

4. Metodologia da Análise Numérica

Neste capítulo são apresentados tópicos referentes ao método utilizado para a realização do trabalho, com a finalidade de alcançar os objetivos descritos no item 1.3, que visa à análise das tensões em lajes lisas de concreto protendido.

Foi empregado o programa computacional SAP 2000 V.14, o qual usa o método dos elementos finitos que adequadamente desenvolvido é capaz de mostrar o comportamento de lajes lisas e nervuradas com grande precisão. Utiliza elementos tipo casca (*Shell*) para modelar o sistema de laje que considera as translações no plano onde são aplicadas as forças de protensão. Além disso, também considera a contribuição dos pilares que são modeladas usando elementos tipo viga (*Frame*).

A análise realizada neste capítulo avalia a relação das tensões máximas e mínimas com a tensão de protensão através coeficientes (ϕ) que ajudem na otimização do cálculo simplificado das tensões nas zonas de regularização das mesmas, conforme será visto nos exemplos do capítulo 5, fornecendo critérios práticos para o projeto de pavimentos.

Foram criados modelos de lajes lisas e nervuradas com determinados números de painéis e diferentes larguras da faixa de concreto, onde a força de protensão é aplicada, sendo possível encontrar os valores da relação de tensões (ϕ) nos diferentes pontos de análise na laje.

Adotaram-se, como parâmetros de comparação, os valores das tensões normais S_{11} (kN/cm²), os quais surgem na face 1 perpendiculares à direção do plano de corte a ser analisado e na direção do eixo local 1, onde a força foi aplicada, como indica a Figura 3.17.

Os parâmetros a serem avaliados são aqueles que permitem obter a relação entre tensão máxima (σ_{\max}) e tensão de protensão (σ_p), que será chamado de ϕ_{\max} e a relação da tensão mínima (σ_{\min}) respeito à tensão de protensão (σ_p) que será chamado de ϕ_{\min} . A tensão de protensão empregada no presente estudo, tanto para lajes maciças como nervuradas, é 1 kN/cm².

$$\phi_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_p} \quad (4.1)$$

$$\phi_{\min} = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_p} \quad (4.2)$$

Os resultados obtidos foram dispostos em forma de tabelas e gráficos, com a intenção de melhorar a visualização da distribuição das tensões para os diferentes modelos. Nessa análise numérica, considerou-se que as lajes estivessem no estágio I, ou seja, para concreto não fissurado e comportamento elástico linear.

4.1. Estudo Numérico de Lajes Maciças

A laje em estudo é uma laje maciça de 20 cm de espessura apoiada diretamente sobre pilares. As propriedades mecânicas como a resistência característica à compressão (f'_{ck}), o módulo de deformação longitudinal do concreto (E) e o coeficiente de Poisson (ν) são apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Propriedades mecânicas do concreto.

Parâmetro	Valor
f'_{ck}	35MPa
$E = 4760\sqrt{f'_{ck}}$	28160 MPa
ν	0,2

A análise é feita considerando a protensão como carga externa equivalente aplicada em faixas de concreto. A largura destas faixas está relacionada com o comprimento do vão ($L=10m$). A largura das faixas adotadas neste estudo são $L/4$, $L/8$, $L/20$ e $L/40$. O carregamento adotado é aquele que gera uma tensão de protensão (σ_p) de 1 kN/cm² para cada largura de faixa a ser avaliado. Portanto, as forças de protensão aplicadas são 5000 kN, 2500kN, 1000 kN e 500 kN respectivamente . O carregamento é aplicado como carga pontual nos nós dos elementos do tipo casca.

Os modelos foram gerados e processados com o programa SAP2000. Foi utilizada uma malha com elementos típicos de 25 cm x 25 cm do tipo casca. Os pilares, na primeira parte do estudo, foram modelados com uma única restrição pontual, e na segunda parte foram simulados com elementos tipo viga, como definido no capítulo 3.

Os estudos preliminares concentraram-se na análise da distribuição das tensões causadas pela componente longitudinal da força de protensão que atua no plano da laje. Inicialmente, a análise é feita sem considerar a rigidez da flexão dos pilares. Em seguida, foram analisados vários casos com pilares de diferente rigidez a flexão.

4.1.1. Distribuição das Tensões sem Influência dos Pilares

O objetivo desta etapa do estudo é obter um coeficiente ϕ que relacione as tensões máximas e mínimas, nas zonas de regularização das tensões, com a tensão de protensão aplicada para diferentes larguras de faixa de concreto. Para isso três seções da laje foram avaliadas. A primeira delas, a seção A, se encontra a 2,5m do ponto de aplicação de cargas, as outras duas, seções B e C, a 5m e 10m respectivamente.

Utilizando o programa SAP2000 foram desenvolvidos quatro modelos de sistemas estruturais com as mesmas características de material e geometria, que só diferem no número de painéis empregados.

Trata-se de uma estrutura com vão típico de 10 m submetida à tensão de protensão de 1 kN/cm². Torna-se importante salientar que, em todos os modelos, o carregamento a ser aplicado na estrutura é o carregamento equivalente da força de protensão sem considerar seu peso próprio. Nestes modelos preliminares são estudadas lajes nas quais não é considerada a influência da contribuição dos pilares na distribuição de tensões. Para isso, os pilares são modelados como apoios com restrição na translação z e liberdade na translação x, y, assim como todas as rotações livres. Os pavimentos são mostrados no desenho da Figura 4.1 para um painel típico de laje.

4.1.1.1. Modelo 1 - Laje com painel isolado típico

Trata-se de uma laje isolada a qual é submetida a tensões de protensão para diferentes larguras de faixa de concreto. Obtêm-se tensões máximas e mínimas nas seções A, B e C, as quais são relacionadas através de um coeficiente (ϕ) com a tensão de protensão aplicada na ancoragem.

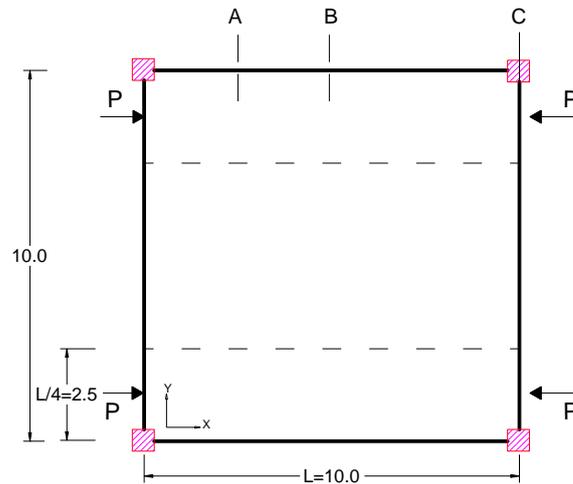


Figura 4.1 – Laje de referência para o modelo 1.

Na Figura 4.2 são ilustradas a distribuição das tensões S_{11} da laje obtidas para o carregamento de protensão de 5000 kN aplicado em uma faixa de 2,5m, e as condições de contorno empregadas para permitir o efeito de Poisson, em sua modelagem.

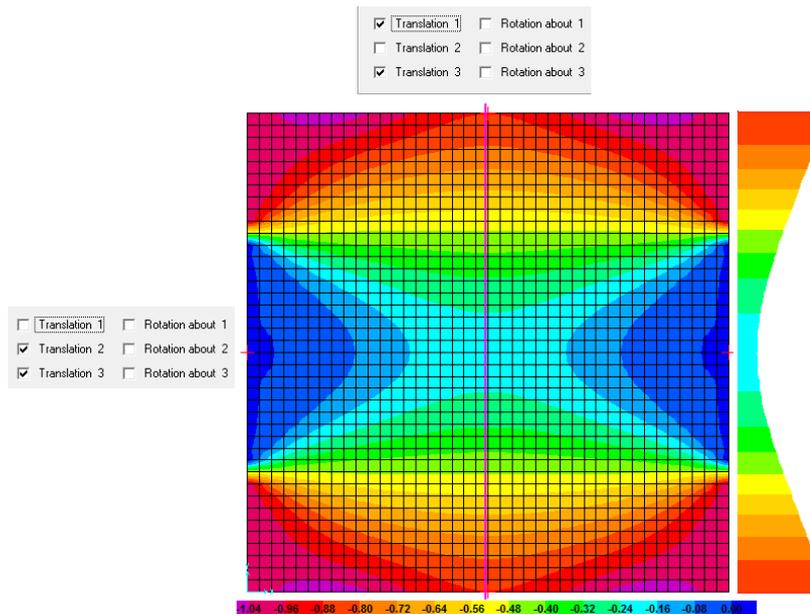


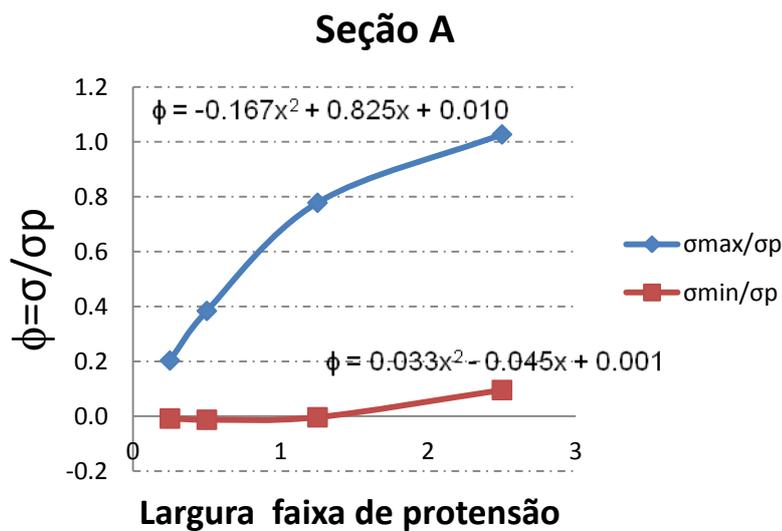
Figura 4.2 – Distribuição de tensões para carregamento de protensão aplicado em uma faixa de 2,5m.

São apresentadas na Tabela 4.2 as tensões mínimas e máximas e sua relação com a tensão da protensão (ϕ) para as diferentes larguras de faixas nas seções A, B e C.

Tabela 4.2 – Relação entre a tensão máxima, mínima e a tensão gerada pela força de protensão.

Faixas	Seção	Tensões (kN/cm ²)		
		$\sigma_{min}/\sigma_{max}$	ϕ_{max}	ϕ_{min}
L/4	A-A	0.09	1.03	0.10
	B-B	0.24	0.87	0.21
	C-C	-0.04	1.04	-0.04
L/8	A-A	0.00	0.78	0.00
	B-B	0.06	0.54	0.03
	C-C	-0.04	1.03	-0.04
L/20	A-A	-0.03	0.38	-0.01
	B-B	-0.01	0.24	0.00
	C-C	-0.05	1.04	-0.05
L/40	A-A	-0.04	0.20	-0.01
	B-B	-0.03	0.12	0.00
	C-C	-0.06	0.80	-0.05

Os valores da Tabela 4.2 são plotadas na Figura 4.3 a seguir, mostram-se as equações para a obtenção do coeficiente ϕ calculado em função da largura da faixa de protensão para as seções A e B.



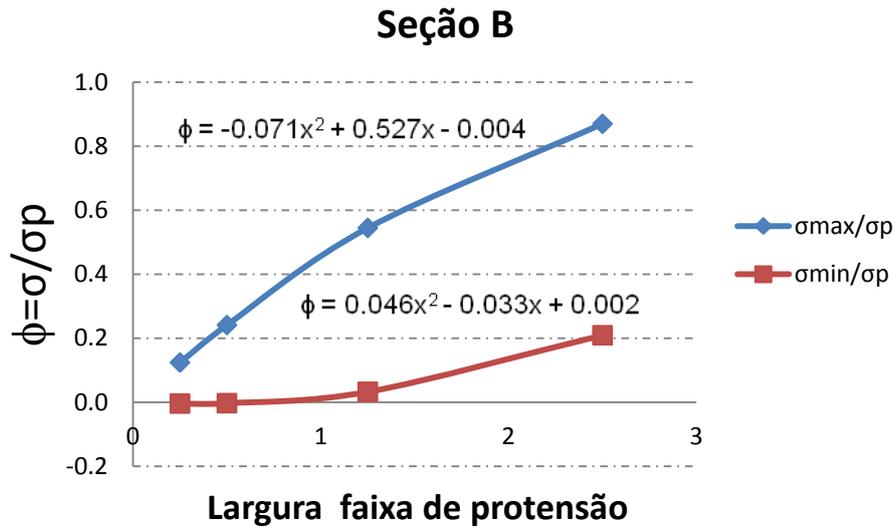


Figura 4.3 – Relação entre a tensão máxima, mínima e a tensão gerada pela força de protensão para as seções A e B.

4.1.1.2.

Modelo 2 - Dois painéis de laje

As características do modelo 2 são as mesmas do modelo anterior, onde foi acrescentando um painel contínuo. O esquema do modelo está representado na Figura 4.4. Foi modelada a metade da laje, como mostra a Figura 4.5. Nos pilares foram restritas as translações u_3 e na metade da laje foram restritas as translações u_1 e u_3 .

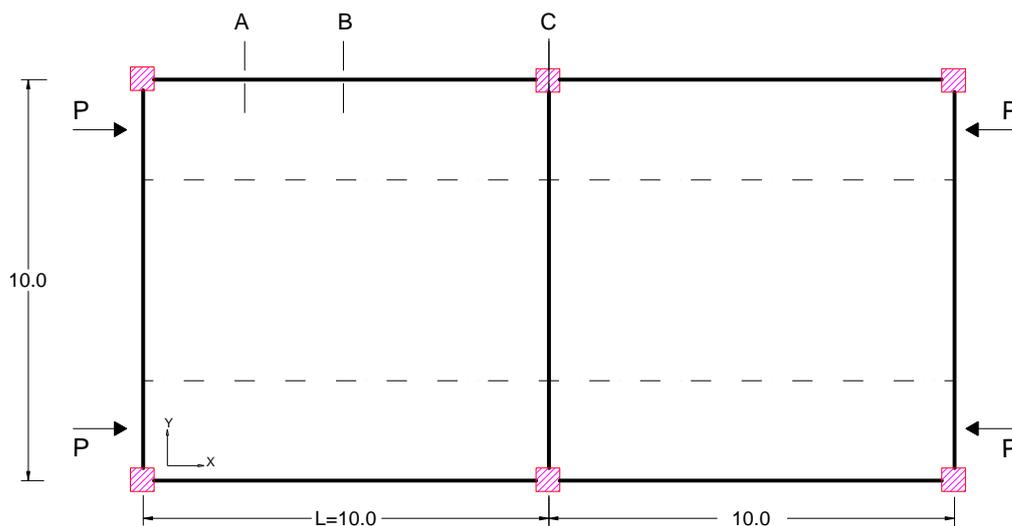


Figura 4.4 – Laje de referência para o modelo 2.

