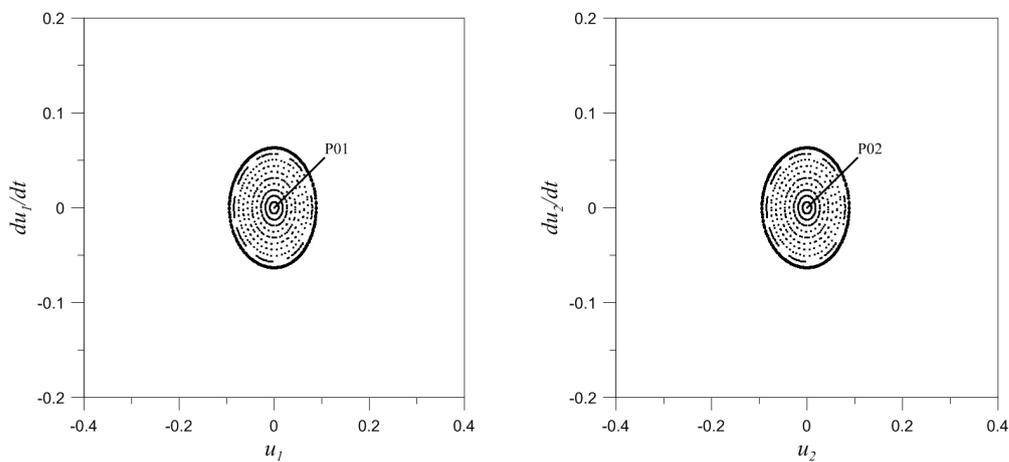


Figura 3-29 Seção de Poincaré para o modelo com imperfeição geométrica $\alpha_i = \pi/2$ rad – 5% da energia do ponto de sela: (a) Σ_1 ; (b) Σ_2 .

As curvas de variação frequência-energia são mostradas na Figura 3-33 (a) considerando $\alpha_i = 0$ rad, onde se pode ver que o aumento do nível de energia com a frequência é mais acentuado no segundo modo do que o primeiro. Considerando $\alpha_i = \pi/2$ rad, observa-se que a energia para o modo similar cresce inicialmente com o decréscimo da frequência e depois decresce. Para o modo não similar há um acréscimo da energia do sistema com a diminuição da frequência no domínio estudado.

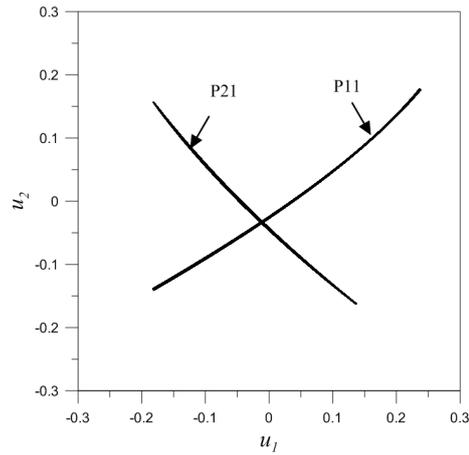


Figura 3-30 Espaço de configuração – modos não lineares – 50% da energia do ponto de sela, $\alpha_i = 0$ rad.

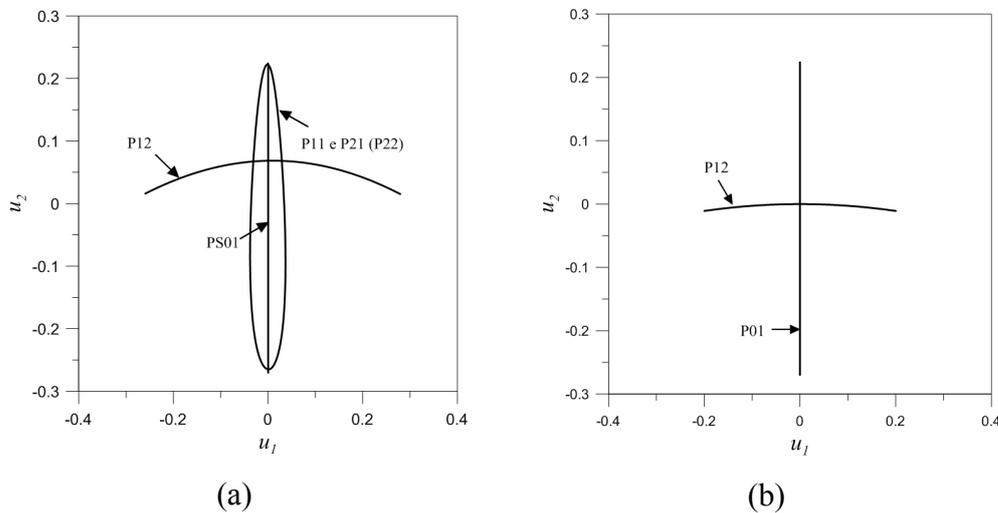


Figura 3-31 Espaço de configuração – modos não lineares, $\alpha_i = \pi/2$ rad: (a) 50% da energia do ponto de sela; (b) 5% da energia do ponto de sela.

3.3.6. Espaço de fase

O espaço de fase é obtido para cada modo, comparando-se as soluções das equações originais com os modelos reduzidos obtidos pelo uso dos modos normais não lineares. A solução de referência é obtida pela integração das equações originais de movimento, utilizando-se a seguinte transformação modal (Shaw e Pierre, 1993):

$$\{w\} = \left([I] - [M_0]^{-1} [M_2] [M_0]^{-1} \{u\} \right) [M_0]^{-1} \{u\}, \quad (3-134)$$

onde u são as coordenadas físicas do sistema, enquanto w são as coordenadas modais e I é a matriz identidade.

