

## 4 Implementação Numérica

### 4.1. Discretização da Estrutura

A discretização da estrutura de vigas por elementos finitos resulta da subdivisão do domínio em sub-domínios, satisfeitas as condições de compatibilidade nos pontos comuns, nos contornos. Na descrição do movimento dos elementos de viga (eq. 3.46) expressões que forneçam o campo de deslocamentos incrementais definidos ao longo do comprimento dos elementos são utilizadas em função dos valores nodais. Considerando-se as hipóteses apresentadas na seção 3.6 e o elemento de viga unidimensional (coordenada  $\xi$ ) de dois nós da Fig. 4.1, com 6 graus-de-liberdade por nó e comprimento  $L$ , os campos de deslocamentos são definidos a partir dos valores nodais considerando-se a variação cúbica para os deslocamentos transversais devidos à flexão e a variação linear para os deslocamentos axial e de torção da viga. Assim, tem-se

$$\begin{aligned}
 u_1(\xi) &= c_1 + c_2\xi \\
 u_2(\xi) &= c_3 + c_4\xi + c_5\xi^2 + c_6\xi^3 \\
 u_3(\xi) &= c_7 + c_8\xi + c_9\xi^2 + c_{10}\xi^3 \\
 v_1(\xi) &= c_{11} + c_{12}\xi \\
 v_2(\xi) &= -\frac{du_3}{d\xi} = -c_8 - 2c_9\xi - 3c_{10}\xi^2 \\
 v_3(\xi) &= \frac{du_2}{d\xi} = c_4 + 2c_5\xi + 3c_6\xi^2
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

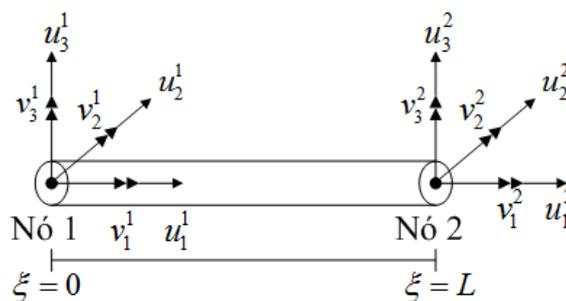


Figura 4.1 – Elemento de viga e variáveis de estado nodais.

onde os coeficientes  $c_i$  podem ser escritos como função dos deslocamentos e rotações nos pontos extremos do domínio do elemento (nós), impondo-se as correspondentes condições de contorno

$$\begin{aligned} u_1(0) &= u_1^1, & u_2(0) &= u_2^1, & u_3(0) &= u_3^1, & v_1(0) &= v_1^1, & v_2(0) &= v_2^1, & v_3(0) &= v_3^1 \\ u_1(L) &= u_1^2, & u_2(L) &= u_2^2, & u_3(L) &= u_3^2, & v_1(L) &= v_1^2, & v_2(L) &= v_2^2, & v_3(L) &= v_3^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Da solução do sistema de equações definido acima, o campo de deslocamentos em (4.1), é obtido após a substituição conveniente dos coeficientes  $c_i$ , obtendo-se

$$\begin{aligned} u_1(\xi) &= \phi_1(\xi)u_1^1 + \phi_2(\xi)u_1^2 \\ u_2(\xi) &= \phi_3(\xi)u_2^1 + \phi_4(\xi)u_2^2 + \phi_5(\xi)v_3^1 - \phi_6(\xi)v_3^2 \\ u_3(\xi) &= \phi_3(\xi)u_3^1 + \phi_4(\xi)u_3^2 - \phi_5(\xi)v_2^1 + \phi_6(\xi)v_2^2 \\ v_1(\xi) &= \phi_7(\xi)v_1^1 + \phi_8(\xi)v_1^2 \\ v_2(\xi) &= -\phi_7(\xi)u_3^1 + \phi_8(\xi)u_3^2 + \phi_9(\xi)v_2^1 - \phi_{10}(\xi)v_2^2 \\ v_3(\xi) &= \phi_9(\xi)u_2^1 - \phi_{10}(\xi)u_2^2 + \phi_{11}(\xi)v_3^1 - \phi_{12}(\xi)v_3^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde,