A Figura 4.5, apresenta a distribuição das tensões S11 da laje quando aplicado um carregamento de protensão de 5000 kN em uma faixa de concreto de largura de 2,5m.

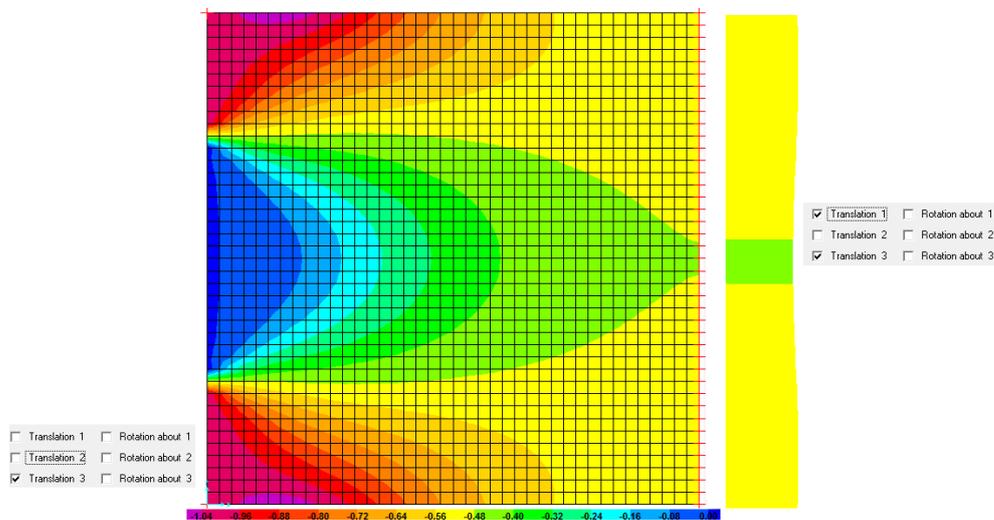


Figura 4.5 – Distribuição de tensões para carregamento de protensão aplicado em uma faixa de 2,5m.

Para uma melhor visualização foram traçados diagramas de distribuição de tensões S11 no longo das seções A, B e C, para diferentes larguras de faixa, obtidos a partir dos resultados da modelagem. O intuito deste modelo é verificar a uniformidade da distribuição das tensões a uma distância determinada do comprimento da laje, como pode ser visualizado na Figura 4.6.

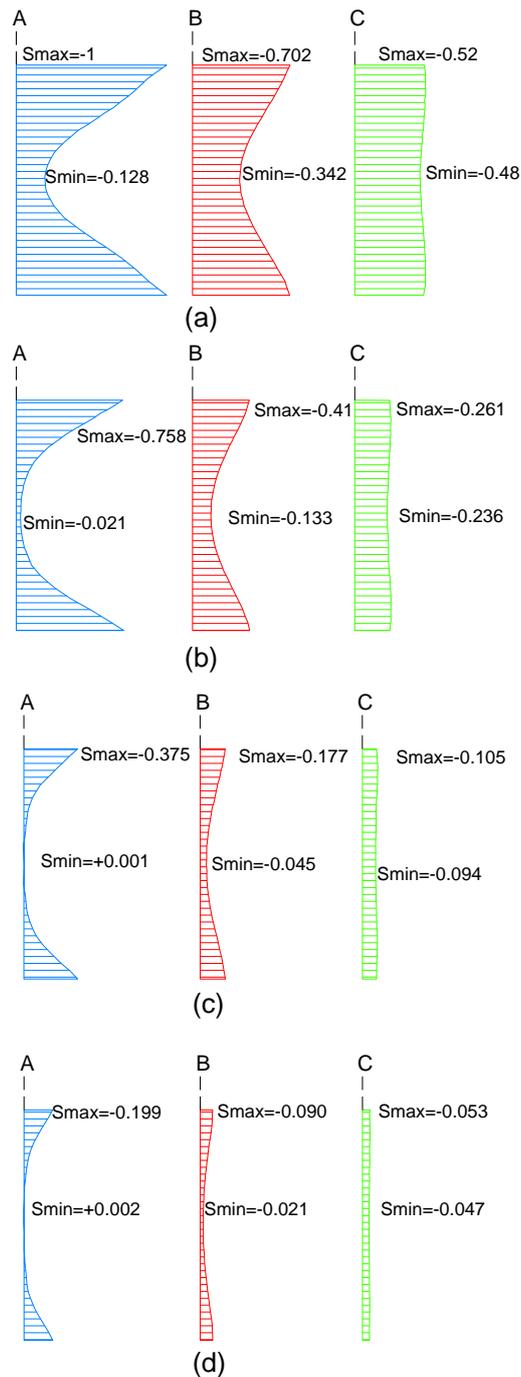


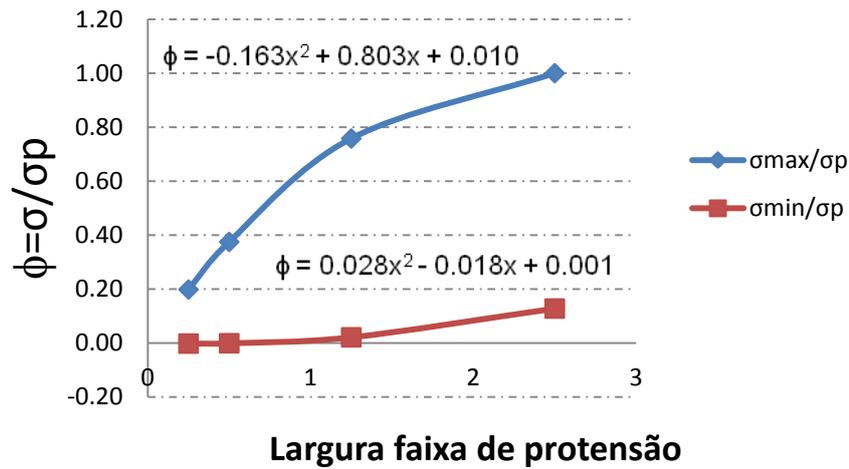
Figura 4.6 – Distribuição de tensões nas seções A, B e C para uma largura de faixa de protensão de $L/4$ (a), $L/8$ (b), $L/20$ (c) e $L/40$ (d).

Os resultados do coeficiente ϕ estão apresentados na Tabela 4.3 e na Figura 4.7, o qual apresenta os valores das tensões máximas e mínimas com relação à tensão de protensão para as seções A, B e C.

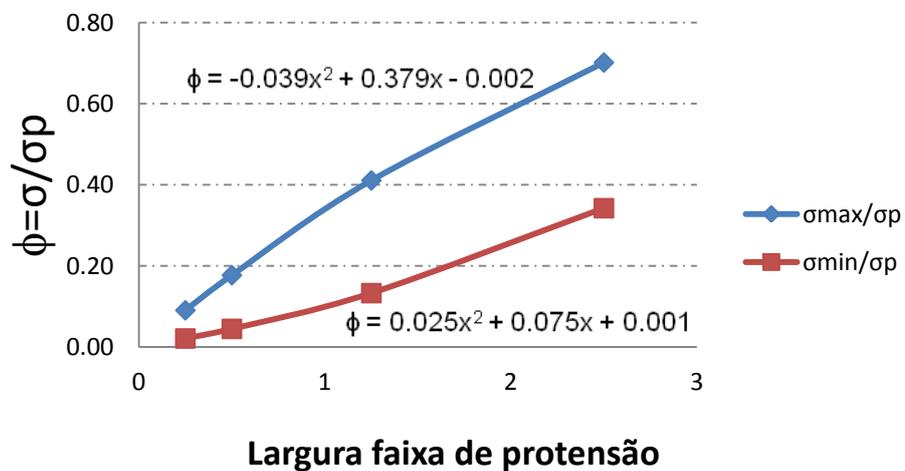
Tabela 4.3 – Relação entre a tensão máxima, mínima e a tensão gerada pela força de protensão.

Faixas	Seção	Tensões (kN/cm ²)		
		$\sigma_{\min}/\sigma_{\max}$	ϕ_{\max}	ϕ_{\min}
L/4	A-A	0.13	1.00	0.13
	B-B	0.49	0.70	0.34
	C-C	0.93	0.52	0.48
L/8	A-A	0.03	0.76	0.02
	B-B	0.32	0.41	0.13
	C-C	0.90	0.26	0.24
L/20	A-A	0.00	0.37	0.00
	B-B	0.25	0.18	0.04
	C-C	0.89	0.10	0.09
L/40	A-A	-0.01	0.20	0.00
	B-B	0.23	0.09	0.02
	C-C	0.89	0.05	0.05

Seção A



Seção B



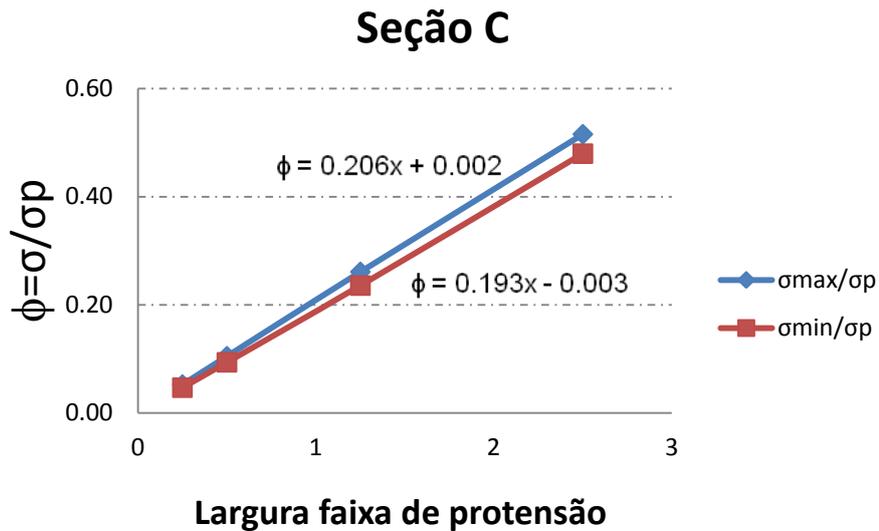


Figura 4.7 – Relação entre a tensão máxima, mínima e a tensão gerada pela força de protensão para as seções A, B e C.

4.1.1.3.

Modelo 3 - Quatro painéis de lajes contínuas

Outro modelo foi feito acrescentando dois painéis na estrutura, com a finalidade de avaliar as tensões mínimas e máximas no centro de cada painel e na continuidade dos painéis das lajes. A laje de referência pode ser visualizada na Figura 4.8.

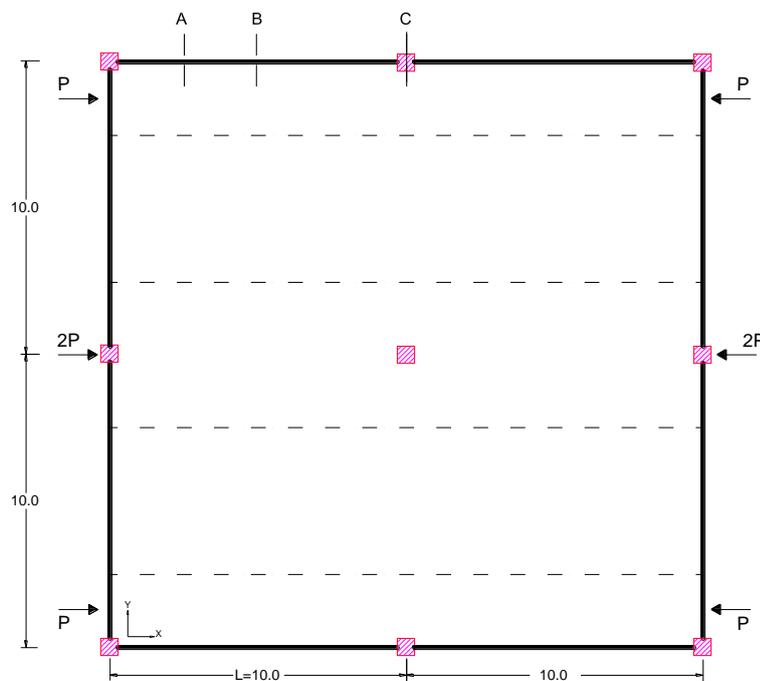


Figura 4.8 – Laje de referência para o modelo 3.

A Figura 4.9 apresenta a distribuição das tensões S11 da laje para um carregamento equivalente de protensão de 5000 kN em uma faixa de 2,5m

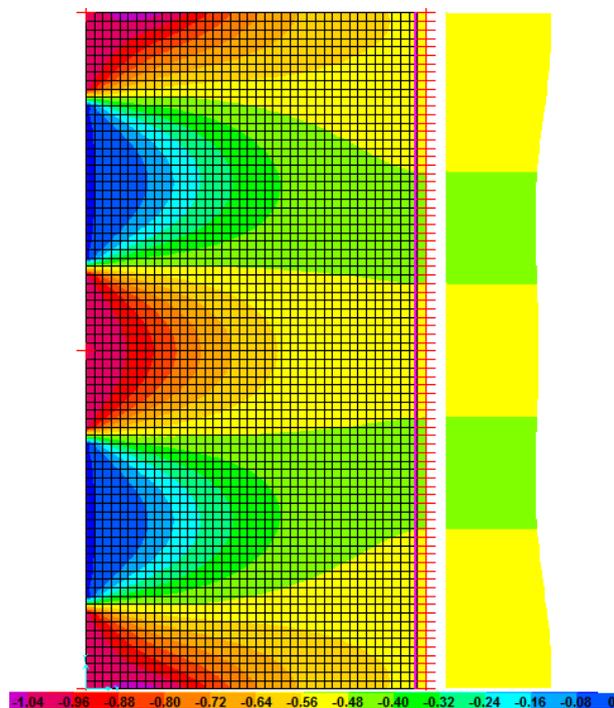


Figura 4.9 – Distribuição de tensões na deformada para carregamento de protensão aplicado em uma faixa de 2,5m.

