3
Espalhamento eletromagnético de Corpos de Revolução

3.1.
Introdução

Neste capítulo é apresentada a formulação para o espalhamento eletromagnético por corpos de revolução (BOR – *Bodies of Revolution*) ilustrados de forma genérica na Figura 3.1 e constituídos por material condutor elétrico perfeito (CEP). A formulação é obtida através da utilização das equações integrais do campo elétrico e magnético, EFIE (*Electric Field Integral Equation*) e MFIE (*Magnetic Field Integral Equation*) respectivamente, [40, 84, 87, 90].

Estas equações integrais possuem no seu integrando os parâmetros desconhecidos (densidades de corrente elétrica e magnética) e sua solução é obtida através da aplicação do Método dos Momentos (MoM) que transforma estas equações integrais em um sistema linear de equações algébricas [39, 40].

A simetria axial da estrutura permite que o problema seja resolvido em duas dimensões sobre a geratriz que define o corpo de revolução, minimizando consideravelmente o esforço computacional e possibilitando a análise de estruturas com dimensões elétricas maiores.

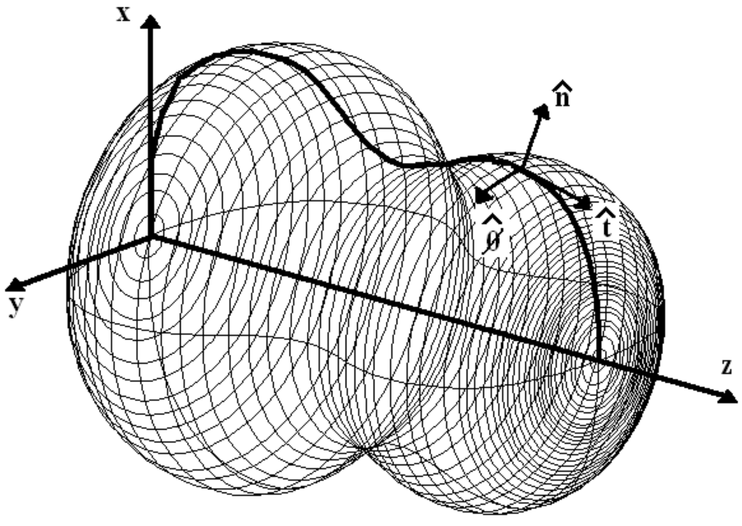

Figura 3.1 – Geometria do BOR, visão espacial.

3.2.
Geometria do Corpo de Revolução

O BOR é definido pela rotação da sua curva geratriz em torno do seu eixo de simetria definido pelo eixo cartesiano *z*, como ilustrado nas Figuras 3.1 e 3.2. A curva geratriz é descrita por *n* segmentos de reta, onde cada um possui um sistema de coordenadas local definidos pelos vetores ortonormais $\hat{n}$, $\hat{t}$ e $\hat{\phi}$, sendo $\hat{n}$ o vetor unitário normal à superfície do BOR, $\hat{t}$ o vetor tangente à superfície do BOR na direção da curva geratriz e $\hat{\phi}$ o vetor tangente à superfície do BOR na direção da circunferência, expressos em coordenadas cilíndricas por [40, 90]:

$$\hat{n} = \hat{\phi} \times \hat{t} = \cos u \hat{\rho} - \sin u \hat{z}, \tag{3.1}$$

$$\hat{t} = \sin u \hat{\rho} + \cos u \hat{z}, \tag{3.2}$$

onde *u* é o ângulo entre $\hat{t}$ e $\hat{z}$, como ilustrado na Figura 3.2.

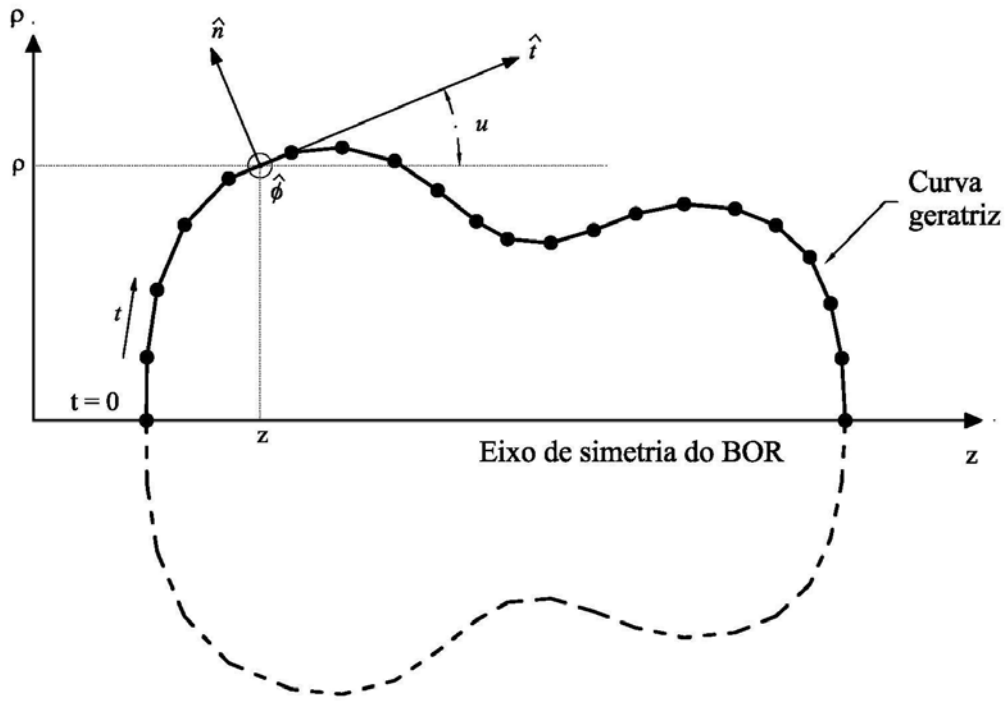

Figura 3.2 – Geometria do BOR, visão longitudinal.

3.3.
Equações Integrais do Campo Elétrico e do Campo Magnético

Neta seção é apresentada a formulação das equações integrais de superfície (EFIE e MFIE) para a solução do espalhamento eletromagnético por corpos de revolução (BOR) constituídos por material condutor elétrico perfeito (PEC) e geometria apresentada na Seção 3.1. A Figura 3.3 ilustra de forma genérica a geometria de um BOR formado por uma estrutura coaxial radiante, sendo μ_1, ε_1 e μ_0, ε_0 os parâmetros constitutivos (permeabilidade magnética e permissividade elétrica, respectivamente) dos meios 1 e 0, respectivamente, $\vec{J}_1$ e $\vec{M}_1$ as fontes situadas no interior da estrutura (*meio* 1) provenientes da excitação através de um guia de onda coaxial, e A a abertura que separa a estrutura interna do espaço livre (*meio* 0).

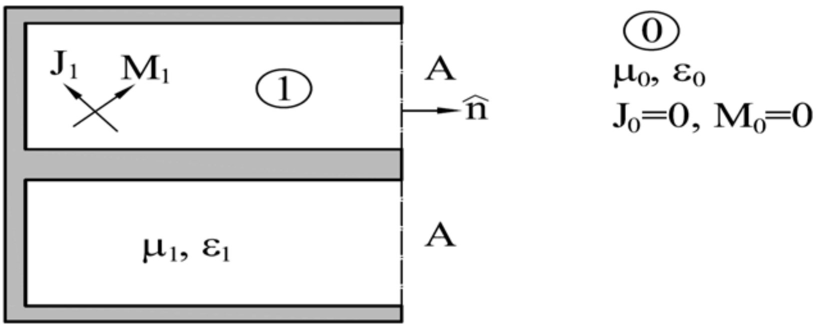

Figura 3.3 – BOR representando uma estrutura coaxial de irradiação.

Como ilustrado na Figura 3.4, a partir da aplicação do princípio da equivalência [84], a parte interna da estrutura coaxial radiante é substituída por um condutor elétrico perfeito (PEC) e, de forma a assegurar as condições de contorno do problema original, é induzida uma corrente superficial equivalente magnética $\vec{M}_g\left(\vec{a}^A + \vec{b}^A\right)$ sobre a abertura expressa por:

$$\vec{M}_g\left(\vec{a}^A + \vec{b}^A\right) = -\hat{n} \times \vec{E}^A\left(\vec{a}^A, \vec{b}^A\right), \tag{3.3}$$

onde $\vec{E}^A\left(\vec{a}^A, \vec{b}^A\right)$ é o campo elétrico sobre a abertura expresso através da expansão modal dada em (2.1).

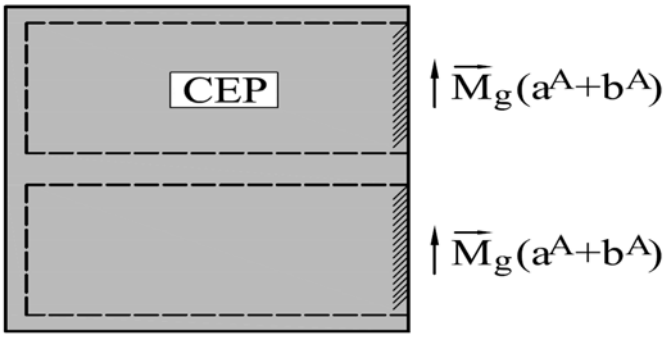

Figura 3.4 – Densidade de corrente magnética induzida sobre a abertura.