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi) &= 1 - (\xi/L), & \phi_2(\xi) &= \xi/L \\ \phi_3(\xi) &= 1 - 3(\xi/L)^2 + 2(\xi/L)^3 \\ \phi_4(\xi) &= 3(\xi/L)^2 - 2(\xi/L)^3 \\ \phi_5(\xi) &= \left[ (\xi/L) - 2(\xi/L)^2 + (\xi/L)^3 \right] L \\ \phi_6(\xi) &= \left[ (\xi/L)^2 - (\xi/L)^3 \right] L \\ \phi_7(\xi) &= \frac{6}{L} \left[ -(\xi/L) + (\xi/L)^2 \right] \\ \phi_8(\xi) &= 1 - 4(\xi/L) + 3(\xi/L)^2 \\ \phi_9(\xi) &= 2(\xi/L) - 3(\xi/L)^2 \quad \text{para} \quad (0 \leq \xi/L \leq +1) \end{aligned} \quad (4.4)$$

As funções de forma  $\phi_3$ ,  $\phi_4$ ,  $\phi_5$  e  $\phi_6$  são chamadas funções de forma de Hermite e garantem que tanto os deslocamentos e rotações de flexão sejam contínuos entre os elementos vizinhos. Na Fig. 4.2, a seguir, estas funções de forma são apresentadas na forma gráfica.

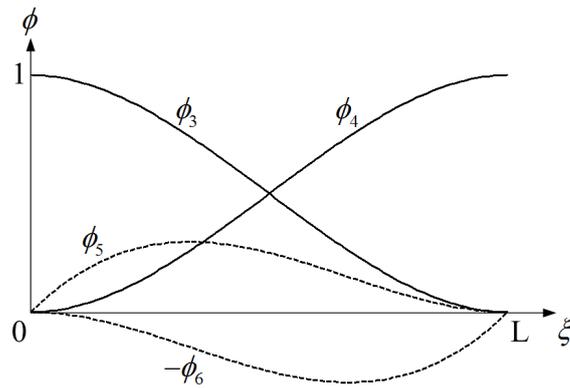


Figura 4.2 – Funções de forma Hermitianas.

Expressões para o campo de deslocamentos incrementais, descritas em (4.3), podem ser fornecidas na seguinte forma matricial

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}(\xi) \hat{\mathbf{u}} \quad (4.5)$$

onde  $\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamentos incrementais,  $\mathbf{H}(\xi)$  é a matriz de interpolação incremental e  $\hat{\mathbf{u}}$  é o vetor de deslocamentos incrementais nodais, todos referidos ao sistema móvel co-rotacionado. Assim, tem-se

$$\mathbf{H}(\xi) = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_3 & 0 & 0 & 0 & \phi_5 & 0 & \phi_4 & 0 & 0 & 0 & -\phi_6 \\ 0 & 0 & \phi_3 & 0 & -\phi_5 & 0 & 0 & 0 & \phi_4 & 0 & \phi_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_7 & 0 & \phi_8 & 0 & 0 & 0 & \phi_7 & 0 & -\phi_9 & 0 \\ 0 & \phi_7 & 0 & 0 & 0 & \phi_8 & 0 & -\phi_7 & 0 & 0 & 0 & -\phi_9 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\hat{\mathbf{u}}^T = \left[ u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_3^1 \quad v_1^1 \quad v_2^1 \quad v_3^1 \mid u_1^2 \quad u_2^2 \quad u_3^2 \quad v_1^2 \quad v_2^2 \quad v_3^2 \right] \quad (4.7)$$

Para o caso de um elemento (m) entre dois instantes sucessivos  $t$  e  $t+\Delta t$ , o campo de deslocamentos  ${}^{t+\Delta t}_t \mathbf{u}^{(m)}$  ao longo do comprimento do elemento no instante  $t+\Delta t$ , medido a partir da configuração indeformada co-rotacionada no instante  $t$ , pode ser escrito em função dos deslocamentos nodais  ${}^{t+\Delta t}_t \hat{\mathbf{u}}^{(m)}$ . Assim, para um elemento (m) tem-se a seguinte decomposição:

$${}^{t+\Delta t}_t \mathbf{u}^{(m)}(x, y, z) = {}^t_t \mathbf{u}^{(m)} + \mathbf{u}^{(m)} = \mathbf{H}^{(m)} \left( {}^t_t \hat{\mathbf{u}}^{(m)} + \hat{\mathbf{u}}^{(m)} \right) \quad (4.8)$$

onde  $\mathbf{H}^{(m)}$  é a matriz de interpolação,  ${}^t_t \hat{\mathbf{u}}^{(m)}$  é o vetor de deslocamentos nodais, medido em relação à configuração indeformada co-rotacionada referida ao instante  $t$  até a configuração deformada nesse mesmo instante, e  $\hat{\mathbf{u}}^{(m)}$  é o vetor

incremento de deslocamento correspondente ao intervalo  $\Delta t$ , referido ao sistema de coordenadas co-rotacionado, todos referentes ao elemento (m) no instante t. Este vetor contém as variáveis de estado do problema resultante da condição de equilíbrio da estrutura global no instante  $t+\Delta t$ .