Foram plotados diagramas da distribuição das tensões S11 para diferentes larguras de faixa ao longo das seções A, B e C, as quais podem ser visualizadas na Figura 4.10.

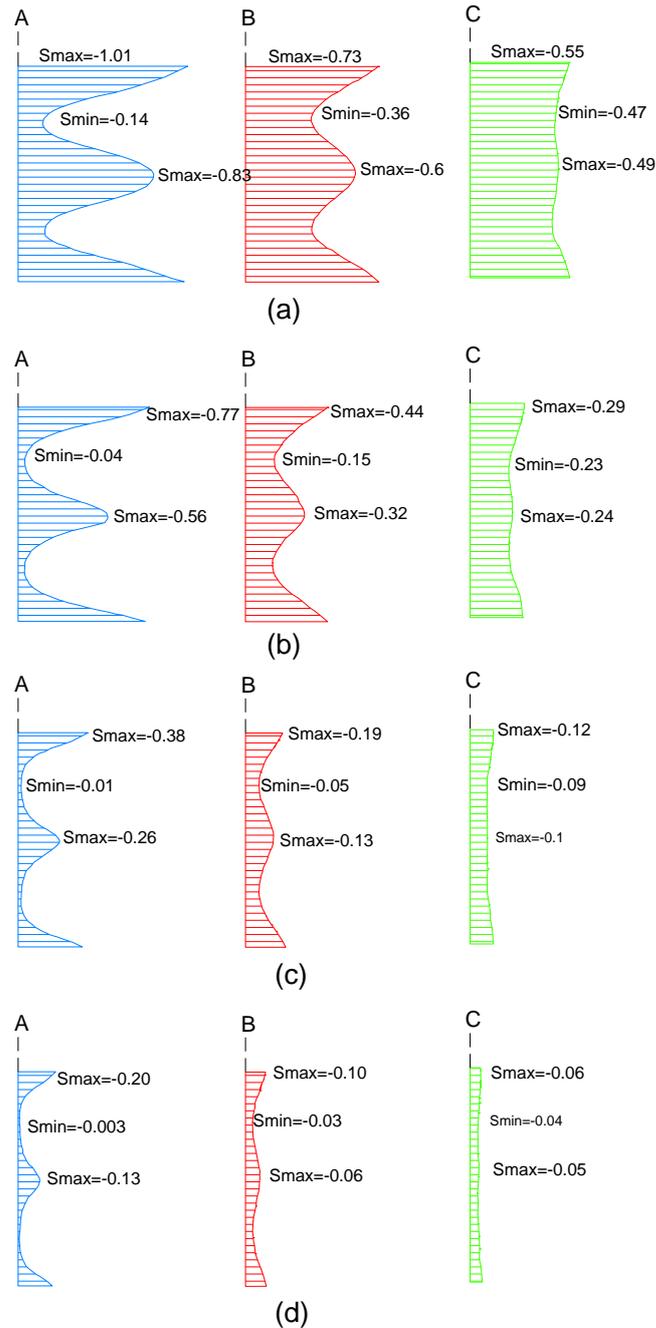


Figura 4.10 – Distribuição de tensões nas seções A, B e C para uma largura de faixa de protensão de $L/4$ (a), $L/8$ (b), $L/20$ (c) e $L/40$ (d).

Observa-se na Figura 4.10 que as tensões que surgem nos lados extremos da laje são maiores que as tensões que surgem na continuidade da laje, em aproximadamente 15%. Os valores calculados do coeficiente ϕ para as seções A, B e C são apresentados na Figura 4.11.

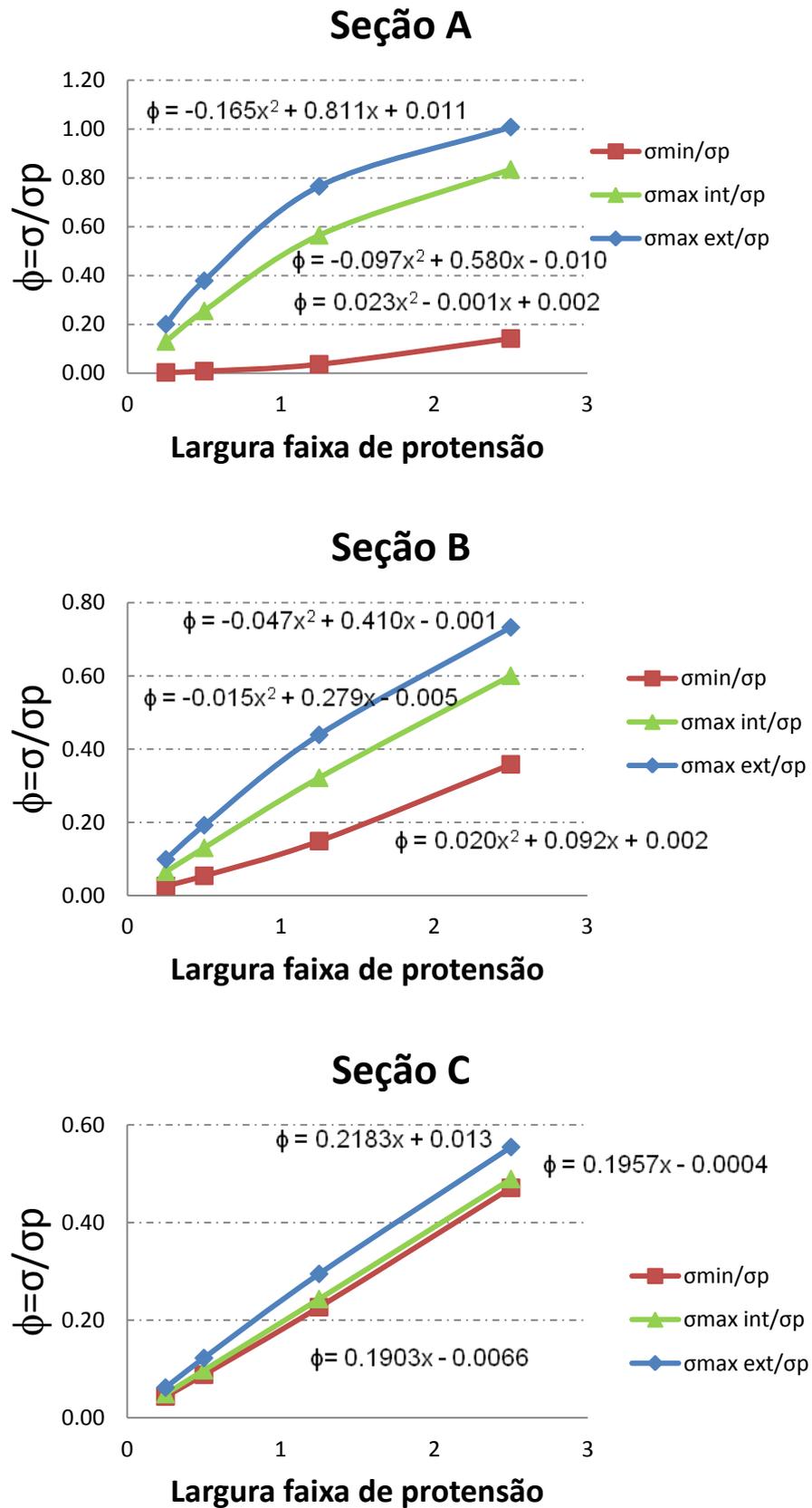


Figura 4.11 – Relação entre a tensão máxima, mínima e a tensão gerada pela força de protensão.

4.1.1.4. Modelo 4 - Seis painéis de lajes contínuas

Com a finalidade de avaliar as tensões mínimas e máximas no centro e na continuidade da laje para mais painéis foi realizado outro modelo com seis painéis. A laje de referência é mostrada na Figura 4.12.

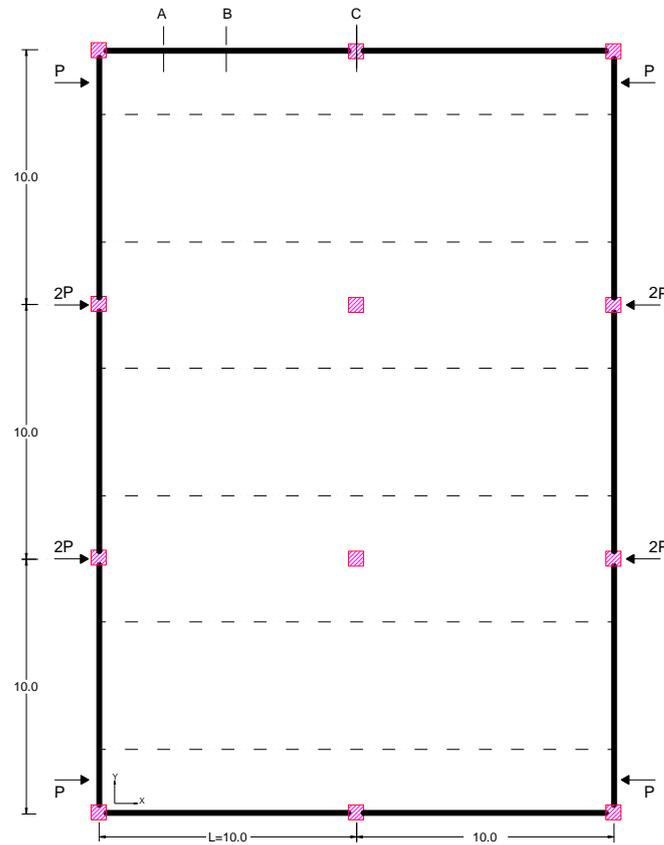


Figura 4.12 – Laje de referência para o modelo 4.

A distribuição das tensões S_{11} é apresentada na Figura 4.13 para as diferentes larguras de faixas nas seções A, B e C.

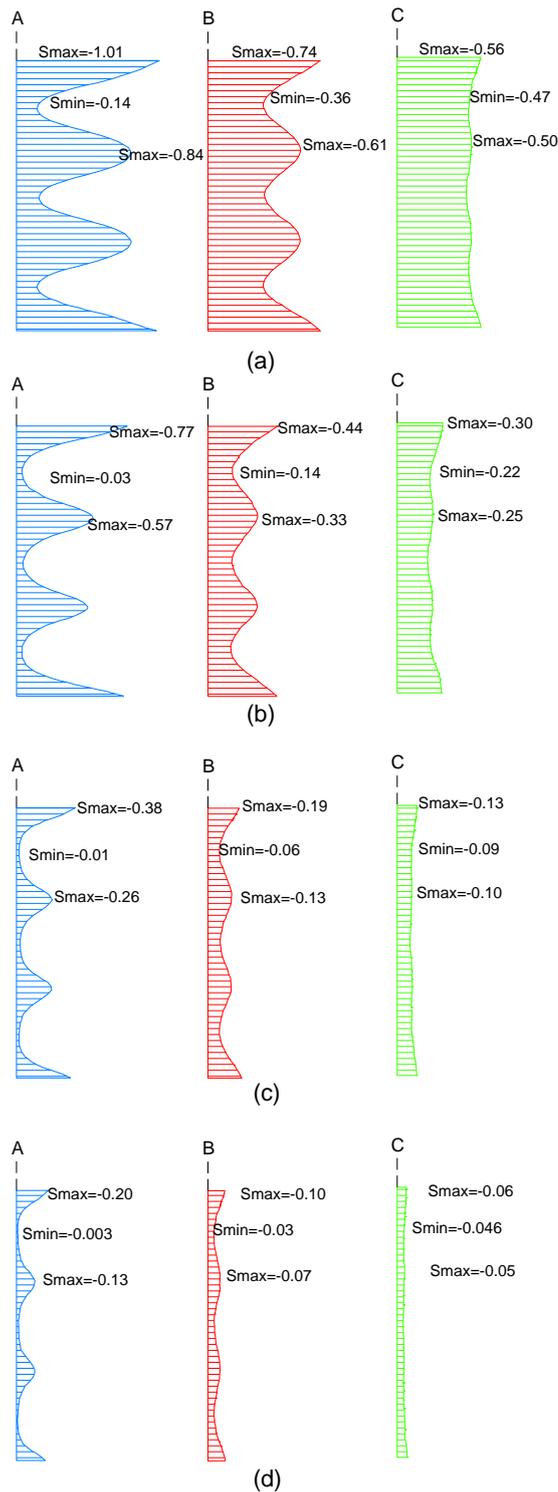


Figura 4.13 – Distribuição de tensões nas seções A, B e C para uma largura de faixa de protensão de $L/4$ (a), $L/8$ (b), $L/20$ (c) e $L/40$ (d).

A Figura 4.14 apresenta os valores do coeficiente ϕ para as seções A, B e C. Pode-se observar que as tensões máximas e mínimas nas continuidades da laje possuem valores muito próximos independentemente do número de painéis. As equações do coeficiente ϕ são praticamente iguais aos do modelo 3.

