

### 3

## Opções Reais sob Incerteza Knightiana

Esta análise procura incorporar o tratamento quantitativo da incerteza, no sentido da definição clássica de Frank Knight, a um modelo de avaliação econômica de projetos de P&D baseado em Opções Reais, analisando algumas de suas consequências.

O conceito Knightiano estabelece uma marcante distinção entre incerteza e risco. Com base na consideração de que as decisões ótimas sugeridas pelo modelo de Opções Reais podem não ser seguidas pelos agentes decisores, quando estes então fazem escolhas subótimas, sugere-se que há elementos de incerteza Knightiana presentes na ambiência da decisão e que podem ser capturados.

Decisões subótimas em modelos de Opções Reais contrariam a regra básica do VPL, e como o decisor é racional por premissa, é possível encontrar uma espécie de “VPL *ex-post*” que se harmonize com essa escolha, em respeito à regra decisória do VPL. Por meio do emprego do valor esperado de Choquet e de um parâmetro de aversão à incerteza do agente decisor, é possível calcular esse VPL, que poderia também ser chamado de “VPL pós-decisão”. O modelo proposto é aplicado em estudo de caso.

### 3.1

#### Introdução

O economista Frank Knight (1921)<sup>11</sup> estabeleceu uma forte e importante distinção conceitual entre risco e incerteza. De uma maneira simplificada e adequada aos propósitos desta tese, a distinção de Knight estabelece que risco diz respeito a um estado futuro incerto, definido por meio de variável aleatória cujo espaço probabilístico é perfeitamente conhecido, como são os casos, por exemplo,

---

<sup>11</sup> Uma caracterização completa do conceito de Incerteza Knightiana pode ser encontrada também em Bewley (2003).

do lançamento de um dado, ou de uma moeda, ou das loterias de números. Já a incerteza corresponde também a um estado futuro incerto, só que definido por meio de variável aleatória onde esse espaço probabilístico não é perfeitamente conhecido, como é o caso, por exemplo, da ocorrência de uma terceira guerra mundial no próximo ano, ou quando ocorrerá uma nova crise econômica mundial. Savage (1954) fundamentou a modelagem estatística tradicionalmente empregada nos problemas econômicos, traduzindo incerteza como um risco sob probabilidades subjetivas, facilitando o seu tratamento quantitativo e “resolvendo” o problema do desconhecimento das probabilidades. Tal simplificação, um tanto atraente sob um ponto de vista prático, manteve o conceito Knightiano num longo ostracismo até o início da década de 1980.

No entanto, o poderoso “atalho” instituído por Savage no tratamento da incerteza já recebera forte contestação em Ellsberg (1961), ao demonstrar que o comportamento dos agentes é diferente quando estes se defrontam com uma situação de incerteza, mostrando que os axiomas por ele propostos são facilmente violáveis. Ellsberg também evidenciou que boa parte das pessoas, sob situação de incerteza, não age de acordo com a utilidade esperada (Neumann & Morgenstern, 1944) e que, se pudessem escolher, evitariam situações de incerteza em favor de situações de risco. Isso ficou conhecido como o “Paradoxo de Ellsberg”. A versão apresentada a seguir foi composta por Coimbra-Lisboa & Werlang (2006), e é semelhante ao experimento feito:

Considere o problema de decisão que consiste em retirar uma bola de uma urna. Duas urnas diferentes foram apresentadas:

1. Urna I: Contendo 50 bolas vermelhas (V) e 50 bolas azuis (A);
2. Urna II: Contendo 100 bolas, sem que se conheça a distribuição a priori entre as bolas vermelhas (V) e azuis (A).

Repare que retirar uma bola da urna I, antes de se tomar a decisão, é uma decisão sob risco, pois a distribuição de probabilidade é conhecida, entretanto, se a bola for retirada da urna II, então esta é uma decisão sob incerteza, pois não se conhece a distribuição de probabilidade antes de se tomar a decisão. O

experimento de Ellsberg baseou-se em análises sobre 4 possíveis loterias sobre essas duas urnas, assim definidas:

- Loteria IV: Retira-se uma bola da urna I e observa-se a sua cor. Se a cor da bola retirada for vermelha, então recebe \$ 100, caso contrário não recebe nada;
- Loteria IA: Retira-se uma bola da urna I e observa-se a sua cor. Se a cor da bola retirada for azul então recebe \$ 100, caso contrário não recebe nada;
- Loteria IIV: Retira-se uma bola da urna II e observa-se a sua cor. Se a cor da bola retirada for vermelha então recebe \$ 100, caso contrário não recebe nada;
- Loteria IIA: Retira-se uma bola da urna II e observa-se a sua cor. Se a cor da bola retirada for azul então recebe \$ 100, caso contrário não recebe nada;

Ellsberg, através deste experimento, estava tentando descobrir uma diferença no comportamento dos agentes econômicos em relação às duas urnas. Perguntou então aos participantes: Como você ordenaria as loterias (associadas a cada urna) de acordo com as suas preferências? Os resultados encontrados não foram surpreendentes:

- Urna I: IV ~ IA (indiferença entre IV e IA) para 100 % dos entrevistados;
- Urna II: IIV ~ IIA para 100 % dos entrevistados;

Àquela época já se conhecia o conceito da utilidade esperada, apresentada em 1944 por Von-Neumann e Morgenstern através do livro seminal da Teoria dos Jogos. Desse modo, supondo sua validade (e, por simplicidade, definamos  $U(\cdot)$  tal que  $U(0) = 0$ ):

- $EU(IV) = 0,5 U(100) + 0,5 U(0) = 0,5 U(100)$
- $EU(IA) = 0,5 U(0) + 0,5 U(100) = 0,5 U(100)$

Assim, se a teoria de Von Neumann-Morgenstern vale, então  $IV \sim IA$ , i.e., os indivíduos são indiferentes entre as loterias  $IV$  e  $IA$ . De acordo com a teoria de Savage, a urna  $II$  é uma típica urna de incerteza. Desse modo, cada indivíduo escolhe de acordo com uma probabilidade subjetiva individual. Segundo Savage, a utilidade esperada seria válida, com a diferença de que para cada pessoa atribuía-se probabilidades diferentes, subjetivas. Sejam:

- $\pi_v$  a probabilidade subjetiva de se retirar uma bola vermelha da urna  $II$ ;
- $\pi_A$  a probabilidade subjetiva de se retirar uma bola azul da urna  $II$ ;

Então, segue-se que:

- $EU(II V) = \pi_v U(100) + \pi_A U(0) = \pi_v U(100)$
- $EU(II A) = \pi_v U(0) + \pi_A U(100) = \pi_A U(100)$

Assim, sob a validade da teoria de Savage, segundo a qual a decisão sob incerteza pode ser reduzida à decisão sob risco, em que a probabilidade não é objetiva e sim subjetiva,  $IIV \sim IIA$ . Portanto, teremos que  $\pi_v = \pi_A$  e, além disso,  $\pi_v + \pi_A = 1$ , o que implica em afirmar que incerteza reduz-se a risco e que as duas urnas são equivalentes, pois a distribuição de probabilidade é subjetiva, mas é “convencional”.

$$\pi_v + \pi_A = 1 \Rightarrow \pi_v = \pi_A = 0,5$$

Ou seja, para todos os indivíduos que se revelam indiferentes, segue-se que, valendo a teoria de Savage,  $\pi_v = \pi_A = 0,5$ . Assim, poderíamos concluir que, dado que a incerteza reduziu-se ao risco, as duas urnas são idênticas e, portanto, os agentes deveriam ser indiferentes.

Tentando testar a evidência desse comportamento, Ellsberg propôs uma nova questão, através da qual desejava saber se os participantes consideravam, de fato, que as urnas fossem idênticas (como antecipava a teoria de Savage), ou não: “Qual das urnas é preferível?”. De fato, verificou-se que cerca de 50% consideravam as duas urnas indiferentes - o que corroborava a teoria de Savage.

Entretanto, os outros 50% preferiram jogar a urna I, dentre os quais se incluía Savage. Logo, a teoria de Savage não poderia ser universalmente aplicável, se fosse considerado que o experimento de Ellsberg era válido. Ou seja, Ellsberg conseguiu mostrar que para uma porção relevante da população (metade das pessoas) a urna I era preferível à urna II, o que significava que a teoria de Savage não conseguia explicar este fenômeno, pois tal resultado mostra que a escolha em uma situação onde a distribuição de probabilidade é conhecida é preferível à escolha em uma situação onde não se conhece a distribuição de probabilidade. Isso ficou conhecido como Paradoxo de Ellsberg.

Tendo por base este experimento (na realidade uma enquete), foi concluído que retirar uma bola da urna I é preferível à retirar uma bola da urna II – Ellsberg escreveu um artigo em 1961, onde argumentou que as pessoas não agiam de acordo com a hipótese da utilidade esperada, pois, segundo ele, a teoria teria que prever a possibilidade de que as pessoas prefiram situações onde conheçam a distribuição de probabilidade à situações onde esta distribuição seja desconhecida.

Em 1982, Schmeidler teve uma idéia de como resolver o Paradoxo de Ellsberg. Segundo Schmeidler, o que era difícil de aceitar era que  $\pi_v = \pi_A = 0,5$ . Se, por exemplo,  $\pi_v = \pi_A = 0,4$ , então isto justificaria a preferência pela urna I. O argumento de Schmeidler era de que jamais conseguíamos verificar as probabilidades da urna II, pois é uma mera representação instantânea sem interpretação objetiva já que não temos um experimento repetido, não fazia sentido em se fazer uma inferência estatística, mas apenas entender como as pessoas decidiam. Neste caso, por que não permitir que  $\pi_v = \pi_A \leq 0,5$  (i.e.,  $\pi_v + \pi_A \leq 1$ )?