Substituindo-se em (4.3) as aproximações definidas em (3.39) e as medidas de deformação em (3.46) resulta na equação de equilíbrio dinâmico incremental no instante  $t+\Delta t$ , na seguinte forma matricial,

$$\mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{D} {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} + ({}^t\mathbf{K}_L + {}^t\mathbf{K}_{NL})\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F} \quad (4.9)$$

onde

$\mathbf{M}$  = Matriz de massa independente do tempo

$\mathbf{D}$  = Matriz de amortecimento independente do tempo

${}^t\mathbf{K}_L$  = Matriz de rigidez incremental linear

${}^t\mathbf{K}_{NL}$  = Matriz de rigidez incremental geométrica ou não-linear

${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}$  = Vetor de forças nodais externas aplicadas no instante  $t+\Delta t$

${}^t\mathbf{F}$  = Vetor de forças nodais internas (equivalentes as tensões nos elementos) no instante t

$\mathbf{U}$  = Vetor de incrementos dos deslocamentos nodais

${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}$  = Vetor de velocidades nodais no instante  $t+\Delta t$

${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}$  = Vetor de acelerações nodais no instante  $t+\Delta t$

As matrizes na eq.(4.9), avaliadas a partir de cada um dos termos apresentados na equação de equilíbrio na forma integral (3.46), estão apresentadas na Tabela 4.1 a seguir.

Tabela 4.1 – Forma Integral e correspondente Forma Matricial dos termos da Eq.(4.9)

Forma Integral	Forma Matricial
$\int_{^0V} \rho^{t+\Delta t} \ddot{u}_i \delta u_i d^0V$	$\mathbf{M}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} = \left[ \sum_m \int_{^0V^{(m)}} \rho^{(m)} \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{H}^{(m)} d^0V^{(m)} \right]^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}$
$\int_{^0V} k^{t+\Delta t} \dot{u}_i \delta u_i d^0V$	$\mathbf{D}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}} = \left[ \sum_m \int_{^0V^{(m)}} k^{(m)} \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{H}^{(m)} d^0V^{(m)} \right]^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}}$
$\int_{^tV} {}_t C_{ijrs} {}_t e_{rs} \delta {}_t e_{ij} d^tV$	${}^t \mathbf{K}_L \mathbf{U} = \left[ \sum_m \int_{^tV^{(m)}} {}^t \mathbf{B}_L^{(m)T} {}_t \mathbf{C}^{(m)} {}^t \mathbf{B}_L^{(m)} d^tV^{(m)} \right] \mathbf{U}$
$\int_{^tV} {}^t \tau_{ij} \delta {}_t \eta_{ij} d^tV$	${}^t \mathbf{K}_{NL} \mathbf{U} = \left[ \sum_m \int_{^tV^{(m)}} {}^t \mathbf{B}_{NL}^{(m)T} {}^t \boldsymbol{\tau}^{(m)} {}^t \mathbf{B}_{NL}^{(m)} d^tV^{(m)} \right] \mathbf{U}$
${}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} = \int_{^0A} {}^{t+\Delta t} f_i^S \delta u_i^S d^0A$ $+ \int_{^0V} {}^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i^B d^0V$	${}^{t+\Delta t} \mathbf{R} = \sum_m \int_{^0A^{(m)}} \mathbf{H}^{S(m)T} {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^S d^0A^{(m)}$ $+ \sum_m \int_{^0V^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^B d^0V^{(m)}$
$\int_{^tV} {}^t \tau_{ij} \delta {}_t e_{ij} d^tV$	${}^t \mathbf{F} = \sum_m \int_{^tV^{(m)}} {}^t \mathbf{B}_L^{(m)T} {}^t \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(m)} d^tV^{(m)}$

onde para cada elemento (m)

$\mathbf{H}^{S(m)}$ ,  $\mathbf{H}^{(m)}$  = Matrizes de interpolação dos deslocamentos de superfície e de volume, respectivamente

