

4

Controle de Movimento

Neste capítulo apresenta-se uma abordagem por Controle de Torque Computado e por Modos Deslizantes aplicado a robôs manipuladores. Primeiramente, apresentamos os conceitos básicos da abordagem para o Controle de posição, de trajetória, Torque Computado, e por Modos Deslizante, para depois implementá-lo nos programas de simulação. Além disso, vamos comparar a eficiência das diferentes técnicas dos algoritmos de controle para o robô manipulador Titan IV, descrito no capítulo anterior.

4.1

Controle no Espaço das Juntas

O principal objetivo do controle no espaço da junta é projetar um controlador com realimentação, de tal forma que as coordenadas na junta $\mathbf{q}(t) \in R^n$ sigam o movimento desejado $\mathbf{q}_d(t)$ tão próximo possível. Para este fim, considere equação (3-22) de movimento de um manipulador de n graus de liberdade expressado no espaço da junta ([55]). Neste caso, o controle do robô manipulador é naturalmente realizado no espaço das juntas, visto que as saídas do controle são os torques das juntas. No entanto o usuário especifica um movimento em termos das coordenadas do efetuador terminal, e portanto é necessário entender a seguinte estratégia.

Na figura 4.1 mostra-se um esquema básico dos métodos de controle no espaço da junta. Primeiramente, o movimento desejado, que é descrito em termos das coordenadas do efetuador terminal, é transformado para uma correspondente trajetória na junta usando a cinemática inversa do manipulador. Então o controlador com realimentação determina os torques nas juntas necessários para movimentar o manipulador ao longo da trajetória desejada, especificada na coordenadas da junta inicialmente, com as informações do estado atual das juntas([56] e [57]).

Desde que sempre se assumiu que a tarefa desejada é dada em termos de sequências de tempo do movimento articular, os esquemas de controle no espaço da junta são bastante adequadas em situações onde as tarefas do manipulador podem ser pré-planejadas com precisão e será necessário pouco

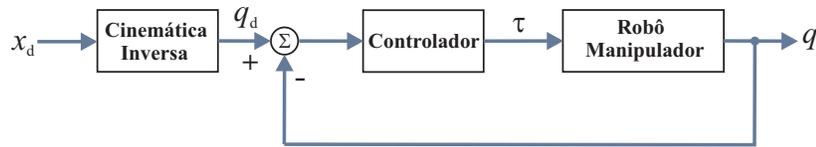


Figura 4.1: Esquema genérico do conceito de Controle no espaço da junta.

ou nenhum ajuste da trajetória ([58]). Tipicamente, a cinemática inversa é realizada para alguns pontos intermédios da tarefa, e as trajetórias nas juntas é interpolado utilizando soluções determinadas não triviais. Embora a trajetória comandada consista de movimentos em linha reta entre os pontos de interpolação representado nas coordenadas do efetuador terminal, o movimento resultante das juntas consiste de segmentos curvilíneos que correspondem à trajetória do efetuador final nos pontos de interpolação.

De fato, o controle no espaço das juntas incluem sempre controladores PD, PID, controle por Dinâmica Inversa, Controle Baseado em Lyapunov, Controle por Torque Computado, etc.

4.2 Controle de Posição

Considere o robô manipulador mostrado na figura 4.2, que encontra-se no espaço tridimensional, e a tarefa é movimentar a uma posição final desejada especificada pelo vetor constante \mathbf{q}_d (ângulos das juntas), sem importar a trajetória realizada. Isto é fisicamente realizável por uma lei de controle proporcional-derivativo (PD) que controla cada junta independentemente, baseado na medida local do erro de posição $\tilde{q}_j = q_{d_j} - q_j$ e das velocidades das juntas \dot{q}_j para $(j = 1, 2, \dots, n)$, obtendo

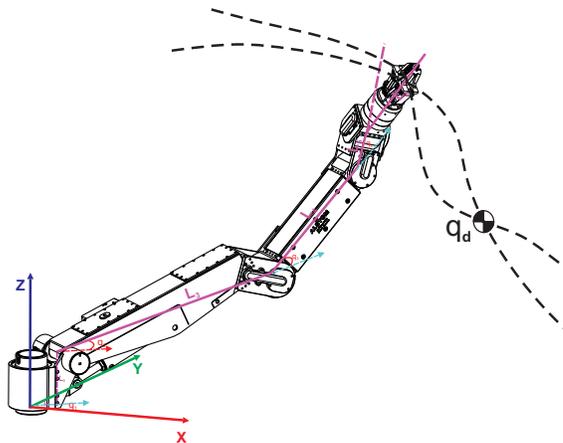


Figura 4.2: Robô Manipulador serial de 6 Graus de Liberdade.

$$\tau_j = k_{P_j} \tilde{q}_j - k_{D_j} \dot{q}_j \quad (4-1)$$

onde k_{P_j} e k_{D_j} são constantes estritamente positivas. Esta expressão é simplesmente a representação de configurar cada uma das articulações do manipulador como um dispositivo mecânico passivo composto por uma mola e um amortecedor, e tendo q_{d_j} como a posição desejada de repouso. O sistema físico passivo resultante simplesmente exibe oscilações amortecidas para a posição de repouso \mathbf{q}_d .

Em sua forma geral, a lei de controle PD pode ser descrita por:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{q}} \quad (4-2)$$

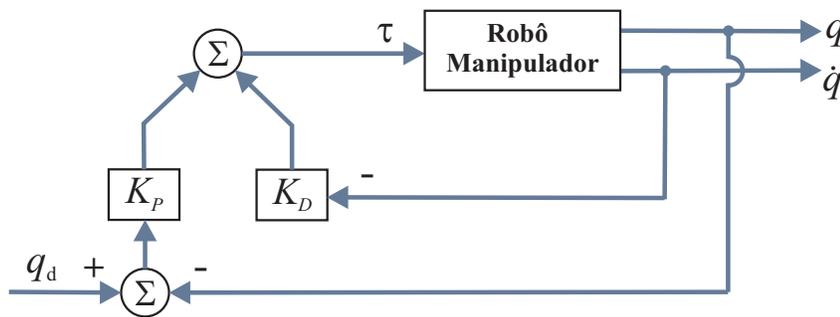


Figura 4.3: Diagrama de Blocos: Controle PD.

onde \mathbf{K}_P e \mathbf{K}_D são matrizes constantes simétrica definidas positivas (não necessariamente diagonais).

Para poder simular os algoritmo de controle, inicialmente se utilizou o ambiente Matlab, devido a possuir funções gráficas prontas para apresentar os resultados e, assim poder ter uma calibração rápida dos parâmetros do controlador. Nas características da simulação, considerou-se uma taxa de amostragem de 1KHz-5KHz, e o método numérico de Euler para solucionar as equações diferencias do sistema.

Agora vamos simular o algoritmo de controle PD, utilizando uma uma taxa de amostragem de 1KHz, sobre o robô manipulador Schilling de 6 graus de liberdade. cujos parâmetros do controlador são:

$$K_P = \begin{bmatrix} 1500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$K_D = \begin{bmatrix} 350 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 350 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 350 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Os valores destas matrizes foram obtidos empiricamente depois de uma série de testes, até atingir erros muito pequenos.

Na figura 4.4 e 4.5 mostra a resposta do comportamento dos deslocamentos nas juntas do robô manipulador, em relação a um deslocamento de referência como entrada. Pode-se observar, que o deslocamento nas juntas atinge à referência (trajetória constante) dada pelo usuário em um tempo razoável para os ganhos arbitrários.

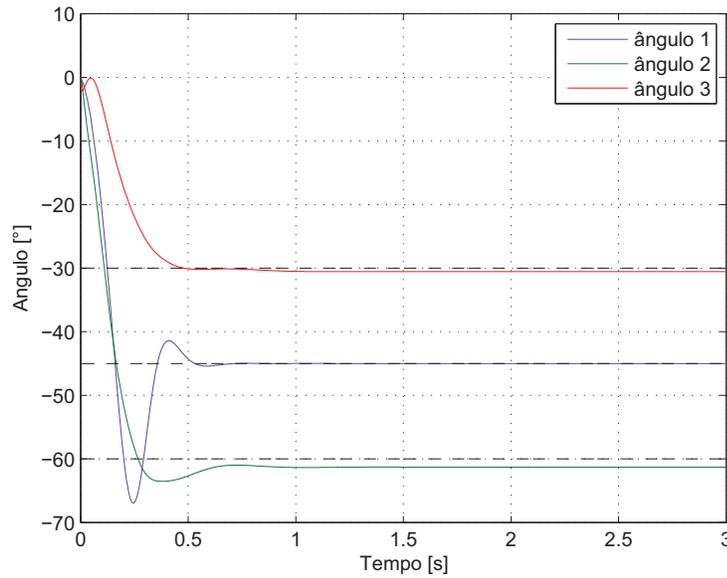


Figura 4.4: Referência e resposta de posição: juntas q_1 , q_2 e q_3 .

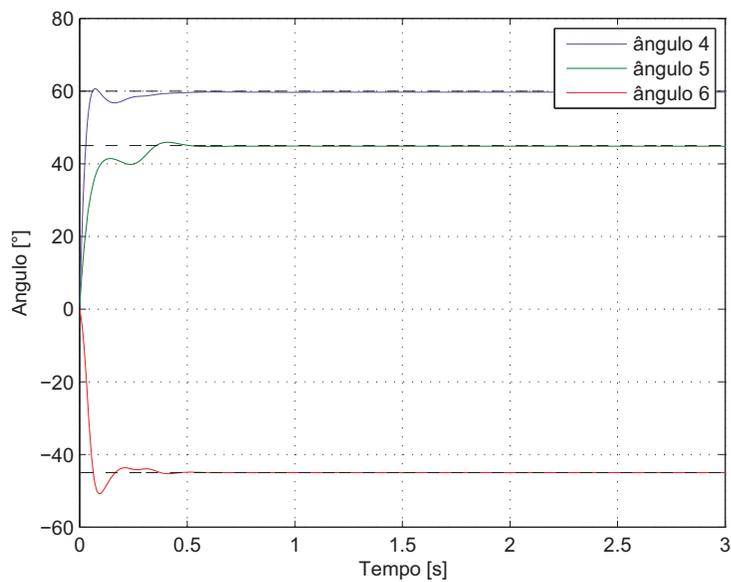


Figura 4.5: Referência e resposta de posição: juntas q_4 , q_5 e q_6 .