A matriz M_0 é formada pelos coeficientes lineares das funções de restrição expressas pelas equações de (3-125) a (3-128):

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1,000 & 0,000 & 1,000 & 0,000 \\ 0,000 & 1,000 & 0,000 & 1,000 \\ 0,932 & 0,000 & -1,073 & 0,000 \\ 0,000 & 0,932 & 0,000 & -1,073 \end{bmatrix} \quad (3-135)$$

A matriz M_2 , é uma matriz não linear formada pelos coeficientes dos termos de ordem quadrática das funções de restrição:

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,442u_1 & -3,597v_1 & -1,381u_2 & -4,486v_2 \\ 1,785v_1 & 0,000 & 1,591v_2 & 0,000 \end{bmatrix} \quad (3-136)$$

Utilizando-se as coordenadas dos modos P11 e P21 mostradas na Tabela 3-4, obtêm-se, as matrizes de transformação modal para cada modo respectivamente. Os resultados para o primeiro e segundo modos são mostrados, respectivamente, nas Figura 3-34 (a) e Figura 3-34 (b) para o caso de $\alpha_i=0$ rad. Observa-se que para amplitudes da ordem de 20% do comprimento da barra do pêndulo invertido, a solução de referência, correspondente à integração das equações originais (linha contínua) começa a se distanciar da solução correspondente ao modelo reduzido (linha pontilhada), delimitando-se assim a validade da expansão em série assumida nas expressões de (3-125) a (3-128) para aproximação das variedades invariantes.

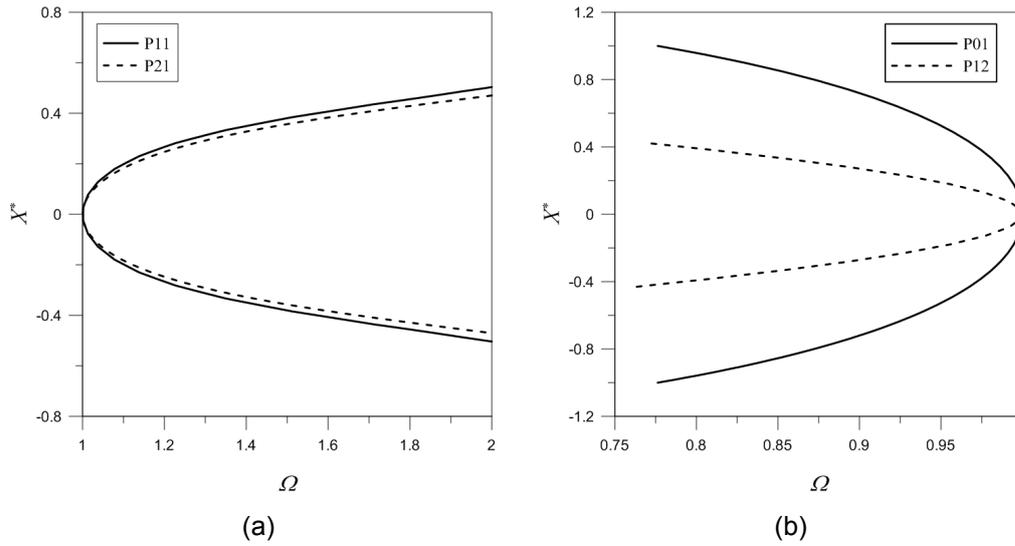


Figura 3-32 Curvas de ressonância para sistema com imperfeição: (a) $\alpha_i=0$ rad; (b) $\alpha_i=\pi/2$ rad.

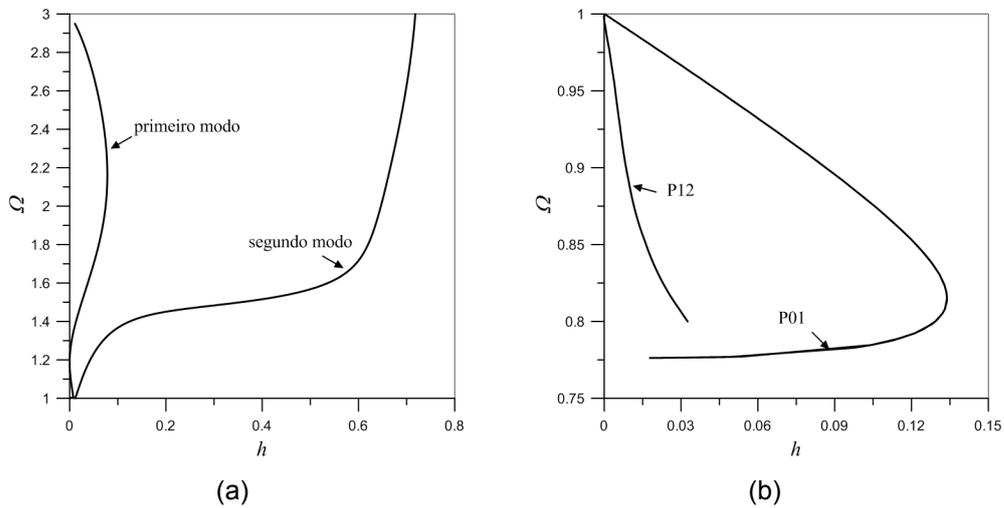


Figura 3-33 Curvas de frequência-energia: (a) $\alpha_i=0$ rad; (b) $\alpha_i=\pi/2$ rad.

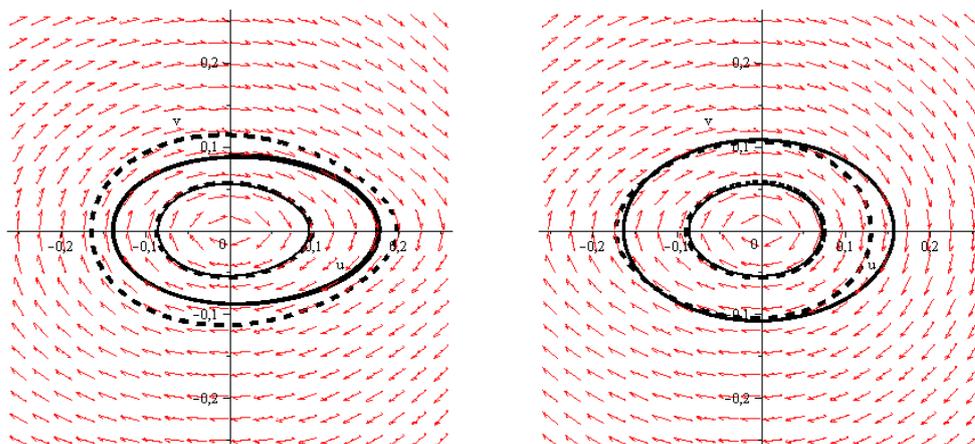


Figura 3-34 Espaço de fase, $\alpha_i=0$ rad: (a) modo P11; (b) modo P21 - linhas contínuas – solução de referência; linhas pontilhadas – modelo reduzido.