${}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^S$ ,  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^B$  = Vetores de forças de superfície e de corpo por unidade de área e por unidade de volume, respectivamente

${}^t \mathbf{B}_L^{(m)}$  = Matriz de transformação deformação-deslocamento linear

${}^t \mathbf{B}_{NL}^{(m)}$  = Matriz representativa da variação da parcela não linear da compatibilidade geométrica dos incrementos de deformação

${}_t \mathbf{C}^{(m)}$  = Matriz constitutiva do material

${}^t \boldsymbol{\tau}^{(m)}$ ,  ${}^t \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(m)}$  = Matriz e vetor das tensões de Cauchy, respectivamente

Na seção seguinte são discutidas e apresentadas cada uma das matrizes e vetores elementares mostradas na Tabela 4.1.

## 4.2. Matrizes e Vetores dos Esforços Externos e Internos

Para o estabelecimento da equação de equilíbrio dinâmico incremental no instante  $t+\Delta t$  (4.9), as seguintes matrizes e vetores são obtidas em função das coordenadas no sistema local móvel co-rotacionado no instante  $t$  ( $\xi, x_2, x_3$ ) na seção reta do *riser* (Fig. 3.6) e das conhecidas componentes de tensão  ${}^t\tau_{ij}$ , no instante  $t$  considerado, conforme apresentado à seguir. Despreza-se, no presente trabalho, a variação volumétrica ocorrida nos elementos. Essa aproximação é coerente com a hipótese de pequenas deformações, estabelecida na seção 3.6, e assim tem-se

$${}^tV^{(m)} = {}^0V^{(m)} = V^{(m)}.$$

### 4.2.1. Equações constitutivas e campo de tensões

As equações constitutivas relacionam as componentes de deformações no elemento com as das tensões. Estas equações foram escolhidas de acordo com a teoria de vigas considerando os efeitos da flexão, do cisalhamento e da força normal (tração ou compressão). Com estas hipóteses da cinemática de deformação o tensor das tensões do modelo de viga contém apenas 5 componentes não nulas:  $\sigma_{11}, \sigma_{12}=\sigma_{21}, \sigma_{13}=\sigma_{31}$ , [15,17]. Durante o processo incremental estas componentes são determinadas na forma

$${}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{\tau}} = {}^t\hat{\boldsymbol{\tau}} + \hat{\boldsymbol{\tau}} \quad (4.10)$$

As componentes do tensor incremental de tensão de Cauchy ( $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ ) se relacionam com as componentes da parcela linear do tensor incremental de deformação ( $\mathbf{e}$ ) através da matriz constitutiva do material ( $\mathbf{C}$ )

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{C}\mathbf{e} \quad (4.11)$$

onde:

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}^T = [\sigma_{11} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{13}] \quad (4.12a)$$

$$\mathbf{e}^T = [e_{11} \quad 2e_{12} \quad 2e_{13}] \quad (4.12b)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (4.12c)$$

Na matriz constitutiva,  $E$  é o módulo de elasticidade e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson. Para os materiais com gradação funcional considerados no presente trabalho,  $E$  varia ao longo da coordenada radial  $r = (x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$  da seção tubular do *riser* (ver Fig. 3.6) segundo a seguinte lei de potência (conforme visto no capítulo 2)

$$E = E_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^\beta, \quad r_i \leq r \leq r_o \quad (4.13)$$

onde  $\beta$  é um parâmetro de não-homogeneidade do material.

As componentes do vetor  $\mathbf{e}$  são obtidas na eq.(3.39) na forma

$$\begin{aligned} e_{11} &= u_{1,1} - x_2 v_{3,1} + x_3 v_{2,1} \\ 2e_{12} &= u_{2,1} - v_3 - x_3 v_{1,1} \\ 2e_{13} &= u_{3,1} - v_2 - x_2 v_{1,1} \end{aligned} \quad (4.14)$$

A primeira componente de deformação  $e_{11}$  corresponde à deformação linear (extensional) na direção  $\xi$  (ver Fig. 3.6), enquanto que os componentes  $e_{12}$  e  $e_{13}$  se referem às deformações cisalhantes (angulares).