Fácil de entender tal escolha se fossem comparáveis as utilidades ou valores esperados nas duas situações, mas não há como fazer inferências de valor em situações de incerteza sem lançar mão das premissas de Savage, em bases Bayesianas. Schmeidler (1982), ao resolver o paradoxo, chegou a uma inovação: O emprego do conceito de “Capacidades Convexas”, que envolvem probabilidades subaditivas (também conhecidas como “não aditivas”), definindo matematicamente uma noção de aversão à incerteza. Uma situação de incerteza

pode ser caracterizada por um conjunto de eventos e suas probabilidades sobre um determinado conjunto, não esgotando em 100% o somatório dessas probabilidades, ou seja, não sendo um espaço aditivo, tal como são as probabilidades no sentido comumente conhecido.

Seria possível então separar a incerteza do risco, na medida de um certo distanciamento da aditividade da probabilidade em bases convencionais, ou Bayesianas. Um valor esperado sob incerteza, sendo menor que um valor esperado sob risco, justificaria as atitudes mais prudentes diante da incerteza em agentes que são avessos a ela, como normalmente é o caso em setores industriais maduros. Isso abriu caminho para o cálculo de valores esperados sob incerteza, resgatando a distinção do conceito Knightiano, que prima pela prudência diante do desconhecido. Schmeidler foi um pioneiro no emprego da integral de Choquet (1955) envolvendo medidas não aditivas.

O desenvolvimento de Choquet buscou a simplificação de equações diferenciais não lineares, em aplicações na física. Schmeidler chegou posteriormente a resultado semelhante, trabalhando com teoria da decisão sob incerteza, mas soube reconhecer a anterioridade da formulação de Choquet. Em bases subaditivas, com capacidades convexas, portanto, emprega-se o Valor Esperado de Choquet, ou Choquet Expected Utility (CEU).

Projetos de Pesquisa e Desenvolvimento (P&D) são naturalmente dotados de uma carga adicional de incerteza (não, por enquanto, daquela no sentido de Knight, mas ainda sentido de Savage, ou seja, como um risco subjetivo), sobretudo de natureza técnica. O tratamento metodológico apropriado à avaliação de decisões econômicas sobre essa categoria de projetos requer a técnica das opções reais, como proposto por Huchzermeier & Loch (2001), e analisado por Santiago & Vakili (2005). Como já foi dito, nesses trabalhos o termo incerteza é equivalente a risco subjetivo. Modelar de forma específica as incertezas técnica e de mercado combinadas, com a disponibilidade de escolhas ao longo do projeto (opções reais), tornam possível a revelação da existência de uma aversão à incerteza no sentido proposto por Knight. Isto se verifica quando o decisor não cumpre a decisão ótima recomendada, fazendo uma escolha inferior ou subótima.

Quando uma decisão subótima é tomada no contexto de uma avaliação feita por meio de modelo de tratamento de risco, fica ligeiramente sinalizado que o valor no qual a decisão foi fundamentada, na mente do decisor, é algo menor, ou mais prudente. Há então uma espécie de valor esperado revelado que, *a posteriori*, seria mais aderente ao resultado final de um processo decisório sob condições de incerteza (agora, no sentido de Knight), que faz cumprir a regra decisória sobre o VPL. Esse valor, ou algo próximo a ele, é possível de ser encontrado por meio do Valor Esperado de Choquet (CEU).

Um valor esperado normal, sob probabilidades aditivas, é dado pela fórmula:

$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Onde  $x_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) são os valores da variável aleatória, e  $p_i$  suas probabilidades aditivas.

Um espaço não aditivo de probabilidades, como será visto mais adiante, não é algo muito confortável de ser definido, principalmente quando é grande a quantidade dos eventos em análise. Basicamente, a diferença na axiomatização em relação ao caso aditivo, ao qual estamos acostumados, está na *convexidade*, propriedade que caracteriza a aversão à incerteza. Modelos usuais de negócio que tratam dos riscos, incluindo os de Opções Reais, empregam distribuições de probabilidades aditivas, e o universo das finanças corporativas está acostumado a lidar com essa forma de definir eventos futuros. Seria motivador, então, a possibilidade de aplicar a um problema de avaliação o tratamento da incerteza no sentido de Knight, partindo de algo tão familiar quanto um espaço aditivo de probabilidades.

Adotar a aversão à incerteza no sentido de Knight significa considerar um aspecto da valoração que está mais ligado ao momento tácito da decisão, e não ao esforço de calcular propriamente o VPL de um investimento. Será visto que existe uma forma de conciliar os espaços probabilísticos aditivo e não aditivo numa modelagem, através de capacidades especiais conhecidas como *Capacidades*

*Simples* ou *Contrações Uniformes*. Por meio delas, poderá ser construída uma espécie de “ponte” entre os mundos de “puro risco” e de “pura incerteza”, no sentido de Knight, aproveitando modelos desenvolvidos na base convencional.

Neste capítulo vamos caracterizar, de forma simplificada e sem rigor formal, a axiomatização matemática do cálculo de valor esperado sob incerteza no sentido de Knight, que envolve, basicamente, as definições de: Capacidades Convexas, ou probabilidades não aditivas que exibem aversão à incerteza, das Capacidades Simples, e do Valor Esperado de Choquet. Em seguida, vamos introduzir o Valor Esperado de Choquet em modelo de avaliação econômica de Projetos de P&D baseado em Opções Reais, derivando algumas considerações analíticas dessa implementação.

Na sequência, vamos aplicar o modelo modificado ao projeto de P&D avaliado no capítulo 2, e analisar os resultados finais considerando a presença de aversão à incerteza no agente decisor. Finalmente, vamos concluir e sugerir indicações de desdobramentos para novas pesquisas.

### 3.2

#### **Capacidades Convexas, Valor Esperado de Choquet e Grau de Aversão à Incerteza**

O arcabouço utilizado para explicar a incerteza Knightiana foi desenvolvido por David Schmeidler e por um de seus discípulos, Itzhak Gilboa (Schmeidler&Gilboa, 1989). Eles utilizaram a integral de Choquet associada a capacidades convexas (probabilidades não aditivas que exibem aversão à incerteza). O tratamento matemático completo de capacidades pode ser encontrado em Choquet (1953), Dellacherie (1972), Dempster (1967) e Shafer (1976).

### 3.2.1

#### Capacidades Convexas

Sejam  $\Omega$  um espaço de estados finito e  $\varphi$  uma álgebra de eventos mensuráveis de  $\Omega$ . Uma função conjunto com valores reais  $v: \varphi \rightarrow [0,1]$ , é considerada uma *Capacidade Convexa* se apresentar as seguintes propriedades:

- i)  $v(\emptyset) = 0$ ;
- ii) Normalização:  $v(\Omega) = 1$ ;
- iii) Monotonicidade<sup>12</sup>:  $\forall A, B \in \varphi, A \subseteq B \Rightarrow v(A) \leq v(B)$ ;
- iv) Convexidade:  $\forall A, B \in \varphi, v(A \cup B) + v(A \cap B) \geq v(A) + v(B)$ ;

Importante ressaltar o significado da propriedade iv: É uma premissa eminentemente econômica, que evidencia a aversão dos agentes econômicos à incerteza. A letra “V” é adotada para diferenciar o caso não aditivo de probabilidade (capacidade convexa) do caso aditivo, que será referenciado pelo convencional “P”.

### 3.2.2

#### Valor Esperado de Choquet

Seja  $X$  uma variável aleatória.  $X: \Omega \rightarrow R$ , para todos os conjuntos abertos  $O$  de  $R$ ,  $x^{-1}(O) \in \varphi$ . A *integral de Choquet* é definida por:

$$\int f dv = \int_{-\infty}^0 (v(x \geq \alpha) - 1) d\alpha + \int_0^{+\infty} v(x \geq \alpha) d\alpha \quad (3.2.2.1)^{13}$$

O Valor Esperado de Choquet ( $E^C X$ ) é uma forma de reescrever a integral de Choquet, empregando uma função real de valor finito (funcional simples).

<sup>12</sup> A notação  $A \subseteq B$  indica que todo elemento do conjunto  $A$  é elemento do conjunto  $B$ .

<sup>13</sup> Verificar o anexo 7.5 para outras formas equivalentes de definir o valor esperado de Choquet.