Na figura 4.6 e 4.7 mostra os erros de posicionamento das juntas. Observe-se que os valores dos erros ficam no intervalo de $\pm 3^\circ$

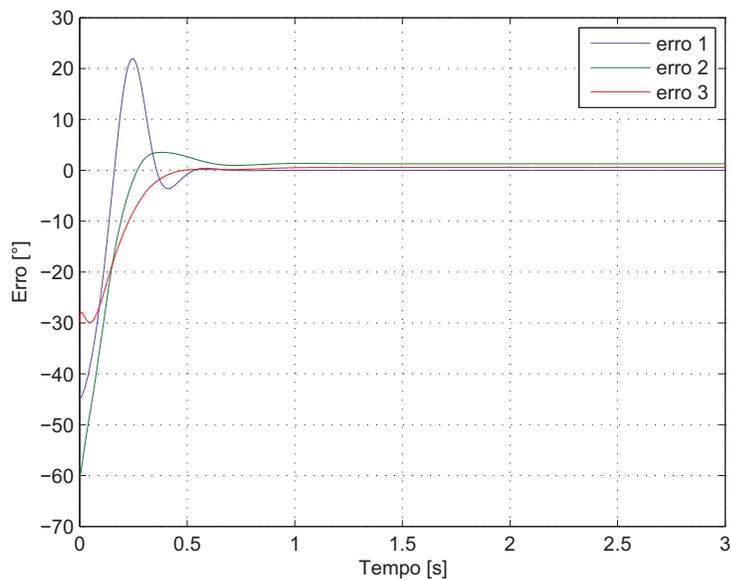


Figura 4.6: Erros de posicionamento: juntas \tilde{q}_1 , \tilde{q}_2 e \tilde{q}_3 .

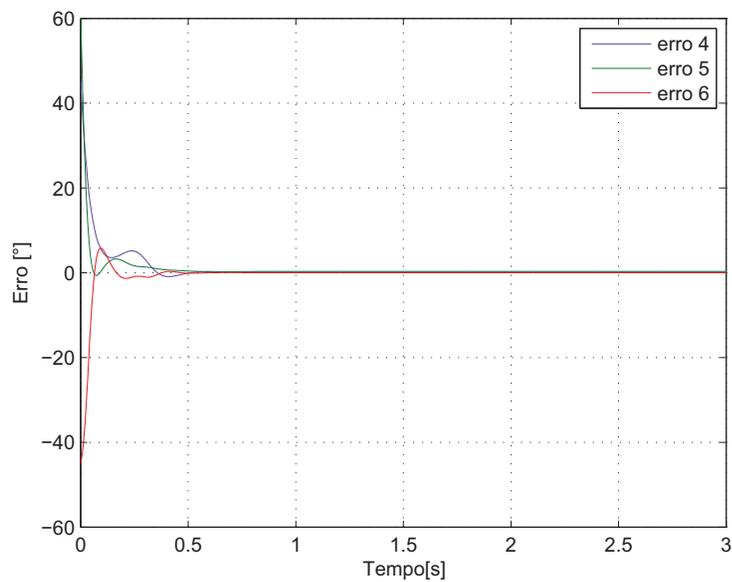


Figura 4.7: Erros de posicionamento: juntas \tilde{q}_4 , \tilde{q}_5 e \tilde{q}_6 .

Observa-se que o algoritmo de controle PD se comporta favoravelmente para controlar posição, mas com pequenos erros. Também há que ter em consideração que a trajetória de referência é constante degrau.

Para minimizar os erros, pode-se adicionar um componente integrador ao controle PD resultando um Controle PID.

4.2.1 Controle PD + Compensação de Gravidade

Um simples método de projeto para controlar manipuladores é utilizar um esquema de controle linear em base à linearização do sistema em torno a um ponto de operação. Um exemplo deste método é um controle PD com uma compensação de gravidade. A compensação de gravidade atua como um bias de correção, compensando apenas para a quantidade de torque que criam um *overshooting* e um comportamento transiente assimétrico.

Formalmente, a lei de controle tem a seguinte forma:

$$\tau = \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \quad (4-3)$$

A figura 4.8 representa com um diagrama de blocos o controlador PD com compensação de gravidade

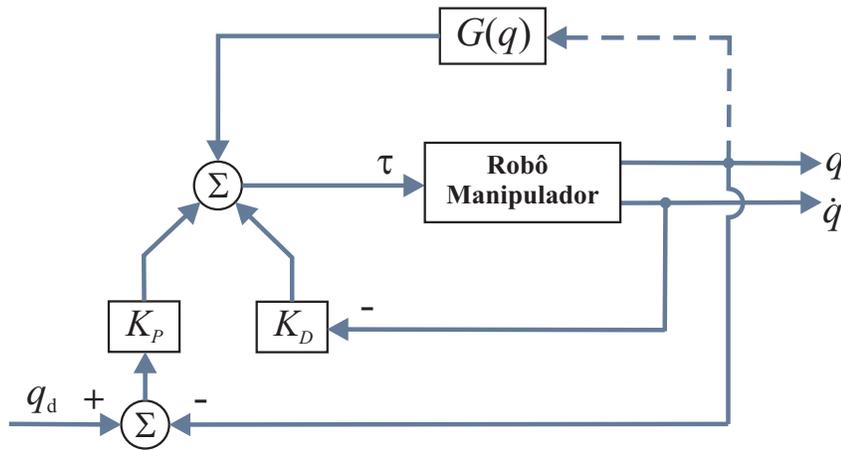


Figura 4.8: Diagrama de Blocos: Controle PD com compensação de gravidade.

Apresenta-se a seguir resultados da simulação, cujas características e parâmetros (matrizes K_P e K_D) são consideradas as mesmas que utilizou-se na simulação do controle PD.

A figura 4.9 e 4.10 mostram o comportamento do controle PD com compensação de gravidade para juntas do robô manipulador em torno a posições de referência (trajetória constante).

O controle PD com compensação de gravidade atua como um corretor do erro no posicionamento das juntas (mesma função de um integrador). Esta forma de corrigir os erros é mais eficiente e rápida de calibrar.

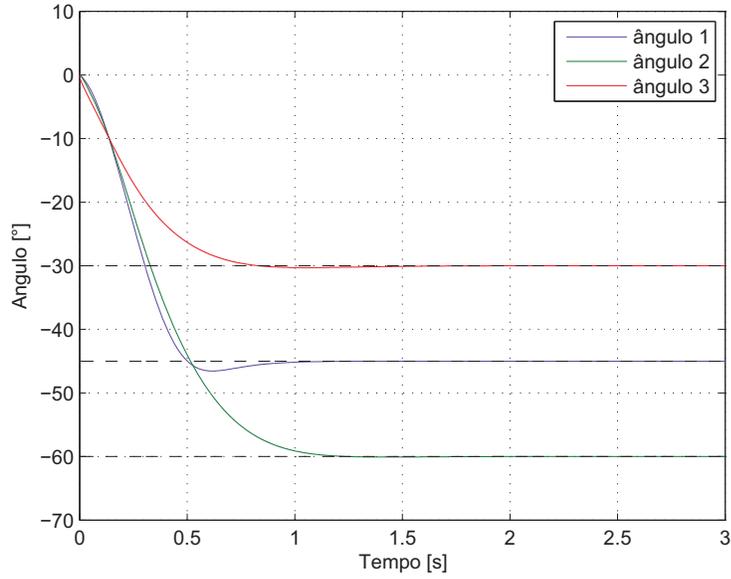


Figura 4.9: Referência e resposta de posição: juntas q_1 , q_2 e q_3 .

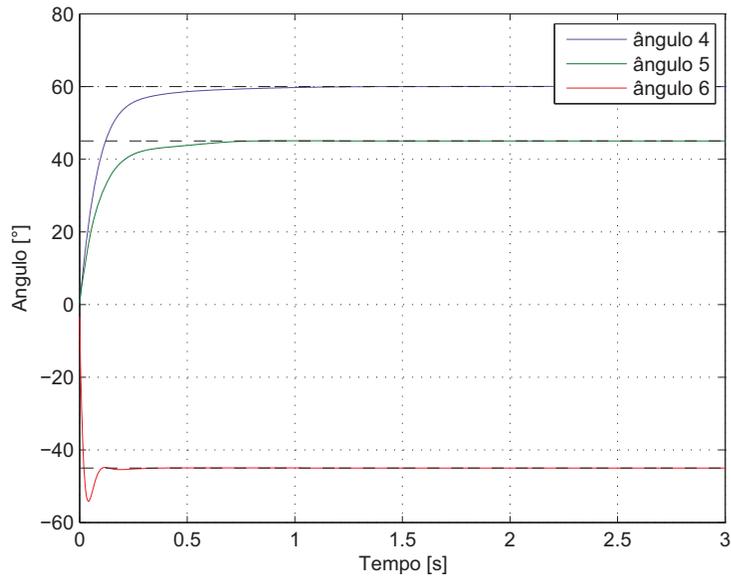


Figura 4.10: Referência e resposta de posição: juntas q_4 , q_5 e q_6 .

Observe que os erros de posicionamento (figura 4.11 e 4.12) são mais próximos a zero que os erros obtido pelo controle PD.