A relação entre as deformações e os deslocamentos nodais incrementais é estabelecida utilizando-se as equações (4.3) e (4.14)

$$\mathbf{e} = \mathbf{B}_L \hat{\mathbf{u}} \quad (4.15)$$

onde  $\mathbf{B}_L$  é a matriz de transformação deformação-deslocamento linear na forma

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} \frac{d\phi_1}{d\xi} & -x_2 \frac{d\phi_7}{d\xi} & -x_3 \frac{d\phi_7}{d\xi} & 0 & x_3 \frac{d\phi_8}{d\xi} & -x_2 \frac{d\phi_8}{d\xi} \\ 0 & 0 & 0 & -x_3 \frac{d\phi_1}{d\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 \frac{d\phi_1}{d\xi} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \vdots$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d\phi_2}{d\xi} & x_2 \frac{d\phi_7}{d\xi} & x_3 \frac{d\phi_7}{d\xi} & 0 & -x_3 \frac{d\phi_9}{d\xi} & -x_2 \frac{d\phi_9}{d\xi} \\ 0 & 0 & 0 & -x_3 \frac{d\phi_2}{d\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 \frac{d\phi_2}{d\xi} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Nesta matriz as funções  $\phi_i$  são obtidas conforme está definido em (4.4). Substituindo-se (4.15) em (4.11) resulta

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{C} \mathbf{B}_L \hat{\mathbf{u}} \quad (4.17)$$

onde se relacionam as componentes das tensões com os deslocamentos nodais do elemento.

#### 4.2.2.

#### Matriz de rigidez linear e vetor de forças internas

A matriz de rigidez linear  $\mathbf{K}_L$  resulta da discretização da parcela  $\int_V C_{ijrs} e_{rs} \delta e_{ij} dV$  da equação (3.46). Assim, tem-se

$$\int_V C_{ijrs} e_{rs} \delta e_{ij} dV = \int_V (\delta \mathbf{e})^T \mathbf{C} \mathbf{e} dV = (\delta \hat{\mathbf{u}})^T \left[ \int_V \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L dV \right] \hat{\mathbf{u}} \quad (4.18)$$

$$\text{ou } \mathbf{K}_L = \int_V \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L dV. \quad (4.19)$$

Substituindo (4.12c) e (4.16) em (4.19) e integrando no volume do elemento de *riser* (Fig. 3.6) tem-se a expressão final para a matriz de rigidez linear. Para a melhor obtenção da integral (4.19), referente a geometria do *riser*, é conveniente substituir o sistema de coordenadas local móvel co-rotacionado do elemento de viga ( $\xi, x_2, x_3$ ) da Fig. 3.6 por um sistema de coordenadas cilíndricas ( $\xi, r, \theta$ ) utilizando-se as seguintes transformações.

$$\begin{aligned} x_2 &= r \cos \theta \\ x_3 &= r \sin \theta \\ r &= \sqrt{x_2^2 + x_3^2}, \quad r_i \leq r \leq r_o \end{aligned} \quad (4.20)$$

que resultam em

$$\mathbf{K}_L = \int_V \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L dV = \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} \int_0^L \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L r d\xi dr d\theta \quad (4.21)$$

Assim tem-se, finalmente

$$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix}
 \frac{\overline{EA}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\overline{EA}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{12\overline{EI}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6\overline{EI}}{L^3} & 0 & -\frac{12\overline{EI}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{6\overline{EI}}{L^2} \\
 & & \frac{12\overline{EI}}{L^3} & 0 & -\frac{6\overline{EI}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12\overline{EI}}{L^3} & 0 & -\frac{6\overline{EI}}{L^2} & 0 \\
 & & & \frac{\overline{GJ}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\overline{GJ}}{L} & 0 & 0 \\
 & & & & \frac{4\overline{EI}}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6\overline{EI}}{L^2} & 0 & \frac{2\overline{EI}}{L} & 0 \\
 & & & & & \frac{4\overline{EI}}{L} & 0 & -\frac{6\overline{EI}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2\overline{EI}}{L} \\
 & & & & & & \frac{\overline{EA}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & \frac{12\overline{EI}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6\overline{EI}}{L^2} \\
 & & \text{Simétrica} & & & & & & \frac{12\overline{EI}}{L^3} & 0 & \frac{6\overline{EI}}{L^2} & 0 \\
 & & & & & & & & & \frac{\overline{GJ}}{L} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & \frac{4\overline{EI}}{L} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & \frac{4\overline{EI}}{L}
 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