Sejam:  $\Omega = \{w_1, \dots, w_n\}$ ,  $\sigma(\Omega)$  uma álgebra de eventos de probabilidades não aditivas e  $X$  uma função de valor real simples.

$$X: \Omega \rightarrow R \quad X(w_1)=X_1; \quad X(w_2)=X_2; \quad \dots; \quad X(w_n)=X_n;$$

$V_k, \dots, V_n = V\{w_k, \dots, w_n\}$  (Probabilidades não aditivas dos eventos – seguem as propriedades de i a iv);

$$X_1 \leq X_2 \leq \dots < X_n \text{ (ordenação crescente de eventos);}$$

$$E^c[X] = X_1 + (X_2 - X_1)V_{2\dots n} + (X_3 - X_2)V_{3\dots n} + \dots + (X_n - X_{n-1})V_n \quad (3.2.2.2)$$

Obs.:  $V_{2\dots n}$  é a probabilidade conjunta dos eventos  $w_2$  até  $w_n$ ;

Como exemplo, seja o espaço de probabilidades não aditivas com 3 estados da natureza apresentado em Simonsen & Werlang(1991), com  $X_1=1$ ,  $X_2=5$ ,  $X_3=3$ :

$$V_1=0.2 \quad V_{12}=0.5 \quad V_{123}=1$$

$$V_2=0.2 \quad V_{13}=0.6$$

$$V_3=0.2 \quad V_{23}=0.6$$

Procedendo à reorganização crescente dos eventos, ficamos com:  $X'_1=1$ ,  $X'_2=3$ ,  $X'_3=5$ , o que nos leva a rever as probabilidades, uma vez que os valores mudaram de posição, assim:

$$V'_1=0.2 \quad V'_{12}=0.6 \quad V'_{123}=1$$

$$V'_2=0.2 \quad V'_{13}=0.5$$

$$V'_3=0.2 \quad V'_{23}=0.6$$

Temos então, aplicando eq.(3.2.2.2):

$$E^c[X] = 1 + (3-1)(0.6) + (5-3)(0.2) = 2.6$$

Os autores demonstram um cálculo empregando uma medida equivalente para as verdadeiras probabilidades dos estados, “convertendo” as probabilidades

não aditivas em aditivas, por meio de um critério de máxima prudência (ponderando os melhores resultados pelas menores probabilidades, progressivamente), chegando ao mesmo resultado.

Uma das interpretações das probabilidades não aditivas é que estas representam uma aproximação, ou uma informação incompleta, sobre as verdadeiras e aditivas probabilidades dos estados. Assim, partindo-se do maior valor de estado e da menor probabilidade (a sequencia das atribuições de  $p'$  segue a ordenação assinalada à direita, ou, seguindo os estados,  $X_2, X_3$  e, finalmente,  $X_1$ ), temos:

$$X_1 = 1; \quad P'_1 = 0,4 \quad \text{Prob. Restante : } 1 - (P'_2 + P'_3) \dots\dots\dots(3)$$

$$X_2 = 5; \quad P'_2 = 0,2 \quad \text{Menor probabilidade (Maior resultado esperado)}\dots\dots(1)$$

$$X_3 = 3; \quad P'_3 = 0,4 \quad \text{Menor probabilidade dado } P'_2: (v_3 - P'_2)\dots\dots\dots(2)$$

$$p'_1 + p'_2 + p'_3 = 1$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i p'_i$$

$$E[X] = (0.4)(1) + (0.2)(5) + (0.4)(3) = 2.6$$

Para outro exemplo de aplicação, consultar Dow & Werlang (1992).

### 3.2.3

#### Capacidades Simples

Contudo, a modelagem costumeiramente empregada em gestão de riscos no mundo corporativo não diferencia incerteza de risco, sendo o universo probabilístico totalmente aditivo. Há uma categoria especial de capacidade que parte de uma medida aditiva e, por meio de uma espécie de “aperto” ou contração dessa medida aditiva, converte um valor esperado “em risco” para um valor esperado “em incerteza”, no sentido proposto por Knight. Segue a definição:

Seja  $(\Omega, \varphi, P)$  um espaço de probabilidades aditivas,  $\Omega$  finito e  $c \in [0,1]$ , e  $A$  um evento tal que:

$$V(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } A = \Omega \\ (1-c)P(A) & \text{se } A \neq \Omega \end{cases}$$

As capacidades simples, ou contrações uniformes, atendem a todas as propriedades das capacidades convexas (de i a iv), decorrente do fato de que  $V(A)$  é proporcional a  $P(A)$ , que é convexa. O valor esperado de Choquet das capacidades simples é dado por:

$$\begin{aligned} \text{Sejam } X: \Omega \rightarrow \mathfrak{R} \quad \text{Min}X &= \min X(w) \quad w \in \Omega \\ \text{Max}X &= \max X(w) \quad w \in \Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Então: } & \boxed{E^c[X] = c\text{Min}X + (1-c)E[X]} & (3.2.3.1)^{14} \\ \text{Ou } & - E^c[-X] = c\text{Max}X + (1-c)E[X] \end{aligned}$$

Ou seja, a integral de Choquet associada a uma contração uniforme pode ser obtida através de uma forma simples, como se fosse uma combinação convexa entre o pior que pode ocorrer (comportamento “maxmin”) e o valor esperado original antes de contrair a medida de probabilidade aditiva. Essa foi a idéia que Ellsberg teve para explicar a maneira como as pessoas escolhem quando se defrontam com uma situação de incerteza, refletindo um comportamento cauteloso, considerando o pior que lhes pode ocorrer. Reflete um cálculo de valor esperado coerente com as mais diversas posturas do agente diante da incerteza, envolvendo desde a completa aversão, quando  $c=1$ , até a completa indiferença, ou neutralidade, quando  $c=0$ .

Gilboa (2007) argumenta que o valor esperado de Choquet, por si só, não pressupõe qualquer noção de aversão à incerteza. Ele não é aplicável quando a medida de probabilidade não seja convexa, ou quando seu *núcleo* seja vazio. A

---

<sup>14</sup> O anexo 7.5 contém a derivação do valor esperado de Choquet para capacidades simples.

noção de núcleo de uma capacidade está diretamente ligada à medida de probabilidade aditiva embutida na capacidade.

De acordo com sua definição, dada uma capacidade  $\nu$ , seu núcleo é o conjunto convexo constituído por todas as medidas de probabilidade finitamente aditivas, que sejam tais que superem  $\nu$  pontualmente, ou seja:  $N(\nu) = \{\forall A \in \varphi, A \neq \Omega, : P(A) \geq \nu(A)\}$ ,  $\varphi$  representa todas as medidas de probabilidade aditivas.

Portanto, o núcleo de uma capacidade simples é dado por:  $N(\nu) = \{\forall A \in \varphi, A \neq \Omega : P(\{A\}) \geq (1-c)P(\{A\})\}$ . Quando  $c=0$ ,  $N(\nu) = \{P(\cdot)\}$ , e quando  $c=1$ ,  $N(\nu) = \varphi$ . Segue-se que, sendo  $\nu$  uma capacidade convexa e tendo um núcleo não vazio (Schmeidler(1989), Rosenmueller (1971,1972)):

$$\nu(A) = \text{Min}_{p \in \text{Núcleo}(\nu)} P(A).$$

Shapley (1972), demonstrou também que, se uma capacidade é convexa, seu núcleo é convexo e não vazio. Temos, então, que as capacidades simples possuem núcleo não vazio, fundamentando a aplicabilidade do valor esperado de Choquet a elas. Gilboa e Schmeidler (1989) mostram que um modelo bastante próximo do comportamento sob incerteza é aquele onde o agente escolhe de modo a maximizar o valor esperado associado ao menor valor, dentre os elementos do núcleo.

### 3.2.4

#### Grau de Aversão à Incerteza

O parâmetro  $c$ , na fórmula do valor esperado de Choquet (eq.(3.2.3.1)), pressupõe uma medida constante de aversão à incerteza por parte do decisor. Dow & Werlang (1992) definem essa medida constante como uma medida de distanciamento da aditividade do evento  $A$  e o seu complemento, quando há dois estados da natureza, como, por exemplo, as situações de “sucesso” e “insucesso”. Segue a definição:

Seja  $P$  uma probabilidade (aditiva ou não aditiva) e  $A \subset \Omega$  um evento.  $A^c$  é o complementar de  $A$ . A aversão à incerteza de  $P$  em  $A$  é definida por:

$$c(P, A) = 1 - P(A) - P(A^c)$$

De acordo com os autores, essa medida reflete um montante de probabilidade perdida pela presença de aversão à incerteza. Reflete o desvio de  $P$  à aditividade de  $A$ . Resulta dessa proposição o seguinte lema:

$c(P, A) = 0$  para todos os eventos  $A \subset \Omega$  se, e somente se,  $P$  é aditiva.

É natural que  $c(P, A) = c(P, A^c) = c$ . Ou seja, a medida equivale ao parâmetro “ $c$ ” de aversão à incerteza das capacidades simples, ou contrações uniformes, representando uma postura do agente decisor diante de situações de incerteza. É extensiva também a distribuições com “ $n$ ” elementos: Seja  $\Omega$  finito com  $n$  elementos e seja um espaço de eventos definido pelo conjunto potência de  $\Omega$ ,  $2^\Omega$ . Para todo  $\omega \in \Omega$ ,  $P(\{\omega\}) = (1-c)/n$ , onde  $c \in [0, 1]$ . Para  $A \subset \Omega$ ,  $A \neq \Omega$ ,  $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$ , é fácil verificar que  $c(P, A) = c$ .