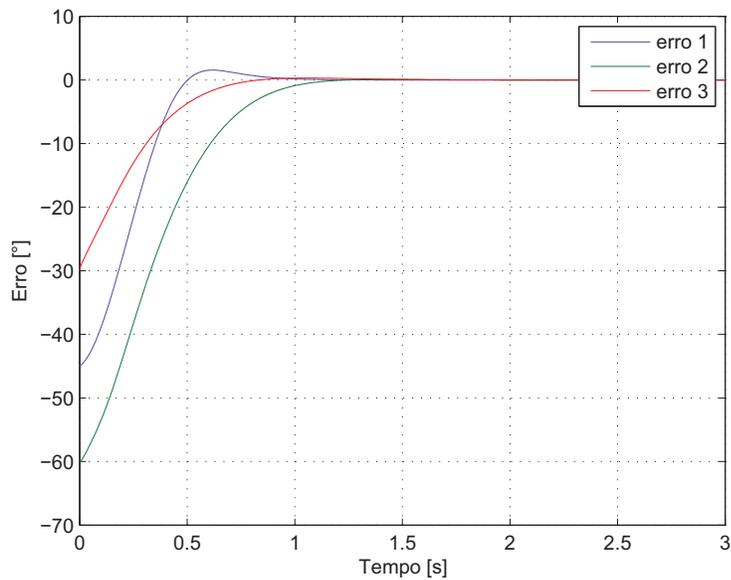


Figura 4.11: Erros de posicionamento: juntas \tilde{q}_1 , \tilde{q}_2 e \tilde{q}_3 .

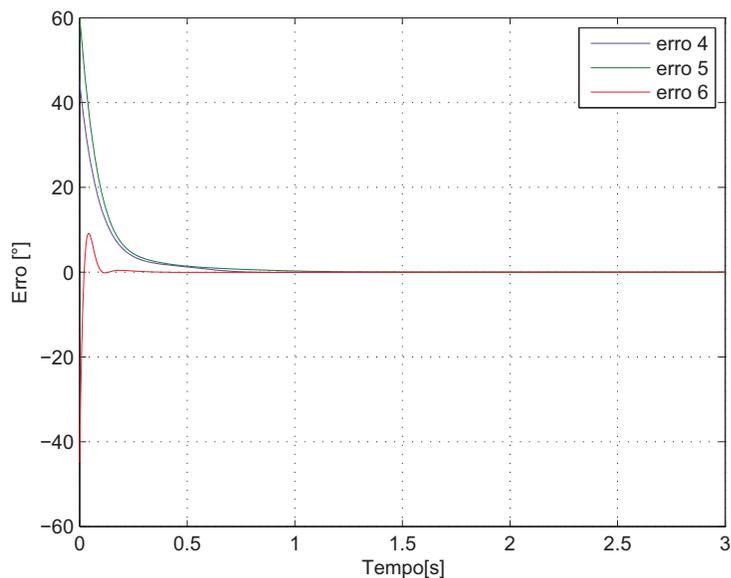


Figura 4.12: Erros de posicionamento: juntas \tilde{q}_4 , \tilde{q}_5 e \tilde{q}_6 .

Se a estimação do vetor de gravidade $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ é aproximadamente igual ao da modelagem dinâmica, este robô se comportaria como se operara em um sistema de gravidade zero. Na simulação, se considerou a estimação do vetor $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ com uma incerteza do 10%.

4.3 Controle Seguimento de Trajetória

Agora consideremos o caso quando o robô manipulador é requerido seguir uma trajetória desejada para conseguir atingir uma posição também desejada. Há muitas tarefas que precisam de uma capacidade efetiva para o seguimento de trajetória, tais como soldagem, corte, ou operações de grande velocidades na presença de obstáculos. Portanto, para melhorar o desempenho no seguimento da trajetória, os controladores devem ter em conta o modelo dinâmico do manipulador.

O problema de controle de seguimento de trajetória consiste em seguir uma determinada trajetória variante no tempo \mathbf{q}_d e suas derivadas sucessivas $\dot{\mathbf{q}}_d$ e $\ddot{\mathbf{q}}_d$, que descrevem a velocidade e aceleração, respectivamente. Para obter um desempenho eficiente, um esforço significativo tem sido dedicado ao desenvolvimento de estratégias de controle baseados no modelo dinâmico[59].

4.3.1 Controle de Torque Computado

Ao longo dos anos, muitos tipos de esquemas de controle têm sido propostos. A maioria deles pode ser considerada como casos especiais da classe controle por torque computado (figura 4.13), que é a aplicação da técnica *feedback linearization* para um sistema não linear em geral.

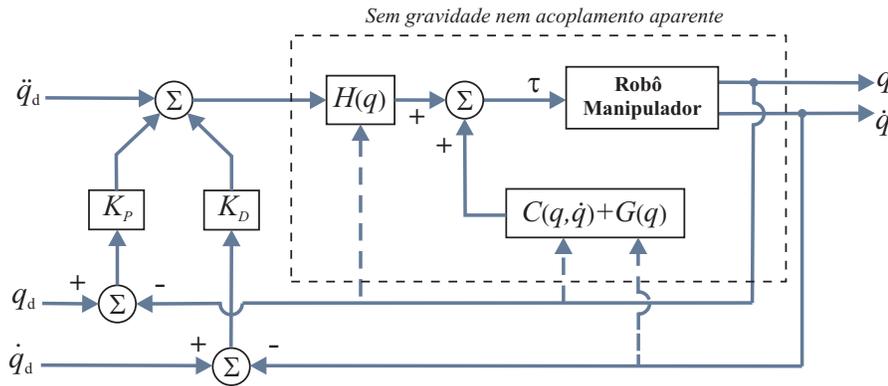


Figura 4.13: Diagrama de Blocos: Controle por Torque Computado.

Considere-se a lei de controle de entrada

$$\tau = \hat{H}(\mathbf{q})\mathbf{v} + \hat{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \hat{G}(\mathbf{q}) \quad (4-4)$$

sendo $\hat{H}(\mathbf{q})$, $\hat{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, e $\hat{G}(\mathbf{q})$ as estimações das matrizes e o vetor correspon-

dente à equação dinâmica do robô manipulador, e \mathbf{v} é representada por:

$$\mathbf{v} = \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (4-5)$$

Nota-se que a lei de controle (4-4) contém os termos $\mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$, o qual é um tipo PD. No entanto, esse termos são realmente pré-multiplicados pela matriz de inércia $\mathbf{H}(\mathbf{q})$. Portanto, isto não é um controlador linear como o PD, dado que os ganhos da posição e velocidades não são constantes, mas dependem do erro de posição $\tilde{\mathbf{q}}$.

Controle por torque computado foi um dos primeiros controladores baseado sem modelo, cuja abordagem foi criada para manipuladores. Isto é, no qual se faz uso explícito do conhecimento das matrizes $\mathbf{H}(\mathbf{q})$, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, e o vetor $\mathbf{G}(\mathbf{q})$. Além disso, observamos que a trajetória desejada de movimento \mathbf{q}_d e suas derivadas $\dot{\mathbf{q}}_d$ e $\ddot{\mathbf{q}}_d$, bem como as medidas de posição e velocidade \mathbf{q} e $\dot{\mathbf{q}}$, são usados para calcular a ação de controle.

Para fins práticos, a concepção de matrizes \mathbf{K}_D e \mathbf{K}_P podem ser escolhidos diagonal. Isto significa que a equação de malha fechada representa um sistema dissociado multivariável linear, isto é, o comportamento dinâmico dos erros de cada posição conjunta, governada por uma equação diferencial linear de segunda ordem, são independentes uns dos outros. Neste cenário, a seleção das matrizes \mathbf{K}_D e \mathbf{K}_P pode ser feita especificamente como:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_P &= \text{diag}\{\omega_1^2, \dots, \omega_n^2\} \\ \mathbf{K}_D &= \text{diag}\{2\omega_1, \dots, 2\omega_n\} \end{aligned} \quad (4-6)$$

Com esta escolha, cada junta responde como um sistema linear criticamente amortecido com largura de banda ω_i . A largura de banda define a velocidade da junta em questão e, conseqüentemente, a taxa de decaimento exponencial dos erros $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ e $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t)$.

Vamos agora simular o algoritmo de controle por torque computado, mas com uma taxa de amostragem de 3KHz, e com uma trajetória de referência variável. Os parâmetros do controlador (matrizes \mathbf{K}_P e \mathbf{K}_D) são encontrados depois de vários testes de calibração, tendo em conta a equação (4-6).

$$K_P = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 900 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 800 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 800 \end{bmatrix}$$

$$K_D = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 55 \end{bmatrix}$$

As figuras 4.14 e 4.15 mostram como o controle por torque computado atua de forma eficiente para uma trajetória variável. Nas estimações das matrizes H, C, G se considerou um 10% de incerteza em relação à dinâmica modelada real do robô. Os erros são mostrados nas figuras 4.16 e 4.17.

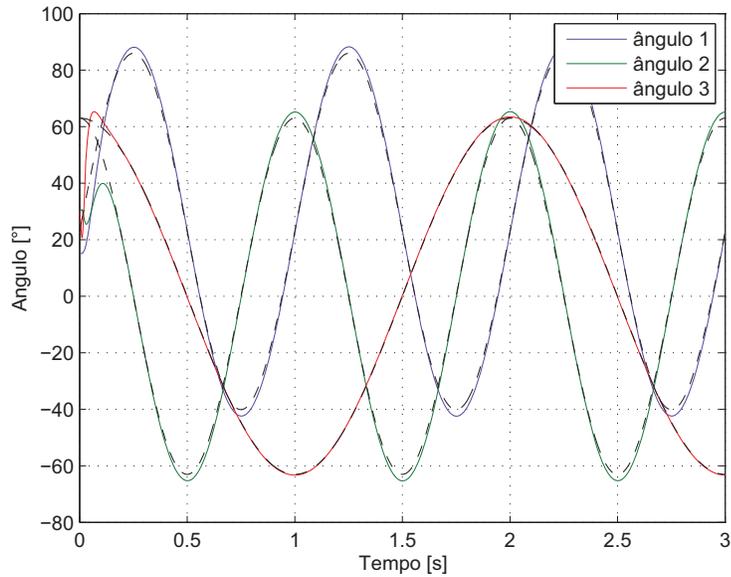


Figura 4.14: Referência e resposta do seguimento de trajetória: juntas q_1, q_2 e q_3 .