A expressão obtida em (4.22) para a matriz de rigidez linear  $\mathbf{K}_L$  tem a forma da matriz de rigidez resultante para pórticos convencionais de material homogêneo [62]. A diferença, relativa aos materiais com gradação funcional com lei de potência expressa por (4.13), está na obtenção das expressões para os módulos de rigidez equivalente:

$$\overline{EA} = \int_A E_o r^\beta dA = \left( \frac{2\pi E_o r_o^2}{\beta + 2} \right) \left[ 1 - \left( \frac{r_i}{r_o} \right)^{\beta+2} \right] \quad (4.23a)$$

$$\overline{EI} = \int_A E_o r^\beta x_2^2 dA = \left( \frac{\pi E_o r_o^4}{\beta + 4} \right) \left[ 1 - \left( \frac{r_i}{r_o} \right)^{\beta+4} \right] \quad (4.23b)$$

$$\overline{GJ} = \int_A \frac{E_o r^\beta}{2(1+\nu)} r^2 dA = \frac{\pi E_o r_o^4}{(1+\nu)(\beta+4)} \left[ 1 - \left( \frac{r_i}{r_o} \right)^{\beta+4} \right] \quad (4.23c)$$

Similarmente, a obtenção do vetor elementar das forças internas  $\mathbf{F}$  resulta da discretização da parcela  $\int_V {}^t\tau_{ij} \delta e_{ij} dV$  na equação (3.46). Assim utilizando-se as expressões (4.15) e (4.17), resulta em

$$\int_V {}^t\tau_{ij} \delta e_{ij} dV = \int_V (\delta \mathbf{e})^T {}^t\hat{\boldsymbol{\tau}} dV = (\delta \hat{\mathbf{u}})^T \left[ \int_V \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L dV \right] {}^t\hat{\mathbf{u}} = (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{K}_L {}^t\hat{\mathbf{u}} \quad (4.24)$$

$$\text{ou} \quad \mathbf{F} = \mathbf{K}_L {}^t\hat{\mathbf{u}} \quad (4.25)$$

onde  ${}^t\hat{\mathbf{u}}$  é o vetor de deslocamentos nodais elementar, medido a partir da configuração indeformada co-rotacionada referida ao instante  $t$  até a configuração deformada nesse mesmo instante e cujas componentes são

$${}^t\hat{\mathbf{u}} = \left[ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \mathcal{G}_1^1 \quad \mathcal{G}_2^1 \quad \mathcal{G}_3^1 \quad \bar{u} \quad 0 \quad 0 \quad \mathcal{G}_1^2 \quad \mathcal{G}_2^2 \quad \mathcal{G}_3^2 \right] \quad (4.26)$$

em que  $\bar{u}$  é a variação do comprimento do elemento e  $\mathcal{G}_i^\alpha$  ( $i=1,2,3; \alpha=1,2$ ) são as deformações angulares, seguindo-se procedimento mostrado na seção 3.5.4.

### 4.2.3. Matriz de rigidez geométrica

No caso do presente elemento de viga a propriedade de rigidez geométrica resulta do efeito de enrijecimento da estrutura quando esta é submetida à flexão, sob carregamento de tração [48]. Este efeito é predominante nas estruturas esbeltas em que a rigidez à flexão é geralmente pequena em relação à rigidez axial, como ocorre, nas linhas flexíveis.

A matriz de rigidez geométrica resulta da discretização da parcela incremental do trabalho virtual associado às tensões de Cauchy (no instante  $t$ ), relativo à variação das deformações virtuais (parcela não-linear) na equação de equilíbrio incremental (3.46). Assim,

$$\int_V {}^t\tau_{ij} \delta \eta_{ij} dV = \int_V \delta \boldsymbol{\eta}^T {}^t\hat{\boldsymbol{\tau}} dV \quad (4.27)$$

onde:

${}^t\hat{\boldsymbol{\tau}}$  é o vetor das componentes do tensor de Cauchy, no instante  $t$ , associadas às tensões no elemento de viga

$${}^t\hat{\boldsymbol{\tau}}^T = \left[ {}^t\sigma_{11} \quad {}^t\sigma_{12} \quad {}^t\sigma_{13} \right] \quad (4.28a)$$

$\delta\boldsymbol{\eta}$  é o vetor que contém a primeira variação das parcelas não-lineares das medidas de deformação da eq.(3.39)

$$\delta\boldsymbol{\eta}^T = [\delta\eta_{11} \quad \delta\eta_{12} \quad \delta\eta_{13}] \quad (4.28b)$$