Para o caso de uma capacidade simples  $V(A)$ , a medida de aversão à incerteza associada a  $A$  também é dado por  $c$ :

$$\begin{aligned} c(v, A) &= 1 - v(A) - v(S \setminus A) \Rightarrow \\ &= 1 - (1-c)p(A) - (1-c)p(S \setminus A) \Rightarrow \\ &= 1 - (1-c)[p(A) + p(S \setminus A)] \Rightarrow \\ &= 1 - (1-c) = c \end{aligned}$$

$$c(v, A) = c$$

Exemplo: Aproveitando o exercício já feito com o exemplo de Simonsen & Werlang (1991) (capítulo 3.2.2), com  $X_1=1$ ,  $X_2=5$ ,  $X_3=3$ , digamos que sejam eventos de um espaço aditivo com as mesmas probabilidades (i.e,  $P_1=P_2=P_3=0.333$ ). Teríamos então  $E[x] = 3$ , vamos assumir também que, sob condições de incerteza, seu valor esperado seja  $E^c[X] = 2.6$ , tal como calculado

anteriormente no exercício. Assumindo esses valores, podemos aplicar o valor esperado de Choquet para contrações uniformes (eq.(3.2.3.1)) e calcular um grau de aversão à incerteza  $c$  para esse agente:

$$E^c[X] = c\text{Min}X + (1-c)E[X] \Rightarrow 2,6 = c1+(1-c)3 \Rightarrow c = 0.2$$

### 3.3

#### Um modelo de Opções Reais para P&D com Aversão à Incerteza

Vamos retomar brevemente, mas com algum aprofundamento, o modelo aplicado apresentado no capítulo 2, por Santiago & Vakili (2005), baseados na proposição seminal de Huchzermeier & Loch(2001). O modelo trata uma das grandes fontes de incerteza (no sentido de risco subjetivo) em projetos de P&D, que é o desempenho técnico do desenvolvimento da nova tecnologia. É adotada uma equação de programação dinâmica para a valoração de nós intermediários (dinâmica de transição), de uma árvore multinomial formada pela evolução provável de uma variável aleatória, em casos de “sucesso” e “insucesso” a cada estágio, que representa um desempenho técnico  $X_t$ , detalhada a seguir:

$$V_t(X_t) = \max_{u_t} \left\{ (-C_t(u_t) + \frac{1}{1+r} E[\theta_{t+1}]), 0 \right\} \quad (3.3.1)$$

Onde:

Tabela 7: Principais variáveis do modelo de opções reais para P&amp;D.

Variável	Descrição
T	Tempo correspondente ao estágio, variando de 0 a T (tempo de lançamento da tecnologia);
$V_t$	VPL com flexibilidade (neutro ao risco) no estágio t;
$E[\theta_{t+1}] = P(V_{t+1}(X'_{t+1})) + (1-P)(V_{t+1}(X''_{t+1}))$	Valor esperado neutro ao risco com base no desempenho técnico no estágio t+1 e na decisão tomada em t, ou seja: $\theta_{t+1} = f(X_{t+1}, u_t)$ ; $X_{t+1}$ será detalhado mais adiante; P é a Probabilidade de sucesso, e (1-P) a de insucesso;
$u_t$	Decisão, ou opção a seguir no estágio t (Melhorar/Continuar/Parar);
$C_t(u_t)$	Custo da decisão, de acordo com o que segue: $C_t(u_t) = \begin{cases} 0, & \text{se } u_t = \textit{Abandonar} \\ c(t), & \text{se } u_t = \textit{Continuar} \\ c(t) + \alpha(t), & \text{se } u_t = \textit{Melhorar} \end{cases}$
R	Taxa de juros livre de risco (o risco técnico não é correlacionado aos movimentos de mercado, portanto, passível de diversificação);

Fonte: Elaboração própria.

Em cada um destes estágios, o tomador de decisão tem a flexibilidade de exercer otimamente as opções sobre o projeto. No seguinte estágio, t+1, o estado de desempenho do projeto depende do estado de desempenho no estágio t ( $X_t$ ), da decisão gerencial ( $u_t$ ), de um deslocamento  $K(u_t)$ , onde  $K(\textit{continuar}) = 0$  e  $K(\textit{melhorar}) = 1$ , e da incerteza representada por  $\omega_t$ , uma variável aleatória com média 0 e variância constante. Desta maneira,  $X_{t+1}$  pode ser representado pela seguinte equação:

$$X_{t+1} = \begin{cases} X_t + k(u_t) + \omega_t & u_t = \textit{Continuar}, \textit{Melhorar} \\ \textit{Parar} & u_t = \textit{Parar} \end{cases}$$

Os nós terminais da árvore são definidos por valores de mercado para a tecnologia implantada (curva de *payoff*), que devem considerar precificação neutra ao risco.

$$\Pi(x) = \begin{cases} M, & \text{se } x_T \geq R_m, & \text{prob } F(x_T) \\ m, & \text{se } x_T < R_m, & \text{prob } 1 - F(x_T) \end{cases} \quad V_T(x) = E[\Pi(x)] = (M - m) \times F(x_T) + m \quad (3.3.2)$$

M e m são valores máximos e mínimos pagos pelo mercado para os diversos desempenhos técnicos finais possíveis no desenvolvimento.  $R_m$  é um requisito médio de mercado para a tecnologia.  $F(x_T)$  e  $(1 - F(x_T))$  são probabilidades aditivas para os dois estados da natureza possíveis ao desempenho técnico final do projeto (igual ou acima, e abaixo dos requisitos de mercado).

Um esquema geral simplificado do processo é representado na Figura 25, que mostra um desenvolvimento em árvore binomial. Os nós anteriores são calculados recursivamente<sup>15</sup>, até o nó inicial,  $V_0(X_0)$ , no momento  $t_0$ . Os valores esperados dos nós terminais (os diversos  $V_t(X_t)$ ) são descontados em um período pela taxa de juros livre de risco  $r$ , para logo em seguida ser abatido o custo da decisão (vide eq.(3.3.1)) do estágio imediatamente anterior, para se chegar aos valores dos nós do penúltimo estágio. Esse procedimento é feito para as decisões “Melhorar” e “Continuar”, para todos os nós dos estágios anteriores, sendo que o máximo entre esses valores de decisão e 0 será o resultado final do nó calculado.

Para um resultado 0, a decisão ótima será “Parar”, representada pela cor vermelha. Para o caso de o máximo ser o valor da opção de “Continuar”, a representação será pela cor verde, e a mesma consideração é extensiva à opção “Melhorar”, na cor azul. O procedimento é repetido até o nó inicial. Ao longo da expansão da árvore, são considerados dois estados futuros possíveis: Sucesso, com probabilidade P, e insucesso, com probabilidade (1-P), em espaço de probabilidades aditivas. Esse modelo representa uma forma adequada de lidar com o risco endógeno na presença de flexibilidade gerencial, seu resultado final é um valor presente líquido com flexibilidade (VPL FLEX), e neutro ao risco. No momento  $t_0$ , a decisão diz respeito ao início do projeto, que acontece nos casos de  $u_t =$  “Continuar” ou “Melhorar”.

---

<sup>15</sup> Método conhecido como *backward induction*.

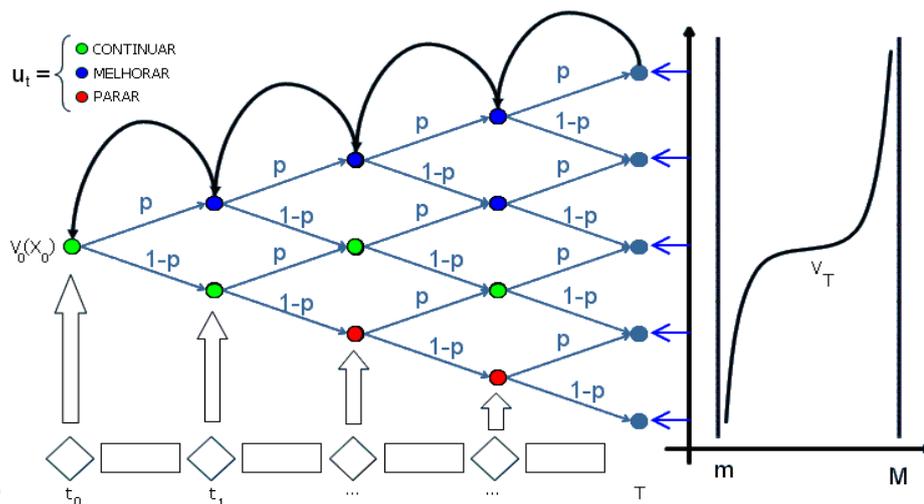


Figura 25: Modelo de valoração econômica de projetos de P&D.

A aplicação do conceito knightiano de incerteza, separando a incerteza do risco, possibilita considerar a presença de um grau constante de aversão à incerteza no ambiente da pesquisa tecnológica, numa dimensão tácita do ato decisório. É factível por meio da transformação da variável aleatória  $X_t$ , que representa tecnicamente o desenvolvimento tecnológico, numa capacidade simples, ou contração uniforme, conforme definido no capítulo 3.2.3, com o cálculo de valor esperado dado pela eq.(3.2.3.1). O resultado para a formulação da valoração dos nós interiores do modelo nos dá o VPL FLEX Choquet.

$$V_t^c(X_t) = \text{Max}_{u_t} \left\{ (-C_t(u_t) + \frac{1}{(1+r)} (c \text{Min} \theta_{t+1} + (1-c)E[\theta_{t+1}]), 0) \right\}$$

(3.3.3)

$$c \in [0,1]$$

Lembrando que  $E[\theta_{t+1}]$  e  $\text{Min} \theta_{t+1}$  também dependem de  $u_t$ . Pode-se considerar que o valor esperado de Choquet presente na nova formulação é dado por:  $E^c[\theta_{t+1}] = c \text{Min} \theta_{t+1} + (1-c)E[\theta_{t+1}]$ . Segue-se naturalmente que, quando  $c=0$  (ausência de aversão à incerteza),  $V_t^c(X_t) = V_t(X_t)$ , e, quando  $c=1$ , (total aversão à incerteza),  $V_t^c(X_t) = \text{Max}_{u_t} \{ (-C_t(u_t) + (1/(1+r))(c \text{Min} \theta_{t+1})), 0 \}$ .