Se a estimação da modelagem dinâmica e aproximadamente equivalente à dinâmica real do robô, o sistema se comportaria como um sistema desacoplado.

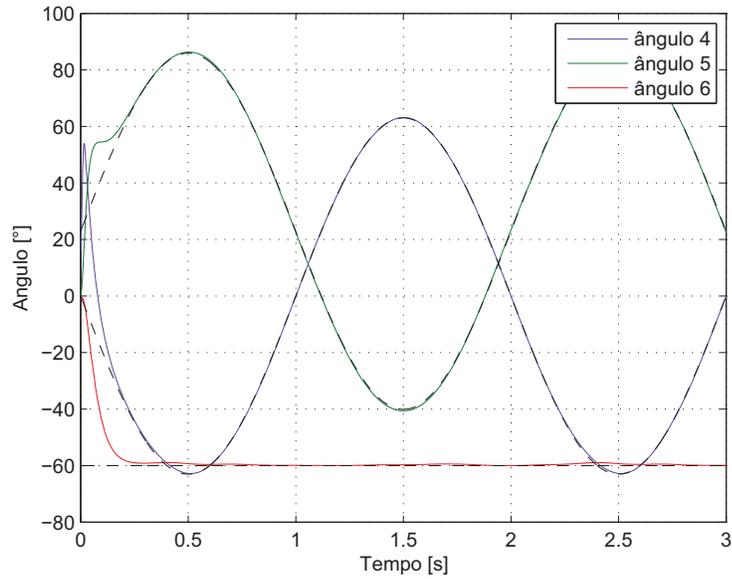


Figura 4.15: Referência e resposta do seguimento de trajetória: juntas q_4 , q_5 e q_6 .

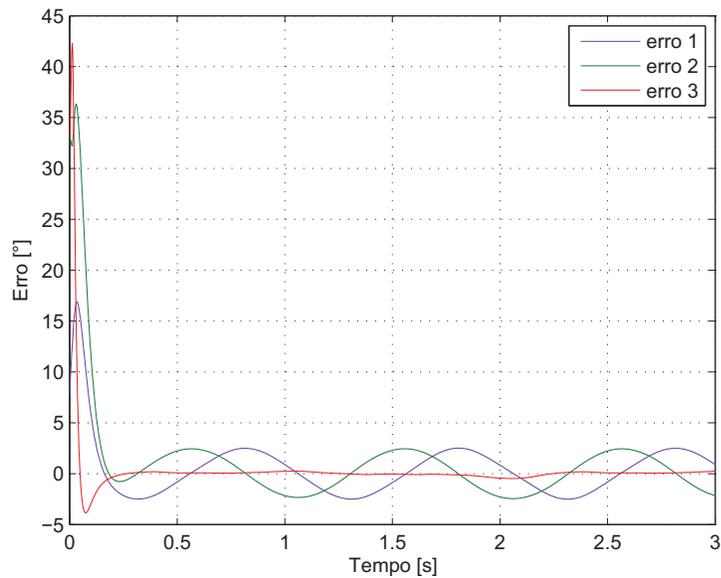


Figura 4.16: Erros de posicionamento: juntas \tilde{q}_1 , \tilde{q}_2 e \tilde{q}_3 .

Outro aspecto importante na implementação do controle por torque computado é a taxa de amostragem utilizada na discretização do mesmo. O limite inferior absoluto para a taxa de amostragem é dado pelo espectro do sinal de entrada de referência utilizado.

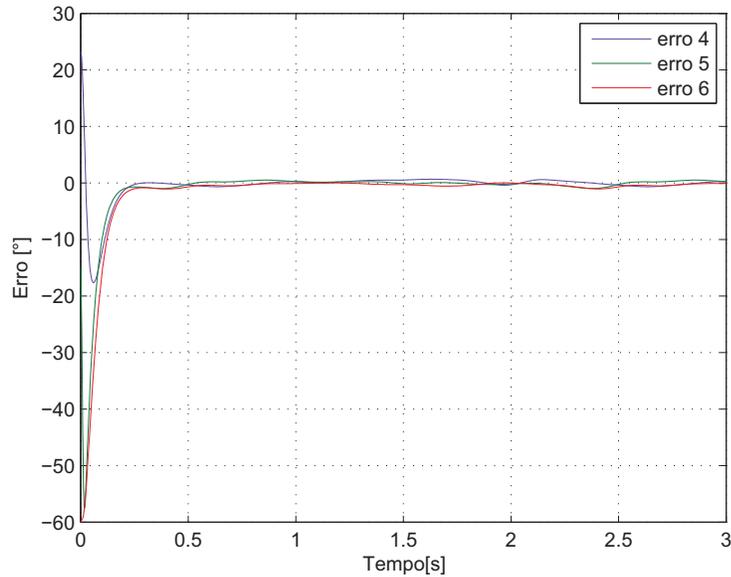


Figura 4.17: Erros de posicionamento: juntas \tilde{q}_4 , \tilde{q}_5 e \tilde{q}_6 .

A taxa de amostragem deve ser, no mínimo, duas vezes maior do que a largura de banda da entrada de referência. O limite superior da frequência de amostragem é dado pela capacidade de rejeição de perturbações e pela capacidade de supressão de vibrações mecânicas naturais. Se o período de amostragem é maior do que o tempo de correlação do ruído devido a perturbações randômicas, estas perturbações não serão suprimidas. Assim, uma boa regra empírica é escolher um período de amostragem pelo menos dez vezes menor do que o tempo de correlação do ruído.

Para evitar excitar modos de ressonância mecânicos, a frequência de amostragem deve ser, no mínimo, duas vezes maior do que a frequência natural dessas ressonâncias. Uma boa regra empírica é escolher a frequência de amostragem pelo menos dez vezes maior do que a frequência natural de ressonância mecânica.

4.4

Controle Robusto de Trajetória

Os casos tratados anteriormente abrangiam situações com incertezas nos parâmetros inerciais. Na prática, podemos encontrar outros tipos de incertezas não paramétricas, tais como a dinâmica não modelada de alta frequência (dinâmica dos atuadores ou vibrações estruturais), e de baixa frequência (atrito de Coulomb). Estas incertezas podem fazer com que a lei de controle convencional não distinga as informações de parâmetros e que o sistema não convirja adequadamente. O Controle Robusto tenta conseguir um desempenho consistente, muitas vezes exigindo uma estimação a priori dos limites dos parâmetros. Além disso, tem a vantagem de lidar com interferência, parâmetros de variação rápida e a dinâmica não modelada.

Isso motivou o uso de Controle a Estrutura Variável (VSC - Variable Structure Control) com modos deslizantes. Os primeiros estudos sobre VSC foram realizados na década de 60 por Emel'yanov e Barbashin na extinta União Soviética. Porém os estudos só foram difundidos entre os ocidentais em meados dos anos 1970, quando o livro Itkis [60] e o artigo Utkin [61] foram publicados em inglês.

A principal vantagem do controle VSC é a obtenção de um sistema de controle robusto a variações paramétricas e distúrbios externos. Os controladores VSC forçam a trajetória dos estados para um lugar no espaço de estados, cuja dinâmica é escolhida pelo projetista, e onde o sistema é imune a perturbações. Deste modo, ao contrário dos controladores baseados em dinâmica inversa, o efeito de incertezas paramétricas é anulado e o objetivo de controle alcançado, visto que o VSC funciona como um controlador de ganho infinito quando a trajetória de estados desliza sobre a superfície de chaveamento.

4.4.1

Controle por Modos Deslizantes

Para uma notação simplificada, o conceito será apresentado para a seguinte classe de sistemas não lineares. Considere o sistema dinâmico não linear de ordem n , definido por:

$$\dot{x}^{(n)} = f(\mathbf{x}, t) + g(\mathbf{x}, t)u + d(\mathbf{x}, t) \quad (4-7)$$

onde o escalar x é a saída de interesse (um ângulo da junta do robô), $u \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle (torque aplicado nas juntas) e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor das variáveis de estados do sistema $\mathbf{x} = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}]^T$.

A função $f(\mathbf{x}, t)$ (em geral não linear) não é exatamente conhecida, mas sua faixa de imprecisão em relação ao seus parâmetros é limitada superiormente por uma função contínua conhecida de \mathbf{x} . Da mesma forma, o ganho do controle $g(\mathbf{x}, t)$ é outra função não exatamente conhecida, mas é de sinal conhecido e limitado por uma função contínua conhecida de \mathbf{x} . A função $d(\mathbf{x}, t)$ representa perturbação e incertezas desconhecidas, que são tipicamente a inércia de uma sistema mecânico, que só é conhecida até uma certa aproximação, e os modelos de atrito que descrevem apenas parte das forças reais do atrito no sistema.

Um sistema de controle por modos deslizantes se compõe de duas fases principais:

- Fase de aproximação: é quando a trajetória das variáveis do sistema é conduzida em tempo finito desde qualquer estado inicial, para atingir à superfície de deslizamento.
- Fase de modo deslizante: o sistema entra em modo deslizante, ocorrendo uma redução na ordem da dinâmica do sistema, que passa a ser dada pela equação da superfície de deslizamento. Isto é possível devido à superfície criar uma atração do sistema para si mesma.

Então, o problema do controle é que o vetor de estado \mathbf{x} faça um seguimento para um específico vetor de estado desejado $\mathbf{x}_d = [x_d, \dot{x}_d, \dots, x_d^{(n-1)}]^T$ com a presença de uma modelagem imprecisa em f , g e d .

Para que a tarefa de seguimento seja realizável utilizando um controle finito u , o estado inicial desejado $\mathbf{x}_d(0)$ deve ser tal que:

$$\mathbf{x}_d(0) = \mathbf{x}(0) \quad (4-8)$$

Em um sistema de segunda ordem, por exemplo, a posição ou velocidade não pode saltar, de modo que qualquer trajetória desejada possível no tempo $t = 0$, necessariamente, inicia-se com o mesmo valor da posição e velocidade. Caso contrário, o seguimento pode ser atingido apenas após do transitório.