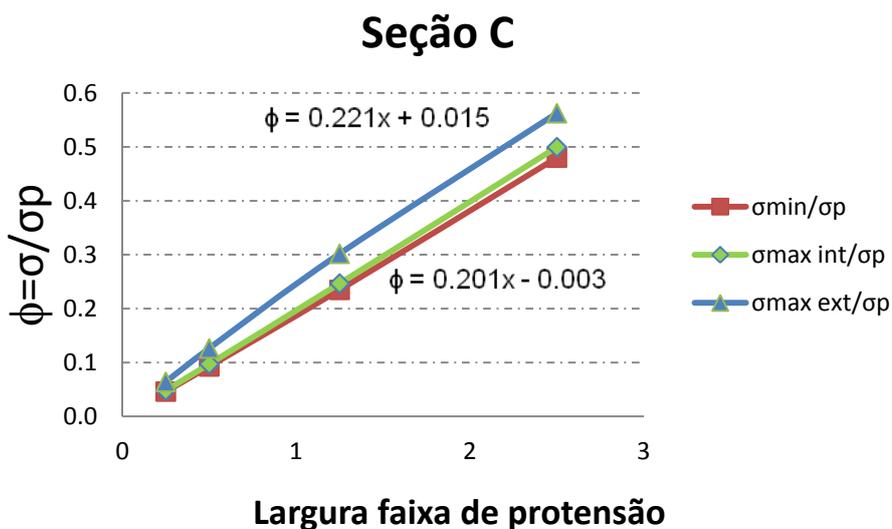
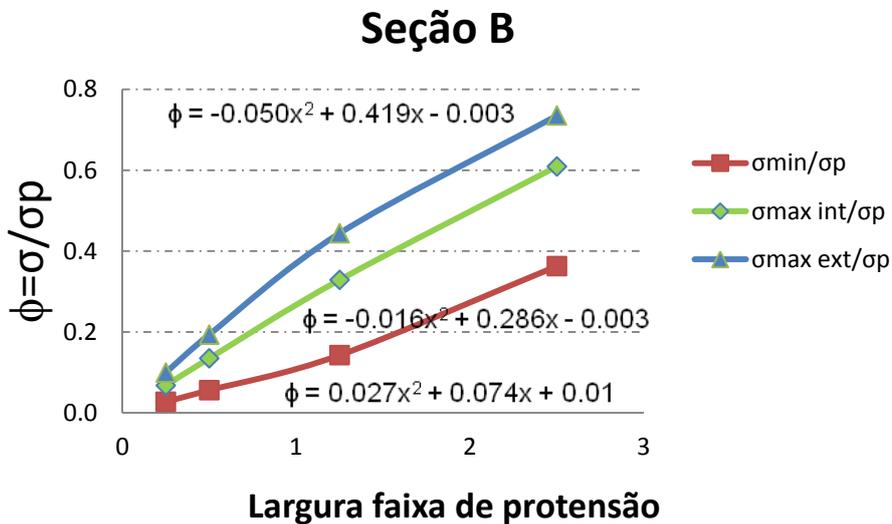
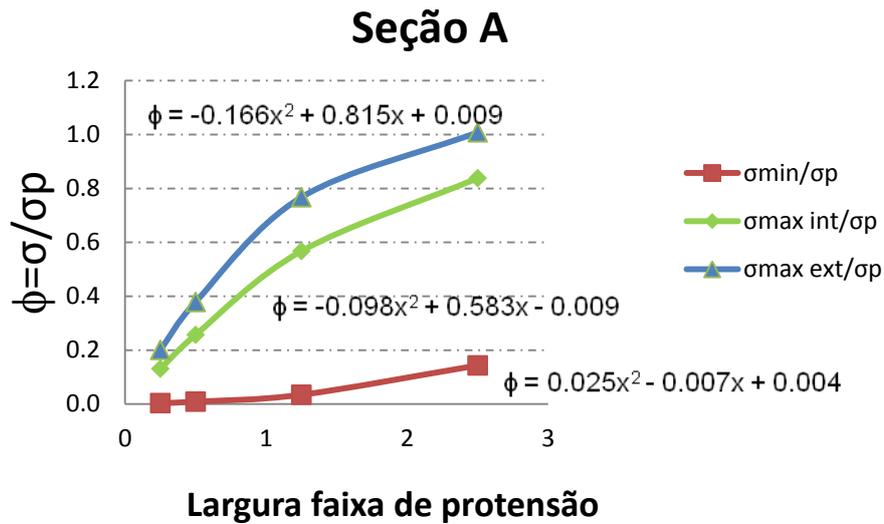


Figura 4.14 – Relação entre a tensão mínima e a tensão máxima (exterior e na continuidade da laje).

Deste primeiro estudo para lajes maciças pode-se conferir o princípio de Saint Venant, o qual afirma que, em uma seção, a uma distância determinada do comprimento da laje a distribuição das tensões é praticamente uniforme. Isso pode ser notado nos gráficos da distribuição das tensões nos modelos (Figuras 4.6, 4.10 e 4.13), onde se observa que a tensão a partir da seção C já é uniforme em todos seus pontos, com valores próximos à tensão média total aplicada, para todos os casos independentemente da largura de aplicação da protensão. Isso pode também ser verificado para a mesma seção na Tabela 4.3, onde o valor da razão entre tensão máxima e a tensão mínima é próximo a um, devido à uniformidade das tensões. Na seção C, no caso das lajes contínuas a tensão máxima exterior (tensão máxima que surge nos extremos das lajes) difere da tensão máxima interior (tensão máxima que surge na continuidade das lajes) em aproximadamente 14%, independentemente do número de painéis. As tensões mínimas são praticamente as mesmas também independentemente do número de painéis acrescentado para todos os modelos. A diferença entre tensões máximas e mínimas na seção C é de aproximadamente 20%.

Desta parte do estudo obtiveram-se equações para calcular o coeficiente ϕ para lajes maciças protendidas. Os valores para o coeficiente ϕ estão apresentados no Anexo C. O gráfico ilustrado na Figura 4.3 fornece valores de ϕ para modelos de laje isolada. O gráfico da Figura 4.7 fornece valores de ϕ para laje de dois painéis, a qual tem uma diferença mínima (~6%) com relação aos gráficos da Figura 4.11 e 4.14 que fornecem valores de ϕ para lajes de painéis contínuos.

Devido a esta mínima diferença pode-se usar as equações da Figura 4.11 para o cálculo do coeficiente ϕ para qualquer quantidade de painéis que possua a estrutura, já que o acréscimo de painéis faz uma diferença mínima na obtenção do parâmetro ϕ .

Segundo o estudado, o coeficiente ϕ tem aplicação nas seções próximas à aplicação da carga de protensão, já para seções mais afastadas, como a seção C, as tensões são uniformes e não ficam afetadas por este coeficiente.

4.1.2. Estudo das Tensões com Influência dos Pilares

4.1.2.1. Coeficiente Aproximado de Rigidez (K)

Nesta segunda etapa estuda-se a influência da rigidez dos pilares sobre as tensões nas lajes. Para tanto, é feita uma análise da relação da rigidez entre lajes e pilares, com a finalidade de obter a força de protensão (F) retida em cada pilar e a partir desta relação fazer uma nova avaliação das tensões na laje levando em conta a força (P) que passa para a laje descontando a força F. Para isso tem que ser calculada a força F retida nos pilares a qual é regida pela equação 4.3 a seguir.

$$F = K \left(\frac{EI_p}{L_p^3} \right) \cdot \delta \quad (4.3)$$

onde:

K é o coeficiente de rigidez

δ é o deslocamento do topo do pilar

E é o módulo de elasticidade.

I_p é o momento de inércia do pilar.

L_p é o comprimento do pilar.

Como foi visto no capítulo 2, existem duas possibilidades para o valor do coeficiente de rigidez (K) as quais dependem das condições de contorno adotadas nos pilares. As condições de apoio podem simular o caso de uma laje com extremidades engastadas, cujo coeficiente K é 12, ou uma laje simplesmente apoiada, com K igual a 3.

O coeficiente de rigidez K será vinculado, através de uma equação, com um novo parâmetro (G) o qual relaciona a rigidez entre lajes e pilares, como mostrado na eq. 4.4 a seguir:

$$G = \frac{(EI_L/L_L)}{(EI_P/L_P)} \quad (4.4)$$

onde:

L_L é a distância entre pilares.

I_L é o momento de inércia para diferentes rigidezes de lajes.

E é o módulo de elasticidade.

O cálculo de tal equação que relaciona o coeficiente de rigidez K e o parâmetro de rigidez entre lajes e pilares G é detalhado nos parágrafos seguintes.

Com a ajuda do programa Ftool são modelados pórticos com diferentes relações de rigidez laje-pilar, como mostrado na Figura 4.15. Um mesmo carregamento equivalente de protensão de 100 kN é aplicado a cada pórtico. Impõe-se restrição à translação x e a rotação z simulando a metade da estrutura. Os modelos são feitos com a mesma rigidez do pilar e variando a rigidez de laje. Para cada modelo é obtido seu respectivo fator G , com a equação 4.4.

A Figura 4.15, ilustra três modelos de pórticos com diferente relação de rigidez. Na Figura 4.15 (a) têm-se uma laje praticamente sem rigidez à flexão quando comparado com a rigidez dos pilares. Nota-se que quase toda a força axial é retida nos pilares. Observa-se na Tabela 4.4 que o fator de rigidez laje-pilar G é praticamente 0 e seu coeficiente aproximado de rigidez K para esta relação de rigidez é 3, aproximando-se do caso de uma laje simplesmente apoiada.

O inverso ocorre na Figura 4.15 (c), onde a laje é muito mais rígida que os pilares. Devido à alta rigidez da laje grandes deslocamentos são impedidos, bem como impede a rotação da viga como um corpo rígido. Vê-se, na configuração deformada, que os nós da viga não sofrem rotações, ou seja, que não existem rotações do topo e da base. Isso pode ser conferido na Tabela 4.4, onde para um fator G igual a 48 o coeficiente aproximado de rigidez é 11,78. Deste modo aproxima do caso de uma laje com extremidades engastadas. Nesta mesma figura observa-se que uma quantidade mínima de força de protensão fica retida nos pilares.

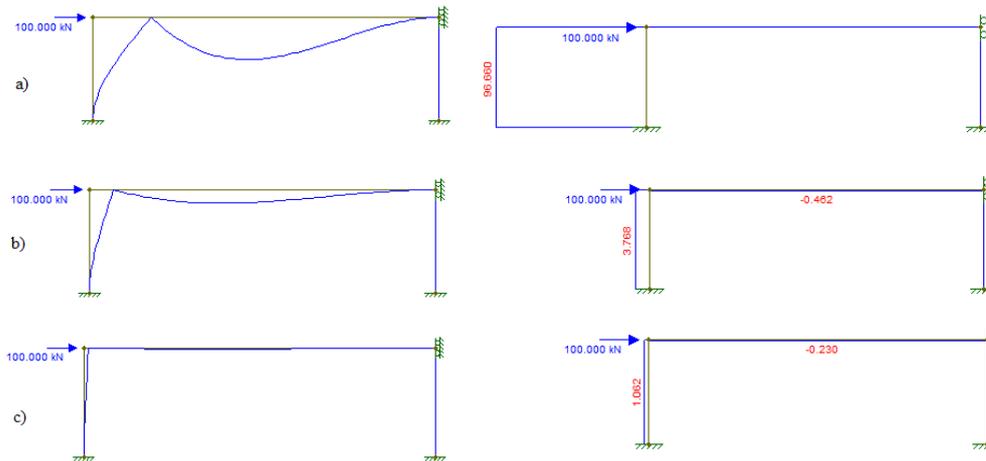


Figura 4.15 – Deformada e diagrama de cortante para laje de rigidez à flexão nula (a), laje de rigidez à flexão intermediária (b) e laje infinitamente rígida(c).

Observa-se como os diagramas das cortantes dos pilares podem ser alterados, de um comportamento bi-engastado para um engastado-rotulado, com a variação da rigidez entre os elementos estruturais. Pode-se concluir então que quanto menor a rigidez da laje ou maior a rigidez do pilar maior quantidade da força aplicada ficará retida no pilar.

Tabela 4.4 – Quadro Resumo de relação entre fator de rigidez entre lajes e pilares (G) e o coeficiente aproximado de rigidez (K).

pilar		laje		L laje (cm)	L pilar (cm)	I laje (cm)	I pilar (cm)	δ (cm)	F (kN)	G	K Ftool
b	h	b	h								
25	50	500	100	1000	300	41666667	260417	0.001	0.227	48.00	11.77
25	50	100	100	1000	300	83333333	260417	0.004	1.062	9.60	11.01
25	50	80	100	1000	300	66666667	260417	0.005	1.301	7.68	10.92
25	50	150	50	1000	300	1562500	260417	0.005	1.115	1.80	8.77
25	50	100	50	1000	300	1041667	260417	0.008	1.501	1.20	7.88
25	50	83	50	1000	300	867708	260417	0.009	1.705	1.00	7.52
25	50	50	50	1000	300	520833	260417	0.016	2.399	0.60	6.39
25	50	500	20	1000	300	333333	260417	0.004	0.527	0.38	5.46
25	50	1	1	1000	300	0.0833	260417	1.336	96.67	0.00	3.00

A Tabela 4.4 apresenta valores de deslocamento (δ) no topo do pilar e força cortante (F) retida em cada pilar, obtidos no programa Ftool, para modelos de pórticos com diferente valor de G. É obtida uma relação entre este fator e o coeficiente de rigidez aproximada K. Todos os pontos calculados, para tal relação nos diferentes valores de relação relativa de rigidez laje-pilar, são plotados na Figura 4.16, assim é obtida a equação 4.5, a qual reflete estes valores da relação de rigidez.

$$K = 7,2G^{0,25} \quad (4.5)$$

Como se pode ver na Tabela 4.5 esta equação é válida para $G \geq 0,03$, para os quais os valores de K são maiores a 3 (caso engastado-rotulado) e para valores de $G \leq 7,5$, para os quais os valores de K são menores a 12 (caso biengastado).

Tabela 4.5 – Valores do coeficiente aproximado de rigidez (K) para diferentes relações de rigidez (G).

G	$K=7.235G^{0.2081}$	$K=7.2.G^{0.25}$
10.00	11.7	12.8
9.00	11.4	12.5
8.00	11.2	12.1
7.50	11.0	11.9
7.00	10.8	11.7
6.00	10.5	11.3
5.00	10.1	10.8
4.00	9.7	10.2
3.00	9.1	9.5
2.00	8.4	8.6
1.80	8.2	8.3
1.20	7.5	7.5
1.00	7.2	7.2
0.60	6.5	6.3
0.03	3.5	3.0

Tendência da relação G e K

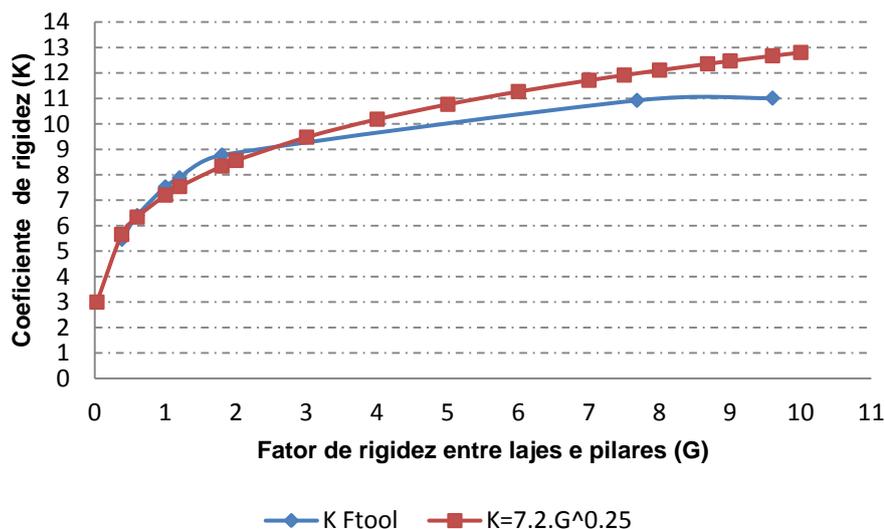


Figura 4.16 – Curva de tendência que relaciona o fator de rigidez entre lajes e pilares (G) e o coeficiente aproximado de rigidez (K).