3.3.7. Vibração Forçada

Quando o sistema está sob vibração forçada, as variedades invariantes são dependentes do tempo. Como é possível obter para o modelo com imperfeição geométrica os modos normais não lineares pela técnica das variedades invariantes, pode-se derivar as variedades invariantes dependentes do tempo utilizando-se o conceito de multimodo proposto por Boivin *et al.*, 1994, introduzindo-se uma nova variável para representar a variação no tempo.

O procedimento aqui apresentado foi originalmente proposto por Shaw *et al.* (1999) como uma aplicação da redução de ordem baseada na técnica das variedades invariantes para sistemas harmonicamente excitados. Como uma nova variável relativa à carga harmônica é acrescentada ao sistema, adiciona-se também a equação diferencial que governa essa variável:

$$\ddot{u}_f + \omega^2 u_f = 0 \quad (3-137)$$

onde u_f é a nova variável acrescentada ao sistema, que representa a dependência do tempo das variedades e é definida por:

$$u_f = \cos(\omega t) \quad (3-138)$$

Considera-se, portanto, a atuação de uma força harmônica com frequência ω e amplitude Γ , cuja direção faz um ângulo β com a direção do eixo y , de modo que as equações de movimento forçadas são:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + 0,424u_1 - 0,056u_2 - 0,015u_1^2 - 1,072u_1u_2 - 0,018u_2^2 + \\ 0,059\dot{u}_2^2 - 0,260u_1^3 + 0,042u_1^2u_2 + 1,003u_1\dot{u}_2^2 + 0,001u_1\dot{u}_1\dot{u}_2 - \\ 0,265u_1u_2^2 + 1,000u_1\dot{u}_2^2 + 0,007u_2\dot{u}_1\dot{u}_2 - 0,054u_2^3 = \Gamma \text{sen} \beta u_f; \end{aligned} \quad (3-139)$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}_2 - 0,057u_1 + 0,432u_2 - 0,539u_1^2 - 0,009u_1u_2 + 0,537u_2^2 + \\ 0,003\dot{u}_2^2 - 0,034u_1^3 - 0,003u_1^2u_2 + 0,110u_1u_2^2 + 0,001u_2\dot{u}_1\dot{u}_2 + \\ 1,000u_2\dot{u}_2^2 + 1,000u_2\dot{u}_1^2 - 0,261u_2^3 = \Gamma \text{cos} \beta u_f \end{aligned} \quad (3-140)$$

A técnica proposta por Boivin *et al.* (1994) é uma generalização dos modos normais não lineares individualmente invariantes onde mais de um par mestre é utilizado. Além do deslocamento e velocidade do primeiro grau de

liberdade – u_l e v_l – são utilizados também a nova variável temporal adicionada ao sistema, definida pela eq. (3-138) e sua velocidade, assim definida:

$$v_f = \dot{u}_f = -\omega \text{sen}(\omega t) \quad (3-141)$$

As funções de restrição, para o modo escravo (deslocamento e velocidade na direção y), são aproximadas por séries polinomiais cúbicas de quatro variáveis, expressas por:

$$\begin{aligned} u_2 = P(u_1, v_1, u_f, v_f) = & a_1^1 u_1 + a_2^1 v_1 + a_3^1 u_1^2 + a_4^1 u_1 v_1 + a_5^1 v_1^2 + a_6^1 u_1^3 + \\ & a_7^1 u_1^2 v_1 + a_8^1 u_1 v_1^2 + a_9^1 v_1^3 + a_1^f u_f + a_2^f v_f + a_3^f u_f^2 + a_4^f u_f v_f + a_5^f v_f^2 + \\ & a_6^f u_f^3 + a_7^f u_f^2 v_f + a_8^f u_f v_f^2 + a_9^f v_f^3 + a_1^{1f} u_1 u_f + a_2^{1f} u_1 v_f + a_3^{1f} v_1 u_f + \\ & a_4^{1f} v_1 v_f + a_5^{1f} u_1^2 u_f + a_6^{1f} u_1^2 v_f + a_7^{1f} u_1 u_f^2 + a_8^{1f} u_1 v_f^2 + a_9^{1f} v_1^2 u_f + \\ & a_{10}^{1f} v_1^2 v_f + a_{11}^{1f} v_1 u_f^2 + a_{12}^{1f} v_1 v_f^2 + a_{13}^{1f} u_1 v_1 u_f + a_{14}^{1f} u_1 v_1 v_f + a_{15}^{1f} u_1 u_f v_f \\ & + a_{16}^{1f} v_1 u_f v_f \end{aligned} \quad (3-142)$$

$$\begin{aligned} v_2 = Q(u_1, v_1, u_f, v_f) = & b_1^1 u_1 + b_2^1 v_1 + b_3^1 u_1^2 + b_4^1 u_1 v_1 + b_5^1 v_1^2 + b_6^1 u_1^3 + b_7^1 u_1^2 v_1 + \\ & b_8^1 u_1 v_1^2 + b_9^1 v_1^3 + b_1^f u_f + b_2^f v_f + b_3^f u_f^2 + b_4^f u_f v_f + b_5^f v_f^2 + b_6^f u_f^3 + \\ & b_7^f u_f^2 v_f + b_8^f u_f v_f^2 + b_9^f v_f^3 + b_1^{1f} u_1 u_f + b_2^{1f} u_1 v_f + b_3^{1f} v_1 u_f + b_4^{1f} v_1 v_f + \\ & b_5^{1f} u_1^2 u_f + b_6^{1f} u_1^2 v_f + b_7^{1f} u_1 u_f^2 + b_8^{1f} u_1 v_f^2 + b_9^{1f} v_1^2 u_f + b_{10}^{1f} v_1^2 v_f + \\ & b_{11}^{1f} v_1 u_f^2 + b_{12}^{1f} v_1 v_f^2 + b_{13}^{1f} u_1 v_1 u_f + b_{14}^{1f} u_1 v_1 v_f + b_{15}^{1f} u_1 u_f v_f + b_{16}^{1f} v_1 u_f v_f \end{aligned} \quad (3-143)$$