Como ilustrado na Figura 3.4, assume-se que o BOR está presente em um espaço linear, homogêneo e isotrópico (geralmente o vácuo). Novamente, conforme ilustrado na Figura 3.5, através da aplicação do princípio da equivalência [84], este problema é substituído por um problema matematicamente equivalente, onde o BOR é retirado e em seu lugar é colocada a corrente superficial equivalente elétrica $\vec{J}_s$ induzida sobre a superfície do BOR, inclusive sobre a abertura, de forma a assegurar as condições de contorno do problema original.

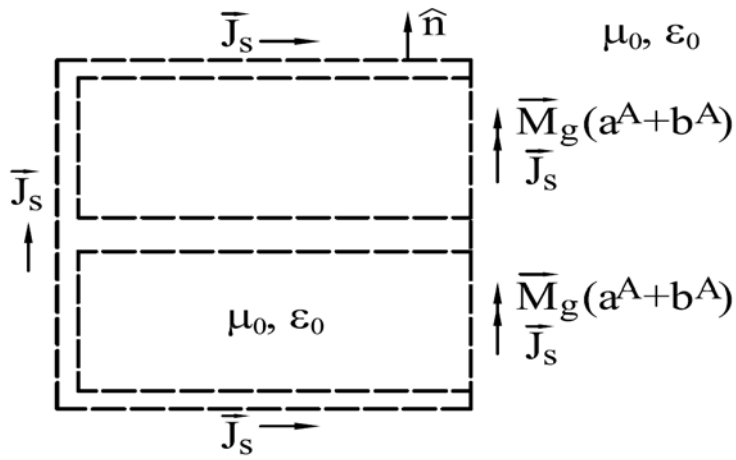

Figura 3.5 – Problema equivalente externo.

Determinado o problema equivalente externo ilustrado na Figura 3.5, onde as correntes equivalentes $\vec{J}_s$ e $\vec{M}_g$ estão presentes no mesmo espaço (meio 0), porém agora livres de obstáculos, os campos eletromagnéticos radiados pela abertura no meio 0 são dadas por [88]:

$$\frac{\vec{E}(\vec{r})}{\Gamma(\vec{r})} = -\frac{j}{4\pi}\left\{\int_{s'}\left[\omega\mu_0\vec{J}_s(\vec{r}\,')\Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,') - \frac{1}{\omega\varepsilon_0}\nabla'\cdot\vec{J}_s(\vec{r}\,')\nabla'\Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,')\right]ds'+ \right.$$
$$\left. j\int_A\left[\vec{M}_g\left(\vec{a}^A+\vec{b}^A\right)\times\nabla'\Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,')\right]ds'\right\}, \tag{3.4}$$

$$\frac{\vec{H}^A\left(\vec{a}^A,\vec{b}^A\right)}{\Gamma(\vec{r})} = -\frac{j}{4\pi}\left\{j\int_{s'}\left[\vec{J}_s(\vec{r}\,')\times\nabla'\Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,')\right]ds' - \right.$$
$$\left.\int_A\left[\omega\varepsilon_0\vec{M}_g\left(\vec{a}^A+\vec{b}^A\right)\Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,') - \frac{1}{\omega\mu_0}\nabla'\cdot\vec{M}_g\left(\vec{a}^A+\vec{b}^A\right)\nabla'\Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,')\right]ds'\right\}, \tag{3.5}$$

sendo

$$\Psi_0 = \frac{e^{-jk_0R}}{R}, \tag{3.6}$$

$$R = \left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|, \tag{3.7}$$

$$k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}, \tag{3.8}$$

onde A denota a integração sobre a abertura, $\vec{J}_s(\vec{r}\,')$ é a densidade de corrente elétrica induzida na superfície, $\vec{M}_g\left(\vec{a}^A+\vec{b}^A\right)$ é a densidade de corrente magnética induzida sobre a abertura, dada pela equação (3.3).

Considerando que o eixo de simetria do BOR é o eixo Cartesiano z, o vetor unitário normal à abertura será o vetor $\hat{i}_z$, $\hat{n}_A = \hat{i}_z$, e o campo elétrico modal só possui componente $\hat{i}_\rho$, tanto para o modo TEM quanto para os modos TM, a equação (3.3) pode ser expressa por:

$$\vec{M}_g\left(\vec{a}^A+\vec{b}^A\right) = -\sum_{l=1}^{N_M}\left(a_l^A+b_l^A\right)\left\{e_l\hat{i}_\phi\right\} = \sum_{l=1}^{N_M}M_l\vec{m}_l, \tag{3.9}$$

onde N_M é o número de modos considerados sobre a abertura, a_l^A e b_l^A são as amplitudes dos modos incidentes e refletidos na abertura, respectivamente, e_l representa a componente de campo elétrico modal, e

$$M_l = -\left(a_l^A + b_l^A\right), \tag{3.10}$$

$$\vec{m}_l = e_l \hat{i}_\phi . \tag{3.11}$$

Nas equações (3.4) e (3.5), $\Gamma(\vec{r})$ é um parâmetro que ajusta estas equações em função do ponto de observação. Este parâmetro é necessário, pois, para a determinação dos campos dentro ou fora da região limitada pela superfície *S* do BOR, as integrais (3.4) e (3.5) fornecem exatamente os valores de $\vec{E}$ e $\vec{H}$. Porém, se o cálculo for realizado exatamente sobre a superfície *S* então as equações integrais fornecem a metade dos valores de $\vec{E}$ e $\vec{H}$ [88]. Logo, defini-se o parâmetro $\Gamma(\vec{r})$ como

$$\Gamma(\vec{r}) = \begin{cases} 2, & se \quad \vec{r} \in S \\ 1, & se \quad \vec{r} \notin S \end{cases} \tag{3.12}$$

desde que *S* seja suave. Caso *S* possua descontinuidades na curvatura, $\Gamma(\vec{r})$ é definido em função do ângulo sólido no ponto em *S* onde os campos são calculados [88].

As equações integrais do campo elétrico e magnético são obtidas através da imposição das condições de contorno sobre as componentes tangenciais dos campos na interface *S* na forma tangencial. Assumindo que a interface *S* seja suave, ou seja, $\Gamma(\vec{r}) = 2$, tem-se [88]:

$$\begin{aligned} -\hat{n}\times\frac{\vec{M}_g\left(\vec{a}^A+\vec{b}^A\right)}{2} &= \\ -\frac{j\eta_0}{4\pi k_0}\hat{n}\times\hat{n}\times\int_{s'}&\left[k_0^2\vec{J}_s(\vec{r}\,')\Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,') - \nabla'\cdot\vec{J}_s(\vec{r}\,')\nabla'\Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,')\right]ds' \\ +\frac{1}{4\pi}\hat{n}\times\hat{n}\times\int_A&\left[\vec{M}_g\left(\vec{a}^A+\vec{b}^A\right)\times\nabla'\Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,')\right]ds' \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} \hat{n}\times\hat{n}\times\frac{\vec{H}^A\left(\vec{a}^A,\vec{b}^A\right)}{2} &= \frac{1}{4\pi}\hat{n}\times\hat{n}\times\int_{s'}\left[\vec{J}_s(\vec{r}\,')\times\nabla'\Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,')\right]ds' \\ &+\frac{j}{4\pi k_0\eta_0}\hat{n}\times\hat{n}\times\int_A\Big[k_0^2\vec{M}_g\left(\vec{a}^A+\vec{b}^A\right)\Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,') \\ &\qquad -\nabla'\cdot\vec{M}_g\left(\vec{a}^A+\vec{b}^A\right)\nabla'\Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,')\Big]ds' \end{aligned} \tag{3.14}$$

onde η_0 é a impedância intrínseca do espaço livre, expressa por:

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \tag{3.15}$$

É escolhida a forma tangencial, pois o processo de remoção da componente normal do campo não provoca mudança na direção das componentes t e ϕ, o que ocorre na forma normal.

3.4. Método dos Momentos

A solução numérica do espalhamento eletromagnético por BOR condutor elétrico perfeito (PEC) será obtida aplicando-se o Método dos Momentos (MoM) às equações integrais do campo elétrico e magnético, EFIE e MFIE, respectivamente, apresentadas na Seção 3.3.

O MoM é uma técnica que permite a solução destas equações integrais que possuem no seu integrando os parâmetros desconhecidos (densidades de corrente elétrica e magnética) transformando-as em um sistema linear de equações algébricas [39, 40, 88].

3.4.1. Equação matricial

Para transformar as equações integrais (3.13) e (3.14) em um sistema linear de equações algébricas, as densidades de corrente equivalente elétrica $\vec{J}_s(\vec{r}\,')$ e magnética $\vec{M}_g\left(\vec{a}^A + \vec{b}^A\right)$ devem ser representadas por uma soma finita de funções de base conhecidas, $\vec{J}_j(\vec{r}\,')$ e $\vec{M}_k\left(\vec{r}\right)$, multiplicadas por coeficientes desconhecidos, I_j e M_l. Logo a densidade de corrente de corrente elétrica pode ser expressa por:

$$\vec{J}_S(\vec{r}\,') = \sum_{j=1}^{N_j} I_j \vec{J}_j(\vec{r}\,')\,, \tag{3.16}$$

onde N_j é o número total de funções de base da densidade de corrente elétrica $\vec{J}_j(\vec{r}\,')$ induzida sobre toda a superfície *S*.