A metodologia considerada é, em base às fases mencionadas para o controle por modos deslizantes, da seguinte forma:

- Obtenção de uma superfície de deslizamento $s(\mathbf{x}; t)$, cuja dinâmica garanta a convergência do erro de seguimento para zero.
- Obtenção de uma lei de controle u descontínua, que garanta atingir a superfície considerada em um tempo finito.

Seja $\tilde{x} = x - x_d$ o erro de seguimento na variável x e seja,

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d = [\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, \dots, \tilde{x}^{(n-1)}]^T \quad (4-9)$$

o vetor do erro de seguimento. Além disso, vamos definir uma superfície $S = \{\mathbf{x} : s(\mathbf{x}, t) = 0\}$ variante no tempo no espaço de estado \mathbb{R}^n , por uma equação escalar $s(\mathbf{x}; t) = 0$, onde:

$$s(\mathbf{x}; t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} \tilde{\mathbf{x}} \quad (4-10)$$

e λ é uma constante estritamente positiva (que é interpretada como largura de banda do controle desejado). Assim, uma vez que o sistema entra na superfície de deslizamento, o erro de seguimento converge exponencialmente para a origem, com a constante de tempo regulada pelo valor dos ganhos λ , pois a partir daí, o sistema passará a respeitar a dinâmica dada $s(\mathbf{x}, t) = 0$, [62].

De acordo com a equação (4-10), um sistema de 1ª ordem apresenta um único ponto de deslizamento em \mathbb{R}^1 , um sistema de 2ª ordem apresenta uma linha de deslizamento em \mathbb{R}^2 , um sistema de 3ª ordem apresenta um plano de deslizamento em \mathbb{R}^3 , e sistemas de ordem superior a três apresentam um hiperplano de deslizamento em \mathbb{R}^n , como mostra a figura 4.18.

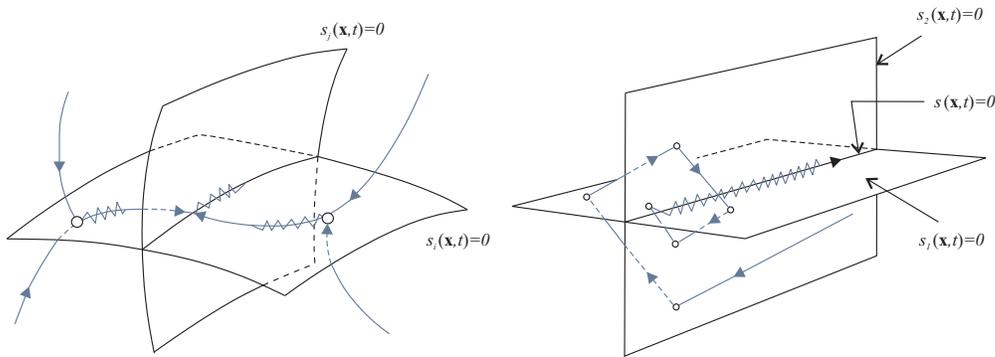


Figura 4.18: Superfícies de Deslizamento.

Por exemplo, se $n = 2$,

$$s = \dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \lambda \tilde{\mathbf{x}}$$

desta equação, no deslizamento ($s = 0$), será $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = -\lambda \tilde{\mathbf{x}}$ onde λ indica a dinâmica do erro para a origem.

Dada a condição inicial (4-8), o problema de seguimento $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_d$ é equivalente ao de permanecer na superfície S para todo $t > 0$; certamente

$s \equiv 0$ representa uma equação diferencial linear cuja única solução é $\tilde{\mathbf{x}} \equiv 0$, dadas as condições iniciais (4-8).

A variável s representa uma medida do desempenho do sistema em seguir a referência. Em Slotine e Li [62] definiu-se a relação entre o valor do escalar s e o erro de seguimento x por:

$$|s| \leq \Phi \Rightarrow |\tilde{x}^i(t)| \leq (2\lambda)^i \varepsilon \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (4-11)$$

onde $\varepsilon = \Phi/\lambda^{n-1}$ é a largura da camada limite, e o termo Φ é chamado de espessura da camada limite, e representa a distância da resposta do sistema em relação à superfície de deslizamento S . Para um sistema de segunda ordem, a relação será

$$|\tilde{x}(t)| \leq \frac{\Phi}{\lambda} \quad (4-12)$$

Seja o sinal de controle u descontínuo dado por:

$$u = \begin{cases} u^+ & \text{si } s(\mathbf{x}, t) > 0 \\ u^- & \text{si } s(\mathbf{x}, t) < 0 \end{cases} \quad (4-13)$$

onde $u^+(x)$ e $u^-(x)$ são funções contínuas. Nota-se que u não é definido em $s(\mathbf{x}, t) = 0$

Para que o sistema entre em modo deslizante, a superfície de deslizamento deve ser pelo menos localmente atrativa. Por exemplo, deve existir um domínio envolvendo a superfície no qual as trajetórias do sistema apontem na sua direção. Este fato pode ser matematicamente expresso da seguinte forma:

$$\lim_{\dot{s} \rightarrow 0^+} \dot{s} < 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\dot{s} \rightarrow 0^-} \dot{s} > 0 \quad (4-14)$$

em algum domínio $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Neste caso, a superfície de deslizamento seria:

$$\mathfrak{D} = S \cap \Omega = \{\mathbf{x} : s(\mathbf{x}, t) = 0\}$$

A expressão dada na equação (4-14) é frequentemente substituída pelo critério mais sucinto, porém equivalente, dado por:

$$\dot{s}s < 0 \quad (4-15)$$

As condições (4-14) e (4-15) são chamadas de condições de alcançabilidade. No caso da condição (4-15) ser satisfeita globalmente, por exem-

plano $\Omega = \mathbb{R}^n$, a função

$$V(s) = \frac{1}{2}s^2 < 0 \tag{4-16}$$

será uma função de Lyapunov para o estado s , uma vez que $\dot{V}(s) = \dot{s}s < 0$.

Embora as condições (4-14) e (4-15) sejam frequentemente encontradas na literatura, elas não garantem a existência de um modo deslizante ideal, já que estas condições garantem apenas que a superfície de deslizamento seja alcançada assintoticamente.

Para garantir que a superfície de deslizamento seja alcançada em tempo finito, uma condição mais restritiva deve ser satisfeita. Uma condição muito utilizada na literatura é a condição de alcançabilidade $-\eta$ dada por:

$$\dot{s}s \leq -\eta|s| \tag{4-17}$$

onde η é uma constante estritamente positiva responsável pela velocidade de convergência do sistema.

Reescrevendo a equação (4-16) como

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta|s| \tag{4-18}$$

que é chamada a condição de deslizamento, e integrando de 0 a t_s , segue que:

$$|s(t_s)| - |s(0)| \leq -\eta t_s$$

O comportamento típico do sistema imposta pela condição de deslizamento é apresentada na figura 4.19.

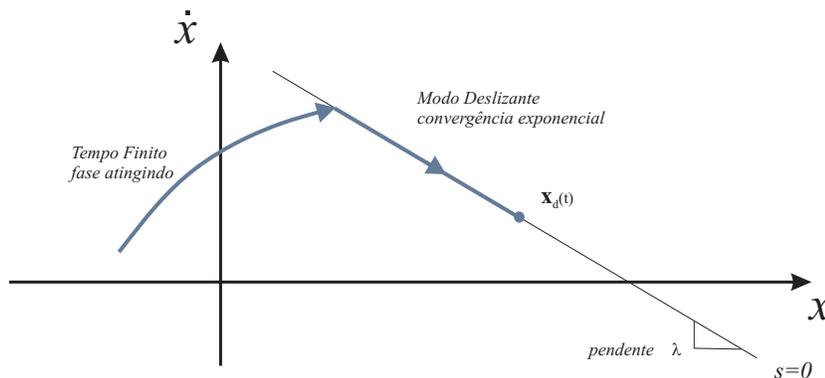


Figura 4.19: Interpretação gráfica das equações (4-10) e (4-18) ($n = 2$).

Deste modo, o tempo necessário para atingir a superfície $s = 0$, repre-

sentado por t_s , satisfaz:

$$t_s \leq \frac{|s(0)|}{\eta} \quad (4-19)$$

Nos casos analisados anteriormente, esta condição é satisfeita, garantindo assim o aparecimento do deslizamento ideal [63]. Além disso, a condição de deslizamento impõe que a distância entre uma trajetória qualquer fora da superfície de deslizamento e a mesma, medida por s^2 , decresce ao longo do tempo, com uma velocidade de convergência η .

A lei de controle u é projetada de forma a garantir que x atinge a superfície $s(x, t) = 0$ em um intervalo de tempo finito, e uma vez atingida tal superfície, permaneça deslizando nela indefinidamente. Alguns métodos utilizados para escolher o sinal de controle descontínuo são:

- Controle Modo Deslizante pelo método de controle equivalente proposto [61].

$$u = u_{eq} + u_c \quad (4-20)$$

onde u_c é um sinal de controle descontínuo com chaveamento, e se escolhe geralmente com o formato tipo $-K \operatorname{sgn}(s)$, com $K > 0$.

- Controle Modo Deslizante tipo controle *Bang-Bang* ([64]). Escolhendo um sinal de controle que pode envolver a técnica de chaveamento.

$$u = -K \operatorname{sgn}(s) \quad (4-21)$$

onde $K > 0$ se escolhe suficientemente maior, como para eliminar as perturbações.

Uma forma alternativa de se representar modos deslizantes é através do conceito de controle equivalente. Este método consiste, basicamente, em encontrar um controle contínuo u_{eq} , chamado controle equivalente, que para uma dada condição inicial sobre a superfície deslizante, a trajetória resultante do sistema

$$\dot{x}^{(n)} = f(\mathbf{x}, t) + g(\mathbf{x}, t)u_{eq} + d(t)$$

coincida com a trajetória descrita pelo sistema a estrutura variável (4-7) e (4-13), e permita conhecer a dinâmica do sistema durante o deslizamento.