4.1.2.2. Valor da Força retida nos pilares (F)

Com o valor de K é possível calcular que porcentagem da força de protensão aplicada (P) fica retida nos pilares dependendo da sua rigidez. A força F é calculada para cada pilar nas lajes analisadas.

Para pilares com rigidez baixa ou media o deslocamento axial δ da laje é calculado no pilar analisado multiplicando a força de protensão P e a rigidez axial da laje, como mostra a equação 4.6.

$$\delta = \frac{PL}{EA} \quad (4.6)$$

Onde:

P é a componente longitudinal da força de protensão.

L é a distância de influência da força de protensão na laje analisada.

E é o módulo de elasticidade.

A é a área da seção da laje.

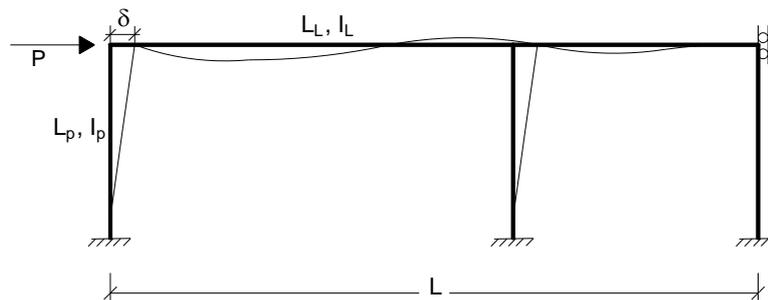


Figura 4.17 – Protótipo dos pórticos laje-pilar

Com os valores do deslocamento δ e o coeficiente K, é calculado o valor da força F retida em cada pilar em análise, conforme a equação 4.3. Transcrita em baixo.

$$F = K \left(\frac{EI_p}{L_p^3} \right) \cdot \delta$$

Para pilares com grande rigidez a força F foi submetida a um processo iterativo de fácil execução com o intuito de garantir uma distribuição adequada de forças. Esta aproximação sucessiva consiste em obter um primeiro deslocamento δ_1 , que fornece uma força F naquele pilar, esta nova força F é utilizada em um novo cálculo do deslocamento δ_1 e, portanto é gerado um novo valor para F. Assim o processo é repetido até convergir. Isso será visto mais adiante através de um exemplo no capítulo 5.

4.1.3. Cálculo Simplificado das tensões

Uma vez obtido o coeficiente ϕ e a força F retida em cada pilar, podem ser calculadas as tensões máximas e mínimas em determinados pontos da laje.

Nas seções onde as tensões a serem avaliadas ficam perto do ponto de aplicação de carga o coeficiente ϕ é utilizado. Nestas seções também é usada a tensão de protensão (σ_p).

A tensão de protensão (σ_p) relaciona a componente longitudinal da força de protensão P e a seção transversal da laje (A_p) onde é aplicada dita força. Para o cálculo das tensões nos diferentes pontos de análise basta multiplicar a tensão de protensão (σ_p) com o coeficiente ϕ .

$$\sigma_i = \phi \frac{P}{A_p} \quad (4.7)$$

A força P , é a força que passa na laje em cada ponto de análise descontando a força retida nos pilares.

Nas outras seções o coeficiente ϕ não tem efeito, devido ao fato de que as tensões já são uniformes, conforme visto no item 4.1.1. Aqui é empregada a tensão média (σ_m) que relaciona a força total P_t aplicada na estrutura entre a área transversal total da laje (A_t).

$$\sigma_i = P_t/A_t \quad (4.8)$$

4.2. Estudo Paramétrico de Lajes Nervuradas

Da mesma maneira como foi feito o cálculo do coeficiente ϕ para lajes maciças é realizado o cálculo do coeficiente para lajes nervuradas.

A laje em estudo é uma laje nervurada bidirecional, com vão típico de 10m e nervuras de 20 cm de altura solidarizadas a uma mesa de 5 cm de espessura apoiada diretamente sobre os pilares. A geometria típica do painel da laje está representada na Figura 4.18 no modelo 1 e a geometria da seção está representada na Figura 4.19. As propriedades mecânicas do concreto são as mesmas usadas no estudo de lajes maciças.

Os modelos foram gerados e processados com o programa SAP2000. Foi utilizada uma malha com elementos típicos de 25 cm x 25cm. Os pilares foram modelados como uma única restrição pontual, com restrição na translação z e liberdade na translação x, y e todas as rotações. Foram utilizados elementos tipo casca para modelar a mesa e a faixa de concreto e elementos do tipo viga para simular as nervuras. Na modelagem é considerada a excentricidade (*Offset*) entre nervuras e a mesa e a faixa de concreto conforme visto no capítulo 3.

Assim como para o caso de laje maciça analisa-se a distribuição das tensões, sem influência da contribuição dos pilares, causadas só pela componente longitudinal da força de protensão que atua no plano da laje, a qual gera uma tensão de protensão de 1 kN/cm² para cada largura de faixa avaliado. As tensões são avaliadas nas mesmas seções usadas na avaliação de lajes maciças no início deste capítulo.

4.2.1. Distribuição das Tensões sem Influência dos Pilares

Nesta parte do estudo são avaliadas as tensões para os mesmos casos estudados em lajes maciças. São obtidos coeficientes (ϕ) que relacionam as tensões máximas e mínimas com a tensão de protensão aplicada. É realizada a mesma análise comparativa usada para lajes maciças com o intuito de avaliar o comportamento das tensões neste tipo de lajes e mostrar uma comparação com os coeficientes obtidos nos diferentes modelos. Assim, no programa SAP2000 foram modelados quatro sistemas estruturais com as mesmas características de material e geometria e que só diferem no número de painéis empregados.

4.2.1.1. Modelo 5. Laje com painel isolado típico

O primeiro modelo trata-se de um painel isolado típico de laje nervurada de 10m x 10m, a geometria do modelo é apresentado nas Figuras 4.19 e 4.20.

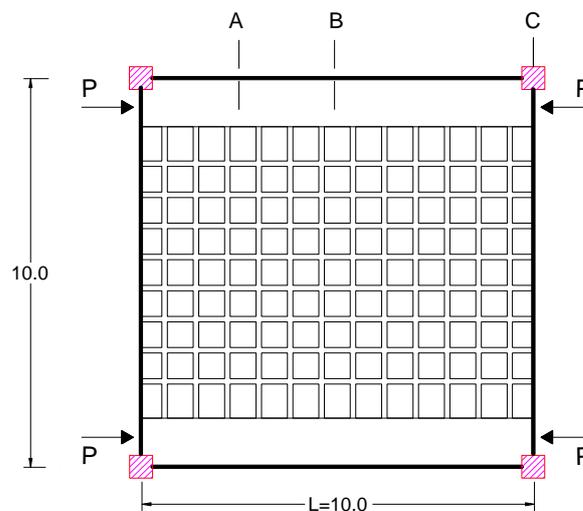


Figura 4.18 – Laje de referência para o modelo 5.

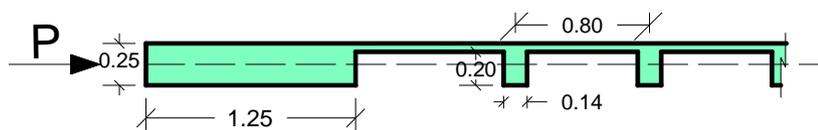


Figura 4.19 – Seção transversal A-A da laje nervurada.

Observe-se na Figura 4.20 que a distribuição das tensões na seção B, gerada pelo carregamento de 5000 kN aplicada em uma faixa de 2,5, têm a mesma configuração encontrada na análise das lajes maciças.

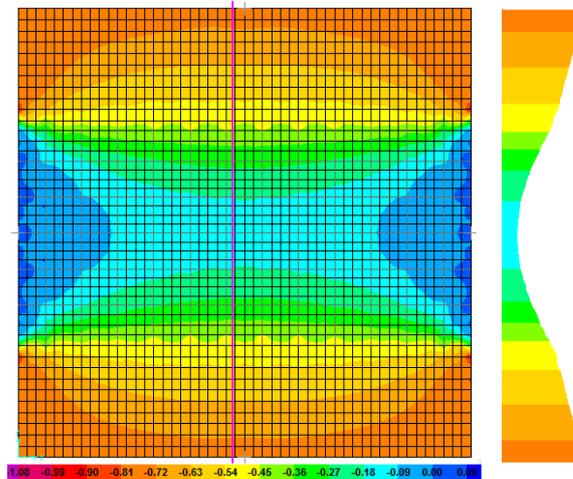


Figura 4.20 – Distribuição de tensões para carregamento de protensão aplicado em uma faixa de 2,5m.

A relação entre as tensões máximas e mínimas do modelo, assim como sua relação com a tensão de protensão, está indicada na Tabela 4.6 e ilustrada na Figura 4.21. Verifica-se que a tendência do coeficiente ϕ é igual ao das lajes maciças, e isso está refletido nos resultados mostrados na Tabela 4.6.

Tabela 4.6 – Relação entre a tensão máxima, mínima e a tensão gerada pela força de protensão.

Faixas	Seção	Tensões (kN/cm ²)		
		$\sigma_{min}/\sigma_{max}$	ϕ_{max}	ϕ_{min}
L/4	A-A	0.13	0.79	0.10
	B-B	0.18	0.77	0.14
	C-C	-0.03	0.79	-0.03
L/8	A-A	-0.02	0.68	-0.01
	B-B	-0.01	0.59	-0.01
	C-C	-0.03	0.79	-0.02
L/20	A-A	-0.07	0.42	-0.03
	B-B	-0.08	0.37	-0.03
	C-C	-0.03	0.78	-0.02
L/40	A-A	-0.09	0.27	-0.02
	B-B	-0.10	0.28	-0.03
	C-C	-0.02	0.74	-0.02

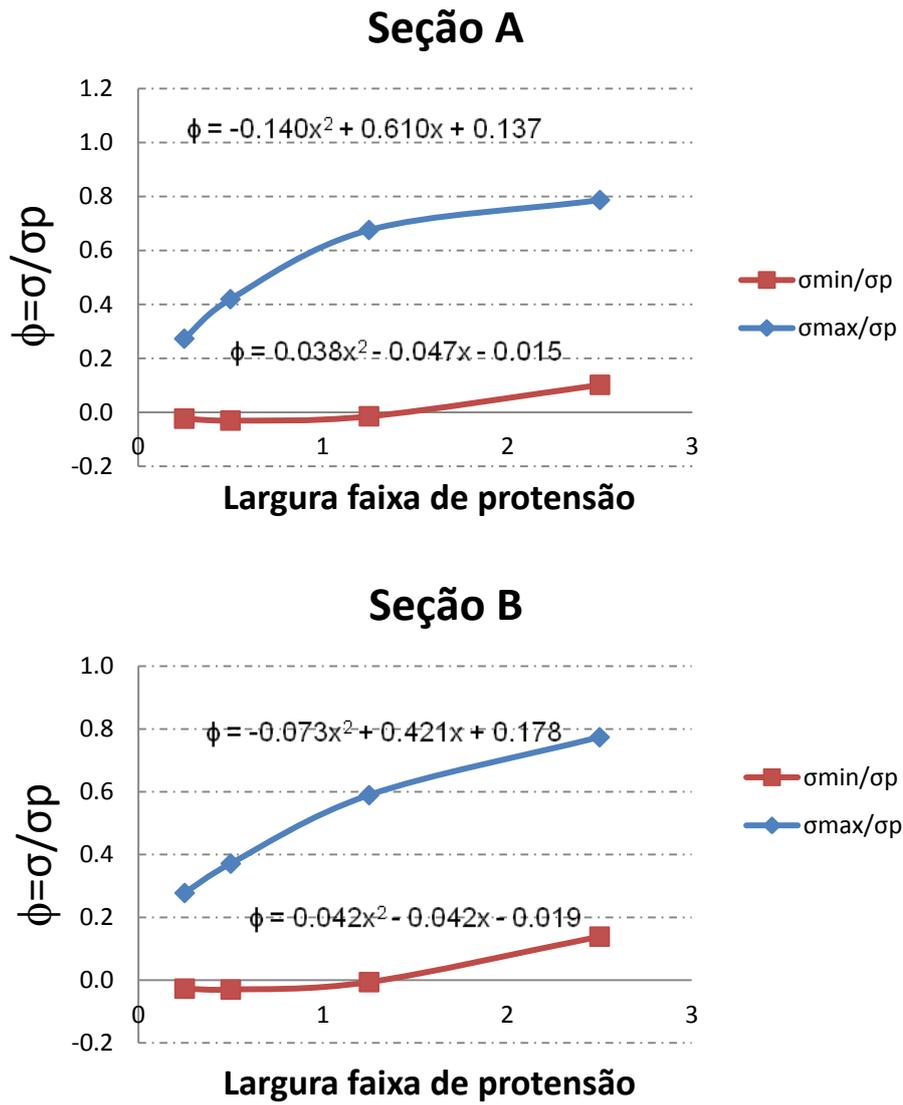


Figura 4.21 – Relação entre a tensão máxima, mínima e a tensão gerada pela força de protensão para as seções A e B.

4.2.1.2. Modelo 6 - Dois painéis de laje

É acrescentando um painel de laje para verificar a distribuição das tensões na continuidade dos painéis na seção C. A forma do modelo 6 está representada na Figura 4.22.