A eq.(3.3.3) representa o emprego do valor esperado de Choquet, dado pela eq. (3.2.3.1), na eq.(3.3.1). Na ausência de incerteza, o valor esperado não muda

em relação à formulação original, mas na presença de total aversão à incerteza, o valor esperado é substituído pelo valor mínimo da distribuição aditiva, refletindo a postura de prudência máxima do agente.

É possível estender, opcionalmente, a aversão à incerteza à avaliação de mercado da tecnologia comercializada, por meio da eq.(3.3.4), definida logo abaixo. Entendemos, em princípio, que não seja adequada, por tratar-se a incerteza sobre um projeto de P&D característica estritamente ligada ao processo de desenvolvimento da tecnologia, e não ao seu lançamento no mercado ou implantação<sup>16</sup>, no caso de inovação de processo.

$$V_T^c(x) = E^c[\Pi(x)] = cm + (1-c)[(M-m) \times F(x_T) + m] \quad (3.3.4)$$

$$c \in [0,1]$$

Da mesma forma, a eq.(3.3.4) representa o emprego do valor esperado de Choquet, dado pela eq.(3.2.3.1), na eq.(3.3.2). Segue-se também naturalmente que, quando  $c=0$ ,  $V_T^c(X_T) = V_T(X_T)$ , e quando  $c=1$ ,  $V_T^c(X_T) = m$

Assim, o modelo adaptado ao tratamento da incerteza no sentido de Knight adota eq.(3.3.3) e eq.(3.3.4) (esta última caso se queira estender a abrangência da incerteza à tecnologia desenvolvida levada ao mercado), em lugar de eq.(3.3.1) e eq.(3.3.2), com o parâmetro adicional  $c$ , indicando o grau de aversão à incerteza do agente decisor. O parâmetro  $c$  vai de 0, representando ausência de aversão à incerteza, a 1, representando presença de total aversão à incerteza.

### 3.3.1

#### Algumas Implicações Analíticas do Novo Modelo

A nova formulação introduz, basicamente, o parâmetro de aversão à incerteza “ $c$ ” e o valor mínimo da distribuição de valores esperados ( $\text{Min}(\theta_{t+1})$ ), em bases aditivas, das opções para o estágio seguinte. Algumas conclusões

<sup>16</sup> A menos que seja considerada no modelo, em separado, uma aversão à incerteza específica de mercado (que poderia ser chamada de  $c'$ , ou  $c^m$ , por exemplo).

interessantes podem ser tiradas a partir das relações entre as variáveis críticas, na determinação do valor presente líquido com flexibilidade de cada opção no momento da decisão em  $t$ . A opção ótima será determinada por aquela de maior valor dentre as três opções disponíveis no modelo (**Parar**, **Continuar** ou **Melhorar**). Examinando a nova formulação, destacamos que essas variáveis críticas são:

- O Custo da decisão  $C_t$ ;
- O valor esperado descontado  $(1/(1+r)).E(\theta_{t+1})$ ;
- O valor futuro mínimo descontado  $(1/(1+r)).\text{Min}(\theta_{t+1})$ ;

É possível o estabelecimento de relações genéricas entre essas variáveis, que podem determinar, *a priori*, a decisão ótima a ser tomada. Dependendo do grau de aversão à incerteza apresentado pelo agente, responde-se, por meio dessas relações, a perguntas do tipo: Sob total aversão à incerteza do decisor ( $c=1$ ), que relação entre o custo da decisão ( $C_t$ ), o valor esperado descontado ( $[1/(1+r)].E(\theta_{t+1})$ ), e o valor mínimo futuro descontado ( $[1/(1+r)].\text{Min}(\theta_{t+1})$ ) garantiria o início de um projeto? Valor ótimo, nesse caso, determinado por uma opção **Continuar** ou **Melhorar**. Ou então: Com algum grau de aversão à incerteza ( $c>0$ ), qual a relação entre as variáveis que determina a parada ótima do projeto?

Primeiramente, é preciso investigar cada termo da formulação, para cada uma das decisões possíveis, de forma que tenhamos, separadamente, os custos, os valores esperados descontados e os valores mínimos futuros descontados, das opções ativas **Continuar** e **Melhorar**. A opção de **Parar** é definida por exclusão, ou seja, é ótima e de valor 0 quando os valores das opções ativas são negativos, sendo seu custo pré-definido como 0. Segue o detalhamento:

- $V_t^c C \equiv$  VPL com flexibilidade “Choquet” do projeto em  $t$ , na decisão de **Continuar**;
- $V_t^c M \equiv$  VPL com flexibilidade “Choquet” do projeto em  $t$ , na decisão de **Melhorar**;

- $Min\theta_{t+1}M \equiv$  Valor mínimo do projeto em t+1, na decisão de **Melhorar**;
- $Min\theta_{t+1}C \equiv$  Valor mínimo do projeto em t+1, na decisão de **Continuar**;
- $E[\theta_{t+1}M] \equiv$  Valor esperado do projeto em t+1, na decisão de **Melhorar**;
- $E[\theta_{t+1}C] \equiv$  Valor esperado do projeto em t+1, na decisão de **Continuar**;
- $E^c[\theta_{t+1}M] \equiv$  Valor esperado “Choquet” do projeto em t+1, na decisão de **Melhorar**;
- $E^c[\theta_{t+1}C] \equiv$  Valor esperado “Choquet” do projeto em t+1, na decisão de **Continuar**;

Obs. O valor esperado Choquet é dado por  $E^c[\theta_{t+1}] = cMin\theta_{t+1} + (1-c)E[\theta_{t+1}]$ ,  $c \in [0,1]$ .

- $C_tC \equiv$  Custo, no tempo t, da decisão de **Continuar**;
- $C_tM \equiv$  Custo, no tempo t, da decisão de **Melhorar**;

Regra de Decisão Ótima: **Parar**..... $\Rightarrow Max(V_t^cM, V_t^cC, 0) = 0$

**Continuar**.. $\Rightarrow Max(V_t^cM, V_t^cC, 0) = V_t^cC$

**Melhorar**.. $\Rightarrow Max(V_t^cM, V_t^cC, 0) = V_t^cM$

A valoração dos nós interiores do modelo é determinada pela comparação dos valores das decisões ativas entre si. Dessa forma, a eq.(3.3.3), adaptada às definições feitas acima, ficaria assim:

$$V_t^cC(X_t) = -C_tC + \frac{1}{(1+r)} E^c[\theta_{t+1}C], \text{ para a opção } \mathbf{Continuar} \text{ e};$$

$$V_t^cM(X_t) = -C_tM + \frac{1}{(1+r)} E^c[\theta_{t+1}M], \text{ para a opção } \mathbf{Melhorar};$$

Os resultados das relações relevantes entre as variáveis críticas, para a determinação de cada decisão ótima e considerando o nível de aversão à incerteza, podem ser visualizados no quadro resumo da Figura 26 (ver anexo 7.7 para maiores detalhes). Observando, primeiramente, os resultados para a decisão ótima “Parar”, na ausência de aversão à incerteza Knightiana ( $c=0$ ), verifica-se que os

valores esperados futuros das opções ativas “Melhorar” e “Continuar” não superam seus respectivos custos, resultando em valores presentes líquidos negativos para essas escolhas. Conseqüentemente, o ótimo aponta para a opção “Parar”, cujo valor presente é 0.

Na presença de total aversão à incerteza no sentido de Knight ( $c=1$ ), essa relação passa a ser determinada pelos valores mínimos das distribuições futuras de cada decisão. Já com uma aversão à incerteza intermediária, entre 0 e 1 (mix entre Risco e Incerteza), a relação determina a combinação convexa entre valores mínimos e os valores esperados, dando um peso “ $c$ ” ao primeiro, e “ $(1-c)$ ” ao segundo.

Para um ótimo na opção “Melhorar”, na ausência de aversão à incerteza ( $c=0$ ), a diferença descontada entre os valores esperados das opções “Melhorar” e “Continuar”, deve superar a diferença entre os respectivos custos, resultando num valor presente maior para a primeira. Seguindo a mesma lógica, na presença de total aversão à incerteza ( $c=1$ ), a diferença descontada de valor futuro mínimo, com relação ao mesmo valor da opção “Continuar”, deve superar a diferença entre seus respectivos custos.

Já com uma aversão à incerteza intermediária, entre 0 e 1, a diferença passa a ser sobre uma combinação linear entre valor esperado e valor futuro mínimo de cada opção, que deve, também, superar a diferença entre seus custos.