Os coeficientes a e b nas equações (3-142) e (3-143) podem ser obtidos de modo separado, sendo que os coeficientes dos termos dependentes de um único modo são obtidos utilizando-se o procedimento das variedades invariantes para modos individuais e, após isso, os coeficientes já determinados são utilizados para determinação dos demais termos responsáveis pelo acoplamento entre os dois pares mestres. Esse procedimento diminui consideravelmente a complexidade dos cálculos para obtenção das superfícies modais. As funções modais, utilizando-se as expressões (3-138) e (3-141) e fazendo-se $u_l = u$ e $v_l = v$, para o primeiro modo são iguais a ($\Omega = 1,100$; $\beta = \pi/6$; $\Gamma = 0,020$; $\xi = 0,030$):

$$\begin{aligned} P = & 0,932u - 0,020v - 0,330uv \cos(0,671t) + 0,014u \text{sen}^2(0,671t) + \\ & 0,006u \cos^2(0,671t) - 0,181uv - 20,119uv^2 - 1,135u^2v - \\ & 0,013v^2 \cos(0,671t) - 0,458u^2 - 3,081u^3 - 3,610v^2 - 0,630v^3 - \end{aligned} \quad (3-144)$$

$$0,001v\text{sen}(0,671t)\cos(0,671t) - 0,006uv\text{sen}(0,671t) - 0,020\text{sen}(0,671t)$$

$$\begin{aligned} Q = & 0,007u + 0,932v - 0,001uv \cos(0,671t) - 0,014 \cos(0,671t) + \\ & 0,018u \cos(0,671t) - 0,001u\text{sen}(0,671t) - 0,013u^2 \cos(0,671t) + \\ & 0,004u^2 \text{sen}(0,671t) - 0,075v\text{sen}(0,671t) - 0,002v \cos(0,671t) + \\ & 0,017v\text{sen}^2(0,671t) + 0,005v \cos^2(0,671t) + 1,771uv - 0,431uv^2 - \\ & 1,510u^2v - 0,313v^2 \cos(0,671t) + 0,047u^2 + 0,244u^3 - 0,043v^2 - \\ & 18,441v^3 - 0,001u\text{sen}(0,671t)\cos(0,671t) - 0,273uv\text{sen}(0,671t) + \\ & 0,001\text{sen}(0,671t) \end{aligned} \quad (3-145)$$

Para o segundo modo tem-se o resultado:

$$\begin{aligned} P = & -1,073u - 0,023v - 0,011u^2 \cos(0,671t) - 0,006u \cos^2(0,671t) - \\ & 0,006u \cos^2(0,671t) - 0,036uv + 12,253uv^2 - 1,853u^2v - \\ & 0,013v^2 \cos(0,671t) - 0,458u^2 - 3,081u^3 - 3,610v^2 - 0,630v^3 - \\ & 0,001u \cos(0,671t) - 0,014u\text{sen}^2(0,671t) - 0,058u\text{sen}(0,671t) \\ & - 0,179u^2 \text{sen}(0,671t) - 0,100v \cos(0,671t) - 0,001v \cos^2(0,671t) + \\ & 0,003u\text{sen}(0,671t) - 0,001v\text{sen}^2(0,671t) - 0,185u \cos(0,671t) - \\ & 0,003v\text{sen}(0,671t)\cos(0,671t) - 0,064uv\text{sen}(0,671t); \end{aligned} \quad (3-146)$$

$$\begin{aligned} Q = & 0,011u - 1,072v + 0,045uv \cos(0,671t) - 0,014 \cos(0,671t) + \\ & 0,010u \cos(0,671t) + 0,001u\text{sen}(0,671t) - 0,089u^2 \cos(0,671t) + \\ & 0,036u^2 \text{sen}(0,671t) + 0,040v\text{sen}(0,671t) + 0,003v \cos(0,671t) - \\ & 0,013v\text{sen}^2(0,671t) - 0,005v \cos^2(0,671t) + 1,618uv - 2,028uv^2 + \\ & 3,886u^2v + 0,216v^2 \cos(0,671t) + 0,045u^2 + 0,960u^3 - 0,134v^2 - \\ & 14,984v^3 + 0,001u\text{sen}(0,671t)\cos(0,671t) - 0,173uv\text{sen}(0,671t) + \\ & 0,001\text{sen}(0,671t) \end{aligned} \quad (3-147)$$

As curvas modais expressas pelas equações (3-144) a (3-147) variam no tempo e representam os modos normais não lineares amortecidos e forçados (Touzé e Amabili, 2006). O período, T_f , de variação dessas equações de restrição no tempo é o mesmo da carga externa, e é expresso por:

$$T_f = \frac{2\pi}{\omega} \quad (3-148)$$

Na Figura 3-35 e na Figura 3-36 são mostradas algumas seções das variedades invariantes em diferentes instantes de tempo. No tempo $t=0$ s as curvas coincidem com o resultado para o modo não forçado. A forma das seções é mantida quase idêntica durante o movimento das variedades invariantes com o tempo. A diferença entre as curvas para os modos forçado e livre é pequena quando a amplitude da carga externa é pequena se comparada com as amplitudes de movimento. Os tempos $t=T_f/4$ e $3T_f/4$ correspondem aos instantes mínimos onde as amplitudes do movimento das variedades invariantes são máximas na vibração livre amortecida. Observa-se também que as variedades invariantes deixam de passar pelo ponto de equilíbrio quando variam com o tempo, ainda que guardem a mesma tangente dos modos normais lineares.

Na Figura 3-37 (a) mostra-se a influência do ângulo de atuação da carga externa sobre o primeiro modo do pêndulo invertido, o resultado é semelhante para o outro modo. Observa-se que para as análises aqui consideradas a influência do ângulo β é pequena sobre as variedades invariantes. Já na Figura 3-37 (b) mostra-se a influência da amplitude da carga externa sobre as seções das variedades invariantes para o primeiro modo. À medida que se aumenta o valor da amplitude da carga externa, maior é a diferença entre o resultado para a vibração livre e forçada.

As curvas de ressonância obtidas para o modelo com imperfeição para os dois modos normais não lineares são mostradas na Figura 3-38 (a) e (b) para os casos $\alpha_i=0$ rad e $\alpha_i=\pi/2$ rad, respectivamente. Utilizam-se os modos não forçados, uma vez que a amplitude da carga é pequena comparada com as amplitudes do movimento na região de ressonância. Observa-se comportamento com salto dinâmico para ambos os casos, onde os trechos instáveis são mostrados com linhas pontilhadas. As curvas apresentam ganho de rigidez para $\alpha_i=0$ rad e perda de rigidez para o caso $\alpha_i=\pi/2$ rad, mostrando assim a importância da direção da imperfeição geométrica considerada.