Para encontrar o controle equivalente, é suficiente notar que $\dot{s}(\mathbf{x}, t) = 0$ é uma condição necessária para que as trajetórias de estado permaneçam na

superfície de deslizamento $s(\mathbf{x}, t) = 0$, pois

$$\dot{s}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} [f(\mathbf{x}, t) + g(\mathbf{x}, t)u_{eq} + d(\mathbf{x}, t)] = 0 \quad (4-22)$$

Resolvendo a equação para u_{eq} ,

$$u_{eq} = - \left(\frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}, t) \right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} [f(\mathbf{x}, t) + d(\mathbf{x}, t)] \quad (4-23)$$

Para que exista o controle equivalente, é necessário que $\left(\frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}, t) \right)$ seja inversível.

Além disso, seja a função $d(\mathbf{x}, t)$ dentro do domínio de $g(\mathbf{x}, t)$, então desta condição significa que existe um sinal de controle u_d , tal que

$$d(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t)u_d \quad (4-24)$$

Esta condição é conhecida como *matching condition* (ou condição de encaixe). Se a condição de encaixe for cumprida, então poderemos escrever a dinâmica do sistema como

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t) + g(\mathbf{x}, t)u_{eq} + g(\mathbf{x}, t)u_d \quad (4-25)$$

e substituindo u_{eq} da equação obtemos

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t) - g(\mathbf{x}, t) \left(\frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}, t) \right)^{-1} \left(\frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}, t) \right) f(\mathbf{x}, t) \quad (4-26)$$

Da equação se comprova como a dinâmica sobre a superfície deslizante é imune para a perturbação $d(\mathbf{x}, t)$ para qualquer superfície $s(\mathbf{x}, t) = 0$, o que mostra que se a condição de encaixe é satisfeita, o controle por modos deslizantes é invariante sob perturbações paramétricas e, portanto, robusto [65].

A lei de controle na equação (4-20) possui um termo descontínuo que depende do valor da variável s . Este termo pode provocar oscilação elevada de alta frequência na ação de controle quando o sistema está próximo à superfície S . A figura 4.20 ilustra este comportamento, denominado *chattering* (ou chaveamento).

Estas oscilações podem excitar modos não modelados (modos de altas frequências) além de provocar o desgaste dos atuadores. Este comportamento tende a ser mais pronunciado quanto maior forem as incertezas do sistema, ou seja, erro de modelagem e perturbação.

Segundo Slotine e Li, para evitar o *chattering*, deve-se suavizar a função

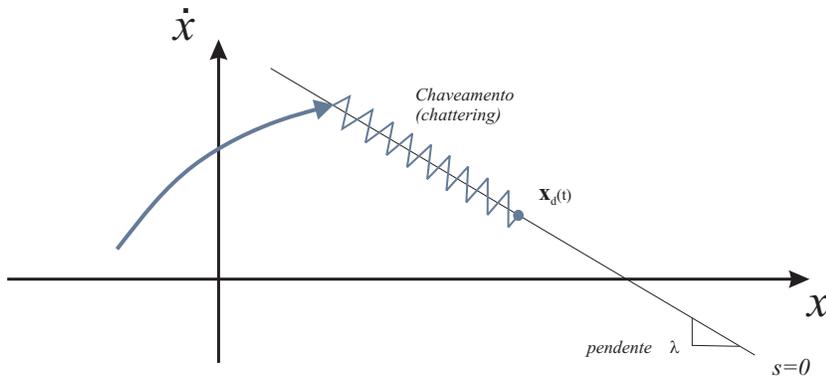


Figura 4.20: Fenômeno de *Chattering* (ou Chaveamento).

discontínua sgn utilizada na lei de controle, definindo-se uma camada limite em torno da superfície S dentro da qual ocorrerá a transição de sinal

A lei de controle suavizada será dada por:

$$u = u_{eq} - K \text{sat}(s/\Phi) \tag{4-27}$$

onde o termo $\text{sat}(s/\Phi)$ é definido como

$$\text{sat}(s/\Phi) = \begin{cases} s/\Phi & \text{se } |s/\Phi| \leq 1 \\ \text{sgn}(s/\Phi) & \text{se } |s/\Phi| > 1 \end{cases} \tag{4-28}$$

como se pode observar na figura 4.21

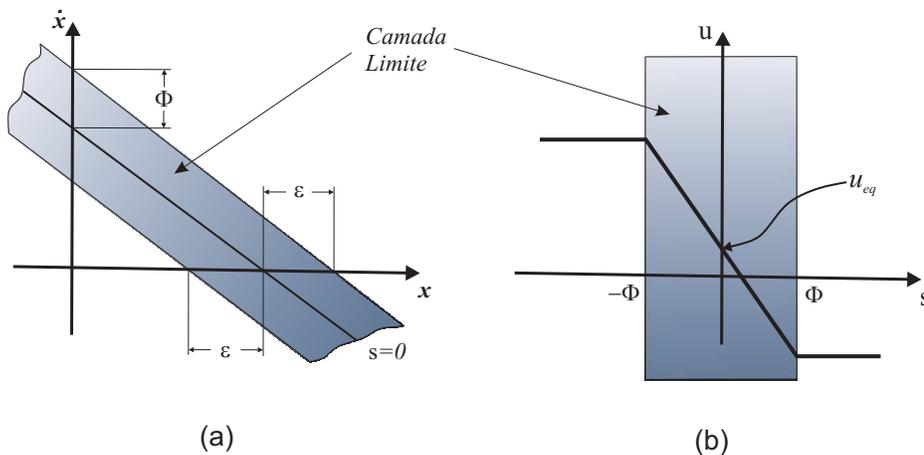


Figura 4.21: (a)Camada Limite para um sistema de segunda ordem. (b)Controle de Interpolação na camada limite.

Portanto, o controle fica introduzido dentro da camada limite quando $\text{sat}(s/\Phi) = s/\Phi$, conforme ilustra a figura 4.22

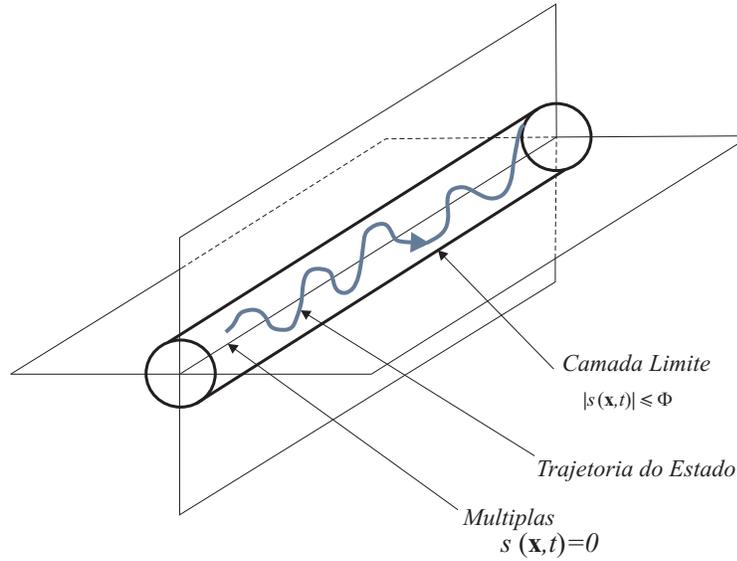


Figura 4.22: Camada Limite.

Fora da camada limite, o controle u satisfaz a condição de deslizamento, e a trajetória converge para dentro da camada limite. O erro de seguimento \tilde{x} fica limitado pela largura da camada limite, conforme

$$|\tilde{x}(t)| < \frac{\Phi}{\lambda^{n-1}} \quad (4-29)$$

Suavizar a lei de controle equivale a introduzir um filtro passa-baixa na dinâmica da variável s e, conseqüentemente, eliminam-se os chaveamentos (*chattering*). Dessa forma, obtém-se uma camada limite, com valor constante ao longo do tempo, uma vez que o parâmetro λ é constante e representa a largura de banda do filtro aplicado sobre a variável s .

Considere-se agora o projeto do controle robusto de trajetória, para robô manipulador. No caso de um sistema MIMO, se tem muitas possibilidades disponíveis para especificar uma condição deslizante análoga a (4-18). Pode-se requerer uma condição deslizante da forma:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s_i^2 \leq -\eta_i |s_i| \quad (\eta > 0)$$

Para ser verificado individualmente ao longo de cada grau de liberdade i , com $s_i = \dot{q}_i + \lambda_i \tilde{q}_i$, se pode interpretar s^2 como a norma quadrada da distância para a superfície $s = 0$, e requerer no caso MIMO que:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathbf{s}^T \mathbf{s} \leq -\eta (\mathbf{s}^T \mathbf{s})^{1/2} \quad (\eta > 0)$$

Seja um caso generalizado de um sistema de única entrada, o vetor \mathbf{s} define-se como

$$\mathbf{s} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}} \quad (4-30)$$

onde $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d$, e Λ é uma matriz simétrica positivo-definida, ou também uma matriz de Hurwitz.

Na verdade, neste sistema de segunda ordem, podemos interpretar \mathbf{s} de (4-30) como termo da "velocidade de erro"

$$\mathbf{s} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r \quad (4-31)$$

onde,

$$\dot{\mathbf{q}}_r = \dot{\mathbf{q}}_d - \Lambda \tilde{\mathbf{q}}$$

A "velocidade de referência", vetor $\dot{\mathbf{q}}_r$, é fornecida pelo deslocamento da velocidade desejada $\dot{\mathbf{q}}_d$ de acordo com o erro de posição $\tilde{\mathbf{q}}$. Esta simples representação é uma manipulação notacional que permite traduzir as propriedades relacionadas com a energia nas propriedades do controle de trajetória.

De forma semelhante ao caso de entrada única, o vetor \mathbf{s} transmite informação sobre a limitação e convergência de \mathbf{q} e $\dot{\mathbf{q}}$, uma vez que a definição em (4-31) de \mathbf{s} também pode ser vista como uma equação diferencial estável de primeira ordem em $\tilde{\mathbf{q}}$, com \mathbf{s} como uma entrada. Assim, assumindo condições iniciais limitadas, ao mostrar a limitação de \mathbf{s} também se mostram as limitações de $\tilde{\mathbf{q}}$ e $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$, e portanto de \mathbf{q} e $\dot{\mathbf{q}}$; similarmente, se \mathbf{s} tende a 0 quando t tende ao infinito, então os vetores $\tilde{\mathbf{q}}$ e $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ também tendem a 0.