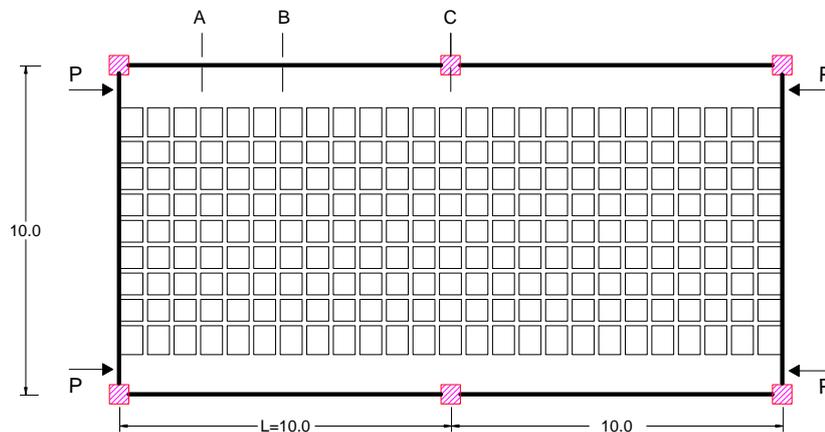


Figura 4.22 – Laje de referência para o modelo 6.

Na Figura 4.23 pode-se conferir a uniformidade da distribuição de tensões na metade da estrutura (seção C) para um carregamento equivalente de protensão de 5000 kN aplicado em uma faixa de 2,5 m de largura.

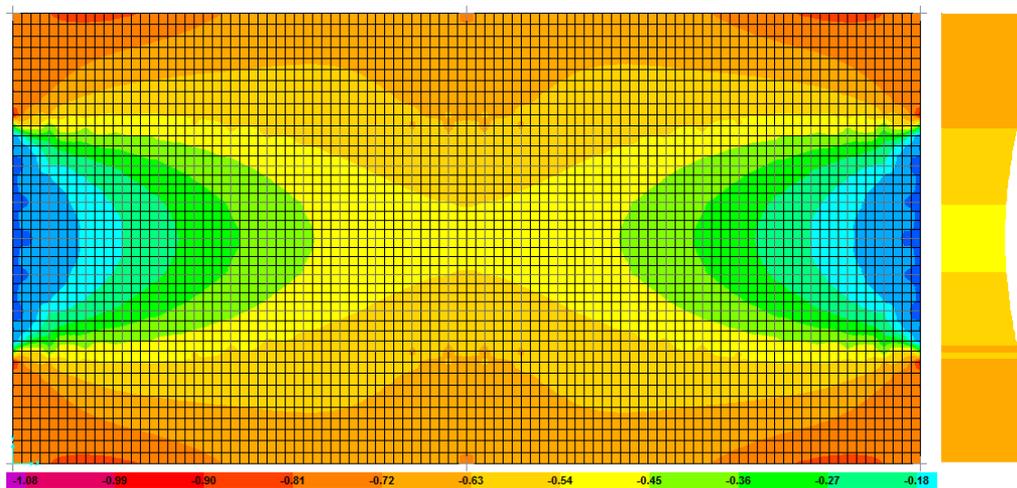


Figura 4.23 – Distribuição de tensões para carregamento de protensão aplicado em uma faixa de 2,5m.

A Figura 4.24 ilustra melhor a distribuição das tensões nas seções A, B, e C para diferentes larguras de faixa onde a força de protensão é aplicada.

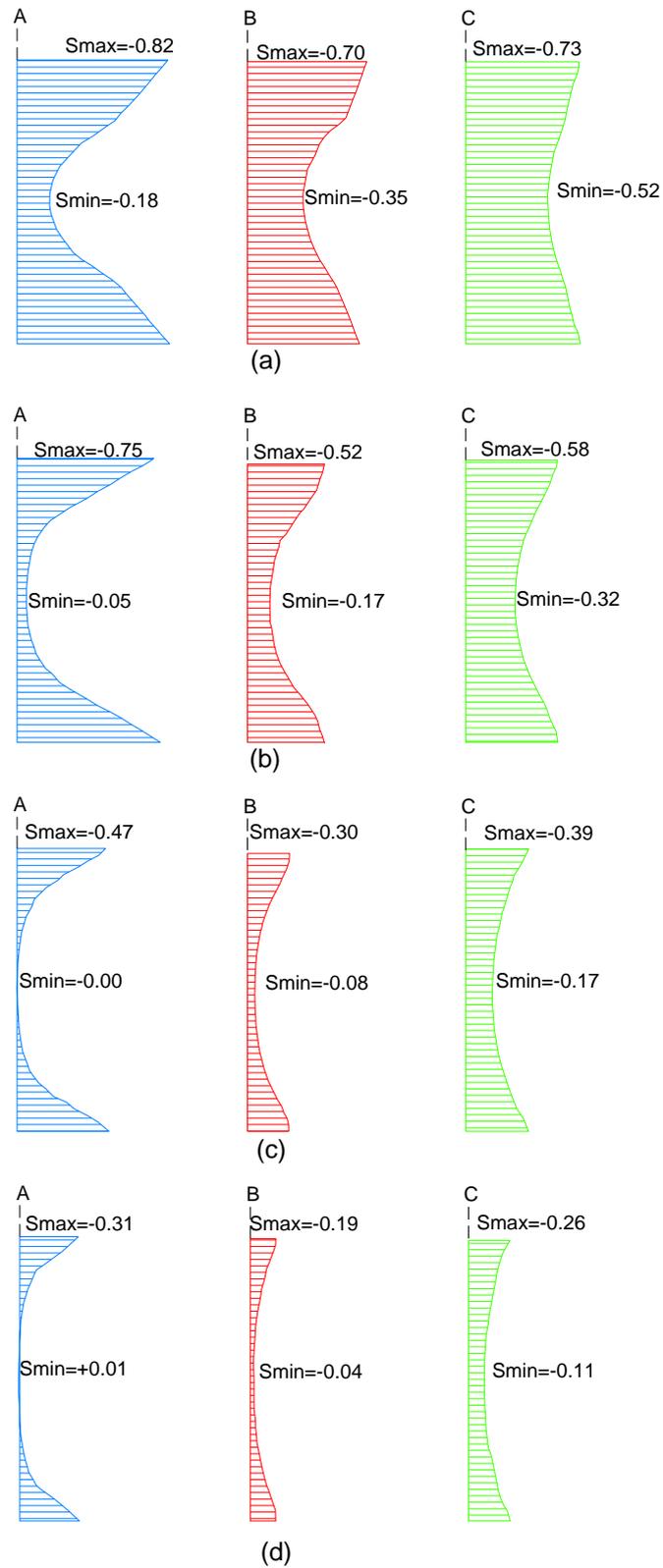
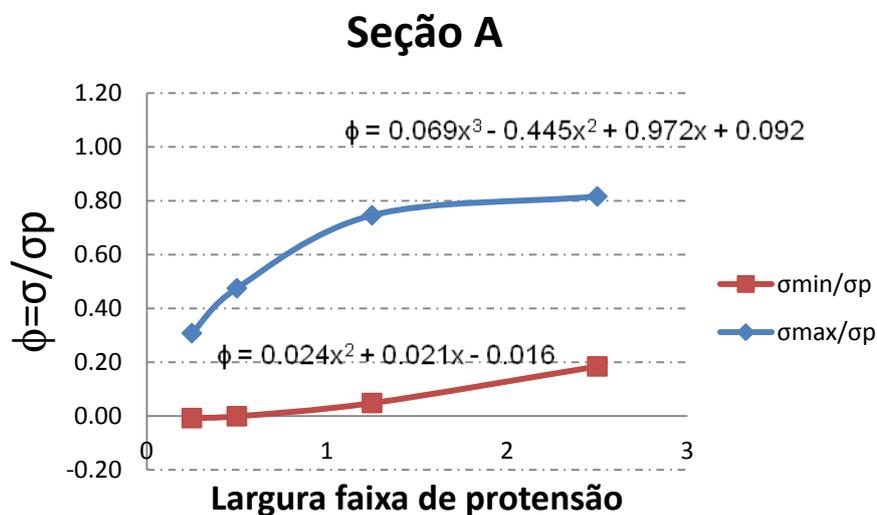


Figura 4.24 – Distribuição de tensões nas seções A, B e C para uma largura de faixa de protensão de $L/4$ (a), $L/8$ (b), $L/20$ (c) e $L/40$ (d).

Para ilustrar a relação das tensões máximas, mínimas e a tensão de protensão, apresenta-se a Figura 4.25 onde são plotadas as tensões da Tabela 4.7 para a obtenção das equações do coeficiente ϕ .

Tabela 4.7 – Relação entre a tensão máxima, mínima e a tensão gerada pela força de protensão.

Faixas	Seção	Tensões (kN/cm ²)		
		$\sigma_{\min}/\sigma_{\max}$	ϕ_{\max}	ϕ_{\min}
L/4	A-A	0.23	0.82	0.18
	B-B	0.51	0.70	0.35
	C-C	0.72	0.73	0.52
L/8	A-A	0.06	0.75	0.05
	B-B	0.33	0.52	0.17
	C-C	0.54	0.58	0.32
L/20	A-A	0.00	0.47	0.00
	B-B	0.27	0.30	0.08
	C-C	0.44	0.39	0.17
L/40	A-A	-0.02	0.31	-0.01
	B-B	0.24	0.19	0.04
	C-C	0.41	0.26	0.11



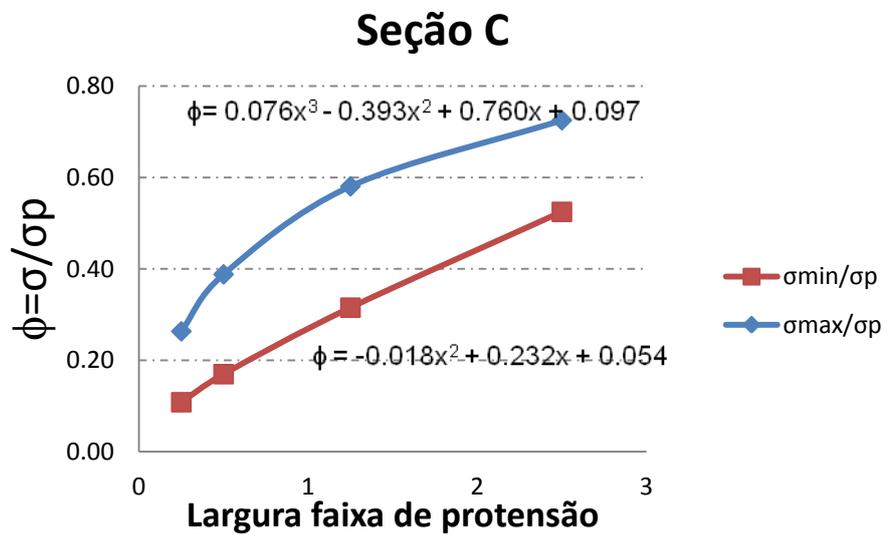
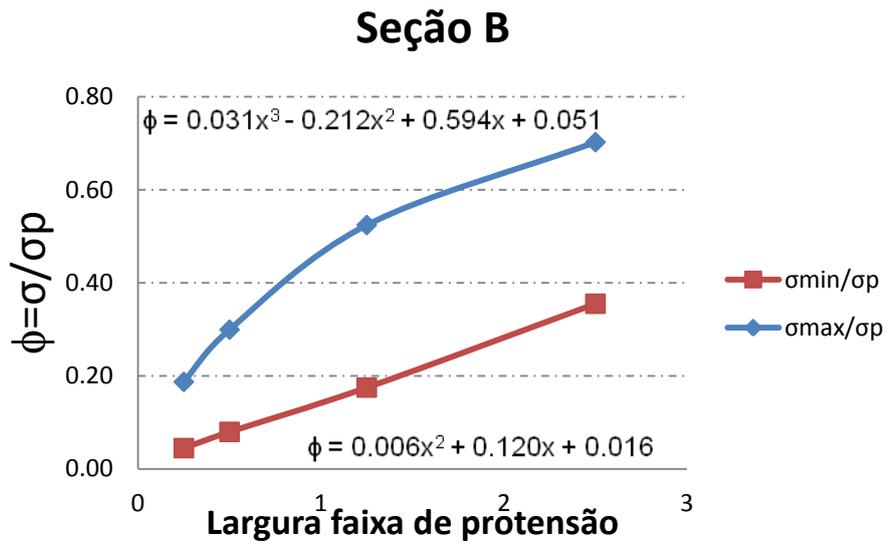


Figura 4.25 – Relação entre a tensão máxima, mínima e a tensão gerada pela força de protensão para as seções A, B e C.

4.2.1.3. Modelo 7 - Quatro painéis de lajes contínuas

Outro modelo é feito acrescentando dois painéis na estrutura, com a finalidade de avaliar as tensões mínimas e máximas no centro e na continuidade dos painéis das lajes. Este modelo é ilustrado na Figura 4.26.

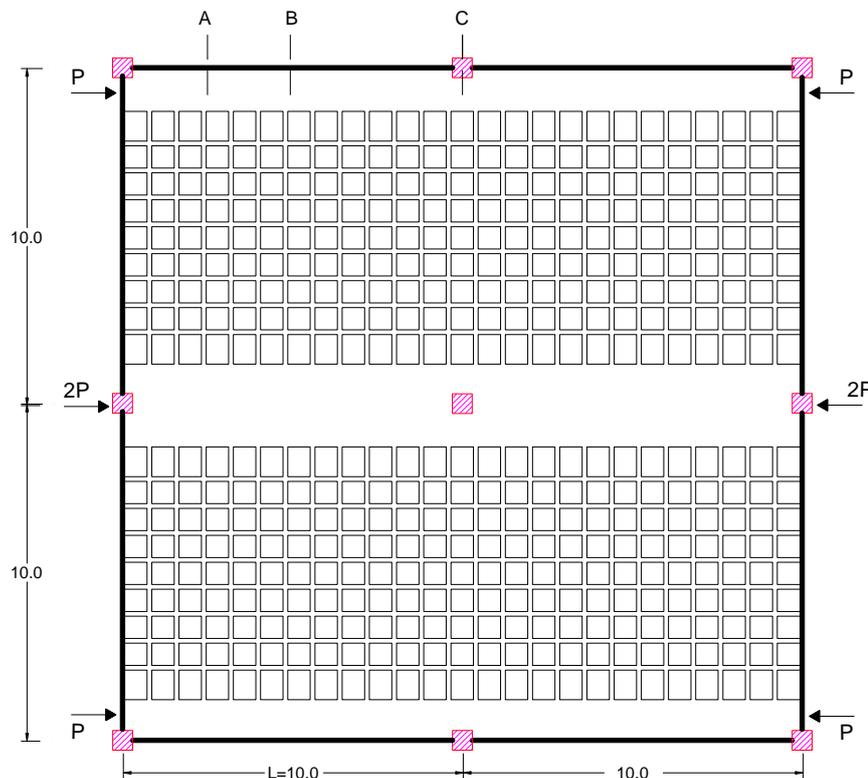


Figura 4.26 – Laje de referência para o modelo 7.