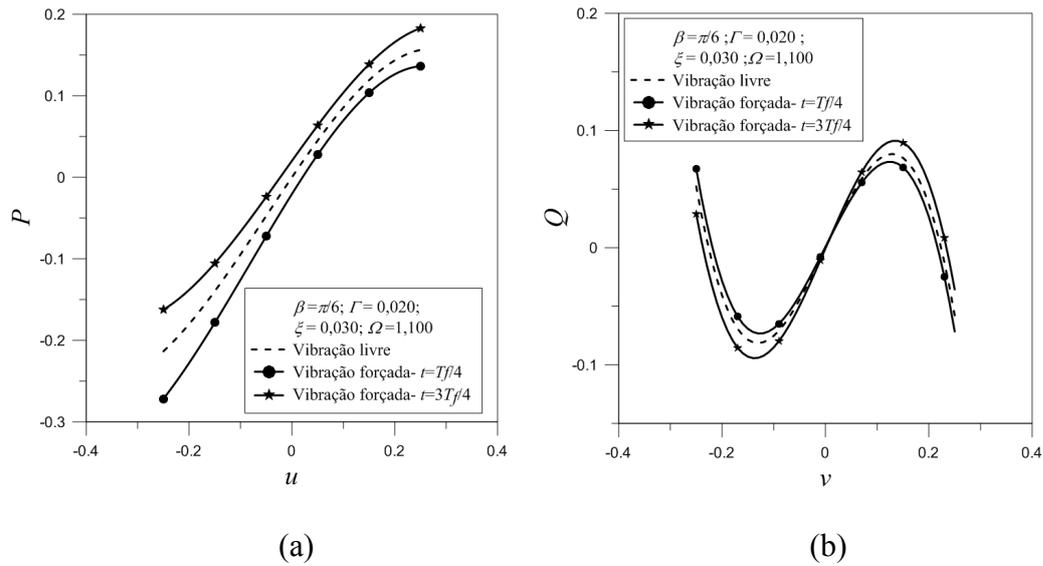


Figura 3-35 Variação das funções de restrição com o tempo, primeiro modo: (a) P – seção $v=0$; (b) Q – seção $u=0$.

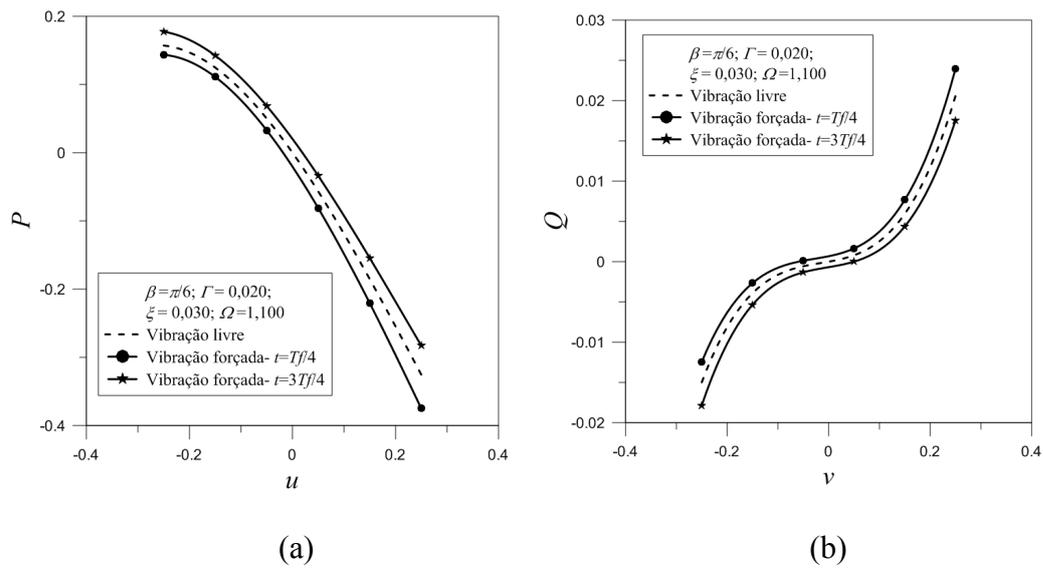


Figura 3-36 Variação das funções de restrição com o tempo, segundo modo: (a) P – seção $v=0$; (b) Q – seção $u=0$.

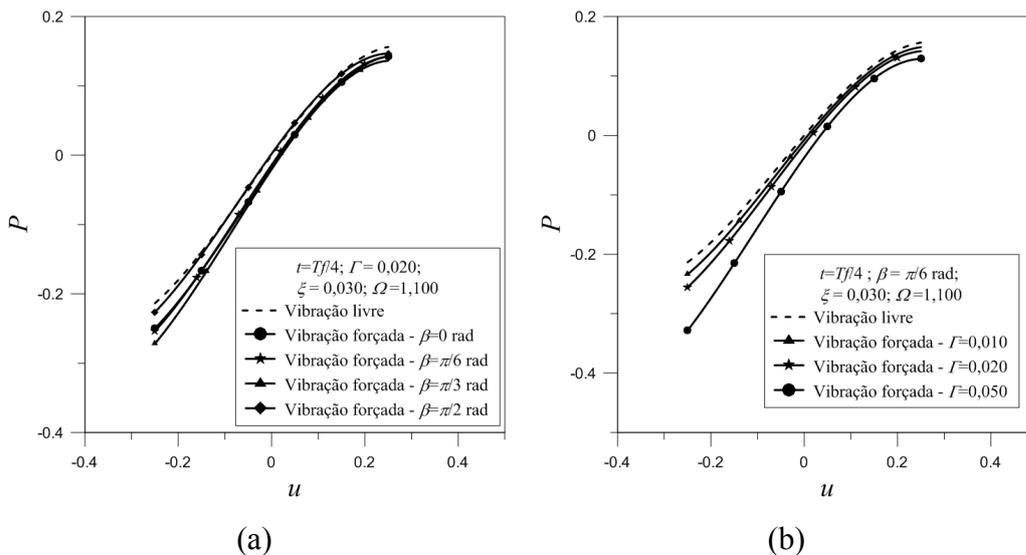


Figura 3-37 Variedades invariantes forçadas: (a) influência do ângulo β ; (b) influência da amplitude da carga externa – primeiro modo.