A densidade de corrente magnética dada pela equação (3.9) pode ser representada por:

$$\vec{M}_g\left(\vec{a}^A+\vec{b}^A\right)=\sum_{l=1}^{N_M} M_l \sum_{k=1}^{N_A} B_{lk}\vec{M}_k\left(\vec{r}\,'\right), \tag{3.17}$$

sendo M_l dado em (3.10) e $\vec{m}_l$ expresso agora em termos das funções de base, por:

$$\vec{m}_l = e_l\hat{i}_\phi = \sum_{k=1}^{N_A} B_{lk}\vec{M}_k\left(\vec{r}\,'\right), \tag{3.18}$$

onde N_A é o número de funções de base da densidade de corrente magnética $\vec{M}_k\left(\vec{r}\right)$ impressa somente sobre a abertura, B_{lk} é o coeficiente da expansão modal para o modo l e elemento k da abertura, situado a ρ_k do eixo de simetria do BOR.

As funções de base das densidades de corrente elétrica $\vec{J}_j(\vec{r}\,')$ e magnética $\vec{M}_k\left(\vec{r}\right)$ devem ser cuidadosamente escolhidas para que o comportamento eletromagnético das correntes na superfície do BOR seja corretamente representado e serão abordadas na Seção 3.5.

Substituindo (3.16) e (3.17) em (3.13) e (3.14), tem-se:

$$\begin{aligned}
&\frac{j\eta_0}{4\pi k_0}\sum_{j=1}^{N_J} I_j\left\{\hat{n}\times\hat{n}\times\int_{s'}\left[k_0^2\vec{J}_j(\vec{r}\,')\Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,')-\nabla'\cdot\vec{J}_j(\vec{r}\,')\nabla'\Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,')\right]ds'\right\}=\\
&\qquad\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N_M} M_l\sum_{k=1}^{N_A} B_{lk}\left[\hat{n}\times\vec{M}_k\left(\vec{r}\right)\right]\\
&\qquad+\frac{1}{4\pi}\sum_{l=1}^{N_M} M_l\sum_{k=1}^{N_A} B_{lk}\left\{\hat{n}\times\hat{n}\times\int_A\left[\vec{M}_k\left(\vec{r}\,'\right)\times\nabla'\Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,')\right]ds'\right\},
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\hat{n}\times\hat{n}\times\frac{\vec{H}^{A}\left(\vec{a}^{A},\vec{b}^{A}\right)}{2}=\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N_J}I_j\left\{\hat{n}\times\hat{n}\times\int_{s'}\left[\vec{J}_j(\vec{r}\,')\times\nabla'\Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,')\right]ds'\right\}$$
$$+\frac{j}{4\pi k_0\eta_0}\sum_{l=1}^{N_M}M_l\sum_{k=1}^{N_A}B_{lk}\left\{\hat{n}\times\hat{n}\times\int_{A}\left[k_0^2\vec{M}_k(\vec{r}\,')\Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,')\right.\right. \quad (3.20)$$
$$\left.\left.-\nabla'\cdot\vec{M}_k(\vec{r}\,')\nabla'\Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,')\right]ds'\right\}.$$

Para simplificar a notação, serão definidos os operadores:

$$K_0\left(\vec{X}\left(\vec{r}\,'\right)\right)=\int_{s'}\left[k_0^2\vec{X}\left(\vec{r}\,'\right)\Psi_0\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right)-\nabla'\cdot\vec{X}\left(\vec{r}\,'\right)\nabla'\Psi_0\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right)\right]ds', \quad (3.21)$$

$$L_0\left(\vec{X}\left(\vec{r}\,'\right)\right)=\int_{s'}\left[\vec{X}\left(\vec{r}\,'\right)\times\nabla'\Psi_0\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right)\right]ds'. \quad (3.22)$$

Logo, as equações (3.19) e (3.20) podem ser expressas por:

$$\frac{j\eta_0}{4\pi k_0}\sum_{j=1}^{N_J}I_j\left[\hat{n}\times\hat{n}\times K_0\left(\vec{J}_j(\vec{r}\,')\right)\right]=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N_M}M_l\sum_{k=1}^{N_A}B_{lk}\left[\hat{n}\times\vec{M}_k\left(\vec{r}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{4\pi}\sum_{l=1}^{N_M}M_l\sum_{k=1}^{N_A}B_{lk}\left[\hat{n}\times\hat{n}\times L_0\left(\vec{M}_k\left(\vec{r}\,'\right)\right)\right], \quad (3.23)$$

$$\hat{n}\times\hat{n}\times\frac{\vec{H}^{A}\left(\vec{a}^{A},\vec{b}^{A}\right)}{2}=\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N_J}I_j\left[\hat{n}\times\hat{n}\times L_0\left(\vec{J}_j(\vec{r}\,')\right)\right]$$
$$+\frac{j}{4\pi k_0\eta_0}\sum_{l=1}^{N_M}M_l\sum_{k=1}^{N_A}B_{lk}\left[\hat{n}\times\hat{n}\times K_0\left(\vec{M}_k(\vec{r}\,')\right)\right]. \quad (3.24)$$

Para obter os coeficientes I_j e M_l é aplicado o produto escalar das funções de teste $\vec{W}_i\left(\vec{r}\right)$ e $\vec{m}_l$ em ambos os lados das equações (3.23) e (3.24), respectivamente. Posteriormente, para a EFIE expressa pela equação (3.23), é resolvida a integral sobre a superfície *S* do BOR e, para a MFIE expressa pela equação (3.24), é resolvida a integral sobre a abertura do BOR, ambas referentes às coordenadas de observação [39, 88]. Logo, tem-se:

$$\frac{j\eta_0}{4\pi k_0}\sum_{j=1}^{N_J} I_j \left\{ \int_s \vec{W}_i \cdot \left[\hat{n}\times\hat{n}\times K_0\left(\vec{J}_j\left(\vec{r}\,'\right)\right)\right] ds \right\} =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N_M} M_l \sum_{k=1}^{N_A} B_{lk} \left\{ \int_s \vec{W}_i \cdot \left[\hat{n}\times\vec{M}_k\left(\vec{r}\right)\right] ds \right\} \tag{3.25}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\sum_{l=1}^{N_M} M_l \sum_{k=1}^{N_A} B_{lk} \left\{ \int_s \vec{W}_i \cdot \left[\hat{n}\times\hat{n}\times L_0\left(\vec{M}_k\left(\vec{r}\,'\right)\right)\right] ds \right\},$$

$$\frac{1}{2}\int_A \vec{m}_l \cdot \left[\hat{n}\times\hat{n}\times \vec{H}^A\left(\vec{a}^A,\vec{b}^A\right)\right] ds =$$

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N_J} B_{lq} \left\{ \int_A \vec{W}_q\left(\vec{r}\right)\cdot \left[\hat{n}\times\hat{n}\times L_0\left(\vec{J}_j\left(\vec{r}\,'\right)\right)\right] ds \right\} I_j \tag{3.26}$$

$$+\frac{j}{4\pi k_0\eta_0}\sum_{l=1}^{N_M}\sum_{k=1}^{N_A} B_{lq} \left\{ \int_A \vec{W}_q\left(\vec{r}\right)\cdot \left[\hat{n}\times\hat{n}\times K_0\left(\vec{M}_k\left(\vec{r}\,'\right)\right)\right] ds \right\} B_{kl} M_l .$$

Para o lado direito da equação (3.26), $\vec{m}_l$ é expresso em termos das funções de teste dado pela equação (3.18), já para o lado esquerdo $\vec{m}_l$ será dado pela equação (3.11) e o tratamento desta integral será apresentado mais adiante. Considerando que:

$$\nabla'\Psi = -\nabla\Psi\,, \tag{3.27}$$

e utilizando as identidades vetoriais:

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\left[\hat{n}\times\hat{n}\times\vec{B}\right] &= \vec{A}\cdot\left[\left(\hat{n}\cdot\vec{B}\right)\hat{n}-\left(\hat{n}\cdot\hat{n}\right)\vec{B}\right] = \\ &\left(\vec{A}\cdot\hat{n}\right)\left(\hat{n}\cdot\vec{B}\right)-\vec{A}\cdot\vec{B} = -\vec{A}\cdot\vec{B},\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\hat{n}\times\vec{M}_k\left(\vec{r}\,'\right) = -\vec{M}_k\left(\vec{r}\,'\right)\times\hat{n}, \tag{3.29}$$

$$\int_S \vec{W}_i(\vec{r})\cdot\nabla\Psi ds = \int_S \nabla\cdot\left[\Psi\vec{W}_i(\vec{r})\right] ds - \int_S \Psi\nabla\cdot\vec{W}_i(\vec{r}) ds, \tag{3.30}$$

onde a primeira integral do lado direito da equação (3.30) é igual a zero, como conseqüência do teorema da divergência bidimensional. As equações (3.25) e (3.26) podem ser expressas por:

$$\sum_{j=1}^{N_J} I_j \left\{ \frac{j\eta_0}{4\pi k_0} \int_s \int_{s'} \left[k_0^2 \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot \vec{J}_j(\vec{r}\,') - \left(\nabla \cdot \vec{W}_i(\vec{r})\right)\left(\nabla' \cdot \vec{J}_j(\vec{r}\,')\right) \right] \Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,') ds' ds \right\}$$
$$= \sum_{l=1}^{N_M} M_l \sum_{k=1}^{N_A} B_{lk} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_s \int_{A'} \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot \left[\vec{M}_k(\vec{r}\,') \times \nabla' \Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,') \right] ds' ds \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \int_s \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot \left[\vec{M}_k(\vec{r}) \times \hat{n} \right] ds \right\}, \tag{3.31}$$

$$-\frac{1}{2} \int_A \vec{m}_l \cdot \left[\hat{n} \times \hat{n} \times \vec{H}^A\left(\vec{a}^A, \vec{b}^A\right) \right] ds =$$
$$\sum_{j=1}^{N_J} B_{lq} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_A \int_{s'} \vec{W}_q(\vec{r}) \cdot \left[\vec{J}_j(\vec{r}\,') \times \nabla' \Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,') \right] ds' ds \right\} I_j$$
$$+ \sum_{l=1}^{N_M} \sum_{k=1}^{N_A} B_{lq} \left\{ \frac{j}{4\pi k_0 \eta_0} \int_A \int_{A'} \left[k_0^2 \vec{W}_q(\vec{r}) \cdot \vec{M}_k(\vec{r}\,') \right. \right.$$
$$\left. \left. - \left(\nabla \cdot \vec{W}_q(\vec{r})\right)\left(\nabla' \cdot \vec{M}_k(\vec{r}\,')\right) \right] \Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,') ds' ds \right\} B_{kl} M_l. \tag{3.32}$$