$u_t$ DECISÃO ÓTIMA	$c=0$ Sem aversão à incerteza (puro RISCO)	$c=1$ Com total aversão à in- certeza (pura INCERTEZA)	$0 < c < 1$ Mix entre RISCO e INCERTEZA
<b>PARAR</b> ● $Max(V_t^c M, V_t^c C, 0) = 0$	$[\frac{1}{(1+r)}] E[\theta_{t+1}M] \leq C_t M$ e $[\frac{1}{(1+r)}] E[\theta_{t+1}C] \leq C_t C$	$[\frac{1}{(1+r)}] Min \theta_{t+1}M \leq C_t M$ e $[\frac{1}{(1+r)}] Min \theta_{t+1}C \leq C_t C$	$[\frac{1}{(1+r)}] (c Min \theta_{t+1}M + (1-c)E[\theta_{t+1}M]) \leq C_t M$ e $[\frac{1}{(1+r)}] (c Min \theta_{t+1}C + (1-c)E[\theta_{t+1}C]) \leq C_t C$
<b>MELHORAR</b> ● $Max(V_t^c M, V_t^c C, 0) = V_t^c M$	$[\frac{1}{(1+r)}] (E[\theta_{t+1}M] - E[\theta_{t+1}C])$ > [ $C_t M - C_t C$ ]	$[\frac{1}{(1+r)}] (Min \theta_{t+1}M - Min \theta_{t+1}C)$ > [ $C_t M - C_t C$ ]	$[\frac{1}{(1+r)}] ( c (Min \theta_{t+1}M - Min \theta_{t+1}C) +$ $(1-c) (E[\theta_{t+1}M] - E[\theta_{t+1}C]) )$ > [ $C_t M - C_t C$ ]
<b>CONTINUAR</b> ● $Max(V_t^c M, V_t^c C, 0) = V_t^c C$	$[\frac{1}{(1+r)}] (E[\theta_{t+1}M] - E[\theta_{t+1}C])$ ≤ [ $C_t M - C_t C$ ]	$[\frac{1}{(1+r)}] (Min \theta_{t+1}M - Min \theta_{t+1}C)$ ≤ [ $C_t M - C_t C$ ]	$[\frac{1}{(1+r)}] ( c (Min \theta_{t+1}M - Min \theta_{t+1}C) +$ $(1-c) (E[\theta_{t+1}M] - E[\theta_{t+1}C]) )$ ≤ [ $C_t M - C_t C$ ]

Figura 26: Quadro resumo das relações entre as variáveis que determinam as decisões ótimas na presença de aversão à incerteza no sentido de Knight.

Para um ótimo na opção “Continuar”, basta inverter a desigualdade das comparações anteriores (opção ótima “Melhorar”), considerando que, em caso de igualdade, a vantagem é da opção de “Continuar”, pois é razoável considerar que não é interessante incorrer num custo maior (da opção de “Melhorar”) para obter o mesmo valor presente líquido da opção “Continuar”.

Importante observar, também, que as relações entre as variáveis no caso das opções ótimas “Melhorar” e “Continuar” são absolutamente determinantes desde que não se cumpra concomitantemente as relações da opção ótima de “Parar”.

Por exemplo, sob total aversão à incerteza ( $c=1$ ), acontecendo um ótimo na opção de “Parar”, poderá ser cumprida também a relação da opção ótima de “Continuar”, pois no caso em que  $V_t^c M$  e  $V_t^c C$  são negativos, a diferença entre os mínimos de  $\theta_{t+1}M$  e  $\theta_{t+1}C$  poderá ser inferior à diferença entre os custos das decisões. Ou seja, em acontecendo um ótimo na opção de “Parar”, as demais opções devem ser descartadas, mesmo que suas relações de otimalidade se cumpram. Isso ficará mais claro na aplicação do modelo mostrada mais adiante.

Uma situação de particular interesse é aquela que garante a continuidade de um determinado projeto sob uma condição de máxima severidade (decisão ótima no *gate* igual a, pelo menos, “Continuar”, com o máximo de aversão à incerteza, ou seja, com  $c=1$ ). Visto de uma forma mais simples e direta, considerando um ótimo dado pela decisão de “Continuar”, cumpre-se a relação:

$$C_t C \leq \frac{1}{(1+r)} \text{Min} \theta_{t+1} C$$

Ou seja, o valor mínimo da distribuição de valores futuros descontado não é inferior ao custo da decisão. Essa relação poderia ser chamada de “Espaço de Continuidade dos Projetos”. Graficamente, teríamos o que mostra a Figura 27.

A área verde determina o espaço de valores que garante a continuidade do projeto ao próximo estágio, e a vermelha a que garante a sua parada, ou interrupção ótima.

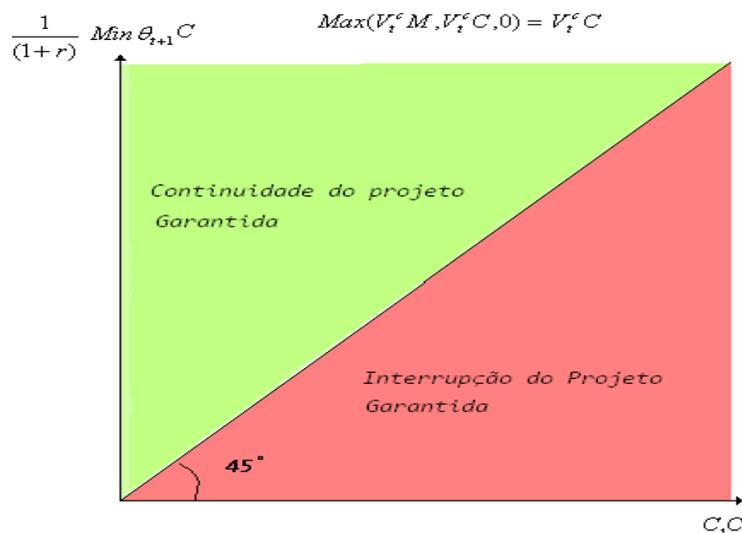


Figura 27: Espaço de continuidade dos projetos.

Poderíamos estar interessados, também, em saber se há alguma configuração de valores esperados e valores mínimos futuros descontados que possam anular a presença de algum grau de aversão à incerteza no agente, para qualquer decisão, ou seja, se essa configuração de valores determinaria a mesma

decisão para qualquer valor possível de “c”. Partindo da situação em que a decisão nos dois modelos (com e sem o tratamento de aversão à incerteza) seja a mesma, temos que:

$$\boxed{u_t(V_t^c(X_t)) = u_t(V_t(X_t))} \quad \text{Obs.: } u_t(.) = \text{Decisão tomada no tempo } t$$

Vamos verificar o cumprimento desta igualdade para o caso óbvio em que  $c=0$ , que não é exatamente o que se busca, e na situação em que o valor mínimo da distribuição futura se iguale ao valor esperado, ou seja, quando:

$$\boxed{\text{Min}\theta_{t+1} = E[\theta_{t+1}]}$$

Em particular, essa configuração de valores torna totalmente sem efeito a presença do parâmetro  $c$ . Faz todo o sentido, pois, uma vez eliminada a variabilidade do valor futuro, é eliminado o seu risco, e não há incerteza quando não há risco, pois incerteza nada mais é, na conceituação que consideramos, do que um risco “não aditivo”.

### 3.4

#### Aplicação e Resultados

Vamos apresentar agora um exemplo de aplicação do modelo aqui sugerido, considerando a valoração de um projeto real de P&D que visa ganhos incrementais de desempenho em processo industrial. A descrição completa do projeto, assim como de sua avaliação primária com o modelo de opções reais que nos serviu de base, encontra-se no capítulo 2. A valoração primária ampla do projeto trata também o risco em seu tempo de desenvolvimento, atribuindo à duração desses tempos distribuições de probabilidade triangulares (para maiores detalhes sobre a incerteza do tempo, ver Silva e Santiago 2009). Vamos desconsiderá-la por enquanto, ficando apenas com os resultados apresentados em avaliação parcial que considera uma duração determinística dos tempos de duração de estágio. Assim, o tempo total de duração de cada estágio do projeto é determinístico e no valor da moda da distribuição triangular apresentada no capítulo 2.

O projeto refere-se à derivação de um novo modelo matemático de fluidodinâmica computacional. Como “cérebro” de um simulador de processo, a nova modelagem visa obter um ganho incremental no rendimento da conversão de matéria-prima bruta em produto final, em processo produtivo de indústria extrativista. Os resultados da avaliação do projeto correspondem ao que seria obtido no modelo modificado aqui apresentado (com incerteza Knightiana), parametrizado em  $c=0$ .

Na Figura 28 é apresentado um resumo da avaliação, com a descrição de duas árvores de incerteza, com desempenhos técnicos ( $X_t$ ), valores esperados, ( $V_t$ ), custos das opções etc. A primeira (esquerda) leva em conta as flexibilidades do projeto, em escolha ótima de opções, e a segunda (direita) trata-o de forma determinística, sem o exercício de opções, para o cálculo do VPL simples.

Há uma ligeira diferença entre os números finais da avaliação feita no capítulo 2 e os reproduzidos com o novo modelo aqui apresentado, devido a este último ter sido implementado em planilha eletrônica *Excel*, e o primeiro em aplicativo escrito em C++. São erros de arredondamento acumulados, exemplo: No capítulo 2, o VPL Flex é de R\$ 162,07, enquanto que o calculado neste capítulo é de R\$ 162,25.

A árvore da esquerda demonstra o cálculo do valor do projeto com flexibilidade, indicando a decisão ótima de “Melhorar” em seu nó inicial. A árvore da direita demonstra o cálculo do valor do projeto sem qualquer flexibilidade, com se fosse exercida, obrigatoriamente, a opção de “Continuar” em todos os estágios.

VALORES DO PROJETO NA AUSÊNCIA DE AVERSÃO À INCERTEZA KNIGHTIANA ( $c = 0$ ). SITUAÇÃO DE PURO RISCO

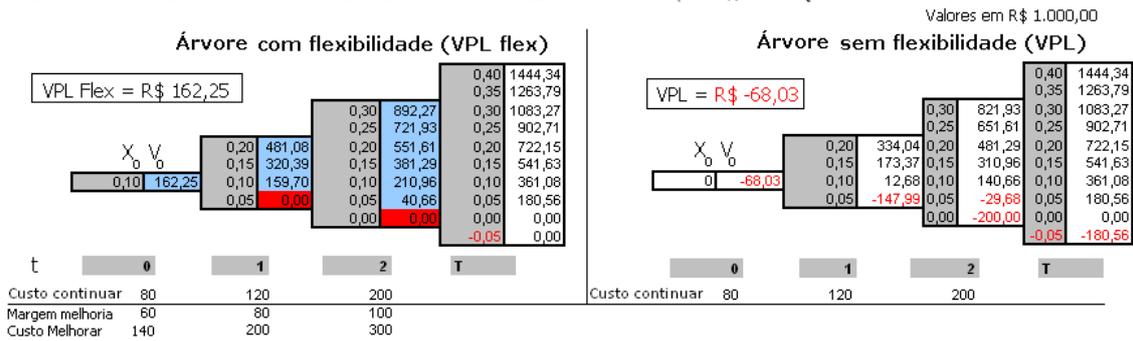


Figura 28: Resultados de avaliação de projeto de P&D por modelo de opções reais ( $c=0$ ).