Na presença de torques de gravidade externas $\mathbf{G}(\mathbf{q})$, a conservação de energia pode ser escrita (generalizando a equação) como

$$\dot{\mathbf{q}}^T (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{G}) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}}] \quad (4-32)$$

No entanto, como detalhado abaixo, definindo a matriz \mathbf{C} pelas componentes

$$C_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial H_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \quad (4-33)$$

então a matriz $(\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C})$ é certamente anti-simétrica, um fato que pode ser visto como uma expressão matriz da conservação da energia (Apêndice B).

Na prática, para robôs manipuladores com poucos graus de liberdade, essa igualdade pode ser suficiente para obter \mathbf{C} sem usar explicitamente a

expressão (4-33).

Com uma maior formalização da conservação da energia mecânica, estamos prontos para resolver o problema de controle robusto de trajetória. Vamos definir a função:

$$V(t) = \frac{1}{2}[\mathbf{s}^T \mathbf{H} \mathbf{s}] \quad (4-34)$$

Derivando a equação (4-34) se obtém,

$$\dot{V}(t) = \mathbf{s}^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{s}} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{H}} \mathbf{s} \quad (4-35)$$

agora derivando também a equação (4-31),

$$\dot{\mathbf{s}} = \ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_r$$

e substituindo na equação (4-35) obtemos

$$\dot{V}(t) = \mathbf{s}^T (\mathbf{H} \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{H} \ddot{\mathbf{q}}_r) + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{H}} \mathbf{s}$$

Da equação dinâmica do robô, despejamos $\mathbf{H} \ddot{\mathbf{q}}$ e substituímos no sistema dinâmico assim,

$$\mathbf{H} \ddot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{G} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\mathbf{s} - \dot{\mathbf{q}}_r) - \mathbf{G}$$

produzindo a seguinte expressão

$$\dot{V}(t) = \mathbf{s}^T (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{H} \ddot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{G}) \quad (4-36)$$

Onde a matriz anti-simétrica $(\mathbf{H} - 2\mathbf{C})$ tem sido utilizada para eliminar o termo $\frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{H}} \mathbf{s}$.

De forma semelhante ao caso de entrada única, vamos agora definir a entrada de controle para ser da forma

$$\boldsymbol{\tau} = \hat{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{k} \text{sgn}(\mathbf{s}) \quad (4-37)$$

onde $\mathbf{k} \text{sgn}(\mathbf{s})$ é definido como o vetor de componentes $k_i \text{sgn}(s_i)$, e similarmente para o termo $\hat{\boldsymbol{\tau}}$, é o vetor de entrada de controle que faria a \dot{V} igual a zero se as dinâmicas foram exatamente conhecidas.

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \hat{\mathbf{H}} \ddot{\mathbf{q}}_r + \hat{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{q}}_r + \hat{\mathbf{G}}$$

Temos então:

$$\dot{V}(t) = \mathbf{s}^T [\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{q})] - \sum_{i=1}^n k_i |s_i| \quad (4-38)$$

Dados uns intervalos de erros na modelagem $\tilde{\mathbf{H}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ e $\tilde{\mathbf{G}}$ onde,

$$\tilde{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{H}} - \mathbf{H} \quad \tilde{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{C}} - \mathbf{C} \quad \tilde{\mathbf{G}} = \hat{\mathbf{G}} - \mathbf{G}$$

vemos que escolhendo as componentes k_i do vetor \mathbf{k} , tal que

$$k_i \geq |[\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{q})]_i| + \eta_i \quad (4-39)$$

(onde a constante η_i é estritamente positivo) Permite-se satisfazer a condição de deslizamento.

$$\dot{V} \leq - \sum_{i=1}^n \eta_i |s_i| \quad (4-40)$$

Vamos agora simular o algoritmo de controle robusto por modos deslizantes, com uma taxa de amostragem igual a 5KHz, pois para este tipo de controlador é recomendável trabalhar com uma taxa de amostragem entre 5KHz a 10Khz. Os parâmetros do controlador utilizados, calibrados empiricamente, são:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \eta = \begin{bmatrix} 2000 \\ 2000 \\ 800 \\ 500 \\ 500 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Os parâmetros da função continua contida na lei do controlador são:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

As figuras 4.23 e 4.24 mostram o resultado do controlador robusto, que atua de forma eficiente para uma trajetória variável. Na estimação das matrizes \hat{H} , \hat{C} , \hat{G} , se considerou 15% de incerteza em relação à dinâmica modelada real do robô.

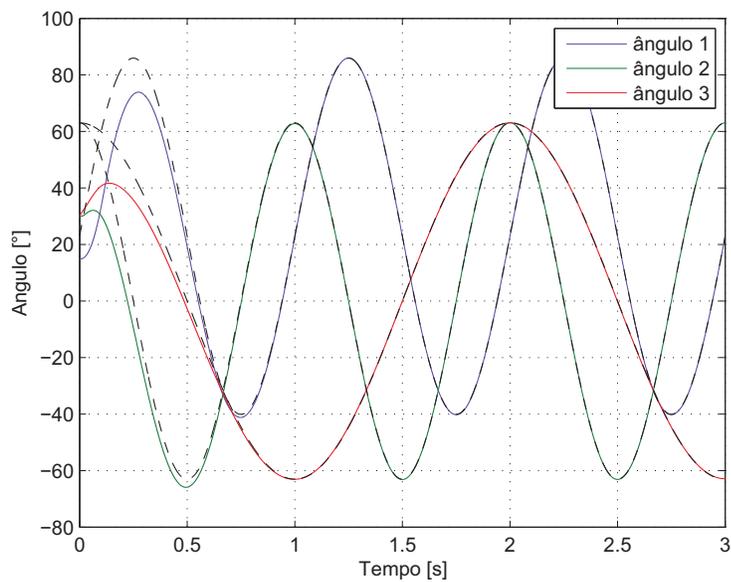


Figura 4.23: Referência e resposta do seguimento de trajetória: juntas q_1 , q_2 e q_3 .

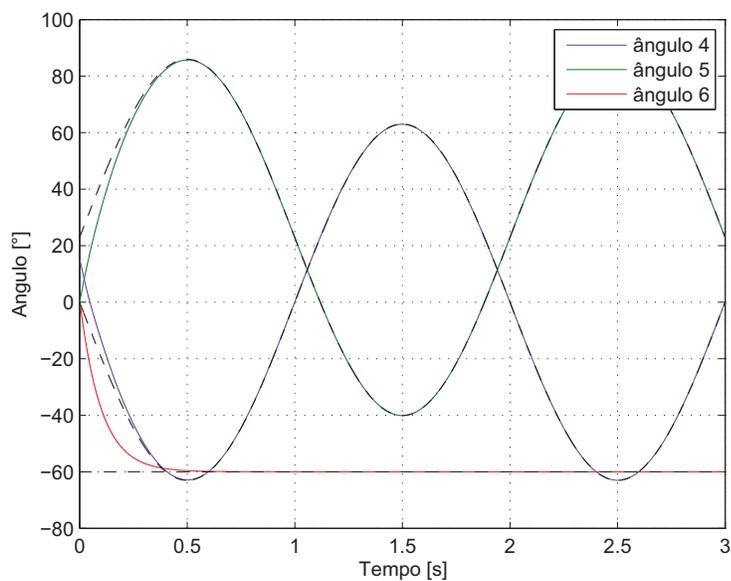


Figura 4.24: Referência e resposta do seguimento de trajetória: juntas q_4 , q_5 e q_6 .

Os erros são apresentados nas figuras 4.25 e 4.26.

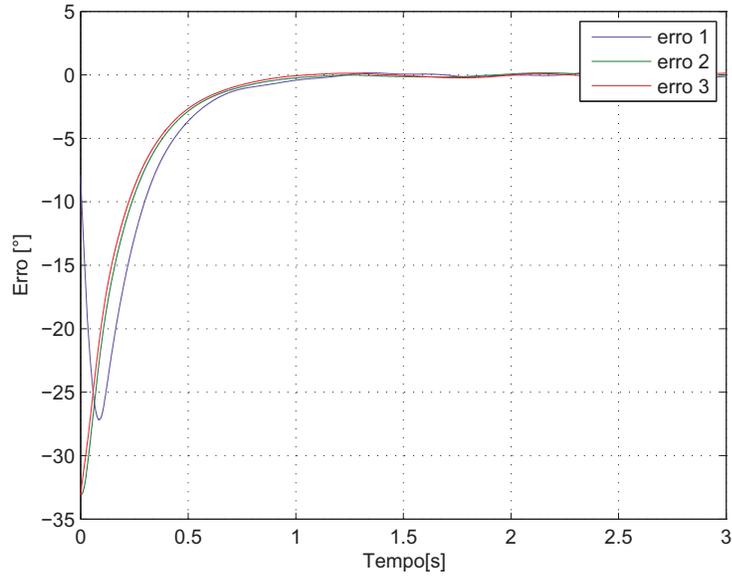


Figura 4.25: Erros de posicionamento: juntas \tilde{q}_1 , \tilde{q}_2 e \tilde{q}_3 .