Para o campo magnético da abertura $\vec{H}^A\left(\vec{a}^A, \vec{b}^A\right)$ da integral do lado esquerdo da equação (3.32) será feita a expansão modal dada pela equação (2.1), logo, tem-se:

$$\vec{H}^A\left(\vec{a}^A, \vec{b}^A\right) = \sum_{l=1}^{N_M} \left(a_l^A - b_l^A\right) h_{\phi l}^{TEM/TM} \hat{i}_\phi = \sum_{l=1}^{N_M} M_l^{'} h_{\phi l}^{TEM/TM} \hat{i}_\phi, \tag{3.33}$$

onde

$$M_l^{'} = \left(a_l^A - b_l^A\right). \tag{3.34}$$

Com dito anteriormente, o vetor unitário normal à abertura será o vetor $\hat{i}_z$, $\hat{n}_A = \hat{i}_z$, logo, o produto vetorial da integral do lado esquerdo da equação (3.32) será dado por:

$$\hat{n}\times\hat{n}\times\vec{H}^A\left(\vec{a}^A,\vec{b}^A\right)=-\sum_{l=1}^{N_M}M_l^{'}h_{\phi_l}^{TEM/TM}\hat{i}_\phi\ . \qquad (3.35)$$

Considerando as equações (3.11) e (3.35), a integral do lado esquerdo da equação (3.32) pode ser expressa por:

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\int_A\vec{m}_l\cdot\left[\hat{n}\times\hat{n}\times\vec{H}^A\left(\vec{a}^A,\vec{b}^A\right)\right]ds=\\&\sum_{l=1}^{N_M}M_l^{'}\left\{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_a^b e_{\rho l}^{TEM/TM}h_{\phi l}^{TEM/TM}\rho d\rho d\phi\right\}=\sum_{l=1}^{N_M}M_l^{'}Y_{ll}^{INT},\end{aligned} \qquad (3.36)$$

onde

$$Y_{ll}^{INT}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_a^b e_{\rho l}^{TEM/TM}h_{\phi l}^{TEM/TM}\rho d\rho d\phi\,. \qquad (3.37)$$

A integral dupla da equação (3.37) é idêntica a integral da matriz $\left[R\right]$ do MMT, resolvida na Seção 2.2.2 e dada pelas equações (2.62) e (2.66) para o modo TEM e para os modos superiores TM, respectivamente. Logo, a equação (3.32) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{N_M}M_l^{'}Y_{ll}^{INT}=\sum_{j=1}^{N_J}B_{lq}\left\{\frac{1}{4\pi}\int_A\int_{s'}\vec{W}_q\left(\vec{r}\right)\cdot\left[\vec{J}_j(\vec{r}\,')\times\nabla'\Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,')\right]ds'ds\right\}I_j\\&+\sum_{l=1}^{N_M}\sum_{k=1}^{N_A}B_{lq}\left\{\frac{j}{4\pi k_0\eta_0}\int_A\int_{A'}\left[k_0^2\vec{W}_q\left(\vec{r}\right)\cdot\vec{M}_k(\vec{r}\,')\right.\right.\\&\left.\left.-\left(\nabla\cdot\vec{W}_q(\vec{r})\right)\left(\nabla'\cdot\vec{M}_k(\vec{r}\,')\right)\right]\Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,')ds'ds\right\}B_{kl}M_l.\end{aligned} \qquad (3.38)$$

As equações (3.31) e (3.38) podem ser escritas na forma matricial, aplicando estas equações a cada função de teste, $\vec{W}_i(\vec{r})$ e $\vec{W}_q\left(\vec{r}\right)$ respectivamente, expressas por [39, 88]:

$$\left[Z^E\right]\left[I\right]=\left[Y^E\right]\left[B\right]^T\left[M\right], \qquad (3.39)$$

$$\left[Y^{INT}\right][M'] = [B]\left[Z^{H}\right][I] + [B]\left[Y^{H}\right][B]^{T}[M]. \qquad (3.40)$$

Os elementos da matriz $\left[Y^{INT}\right]_{N_M \times N_M}$ são dados em (3.37) e das matrizes $\left[Z^{E}\right]_{N_J \times N_J}$, $\left[Y^{E}\right]_{N_J \times N_A}$, $\left[Z^{H}\right]_{N_A \times N_J}$ e $\left[Y^{H}\right]_{N_A \times N_A}$ são:

$$\begin{aligned} Z_{ij}^{E} = \frac{j\eta_0}{4\pi k_0} \int_s \int_{s'} \Big[k_0^2 \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot \vec{J}_j(\vec{r}\,') \\ -\left(\nabla \cdot \vec{W}_i(\vec{r})\right)\left(\nabla' \cdot \vec{J}_j(\vec{r}\,')\right)\Big] \Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,') ds' ds \end{aligned} \qquad (3.41)$$

$$\begin{aligned} Y_{ik}^{E} = \frac{1}{4\pi} \int_s \int_{A'} \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot \left[\vec{M}_k\left(\vec{r}\,'\right) \times \nabla' \Psi_0\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right)\right] ds' ds \\ + \frac{1}{2} \int_s \vec{W}_i(\vec{r}) \cdot \left[\vec{M}_k\left(\vec{r}\right) \times \hat{n}\right] ds \end{aligned} \qquad (3.42)$$

$$Z_{qj}^{H} = \frac{1}{4\pi} \int_A \int_{s'} \vec{W}_q\left(\vec{r}\right) \cdot \left[\vec{J}_j(\vec{r}\,') \times \nabla' \Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,')\right] ds' ds \qquad (3.43)$$

$$\begin{aligned} Y_{qk}^{H} = \frac{j}{4\pi k_0 \eta_0} \int_A \int_{A'} \Big[k_0^2 \vec{W}_q\left(\vec{r}\right) \cdot \vec{M}_k(\vec{r}\,') \\ -\left(\nabla \cdot \vec{W}_q(\vec{r})\right)\left(\nabla' \cdot \vec{M}_k(\vec{r}\,')\right)\Big] \Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,') ds' ds \end{aligned} \qquad (3.44)$$

O $j-ésimo$ e $l-ésimo$ elemento dos vetores $[I]_{N_J}$, $[M]_{N_M}$ e $[M']_{N_M}$, respectivamente, são os coeficientes desconhecidos determinados no Capítulo 4 através da junção entre o Método do Casamento de Modos (MMT) e do Método dos Momentos (MoM).

3.5. Funções de Base e de Teste

Nesta seção será discutida a representação das funções de base e de teste utilizadas pelo Método dos Momentos (MoM). Para garantir a precisão e convergência da análise numérica apresentada na Seção 3.4, é de primordial importância a escolha adequada das funções de base e de teste. Outro ponto importante nesta escolha é fazê-la de forma que as integrais resultantes sejam simples, facilitando o tratamento das singularidades [40]. Para tal, foram escolhidas funções de base triangulares (FBT) para a representação das correntes superficiais equivalentes elétrica, $\vec{J}_S\left(\vec{r}\,'\right)$, e magnética, $\vec{M}_g\left(\vec{a}^A+\vec{b}^A\right)$, expressas por [40, 90]:

$$\vec{J}_S\left(\vec{r}\,'\right)=\sum_{j=1}^{N_J} I_j \frac{T_j^t\left(t'\right)}{\rho'}\hat{t}\,' \tag{3.45}$$

$$\vec{M}_g\left(\vec{a}^A+\vec{b}^A\right)=\sum_{l=1}^{N_M} M_l \sum_{k=1}^{N_A} B_{lk} \frac{T_k^\phi\left(t'\right)}{\rho'}\hat{\phi}\,' \tag{3.46}$$

onde $\hat{t}\,'$ e $\hat{\phi}\,'$ são as direções unitárias no ponto $\vec{r}\,'$ sobre a superfície, t' é a coordenada que localizam o ponto $\vec{r}\,'$ sobre a superfície, $T_j^t\left(t'\right)$ e $T_k^\phi\left(t'\right)$ são as funções triangulares nas direções $\hat{t}\,'$ e $\hat{\phi}\,'$, respectivamente, I_j são os coeficientes complexos desconhecidos associados à função $T_j^t\left(t'\right)$, M_l dado pela equação (3.10) são as amplitudes complexas desconhecidas dos modos incidentes e refletidos na abertura associados à função $T_k^\phi\left(t'\right)$, e ρ' é a distância do ponto $\vec{r}\,'$ ao eixo de simetria do BOR. A divisão por ρ' evita problemas de singularidades no integrando da equação integral quando ρ' tende a zero [90].