Nessa visão sem flexibilidade, o projeto jamais seria iniciado, pois o VPL é negativo em R\$ 68,03 mil. As avaliações foram feitas considerando um decisor sem aversão à incerteza no sentido de Knight, o que se materializa com a fixação do parâmetro “ $c$ ” em 0. Na visão com flexibilidade, o valor do projeto (VPL flex) é de R\$ 162,25 mil. Consequentemente, o valor da opção é de R\$ 230,28 mil.

Considerando agora o outro extremo da aversão à incerteza (Figura 29), onde  $c=1$ , os mesmos cálculos de VPL com e sem flexibilidade, nesse modelo de opções reais com incerteza Knightiana, apresentam os seguintes resultados: VPL Flex = R\$ 0,00 e VPL = R\$ -522,81. Ou seja, o projeto perde sua atratividade econômica na visão com flexibilidade e a opção ótima é “Parar”, ou simplesmente não iniciá-lo. Os reflexos são de igual intensidade sobre as avaliações com e sem flexibilidade.

A total aversão à incerteza no sentido Knight agravou as exigências sobre o projeto em cada estágio, na medida em que deslocou os valores de mercado esperados em cada desempenho técnico para os valores mínimos das distribuições futuras. Como a aversão à incerteza, por premissa, não afeta os custos do projeto, a quantidade de células com opção ótima de “Parar” aumentou, contaminando o nó inicial.

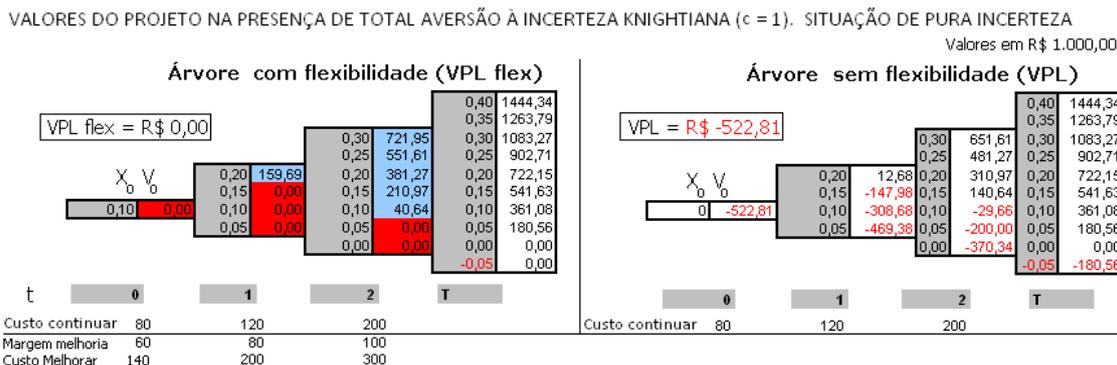


Figura 29: Resultados de avaliação de projeto de P&D por modelo de opções reais (c=1).

O quadro da Figura 30 detalha os cálculos nos termos do quadro de relação entre as variáveis apresentado na Figura 26, justificando as decisões ótimas apresentadas nos nós iniciais das árvores com flexibilidade, tanto para c=0 como para c=1.

$u_0$ DECISÃO ÓTIMA	c = 0 Sem aversão à incerteza (puro RISCO)	c = 1 Com total aversão à in- certeza (pura INCERTEZA)
<b>PARAR</b> ● $Max(V_0^c M, V_0^c C, 0) = 0$	<del>R\$ 302,25 ≤ R\$ 140,00 e R\$ 151,13 ≤ R\$ 80,00</del>	<del>R\$ 0,00 ≤ R\$ 140,00 e R\$ 0,00 ≤ R\$ 80,00 V<sub>t</sub><sup>c</sup>M &lt; 0 e V<sub>t</sub><sup>c</sup>C &lt; 0</del>
<b>MELHORAR</b> ● $Max(V_0^c M, V_0^c C, 0) = V_0^c M$	<b>R\$ 151,13 &gt; R\$ 60,00</b> V <sub>t</sub> <sup>c</sup> M = R\$ 162,25	<del>R\$ 0,00 &gt; R\$ 60,00</del>
<b>CONTINUAR</b> ● $Max(V_0^c M, V_0^c C, 0) = V_0^c C$	<del>R\$ 151,13 ≤ R\$ 60,00</del>	<del>R\$ 0,00 ≤ R\$ 60,00</del> OBS.: $Max(V_0^c M, V_0^c C, 0) \neq V_0^c C$ ! V <sub>t</sub> <sup>c</sup> C = R\$ -80,00

Figura 30: Detalhes dos cálculos do projeto, com destaque para as células das decisões ótimas.

As células marcadas com um grande “X” apresentam valores que não fazem cumprir a relação que determina uma escolha ótima, as demais mostram o porquê do cumprimento da relação. Pode-se observar que, quando c=1, são cumpridas as relações para as opções de “Parar” e “Continuar”, mas a primeira é preferencial, tal como foi explicado anteriormente nas explicações que se seguem à Figura 26.

A relação na célula da opção de “Continuar”, em  $c=1$ , se cumpre, mas como na da opção “Parar” também, esta última prevalece.

Os diferentes resultados ótimos para quando  $c=0$  e  $c=1$  mostram que um mesmo projeto pode ser avaliado de forma diferente por decisores com percepções diferentes (e muito opostas), quando se leva em conta a aversão à incerteza. A base de cálculo para o tratamento do risco é a mesma, o que difere é somente a postura diante da incerteza.

Acontece radical mudança de decisão quando a máxima aversão à incerteza é introduzida na avaliação, surge então naturalmente a pergunta: Sob que grau de aversão à incerteza, partindo de  $c=0$ , a decisão se modifica? Interessante então examinar um exercício de sensibilidade sobre o grau de aversão à incerteza do agente decisor.

No caso desse projeto, por meio do recurso “atingir meta” do *Excel*, chegamos ao valor de  $c=0,36$  para a decisão ótima mudar de “Melhorar” para “Parar”. Não houve trânsito ótimo pela opção de “Continuar”, reflexo da configuração particular de custos e valores esperados futuros para essa opção, no caso específico desse projeto.

Os resultados da sensibilidade podem ser visualizados na Figura 31. Verifica-se que o valor da opção é sempre positivo e não decrescente. Os valores de VPL são deprimidos fortemente na medida em que aumenta o grau de aversão à incerteza do decisor.

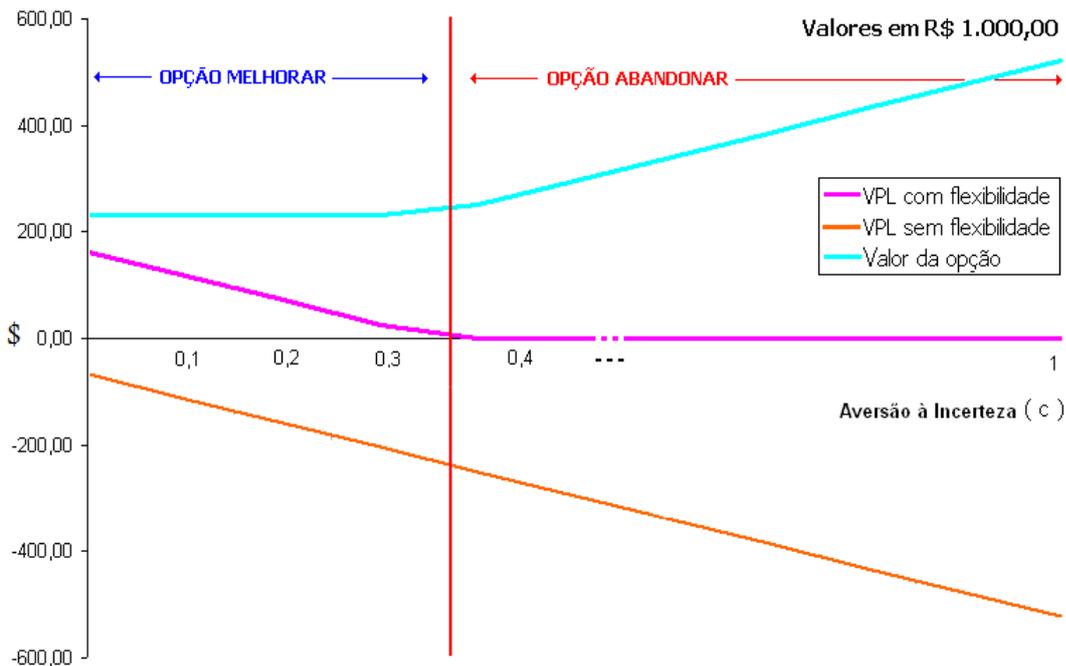


Figura 31: Sensibilidade sobre os VPLs a variações na aversão à Incerteza.