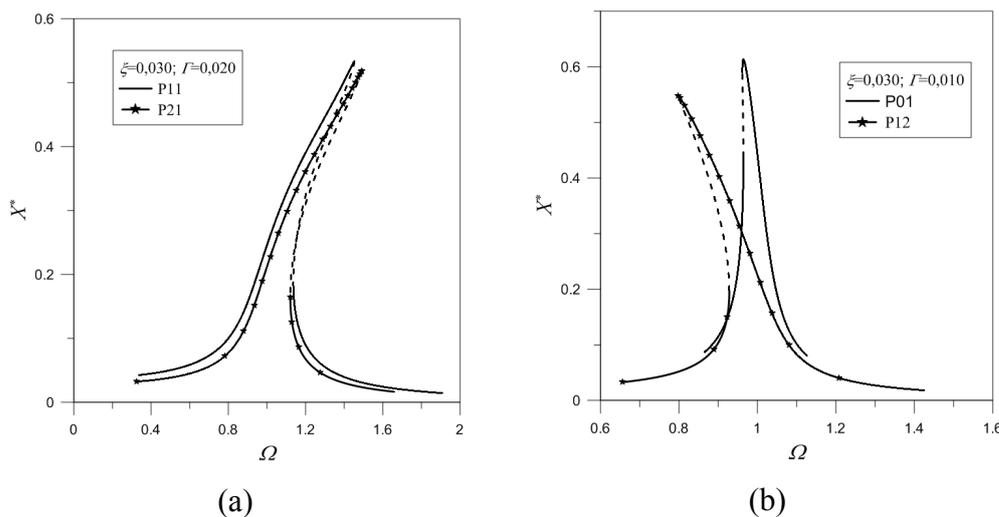


Figura 3-38 Curvas de ressonância para vibração forçada amortecida, (a) $\alpha_i=0$ rad. (b) $\alpha_i=\pi/2$ rad - Ramos estáveis (linha contínua); ramos instáveis (linha pontilhada).

3.3.8. Diagramas de bifurcação

Como as curvas de ressonância obtidas para os modos não lineares do modelo com imperfeição geométrica possuem ganho de rigidez, será utilizado neste estudo um valor de frequência adimensional um pouco maior que a unidade, $\Omega=1,250$. Os resultados para os modos P11 e P21 são mostrados respectivamente na Figura 3-39 e na Figura 3-40. Observa-se que somente o primeiro modo exibe

trechos instáveis e múltiplas soluções para a frequência e domínio de parâmetro de carga analisado.

3.3.9. Estabilidade

Apresenta-se na Figura 3-41 (a) e (b) a influência da taxa de amortecimento nos diagramas de estabilidade de Mathieu. Observa-se que o sistema exibe comportamento semelhante para os modos onde os diagramas de Mathieu foram determinados no caso da estrutura sem imperfeição. A correlação entre os diagramas de bifurcação da Figura 3-39 e as fronteiras de estabilidade é mostrada na Figura 3-42, onde se pode ver uma boa correlação entre as duas ferramentas de estudo de estabilidade da solução do modelo de ordem reduzida.

3.3.10. Procedimento numérico para obtenção dos modos não lineares

Nesta seção é proposto um novo método numérico para obtenção dos modos normais não lineares. O procedimento se baseia na integração numérica das equações originais de movimento levemente amortecidas e da interpolação numérica dos resultados por funções polinomiais para as superfícies modais. Essa interpolação permite a obtenção de expressões analíticas que podem ser utilizadas do mesmo modo que as séries de potência obtidas no método das variedades invariantes. Como condições iniciais para a integração são utilizadas as coordenadas dos modos identificados nas seções de Poincaré.

O método é aqui exemplificado utilizando-se o exemplo do pêndulo com imperfeição geométrica descrito pelas equações (3-116) e (3-117) adicionadas de uma pequena porção de amortecimento proporcional, de modo que a solução no tempo percorra a superfície definida pelas variedades invariantes. Isso é feito com base na definição dos modos normais não lineares em termos das variedades invariantes, uma vez que o movimento iniciado num determinado modo não linear permanece nele durante todo instante t , de modo que a resposta numérica pode ser utilizada para se obter aproximações analíticas para cada modo.

Foram utilizadas as coordenadas do modo P11 e P21 na seção de Poincaré mostradas na Tabela 3-4 para integração numérica das equações de movimento,

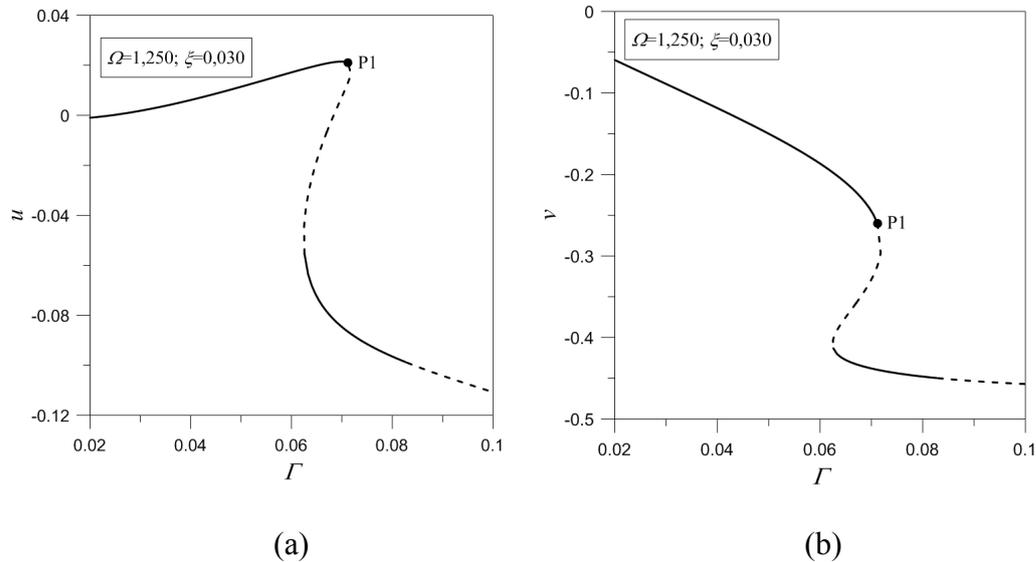


Figura 3-39 Diagrama de bifurcação – modo P11, $\alpha_f=0$ rad: (a) deslocamentos; (b) velocidades. Ramos estáveis – linhas contínuas; ramos instáveis – linhas tracejadas.