A Figura 3.6 ilustra a representação das funções triangulares ao longo da curva geratriz que define o BOR, onde, cada função de base triangular é definida sobre dois segmentos consecutivos e, como ilustrado na Figura 3.7, cada segmento está associado a dois meios triângulos T_j^{tR} (meio triangulo à direita da função de base T_j^t) e T_{j+1}^{tL} (meio triangulo a esquerda da função de base T_{j+1}^t). Para um determinado segmento fonte os meios triângulos T_j^{tR} (à direita) e T_{j+1}^{tL} (à esquerda) possuem derivada negativa e positiva, respectivamente, em relação à variável t.

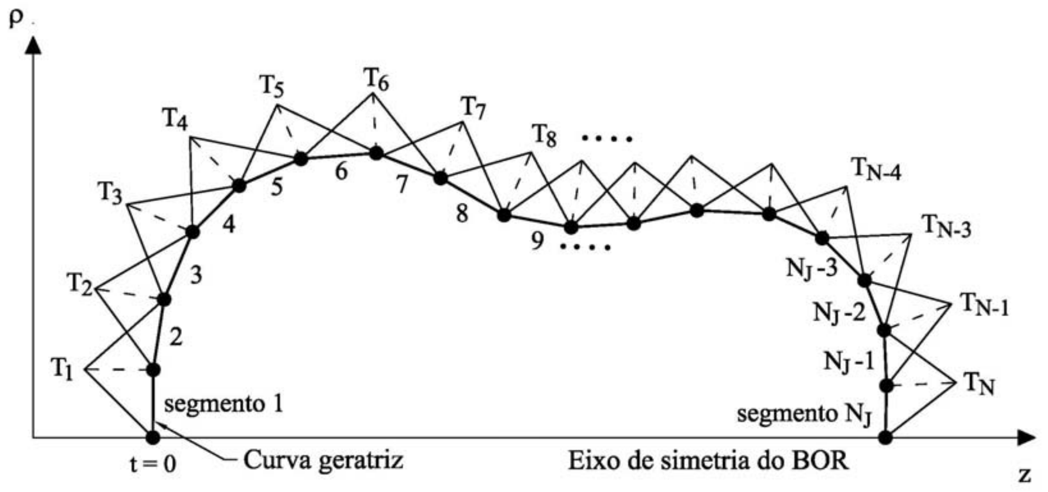

Figura 3.6 – Representação das funções triangulares ao longo da curva geratriz.

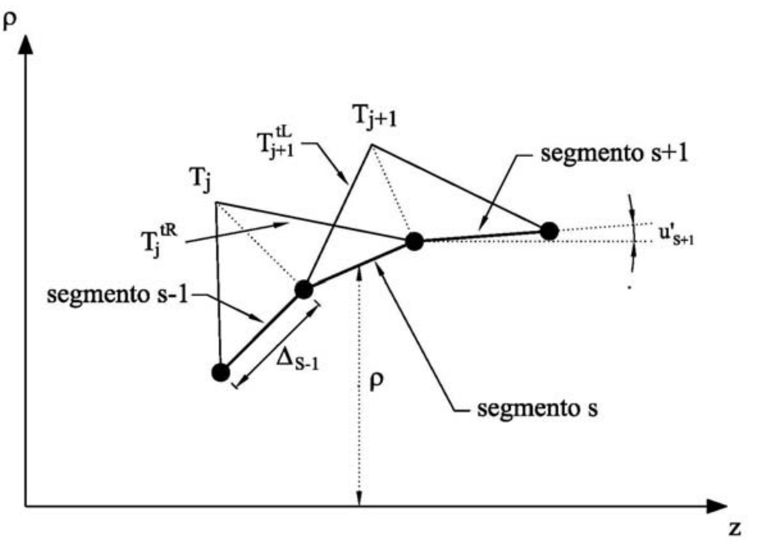

Figura 3.7 – Representação dos meios triângulos.

Este raciocínio foi feito apenas para as funções de base relacionadas à corrente superficial equivalente elétrica $\vec{J}_S\left(\vec{r}\,'\right)$, no caso das funções de base relacionadas à corrente superficial equivalente magnética $\vec{M}_g\left(\vec{a}^A+\vec{b}^A\right)$ o raciocínio é semalhante. Entretanto, como ilustrado na Figura 3.8, nas bordas da abertura coaxial são considerados apenas meios triângulos, para a correta representação para esta corrente superficial equivalente. A representação das funções de base através de funções triangulares permite expressar os coeficientes da expansão modal B_{lk} como a amplitude do campo elétrico modal para o modo l e elemento k da abertura, situado a ρ_k do eixo de simetria do BOR e expresso pelas equações (A.93) e (A.99) para o modo TEM e modos TM, respectivamente (ver Figura 3.8).

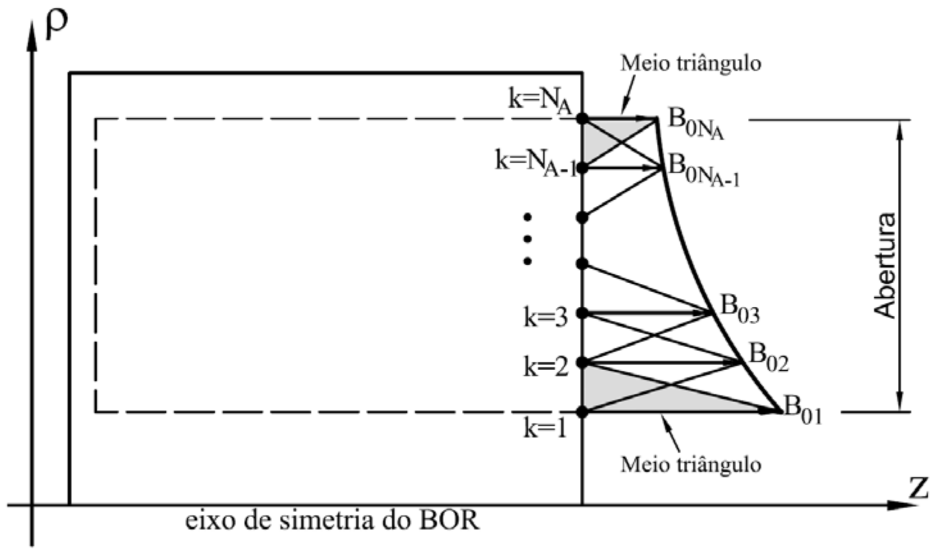

Figura 3.8 – Representação das funções triangulares associadas a corrente superficial equivalente magnética ao longo da abertura e dos coeficientes da expansão modal B_{lk} para o modo TEM.

Estas funções de base triangulares garantem uma boa representação para as correntes superficiais equivalentes ao longo de toda a superfície do BOR e, em especial, quando uma ou ambas as extremidades da curva geratriz intercepta o eixo de simetria, como ilustrado na Figura 3.6. Quando isto ocorre, os segmentos da curva geratriz do BOR que tocam o eixo de simetria possuem somente um meio triangulo nas direções $\hat{t}'$ e $\hat{\phi}'$, permitindo a representação correta da corrente nesta região, evitando problemas de singularidades quando ρ' tende a zero [90]. Para o caso de uma superfície aberta, o segmento da extremidade da geratriz do BOR que não intercepta o eixo de simetria possui todos os meios triângulos na direção $\hat{\phi}'$ e somente o meio triângulo da esquerda na direção $\hat{t}'$. Isto garante a descrição correta das correntes na borda do BOR, onde a corrente na direção $\hat{t}'$ tende a zero e na direção $\hat{\phi}'$ tende para um valor finito. Outra vantagem, muito importante, na utilização das FBT é que as equações integrais resultantes possuem um tratamento de singularidades relativamente simples, onde estas singularidades são da ordem de $1/R$, $1/(R\rho)$, $1/(R\rho')$, $1/(R\rho\rho')$ e $1/R^3$, sendo R a distância do ponto de observação ao eixo de simetria.

O método de Galerkin é utilizado na representação das funções de teste relacionadas às correntes superficiais equivalentes elétrica $\vec{J}_S\left(\vec{r}\,'\right)$ e magnética $\vec{M}_g\left(\vec{a}^A+\vec{b}^A\right)$. A utilização desta técnica, geralmente, garante maior precisão, rapidez e conservação de energia da solução [91], e são expressas por:

$$\vec{W}_i\left(\vec{r}\right)=\frac{T_i^t\left(t\right)}{\rho}\hat{t}\,, \tag{3.47}$$

$$\vec{m}_l=\sum_{q=1}^{N_A}B_{lq}\frac{T_q^{\phi}\left(t\right)}{\rho}\hat{\phi}\;, \tag{3.48}$$

onde $\hat{t}$ e $\hat{\phi}$ são as direções unitárias no ponto $\vec{r}$ sobre a superfície, t é a coordenada que localizam o ponto $\vec{r}$ sobre a superfície, $T_i^t\left(t\right)$ e $T_q^{\phi}\left(t\right)$ são as funções triangulares nas direções $\hat{t}$ e $\hat{\phi}$, respectivamente, e ρ é a distância do ponto $\vec{r}$ ao eixo de simetria do BOR. Como mencionado anteriormente, a divisão por ρ evita problemas de singularidades no integrando da equação integral quando ρ tende a zero.