Percebe-se que, provavelmente devido aos ganhos modestos proporcionados por uma inovação incremental, em mercado com margens comprimidas, a tolerância à incerteza implícita é pequena, e que o projeto só é viável na presença da opção de “Melhorar”.

Interpretando esse resultado, o ambiente decisório que envolve a avaliação desse projeto é muito sensível à ocorrência de eventos inesperados, que fujam à aditividade em que se baseia o seu tratamento de risco. O resultado dessa sensibilidade sobre o parâmetro “c” deriva intrinsecamente de toda a parametrização estabelecida para o projeto, envolvendo: A evolução de sua variável técnica ( $X_t$ ), que determina a construção da árvore de incerteza, de seus valores finais de mercado (curva de *payoff*, ou  $V_T$ ), dos valores dos nós intermediários  $V_t$  calculados por *backward induction*, dos custos das opções (que são o mesmo que o custo das decisões), da taxa de juros livre de risco, das probabilidades aditivas de sucesso e insucesso, da quantidade de estágios, da duração do projeto etc.

Obviamente, valores diferentes para esses parâmetros poderão determinar uma tolerância implícita maior a situações adversas não desejadas, considerando a

premissa de que o agente econômico é avesso à incerteza e prima por ações mais prudentes quando se depara com ela.

Fosse diversa essa configuração de parâmetros, teríamos certamente outro comportamento, como por exemplo, no caso apresentado na Figura 32. Nesse projeto fictício, há uma tolerância maior à incerteza, e trânsito ótimo pela opção de “Continuar”, antes de chegar ao ótimo na opção “Abandonar” (Parar).

Certamente, não é fácil estimar a aversão à incerteza de um decisor antes que ele tome propriamente uma decisão sobre um determinado projeto. Essa aversão pode mudar de acordo com a ambiência, ou pode ser constante ao longo do tempo, refletindo princípios individuais ou organizacionais. Esse aspecto é algo ainda a ser investigado.

Uma vez tomada uma decisão, podemos avaliar uma espécie de aversão à incerteza “revelada” do decisor, na medida em que sua decisão se desvia de um ótimo calculado pelo modelo de tratamento de risco.

Por exemplo: Seja o projeto fictício apresentado na Figura 32. Toda a parametrização de sua avaliação em risco técnico e de mercado reflete uma postura de neutralização desses riscos combinados, se este decisor seguir à risca o ótimo determinado pela avaliação, que é a opção de “Melhorar” (iniciar com melhora), podemos afirmar, seguramente, que a aversão à incerteza revelada desse decisor não é maior que 0,45 (valor de  $c$  em que a decisão passa de “Melhorar” para “Continuar”).

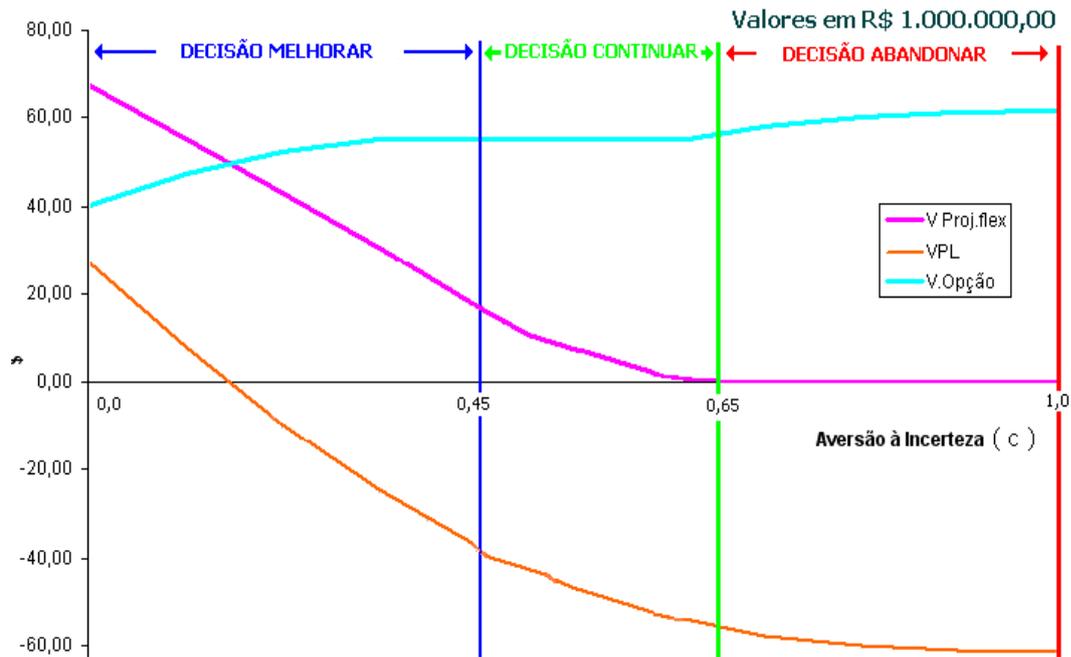


Figura 32: Sensibilidade sobre os VPLs a variações na aversão à Incerteza – outro exemplo.

No entanto, assim como pode ser 0, também pode ser 0,3 ou outro valor até 0,45. Agora, caso ele não siga o ótimo recomendado pelo modelo e, em vez de “Melhorar”, ele opte por apenas “Continuar”, sua aversão à incerteza revelada estará entre 0,45 e 0,65, garantindo que seja maior que 0. Um desvio de decisão desse tipo sugere uma escolha não racional, ou subótima, do ponto de vista do tratamento de risco. Essa indicação é forte e indica que o “verdadeiro” valor do projeto não é o seu VPL Flex calculado com  $c=0$ , mas um VPL Flex com  $c$  entre 0,45 e 0,65.

Chegaremos a um intervalo de valor de VPL Flex que seja aderente ao resultado final do processo decisório, respeitando a regra de decisão<sup>17</sup> que determina a ação de seguir com o projeto (Melhorando ou Continuando) quando o VPL Flex for maior que 0.

Finalmente, caso ele opte por “Abandonar”, sua aversão à incerteza revelada será de, no mínimo, 0,65, e o VPL Flex do projeto igual a 0, sendo esse valor perfeitamente aderente à decisão tomada, pela regra de decisão do modelo.

<sup>17</sup> E admitindo-a forte no contexto do modelo orientador da decisão.

Evidentemente, o exemplo da Figura 32 representa um projeto um tanto mais robusto (escala em R\$ milhão), e mais típico de projetos de P&D envolvendo lançamento de produtos inovadores no mercado. Essa configuração fictícia de projeto demonstra uma certa tolerância à incerteza Knightiana, inclusive para o seu VPL sem flexibilidade, que apresenta valores positivos para valores baixos do parâmetro  $c$ .

### 3.5

#### Discussão Final

Com a introdução formal do tratamento da aversão à incerteza no sentido de Knight, o modelo de Opções Reais voltado para P&D ganha um novo e poderoso elemento, que possibilita uma consideração de teor mais tácito na valoração, e ligado fortemente ao momento da tomada de decisão. São muitos os exemplos de projetos de P&D, sobretudo de natureza incremental, que são abandonados ou postergados por grandes Centros de Pesquisas Industriais, a despeito de rigorosas e favoráveis avaliações de risco com o emprego das mais avançadas técnicas, principalmente as baseadas na Teoria das Opções Reais. Uma vez não seguida a opção ótima sugerida por uma visão de puro risco, há indícios de existência de aversão à incerteza nesse agente, e o valor final do projeto, aderente à decisão tomada pela regra básica de decisão do VPL, seria diferente. Talvez seja impróprio considerar o VPL Flex pós-decisão (VPL Flex de Choquet) como um valor que represente a viabilidade econômica do projeto, uma vez que entram nessa valoração elementos externos à sua valoração intrínseca, que dizem respeito à postura final do decisor diante de um quadro de incerteza. Talvez seja mais apropriado chamá-lo de “VPL da decisão sob incerteza”, ou outra denominação mais representativa de sua significação.

Esse novo elemento não é de fácil quantificação. O exercício de valoração realizado, juntamente com um resultado final de decisão sobre o projeto, dá indícios de seu valor em intervalos. Se ele reflete uma postura individual, departamental, corporativa, setorial, regional etc, e se é constante ou variável no curto prazo, e que condições do ambiente o influenciam, são questões relevantes a

serem investigadas. O parâmetro  $c$ , que varia de 0 a 1, não possui uma escala qualitativa associada, que descreva detalhadamente sua significação. Ser 0,6 avesso à incerteza é muito diferente de ser apenas 0,4? A depender da avaliação do projeto em risco, a decisão pode mudar de um valor para outro, mas que significam propriamente o 0,6 e o 0,4?

Pode haver uma significação para o valor pontual ou, o que seria mais plausível, intervalar. Podemos afirmar apenas que  $c=0$  significa indiferença à incerteza, e  $c=1$  aversão máxima a ela. Poderia ser um parâmetro a ser considerado “*ex ante*” na avaliação de projetos? Ou serviria apenas para identificar o quão afastado de uma “aditividade” desejável no espaço probabilístico as mensurações de risco estão?

Para essa última questão, em particular, vamos sugerir uma abordagem inicial no capítulo 4, em situação fictícia criada sobre a avaliação de um grande projeto de investimento, desta vez não de P&D, e nem considerando uma avaliação feita com modelo de Opções Reais. A idéia é expandir um pouco a exemplificação sobre a aplicação do conceito de incerteza knightiana a projetos mais comuns, avaliados com metodologias convencionais (VPL de fluxo de caixa descontado).