A Figura 4.27 apresenta a distribuição das tensões no plano da laje para as seções A, B e C para diferentes larguras de faixa onde a força de protensão é aplicada. Na seção C, diferente dos modelos em lajes maciças, as tensões ainda não são tão uniformes por isso que é realizado mais um modelo acrescentando painéis de laje na direção X, como será visto posteriormente.

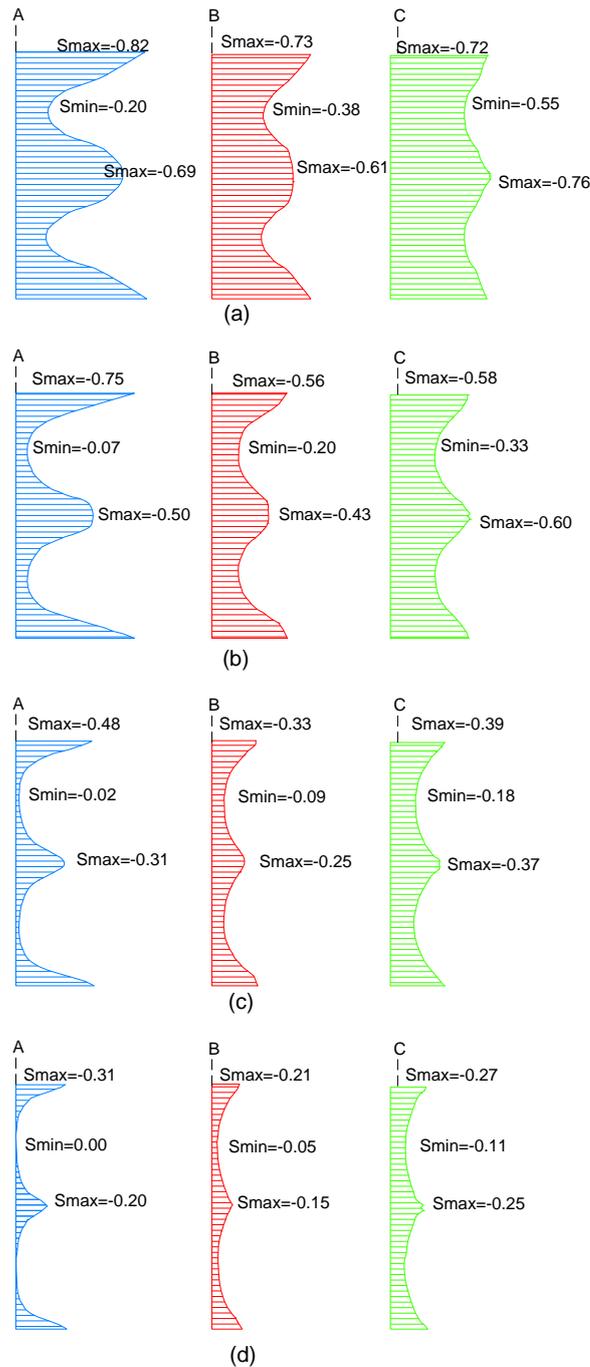


Figura 4.27 – Distribuição de tensões nas seções A, B e C para uma largura de faixa de protensão de $L/4$ (a), $L/8$ (b), $L/20$ (c) e $L/40$ (d).

Pode-se ver que são geradas tensões máximas nos extremos da laje e na continuidade, bem como tensões mínimas no centro dos painéis da laje. Os valores do coeficiente ϕ são apresentados na Figura 4.28.

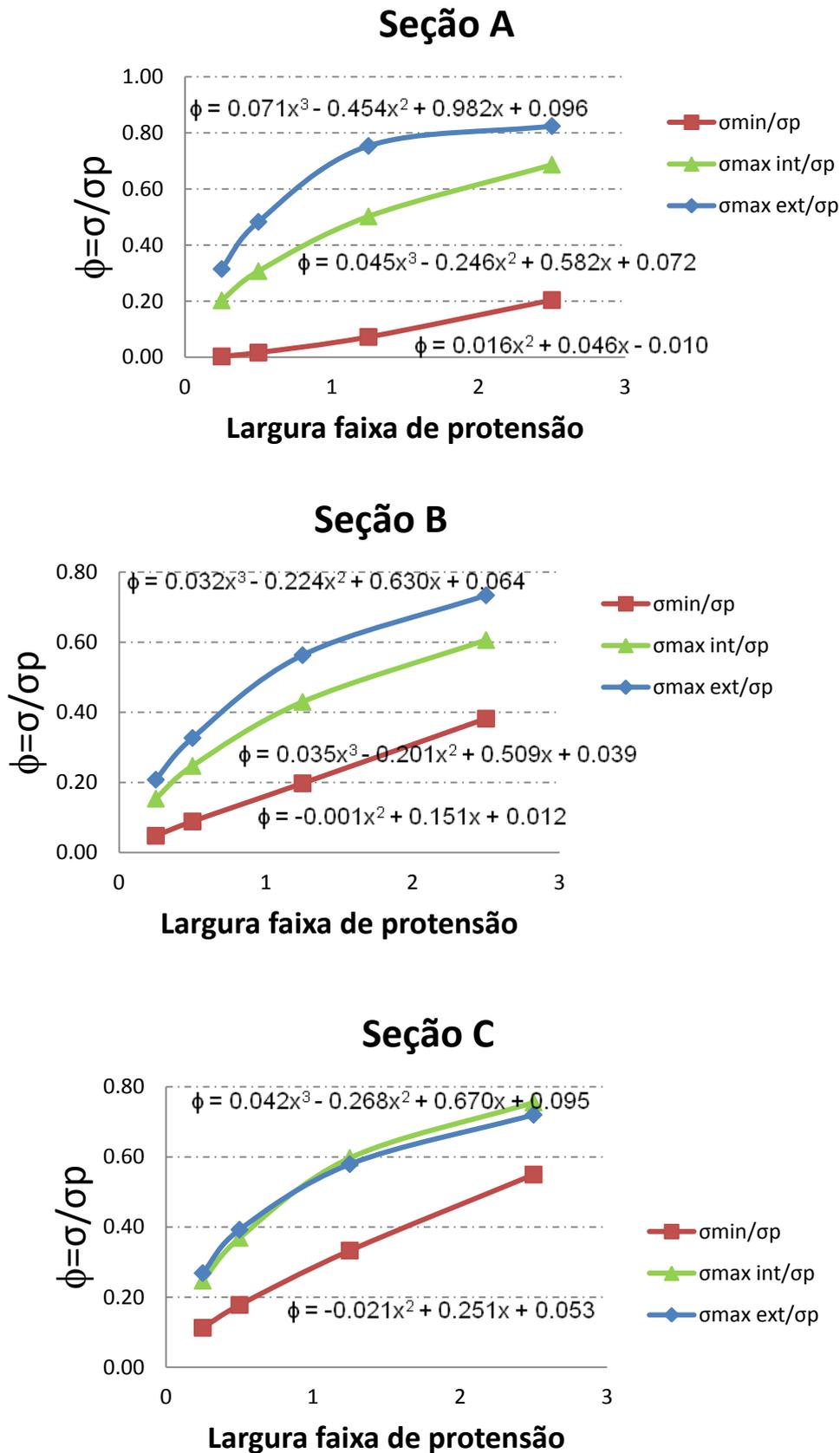


Figura 4.28 – Relação entre a tensão máxima, mínima e a tensão gerada pela força de protensão.

4.2.1.4. Modelo 8 - Seis painéis de lajes contínuas

Com o intuito de avaliar a distribuição de tensões para um maior número de painéis e conferir a uniformidade das mesmas, foram acrescentados dois painéis e avaliadas duas novas seções, como mostrado na Figura 4.29.

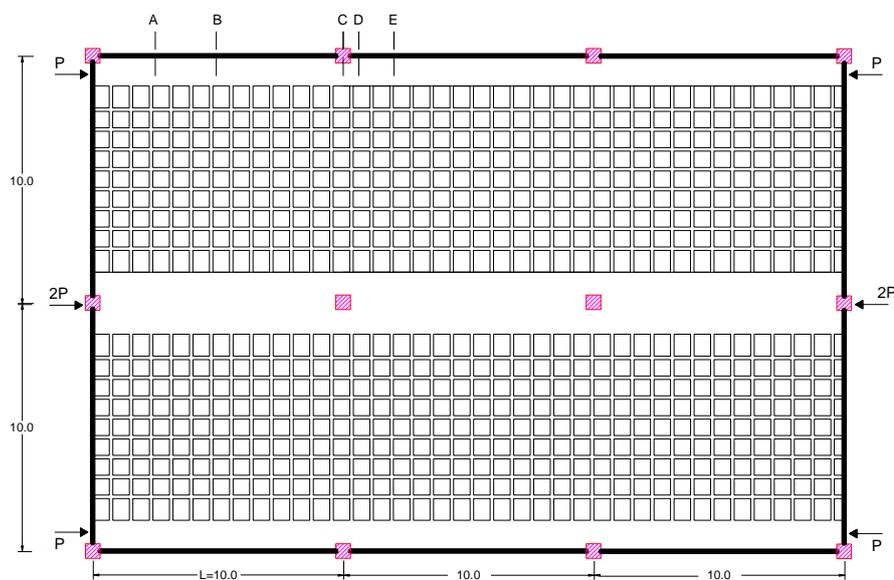


Figura 4.29 – Laje de referência para o modelo 8.

Neste modelo foram analisadas mais duas seções, a Figura 4.30 ilustra, para as diferentes larguras de faixas de protensão, a distribuição das tensões para as seções C, D e E. Na seção D, que fica a 60 cm da seção C, já pode-se ver uma distribuição de tensões mais uniforme.

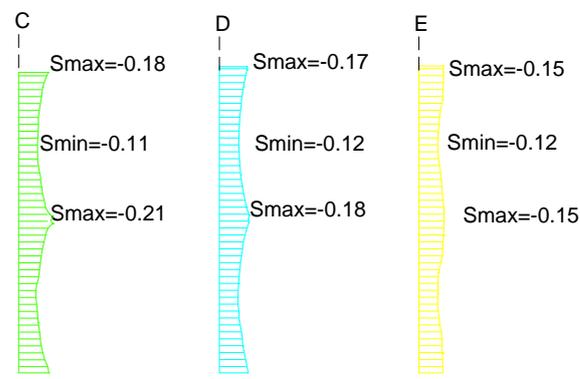
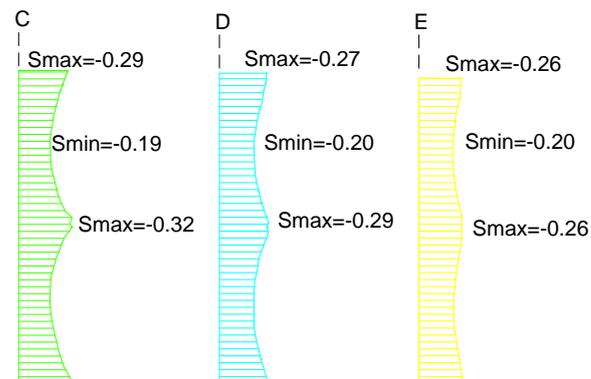
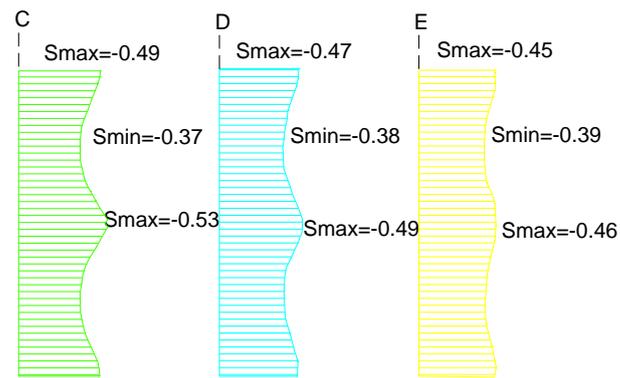
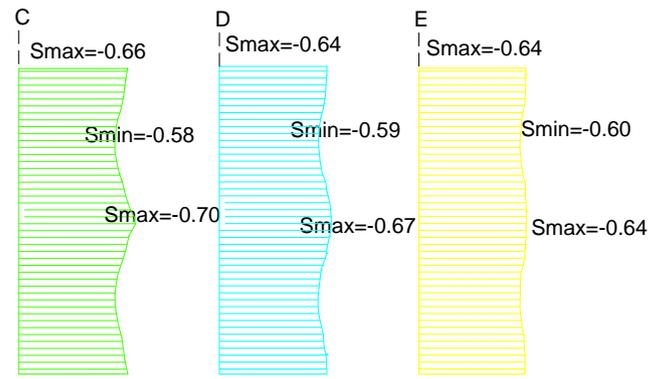


Figura 4.30 – Distribuição de tensões nas seções C, D e E para diferentes larguras de faixas de protensão.

Na Figura 4.31 são apresentadas as equações para a obtenção do coeficiente ϕ , para as seções C e D.