Utilizando as funções de teste e de base dadas nas equações (3.45), (3.46), (3.47) e (3.48), os elementos das matrizes impedância e admitância expressos nas equações (3.41), (3.42), (3.43) e (3.44) podem ser reescritos como:

$$\begin{aligned}Z_{ij}^E=\frac{j\eta_0}{4\pi k_0}\int_s\int_{s'}\Bigg[&k_0^2\frac{T_i\left(t\right)}{\rho}\frac{T_j\left(t'\right)}{\rho'}\hat{t}\cdot\hat{t}\,'\\&-\left(\nabla\cdot\frac{T_i\left(t\right)}{\rho}\hat{t}\right)\left(\nabla'\cdot\frac{T_j\left(t'\right)}{\rho'}\hat{t}\,'\right)\Bigg]\Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,')ds'ds,\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}Y_{ik}^E=&\frac{1}{4\pi}\int_s\int_{A'}\frac{T_i\left(t\right)}{\rho}\frac{T_k\left(t'\right)}{\rho'}\hat{t}\cdot\left[\hat{\phi}'\times\nabla'\Psi_0\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right)\right]ds'ds\\&+\frac{1}{2}\int_s\frac{T_i\left(t\right)}{\rho}\frac{T_k\left(t\right)}{\rho}\hat{t}\cdot\left[\left(\hat{\phi}\times\hat{n}\right)\right]ds,\end{aligned} \tag{3.50}$$

$$Z_{qj}^{H}=\frac{1}{4\pi}\int_{A}\int_{s'}\frac{T_q(t)}{\rho}\frac{T_j(t')}{\rho'}\hat{\phi}\cdot\left[\hat{t}'\times\nabla'\Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,')\right]ds'ds\,, \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned}Y_{qk}^{H}=\frac{j}{4\pi k\eta_0}\int_{A}\int_{A'}\Bigg[&k_0^2\frac{T_q(t)}{\rho}\frac{T_k(t')}{\rho'}\hat{\phi}\cdot\hat{\phi}'\\&-\left(\nabla\cdot\frac{T_q(t)}{\rho}\hat{\phi}\right)\left(\nabla'\cdot\frac{T_k(t')}{\rho'}\hat{\phi}'\right)\Bigg]\Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,')ds'ds.\end{aligned} \tag{3.52}$$

3.6. Avaliação Numérica das Matrizes Impedância e Admitância

Definidas as funções de base e de testes na Seção 3.5, as matrizes impedância e admitância das equações integrais de campo elétrico e magnético, dadas pelas equações (3.49)-(3.52), são avaliadas numericamente de forma semelhante ao procedimento dado em [40, 90]. Considerado o sistema de coordenadas definido na Figura 3.2, onde

$$ds=\rho dt d\phi\,, \tag{3.53}$$

$$ds'=\rho' dt' d\phi'\,, \tag{3.54}$$

e utilizando as relações

$$\hat{t}=\text{sen}u\cos\phi\,\hat{i}_x+\text{sen}u\,\text{sen}\phi\,\hat{i}_y+\cos u\,\hat{i}_z\,, \tag{3.55}$$

$$\hat{t}'=\text{sen}u'\cos\phi'\,\hat{i}_x+\text{sen}u'\,\text{sen}\phi'\,\hat{i}_y+\cos u'\,\hat{i}_z\,, \tag{3.56}$$

$$\hat{\phi}=-\text{sen}\hat{\phi}\,\hat{i}_x+\cos\phi\hat{i}_y\,, \tag{3.57}$$

$$\hat{\phi}'=-\text{sen}\hat{\phi}'\,\hat{i}_x+\cos\phi'\hat{i}_y\,, \tag{3.58}$$

$$\hat{t}\cdot\hat{t}'=\text{sen}u\,\text{sen}u'\cos(\phi-\phi')+\cos u\cos u'\,, \tag{3.59}$$

$$\hat{\phi}\cdot\hat{\phi}'=\cos(\phi-\phi')\,, \tag{3.60}$$

$$\nabla\cdot\frac{T_i(t)}{\rho}\hat{t}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{T_i(t)}{\rho}\right)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(T_i(t)\right)}{\partial t}\,, \tag{3.61}$$

$$\nabla'\cdot\frac{T_j(t')}{\rho'}\hat{t}'=\frac{1}{\rho'}\frac{\partial}{\partial t'}\left(\rho'\frac{T_j(t')}{\rho'}\right)=\frac{1}{\rho'}\frac{\partial\left(T_j(t')\right)}{\partial t'}\,, \tag{3.62}$$

$$\nabla\cdot\frac{T_q(t)}{\rho}\hat{\phi}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{T_q(t)}{\rho}\right)=0\,, \tag{3.63}$$

$$\nabla'\cdot\frac{T_k(t')}{\rho'}\hat{\phi}'=\frac{1}{\rho'}\frac{\partial}{\partial\phi'}\left(\frac{T_k(t')}{\rho'}\right)=0\,, \tag{3.64}$$

Os elementos das matrizes impedância das equações integrais de campo elétrico e magnético Z_{ij}^{E} e Y_{qk}^{H} , respectivamente, dadas pelas equações (3.49) e (3.52), são reescritos como:

$$Z_{ij}^{E}=\frac{j\eta_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_t\int_0^{2\pi}\int_{t'}\Big\{k_0^2T_i(t)T_j(t')\big[\text{sen}u\,\text{sen}u'\cos(\phi-\phi')+\cos u\cos u'\big]$$
$$-\frac{\partial(T_i(t))}{\partial t}\frac{\partial(T_j(t'))}{\partial t'}\Big\}G_E dt'd\phi'dtd\phi, \tag{3.65}$$

`

$$Y_{qk}^{H}=\frac{j}{4\pi\eta_0}\int_0^{2\pi}\int_t\int_0^{2\pi}\int_{t'}\Big\{k_0^2T_q(t)T_k(t')\cos(\phi-\phi')\Big\}G_E dt'd\phi'dtd\phi, \tag{3.66}$$

sendo:

$$G_E=\frac{e^{-iK_0R}}{K_0R}\,, \tag{3.67}$$

onde

$$R=|\vec{r}-\vec{r}\,'|=\sqrt{(\rho-\rho')^2+(z-z')^2+4\rho\rho'\text{sen}^2\left(\frac{\phi-\phi'}{2}\right)}\,. \tag{3.68}$$

Para os elementos das matrizes admitância das equações integrais de campo elétrico e magnético, Y_{ik}^{E} e Z_{qj}^{H} respectivamente, considerando as equações (3.53), (3.54), (3.55), (3.56), (3.57) e (3.58), e sendo

$$\hat{\phi}\times\hat{n}=-\hat{t} \tag{3.69}$$

e

$$\nabla'\Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,')=\frac{\Psi_0(\vec{r},\vec{r}\,')}{R}\left[iK_0+\frac{1}{R}\right]\vec{R}=K_0^3\left[\frac{1+iK_0R}{(K_0R)^2}\right]\frac{e^{-iK_0R}}{(K_0R)}\vec{R}=K_0^3G_H\vec{R}\,, \tag{3.70}$$

onde

$$G_H = \left[\frac{1+iK_0R}{(K_0R)^2}\right]\frac{e^{-iK_0R}}{(K_0R)}, \tag{3.71}$$

$$\vec{R} = [\rho\cos\phi - \rho'\cos\phi']\hat{i}_x + [\rho\text{sen}\phi - \rho'\text{sen}\phi']\hat{i}_y + [z - z']\hat{i}_z, \tag{3.72}$$

$$\hat{t}\cdot\left[\hat{\phi}'\times\vec{R}\right] = \cos(\phi-\phi')\left[\text{sen}u(z-z') - \rho\cos u\right] + \rho'\cos u, \tag{3.73}$$

$$\hat{\phi}\cdot\left[\hat{t}'\times\vec{R}\right] = -(z-z')\text{sen}u'\cos(\phi-\phi') + \cos u'\left[\rho - \rho'\cos(\phi-\phi')\right]. \tag{3.74}$$