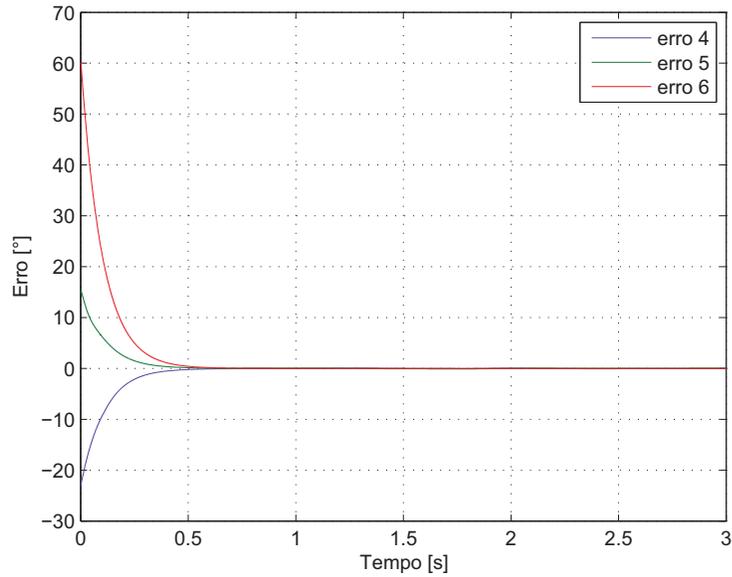


Figura 4.26: Erros de posicionamento: juntas \tilde{q}_4 , \tilde{q}_5 e \tilde{q}_6 .

Na figura 4.27 e 4.28 mostramos os resultados dos torques produzidos pelo controlador robusto. Observa-se como o sistema é atingido na superfície deslizante porque no início da sinal aparece um pequeno chaveamento, com isto podemos comprovar que a superfície de deslizamento esta cumprindo sua função. Em alguns casos se a superfície deslizante não fora a correta então o

controle poderia comportar-se simplesmente como um controlador PD, porque sua operação poderia estar somente atuando dentro da camada limite.

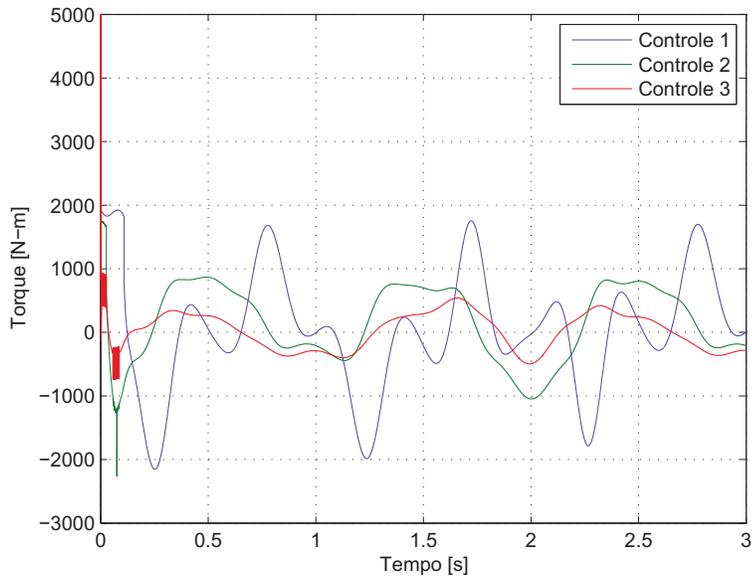


Figura 4.27: Gráfico dos torques produzidos: τ_1 , τ_2 e τ_3 .

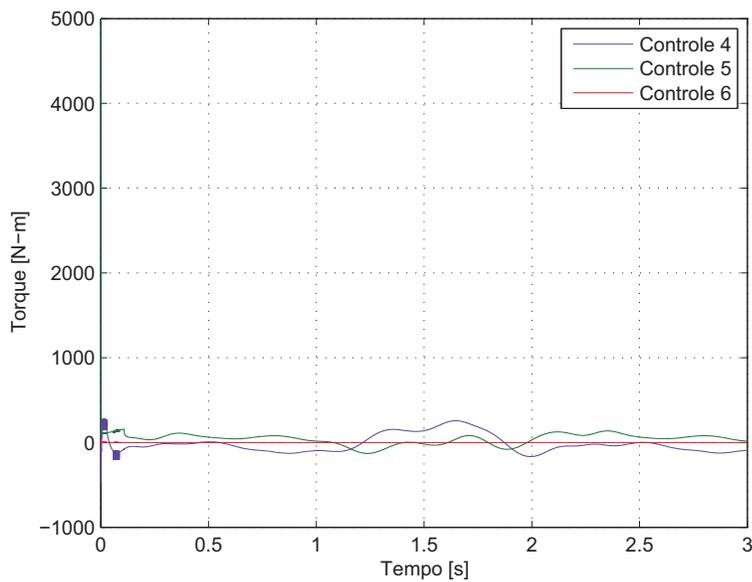


Figura 4.28: Gráfico dos torques produzidos: τ_4 , τ_5 e τ_6 .

As figuras 4.29 e 4.30 mostram as velocidades de referência utilizadas na representação das propriedades da energia no projeto do algoritmo do

controlador. Observa-se que a velocidade de referência faz um seguimento eficiente da trajetória da velocidade desejada.

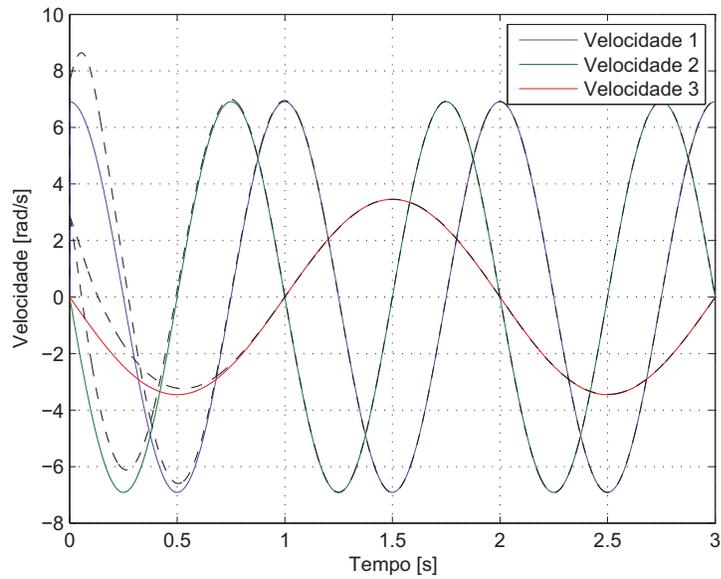


Figura 4.29: Referência e Resposta da Velocidade: \dot{q}_1 , \dot{q}_2 e \dot{q}_3 .

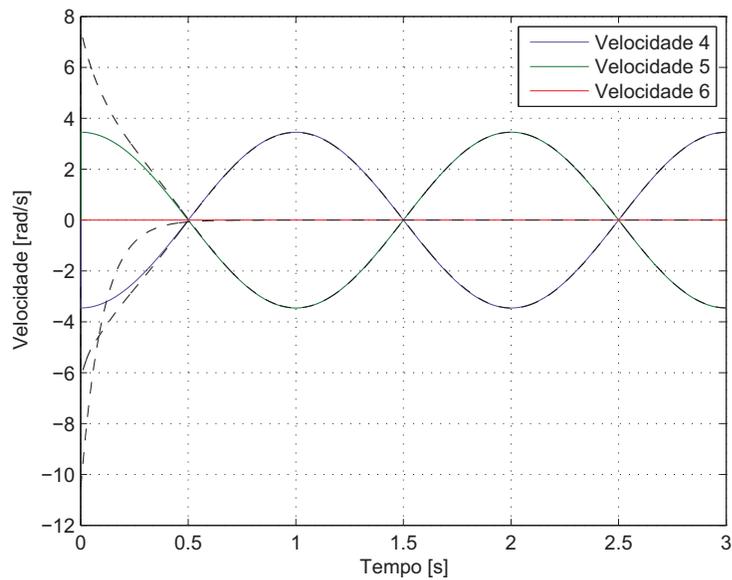


Figura 4.30: Referência e Resposta da Velocidade: \dot{q}_4 , \dot{q}_5 e \dot{q}_6 .

Outro aspecto que deve ser ressaltado é a robustez deste tipo de controlador. Apesar das incertezas e das perturbações existentes, as trajetórias

do sistema continuarem apontando em direção a superfície de deslizamento. O sistema continuará entrando em modo deslizante, apresentando o mesmo desempenho, governado pela dinâmica referente a equação da superfície deslizante.

Na figura 4.31, mostra as superfícies de deslizamento desenhadas no algoritmo de controle, e como pode-se ver os estados atingem a superfície de deslizamento dentro do entorno limitado por Φ .

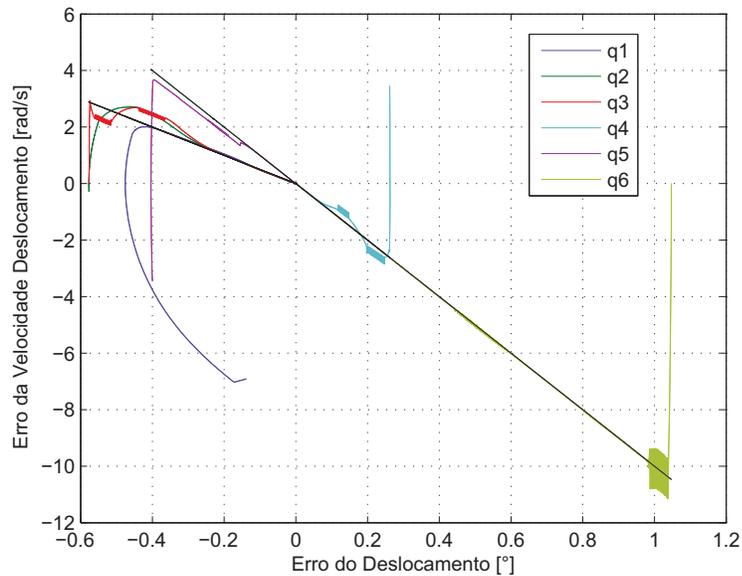


Figura 4.31: Superfícies Deslizantes do Sistema.

Neste movimento, denominado de modo deslizante, a trajetória do estado se desloca por uma superfície denominada superfície de deslizamento, denotada por $s(x, t) = 0$. Por outro lado, no espaço de estado, o chaveamento ocorre em uma superfície denominada de superfície de chaveamento. Embora no caso analisado estas duas superfícies se confundam, este fato nem sempre é verdadeiro.