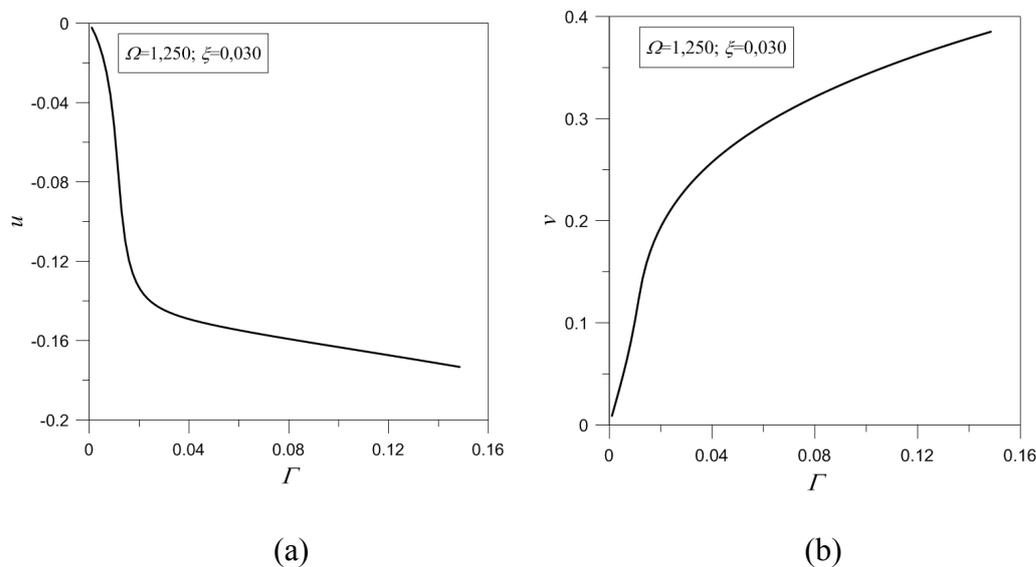


Figura 3-40 Diagrama de bifurcação – modo P21, $\alpha_f=0$ rad: (a) deslocamentos; (b) velocidades. Ramos estáveis – linhas contínuas.

utilizando-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem. O amortecimento proporcional utilizado teve um fator de amortecimento igual a 0,005. O amortecimento é necessário para garantir a precisão da solução sobre um domínio maior do espaço das variedades invariantes e não somente na vizinhança do equilíbrio.

O resultado numérico é interpolado utilizando-se o método de Levenberg-Marquardt, tendo como funções de minimização as mesmas expressões utilizadas no método de séries de potência dadas pelas equações (3-123) e (3-124). Os

resultados numéricos da integração e as superfícies interpoladas são mostrados nas Figura 3-43 e Figura 3-44 para os modos P11 e P21 respectivamente. Observa-se uma boa correlação entre os resultados numéricos da integração, pontos, e as superfícies interpoladas. As expressões resultantes das interpolações para o primeiro modo são:

$$P = 0,918u - 0,001v - 0,127u^2 - 0,028uv - 2,374v^2 - 3,208u^3 - 0,298u^2v - 18,062uv^2 - 0,376v^3; \tag{3-149}$$

$$Q = 0,931v + 0,006u^2 - 1,312uv - 0,022v^2 + 0,064u^3 - 2,689u^2v - 0,117uv^2 - 17,189v^3 \tag{3-150}$$

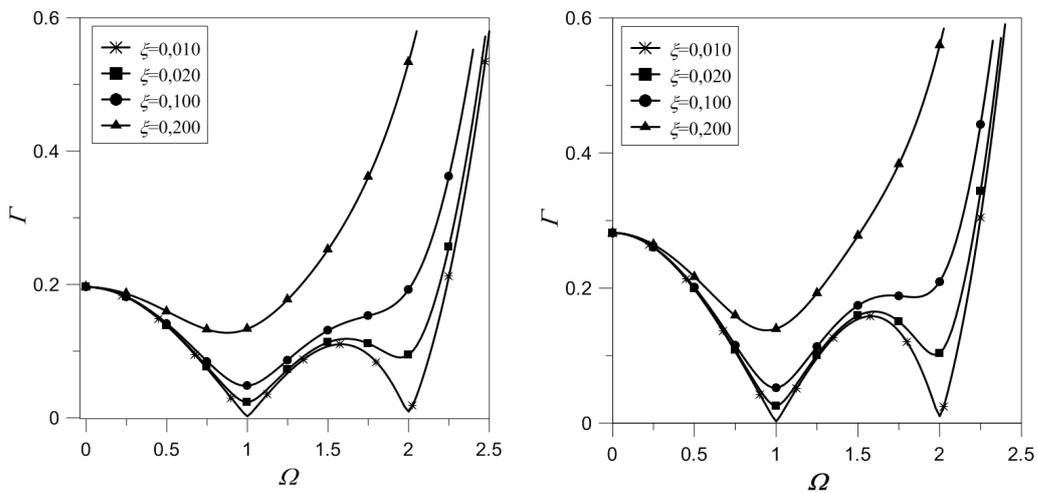


Figura 3-41 Influência do amortecimento no diagrama de estabilidade de Mathieu, $\alpha_f=0$ rad: (a) modo P11; (b) modo P21.

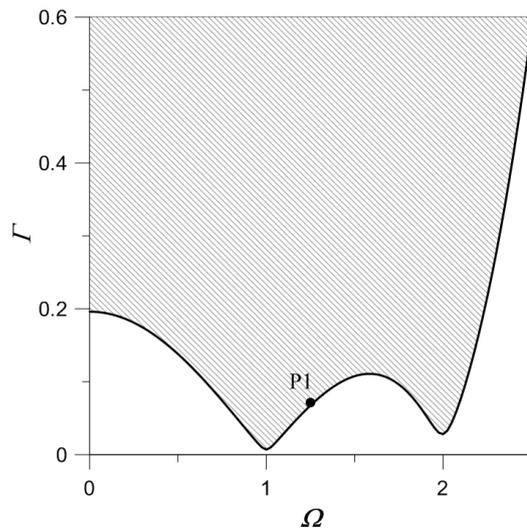


Figura 3-42 Correlação entre os diagramas de bifurcação e de Mathieu - modo P01; $\alpha_f=0$ rad e $\xi=0,030$.