As equações (3.50) e (3.51) são reescritas como:

$$\begin{aligned} Y_{ik}^{E} = -\pi F_{ik} + \frac{K_0^3}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_t\int_0^{2\pi}\int_{t'} T_i(t)T_k(t')\Big\{\cos u\left[\rho' - \rho\cos(\phi-\phi')\right] \\ +(z-z')\text{sen}u\cos(\phi-\phi')\Big\}G_H\,dt'\,d\phi'\,dt\,d\phi, \end{aligned} \tag{3.75}$$

$$\begin{aligned} Z_{qj}^{H} = \frac{K_0^3}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_t\int_0^{2\pi}\int_{t'} T_q(t)T_j(t')\Big\{-(z-z')\text{sen}u'\cos(\phi-\phi') + \\ \cos u'\left[\rho - \rho'\cos(\phi-\phi')\right]\Big\}G_H\,dt'\,d\phi'\,dt\,d\phi, \end{aligned} \tag{3.76}$$

onde G_H é dado em (3.71) e

$$F_{ik} = \int_t \frac{T_i(t)T_k(t)}{\rho}dt. \tag{3.77}$$

Aplicando a transformação de variáveis:

$$\phi'' = \phi' - \phi, \tag{3.78}$$

$$d\phi'' = d\phi'. \tag{3.79}$$

Esta transformação elimina a dependência do integrando em relação à ϕ, o que permite a solução direta dessa integral. Com relação à ϕ'', o integrando é simétrico e os valores para $\phi"$ são iguais aos valores para $-\phi"$. Logo, os elementos das matrizes impedância, equações (3.65) e (3.66), e admitância, equações (3.75) e (3.76), podem ser reescritas como:

$$Z_{ij}^{E} = j\eta_0 \int_t \int_{t'} \Big\{ k_0^2 T_i(t) T_j(t') \left[\mathrm{sen} u \, \mathrm{sen} u' G_1 + \cos u \cos u' G_2 \right] - \frac{\partial\left(T_i(t)\right)}{\partial t} \frac{\partial\left(T_j(t')\right)}{\partial t'} G_2 \Big\} dt' dt, \tag{3.80}$$

$$Y_{qk}^{H} = \frac{j}{\eta_0} \int_t \int_{t'} k_0^2 T_q(t) T_k(t') G_1 dt' dt \,, \tag{3.81}$$

$$Y_{ik}^{E} = -\pi F_{ik} + K_0^3 \int_t \int_{t'} T_i(t) T_k(t') \Big\{ \rho' \cos u G_3 - \left[(\rho - \rho') \cos u \text{ - } \mathrm{sen} u (z - z') \right] G_4 \Big\} dt' dt, \tag{3.82}$$

$$Z_{qj}^{H} = K_0^3 \int_t \int_{t'} T_q(t) T_j(t') \Big\{ \rho \cos u' G_3 + \left[(\rho - \rho') \cos u' - \mathrm{sen} u' (z - z') \right] G_4 \Big\} dt' dt, \tag{3.83}$$

onde

$$G_1(t,t') = \int_0^{\pi} \cos\phi" G_E d\phi" \,, \tag{3.84}$$

$$G_2(t,t') = \int_0^{\pi} G_E d\phi" \,, \tag{3.85}$$

$$G_3(t,t') = \int_0^{\pi} \left(1 - \cos\phi"\right) G_H d\phi" \,, \tag{3.86}$$

$$G_4(t,t') = \int_0^{\pi} \cos\phi" G_H d\phi" \,, \tag{3.87}$$

$$R = \sqrt{(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2 + 4\rho\rho' \mathrm{sen}^2\left(\frac{\phi"}{2}\right)} \,. \tag{3.88}$$

Para a solução das integrais em t e t', estas coordenadas serão parametrizadas em função de α e α', respectivamente, da seguinte forma:

$$t=\begin{cases} t_{i-1}+\alpha\Delta t_i, & \text{para } T_i^{tL} \\ t_i+\alpha\Delta t_{i+1}, & \text{para } T_i^{tR} \end{cases} \tag{3.89}$$

$$t'=\begin{cases} t'_{j-1}+\alpha'\Delta t'_j, & \text{para } T_j^{tL} \\ t'_j+\alpha'\Delta t'_{j+1}, & \text{para } T_j^{tR} \end{cases} \tag{3.90}$$

onde t_{i-1} e t'_{j-1} (t_i e t'_j) são os pontos iniciais dos elementos das funções triangulares de teste e de base de tamanho Δt_i e $\Delta t'_j$ (Δt_{i+1} e $\Delta t'_{j+1}$), respectivamente, como ilustrado na Figura 3.7. Utilizando os parâmetros α, α' e a definição das funções triangulares ilustrada nas Figuras 3.6 a 3.8, as funções $T_i(t)$, $T'_j(t)$, suas derivadas em cada segmento e as coordenas ρ, ρ', z e z' são representadas por:

$$T_i(t)=\begin{cases} \alpha, & \text{para } T_i^{tL}\text{, logo } \begin{cases} \rho=\rho_{i-1}+\alpha\Delta\rho_i \\ z=z_{i-1}+\alpha\Delta z_i \end{cases} \\ 1-\alpha, & \text{para } T_i^{tR}\text{, logo } \begin{cases} \rho=\rho_i+\alpha\Delta\rho_{i+1} \\ z=z_i+\alpha\Delta z_{i+1} \end{cases} \end{cases} \tag{3.91}$$

$$T'_j(t)=\begin{cases} \alpha', & \text{para } T_j^{tL}\text{, logo } \begin{cases} \rho'=\rho'_{j-1}+\alpha'\Delta\rho'_j \\ z'=z'_{j-1}+\alpha'\Delta z'_j \end{cases} \\ 1-\alpha', & \text{para } T_j^{tR}\text{, logo } \begin{cases} \rho'=\rho'_j+\alpha'\Delta\rho'_{j+1} \\ z'=z'_j+\alpha'\Delta z'_{j+1} \end{cases} \end{cases} \tag{3.92}$$

$$\frac{\partial\left(T_i(t)\right)}{\partial t}=\begin{cases} \dfrac{1}{\Delta t_i}, & \text{para } T_i^{tL} \\ -\dfrac{1}{\Delta t_{i+1}}, & \text{para } T_i^{tR} \end{cases} \tag{3.93}$$

$$\frac{\partial\left(T_j(t')\right)}{\partial t'}=\begin{cases} \dfrac{1}{\Delta t'_j}, & \text{para } T_i^{tL} \\ -\dfrac{1}{\Delta t'_{j+1}}, & \text{para } T_i^{tR} \end{cases} \tag{3.94}$$

Utilizando as equações (3.89)-(3.92), e após algumas manipulações algébricas, as equações (3.80)-(3.83) são reescritas como:

$$
\begin{aligned}
Z_{ij}^{E} = j\eta_0 k_0^2 \Big\{ & G_{00}^{1}\left[\Delta t_{i+1}\Delta t'_{j+1}\mathrm{sen}u_R\,\mathrm{sen}u'_R\right] \\
& + G_{01}^{1}\left[\Delta t_{i+1}\mathrm{sen}u_R\left(\Delta t'_j\mathrm{sen}u'_L - \Delta t'_{j+1}\mathrm{sen}u'_R\right)\right] \\
& + G_{10}^{1}\left[\Delta t'_{j+1}\mathrm{sen}u'_R\left(\Delta t_i\mathrm{sen}u_L - \Delta t_{i+1}\mathrm{sen}u_R\right)\right] \\
& + G_{11}^{1}\left[\left(\Delta t_i\mathrm{sen}u_L - \Delta t_{i+1}\mathrm{sen}u_R\right)\left(\Delta t'_j\mathrm{sen}u'_L - \Delta t'_{j+1}\mathrm{sen}u'_R\right)\right] \\
& + G_{00}^{2}\left[\Delta t_{i+1}\Delta t'_{j+1}\cos u_R\cos u'_R\right] \\
& + G_{01}^{2}\left[\Delta t_{i+1}\cos u_R\left(\Delta t'_j\cos u'_L - \Delta t'_{j+1}\cos u'_R\right)\right] \\
& + G_{10}^{2}\left[\Delta t'_{j+1}\cos u'_R\left(\Delta t_i\cos u_L - \Delta t_{i+1}\cos u_R\right)\right] \\
& + G_{11}^{2}\left[\left(\Delta t_i\cos u_L - \Delta t_{i+1}\cos u_R\right)\left(\Delta t'_j\cos u'_L - \Delta t'_{j+1}\cos u'_R\right)\right]\Big\},
\end{aligned} \tag{3.95}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_{qk}^{H} = \frac{jk_0^2}{\eta_0}\Big\{ & G_{00}^{1}\Delta t_{i+1}\Delta t'_{j+1} + G_{01}^{1}\Delta t_{i+1}\left(\Delta t'_j - \Delta t'_{j+1}\right) \\
& + G_{10}^{1}\Delta t'_{j+1}\left(\Delta t_i - \Delta t_{i+1}\right) + G_{11}^{1}\left(\Delta t_i - \Delta t_{i+1}\right)\left(\Delta t'_j - \Delta t'_{j+1}\right)\Big\},
\end{aligned} \tag{3.96}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_{ik}^{E} = -\pi G_F + k_0^3 \Big\{ & \Delta t_i\cos u_L\Big\{\Delta t'_k\Big[\rho'_{k-1}\left(G_{11}^3 + G_{11}^4\right) + \Delta\rho'_k\left(G_{12}^3 - G_{12}^4\right) - \rho_{i-1}G_{11}^4 \\
& - \Delta\rho_i G_{21}^4\Big] + \Delta t'_{k+1}\Big[\rho'_k\left(G_{10}^3 - G_{11}^3 + G_{10}^4 - G_{11}^4\right) + \Delta\rho'_{k+1}\left(G_{11}^3 - G_{12}^3 - G_{11}^4 + G_{12}^4\right) \\
& - \rho_{i-1}\left(G_{10}^4 + G_{11}^4\right) - \Delta\rho_i\left(G_{20}^4 + G_{21}^4\right)\Big]\Big\} + \Delta t_i\mathrm{sen}u_L\Big\{\Delta t'_k\Big[\left(z_{i-1} - z'_{k-1}\right)G_{11}^4 + \Delta z'_k G_{12}^4 \\
& + \Delta z_i G_{21}^4\Big] + \Delta t'_{k+1}\Big[\Delta z'_{k+1}\left(G_{11}^4 - G_{12}^4\right) + \Delta z_i\left(G_{20}^4 - G_{21}^4\right) + \left(z_{i-1}v\right)\left(G_{10}^4 - G_{11}^4\right)\Big]\Big\} \\
& + \Delta t_{i+1}\cos u_R\Big\{\Delta t'_k\Big[\rho'_{k-1}\left(G_{01}^3 - G_{11}^3 + G_{01}^4 - G_{11}^4\right) + \Delta\rho'_k\left(G_{02}^3 - G_{12}^3 - G_{02}^4 + G_{12}^4\right) \\
& - \Delta\rho_{i+1}\left(G_{11}^4 - G_{21}^4\right) - \rho_i\left(G_{00}^4 - G_{01}^4\right)\Big] + \Delta t'_{k+1}\Big[-\rho_i\left(G_{00}^4 - G_{01}^4 - G_{10}^4 + G_{11}^4\right) \\
& \rho'_k\left(G_{00}^3 - G_{01}^3 - G_{10}^3 + G_{11}^3 + G_{00}^4 - G_{01}^4 - G_{10}^4 + G_{11}^4\right) - \Delta\rho_{i+1}\left(G_{10}^4 - G_{11}^4 - G_{20}^4 + G_{21}^4\right) \\
& + \Delta\rho'_{k+1}\left(G_{01}^3 - G_{02}^3 - G_{11}^3 + G_{12}^3 - G_{01}^4 + G_{02}^4 + G_{11}^4 - G_{12}^4\right)\Big]\Big\} \\
& + \Delta t_{i+1}\mathrm{sen}u_R\Big\{\Delta t'_k\Big[\Delta z'_k\left(G_{02}^4 - G_{12}^4\right) + \Delta z_{i+1}\left(G_{11}^4 - G_{21}^4\right) + \left(z_i - z'_{k-1}\right)\left(G_{01}^4 - G_{11}^4\right)\Big] \\
& + \Delta t'_{k+1}\Big[\Delta z'_{k+1}\left(G_{01}^4 - G_{02}^4 - G_{11}^4 + G_{12}^4\right) + \Delta z_{i+1}\left(G_{10}^4 - G_{11}^4 - G_{20}^4 + G_{21}^4\right) \\
& + \left(z_i - z'_k\right)\left(G_{00}^4 - G_{01}^4 - G_{10}^4 + G_{11}^4\right)\Big]\Big\}\Big\},
\end{aligned} \tag{3.97}
$$