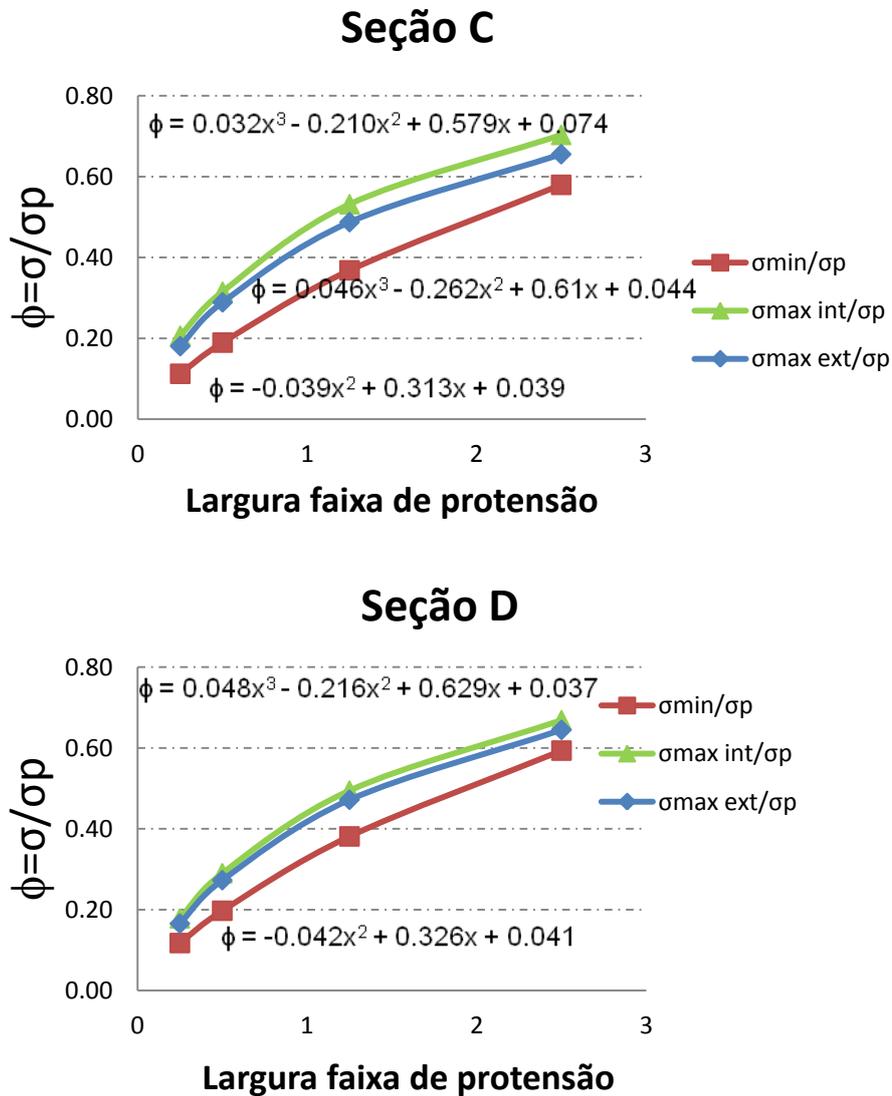


Figura 4.31 – Relação entre a tensão máxima, mínima e a tensão gerada pela força de protensão para as seções C e D.

Constata-se novamente o princípio de Saint Venant no caso das lajes nervuradas. No modelo 8, a partir da seção D, que só fica a 0,6m da seção C (ou seja, uma distância pequena) estudada em lajes maciças, as tensões mostram uma distribuição uniforme, conforme a Figura 4.30. A diferença entre tensões máximas e mínimas na seção C é de aproximadamente 27%, e na seção D é de 20%, ficando as tensões mais uniformes como no caso das lajes maciças.

Com relação à seção C, nos modelos de lajes contínuas a tensão máxima exterior difere da tensão máxima interior em aproximadamente 21%, entretanto na seção D esta diferença é de 6%. As tensões mínimas têm uma diferença de aproximadamente 5% entre os modelos.

Obtêm-se três gráficos que ajudaram na escolha do coeficiente ϕ . O primeiro deles é o gráfico da Figura 4.21 que fornece valor de ϕ para modelo de laje isolada. O gráfico da Figura 4.25 fornece valores de ϕ para laje de dois painéis. O gráfico da Figura 4.28 fornece valores de ϕ para laje de quatro painéis, o qual tem uma diferença de aproximadamente 16% em comparação com os valores da Figura 4.33 do modelo 8.

O coeficiente ϕ tem aplicação nas seções próximas à aplicação da carga de protensão, já para seções mais afastadas, como a seção D, as tensões são uniformes.

Nas Figuras 4.32, 4.33, 4.34 e 4.35 ilustra-se, para a seção B, a comparação dos resultados da análise das tensões das lajes maciças e nervuradas para as faixas L/4, L/8, L/20 e L/40 respectivamente.

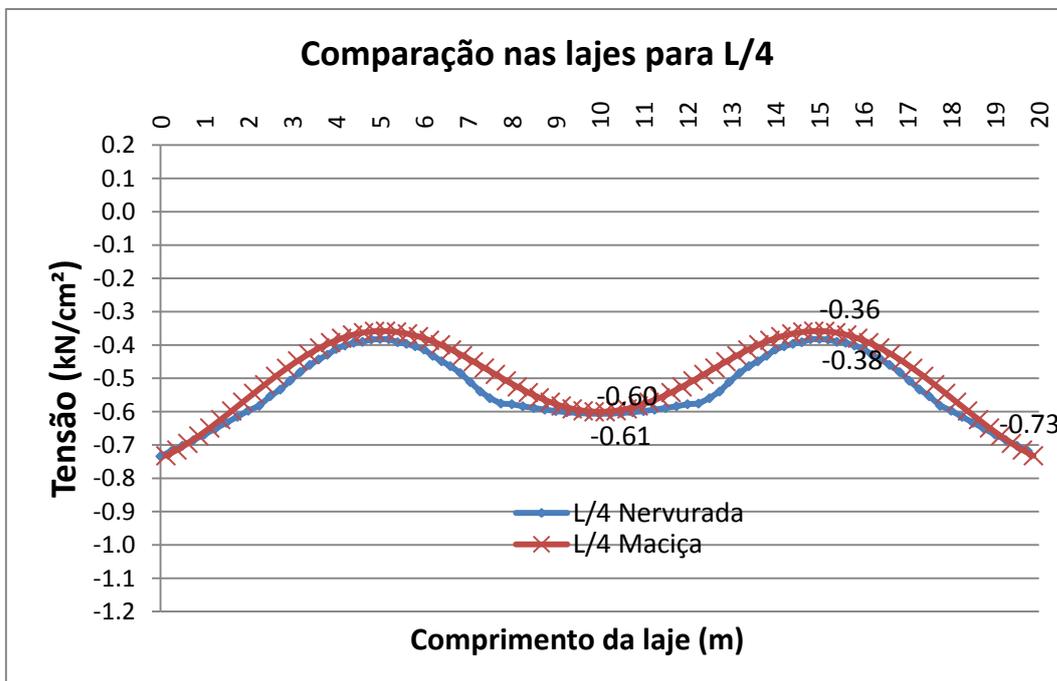


Figura 4.32 – Comparação da tensão entre lajes maciças e nervuradas para uma faixa de L/4 na seção B.

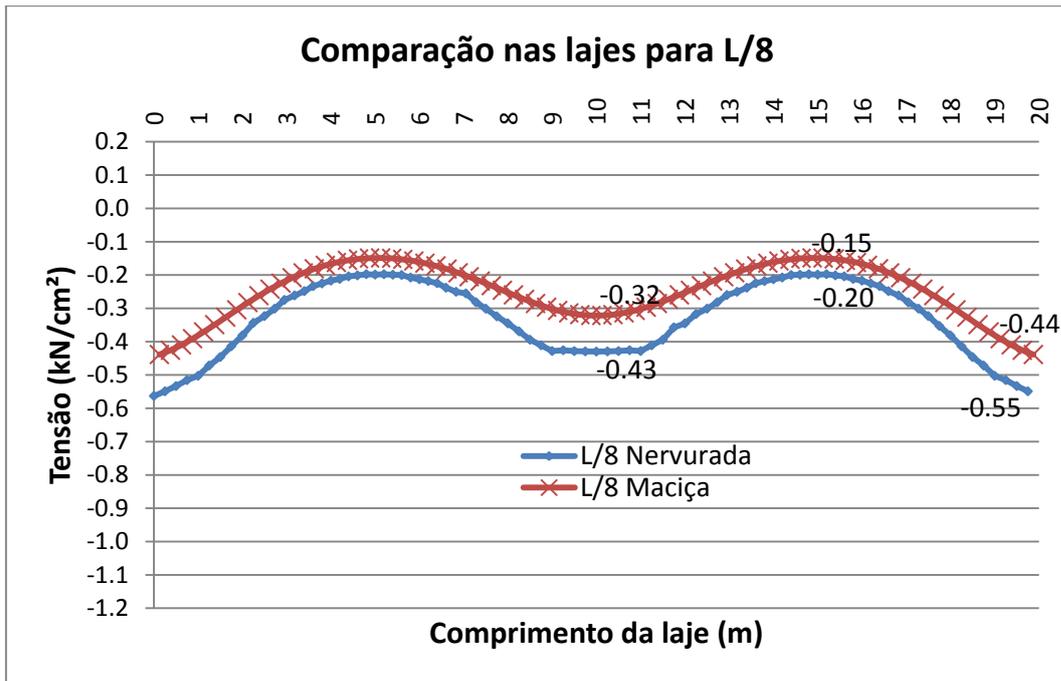


Figura 4.33 – Comparação da tensão entre lajes maciças e nervuradas para uma faixa de L/8 na seção B.

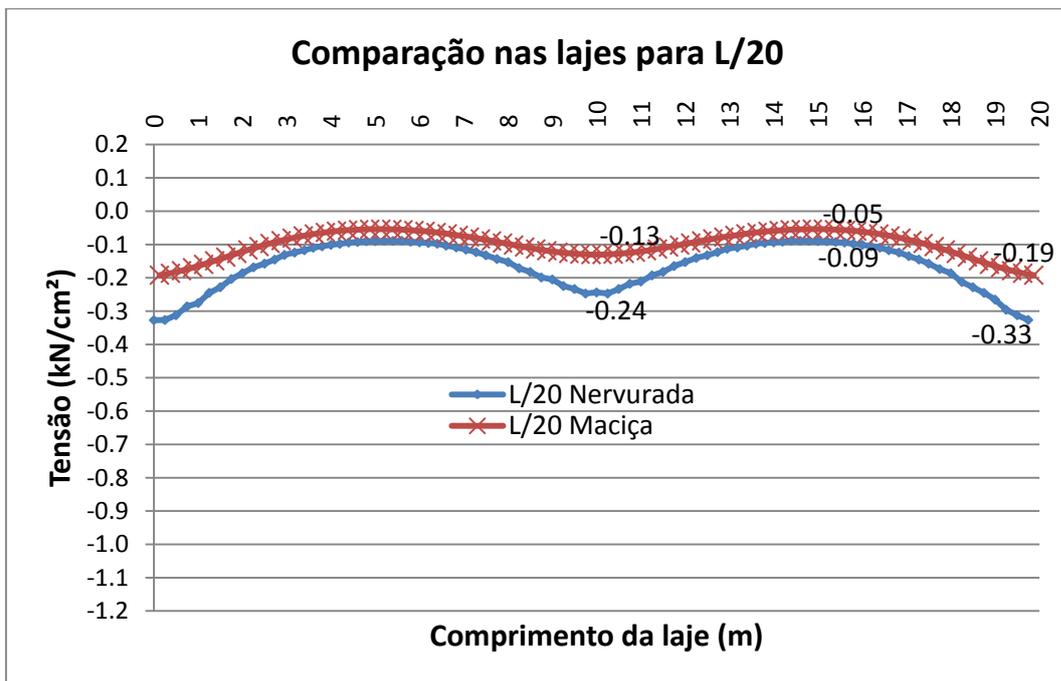


Figura 4.34 – Comparação da tensão entre lajes maciças e nervuradas para uma faixa de L/20 na seção B.

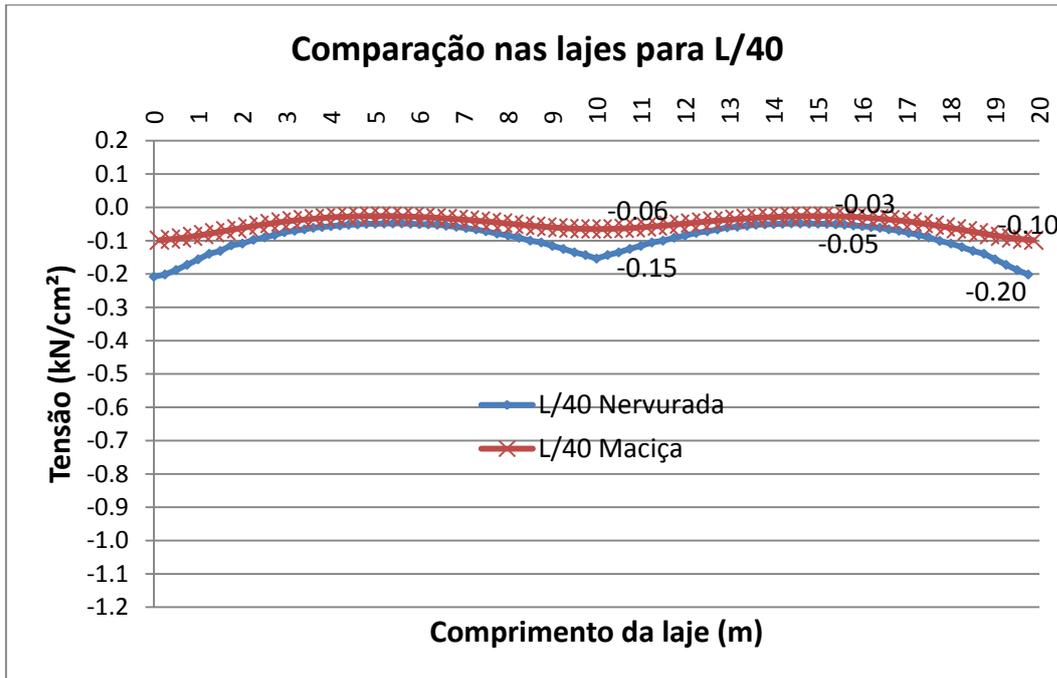


Figura 4.35 – Comparação da tensão entre lajes maciças e nervuradas para uma faixa de L/40 na seção B.

Este capítulo apresentou diversas análises numéricas, pelo método de elementos finitos para o estudo da distribuição de tensões nas lajes maciças e nervuradas a fim de obter um coeficiente que facilite a obtenção das tensões próximas ao ponto de aplicação da força de protensão onde as tensões não são uniformes.

A partir dos quadros e das figuras apresentadas, avalia-se a distribuição de tensões das lajes nervuradas, para posteriormente compará-lo com a laje maciça correspondente aos mesmos modelos. Constata-se que os resultados do coeficiente ϕ utilizando lajes nervuradas forneceram resultados com uma percentagem mínima de diferença (4%) em relação aos obtidos nos modelos de lajes maciças.