E para o segundo modo:

$$P = -1,061u + 0,004v - 1,150u^2 - 0,011uv - 3,904v^2 + 0,156u^3 - 0,983u^2v - 8,845uv^2 - 1,647v^3; \quad (3-151)$$

$$Q = -1,064v - 0,002u + 0,021u^2 + 1,550uv - 0,041v^2 + 0,421u^3 + 1,780u^2v + 0,758uv^2 + 10,796v^3 \quad (3-152)$$

A ligeira diferença entre os coeficientes das equações (3-149) a (3-152) e aquelas obtidas pelo método assintótico, equações (3-125) a (3-128) se devem em grande parte ao fato de que as expressões interpoladas diretamente da integração numérica correspondem, com a precisão relacionada à integração numérica e ao procedimento de interpolação, às variedades invariantes reais, enquanto que as resultantes do método assintótico se restringem a uma aproximação próxima à origem. Desse modo há uma relação entre a precisão do método e a energia considerada na obtenção da seção de Poincaré, uma vez que as coordenadas dos modos na seção de Poincaré são utilizadas como condições iniciais para integração numérica das equações de movimento. Como o amortecimento, mesmo que em pequena quantidade, faz com que a solução do problema de vibração livre tenda a zero à medida que o tempo tende a infinito, as maiores amplitudes percorridas pela vibração do sistema no modo não linear, serão em geral as condições iniciais de integração. Desse modo, em geral o domínio de precisão do método fica determinado pelos valores referentes ao nível de energia utilizado na obtenção da seção de Poincaré. Para obtenção de soluções precisas fora do domínio determinado por essas condições iniciais pode-se também utilizar um pequeno amortecimento negativo. Esse artifício foi utilizado com relativo sucesso no método desenvolvido por Burton (2007) para determinação dos modos normais não lineares.

O método pode ser potencialmente utilizado para se obter uma descrição analítica dos modos essencialmente não lineares, embora não possa ser utilizado para os modos P31, P41, PS11 e PS21 da estrutura perfeita. Isso ocorre, porque a ressonância interna viola a propriedade de invariância, necessária para que um dos graus de liberdades possa ser escolhido como escravo e parametrizado em função do outro.

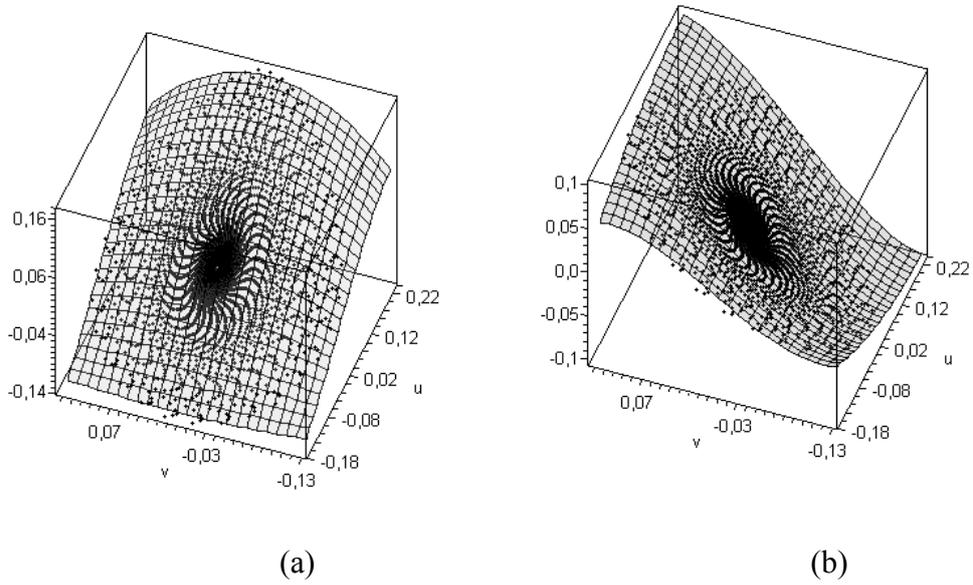


Figura 3-43 Superfície modal – modo P11, $\alpha_i=0$ rad: (a) deslocamentos; (b) velocidades.

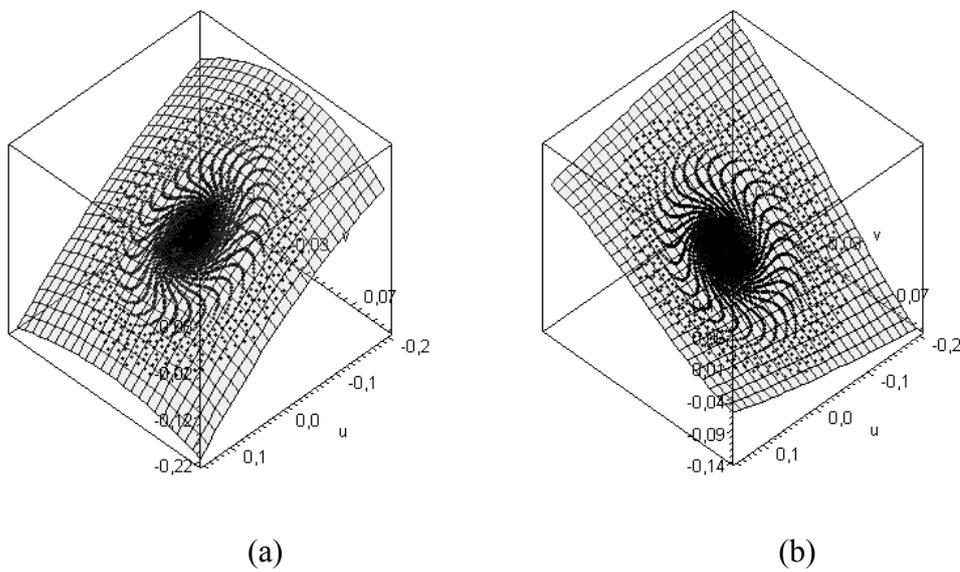


Figura 3-44 Superfície modal – modo P21, $\alpha_i=0$ rad: (a) deslocamentos; (b) velocidades.