$$
\begin{aligned}
Z_{qj}^{H} = k_0^3 \Big\{ & \Delta t_j^{'} \cos u_L^{'} \Big\{ \Delta t_q \Big[\rho_{q-1} \left(G_{11}^3 + G_{11}^4 \right) + \Delta\rho_q \left(G_{21}^3 + G_{21}^4 \right) + \rho_{q-1} G_{11}^4 - \Delta\rho_j^{'} G_{12}^4 \Big] \\
& + \Delta t_{q+1} \Big[\rho_q \left(G_{01}^3 - G_{11}^3 + G_{01}^4 - G_{11}^4 \right) + \Delta\rho_{q+1} \left(G_{11}^3 - G_{21}^3 + G_{11}^4 - G_{21}^4 \right) \\
& - \rho_{j-1}^{'} \left(G_{01}^4 + G_{11}^4 \right) - \Delta\rho_j^{'} \left(G_{02}^4 + G_{12}^4 \right) \Big] \Big\} - \Delta t_j^{'} \mathrm{sen} u_L^{'} \Big\{ \Delta t_q \Big[\left(z_{q-1} - z_{j-1}^{'} \right) G_{11}^4 \\
& + \Delta z_q G_{21}^4 - \Delta z_j^{'} G_{12}^4 \Big] + \Delta t_{q+1} \Big[\Delta z_{q+1} \left(G_{11}^4 - G_{21}^4 \right) + \left(z_q - z_{j-1}^{'} \right) \left(G_{01}^4 + G_{11}^4 \right) \\
& - \Delta z_j^{'} \left(G_{02}^4 + G_{12}^4 \right) \Big] \Big\} + \Delta t_{j+1}^{'} \cos u_R^{'} \Big\{ \Delta t_q \Big[\rho_{q-1} \left(G_{10}^3 - G_{11}^3 + G_{10}^4 - G_{11}^4 \right) \\
& + \Delta\rho_q \left(G_{20}^3 - G_{21}^3 + G_{20}^4 - G_{21}^4 \right) - \rho_j^{'} \left(G_{10}^4 - G_{11}^4 \right) - \Delta\rho_{j+1}^{'} \left(G_{11}^4 - G_{12}^4 \right) \Big] \\
& + \Delta t_{q+1} \Big[\rho_q \left(G_{00}^3 - G_{01}^3 - G_{10}^3 + G_{11}^3 + G_{00}^4 - G_{01}^4 - G_{10}^4 + G_{11}^4 \right) \\
& + \Delta\rho_{q+1} \left(G_{10}^3 - G_{11}^3 - G_{20}^3 + G_{21}^3 + G_{10}^4 - G_{11}^4 - G_{20}^4 + G_{21}^4 \right) \\
& - \rho_j^{'} \left(G_{00}^4 - G_{01}^4 - G_{10}^4 + G_{11}^4 \right) - \Delta\rho_{j+1}^{'} \left(G_{01}^4 - G_{02}^4 - G_{11}^4 + G_{12}^4 \right) \Big] \Big\} \\
& - \Delta t_{j+1}^{'} \mathrm{sen} u_R^{'} \Big\{ \Delta t_q \Big[\Delta z_q \left(G_{20}^4 - G_{21}^4 \right) - \Delta z_{j+1}^{'} \left(G_{11}^4 - G_{12}^4 \right) + \left(z_{q-1} - z_j^{'} \right) \left(G_{10}^4 - G_{11}^4 \right) \Big] \\
& + \Delta t_{q+1} \Big[\Delta z_{q+1} \left(G_{10}^4 - G_{11}^4 - G_{20}^4 + G_{21}^4 \right) - \Delta z_{j+1}^{'} \left(G_{01}^4 - G_{02}^4 - G_{11}^4 + G_{12}^4 \right) \\
& + \left(z_q - z_j^{'} \right) \left(G_{00}^4 - G_{01}^4 - G_{10}^4 + G_{11}^4 \right) \Big] \Big\} \Big\},
\end{aligned}
\tag{3.98}
$$

onde

$$G_{00}^{v}\left(t,t'\right) = \int_0^1 \int_0^1 G_v\left(t,t'\right) d\alpha' d\alpha \qquad v = 1,\ 2,\ 3 \text{ e } 4 \tag{3.99}$$

$$G_{01}^{v}\left(t,t'\right) = \int_0^1 \int_0^1 \alpha' G_v\left(t,t'\right) d\alpha' d\alpha \qquad v = 1,\ 2,\ 3 \text{ e } 4 \tag{3.100}$$

$$G_{02}^{v}\left(t,t'\right) = \int_0^1 \int_0^1 \alpha'^2 G_v\left(t,t'\right) d\alpha' d\alpha \qquad v = 1,\ 2,\ 3 \text{ e } 4 \tag{3.101}$$

$$G_{10}^{v}\left(t,t'\right) = \int_0^1 \int_0^1 \alpha G_v\left(t,t'\right) d\alpha' d\alpha \qquad v = 1,\ 2,\ 3 \text{ e } 4 \tag{3.102}$$

$$G_{20}^{v}\left(t,t'\right) = \int_0^1 \int_0^1 \alpha^2 G_v\left(t,t'\right) d\alpha' d\alpha \qquad v = 1,\ 2,\ 3 \text{ e } 4 \tag{3.103}$$

$$G_{11}^{v}\left(t,t'\right) = \int_0^1 \int_0^1 \alpha\alpha' G_v\left(t,t'\right) d\alpha' d\alpha \qquad v = 1,\ 2,\ 3 \text{ e } 4 \tag{3.104}$$

$$G_{12}^{v}\left(t,t'\right) = \int_0^1 \int_0^1 \alpha\alpha'^2 G_v\left(t,t'\right) d\alpha' d\alpha \qquad v = 1,\ 2,\ 3 \text{ e } 4 \tag{3.105}$$

$$G_{21}^{v}\left(t,t'\right) = \int_0^1 \int_0^1 \alpha^2\alpha' G_v\left(t,t'\right) d\alpha' d\alpha \qquad v = 1,\ 2,\ 3 \text{ e } 4 \tag{3.106}$$

$$G_F = 2\left\{\Delta t_i G_1^{\alpha L} + \Delta t_{i+1}\left[G_0^{\alpha R} - G_1^{\alpha R} - G_2^{\alpha R} + G_4^{\alpha R}\right]\right\}, \qquad (3.107)$$

sendo

$$G_1^{\alpha L} = \int_0^1 \frac{\alpha}{\rho_{i-1} + \alpha\Delta\rho_i} d\alpha\ , \qquad (3.108)$$

$$G_v^{\alpha R} = \int_0^1 \frac{\alpha^v}{\rho_i + \alpha\Delta\rho_{i+1}} d\alpha, \quad v = 0,\ 1,\ 2 \text{ e } 4\ . \qquad (3.109)$$

A avaliação numérica e o tratamento das singularidades das integrais das matrizes Z e Y são discutidas no Apêndice D.