Avaliando-se o vetor  $\delta\boldsymbol{\eta}$  e explicitando-se na forma algébrica o lado direito da equação (4.27), tem-se a expressão

$$\begin{aligned} \int_V \delta\boldsymbol{\eta}^T {}^t\hat{\boldsymbol{\tau}} dV &= \int_V ({}^t\sigma_{11}\delta\eta_{11} + {}^t\sigma_{12}\delta\eta_{12} + {}^t\sigma_{13}\delta\eta_{13}) dV = \\ &\int_V \left\{ \left[ \left( \frac{{}^t\sigma_{12}}{2} \right) v_2 + \left( \frac{{}^t\sigma_{13}}{2} \right) v_3 - {}^t\sigma_{13}u_{2,1} + {}^t\sigma_{12}u_{3,1} + \left( \frac{{}^t\sigma_{11}x_2}{2} \right) v_{2,1} + \left( \frac{{}^t\sigma_{11}x_3}{2} \right) v_{3,1} \right] \delta v_1 + \right. \\ &\quad \left[ \left( \frac{{}^t\sigma_{12}}{2} \right) v_1 + \left( \frac{{}^t\sigma_{11}x_2}{2} \right) v_{1,1} + \left( \frac{{}^t\sigma_{12}x_3}{2} - \frac{{}^t\sigma_{13}x_2}{2} \right) v_{3,1} \right] \delta v_2 + \\ &\quad \left[ \left( \frac{{}^t\sigma_{13}}{2} \right) v_1 + \left( \frac{{}^t\sigma_{11}x_3}{2} \right) v_{1,1} + \left( -\frac{{}^t\sigma_{12}x_3}{2} + \frac{{}^t\sigma_{13}x_2}{2} \right) v_{2,1} \right] \delta v_3 + \\ &\quad \left[ -{}^t\sigma_{13}v_1 + {}^t\sigma_{11}u_{2,1} - ({}^t\sigma_{11}x_3)v_{1,1} \right] \delta u_{2,1} + \left[ {}^t\sigma_{12}v_1 + {}^t\sigma_{11}u_{3,1} + ({}^t\sigma_{11}x_2)v_{1,1} \right] \delta u_{3,1} + \\ &\quad \left[ \left( \frac{{}^t\sigma_{11}x_2}{2} \right) v_2 + \left( \frac{{}^t\sigma_{11}x_3}{2} \right) v_3 - ({}^t\sigma_{11}x_3)u_{2,1} + ({}^t\sigma_{11}x_2)u_{3,1} + ({}^t\sigma_{11}(x_2^2 + x_3^2))v_{1,1} \right] \delta v_{1,1} + \\ &\quad \left[ \left( \frac{{}^t\sigma_{11}x_2}{2} \right) v_1 + \left( -\frac{{}^t\sigma_{12}x_3}{2} + \frac{{}^t\sigma_{13}x_2}{2} \right) v_3 + ({}^t\sigma_{11}x_3^2)v_{2,1} - ({}^t\sigma_{11}x_2x_3)v_{3,1} \right] \delta v_{2,1} + \\ &\quad \left. \left[ \left( \frac{{}^t\sigma_{11}x_3}{2} \right) v_1 + \left( \frac{{}^t\sigma_{12}x_3}{2} - \frac{{}^t\sigma_{13}x_2}{2} \right) v_2 - ({}^t\sigma_{11}x_2x_3)v_{2,1} + ({}^t\sigma_{11}x_2^2)v_{3,1} \right] \delta v_{3,1} \right\} dV \quad (4.29) \end{aligned}$$

Após sucessivas manipulações algébricas e utilizando-se os resultados das equações em (4.3) a equação acima é expressa na forma

$$\int_V \delta\boldsymbol{\eta}^T {}^t\hat{\boldsymbol{\tau}} dV = (\delta\hat{\mathbf{u}})^T \left[ \int_V \mathbf{B}_{NL}^T {}^t\boldsymbol{\tau} \mathbf{B}_{NL} dV \right] \hat{\mathbf{u}} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{K}_{NL} = \int_V \mathbf{B}_{NL}^T {}^t\boldsymbol{\tau} \mathbf{B}_{NL} dV \quad (4.31)$$

onde

$$\mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_7 & 0 & \phi_8 & 0 & 0 & 0 & \phi_7 & 0 & -\phi_9 & 0 \\ 0 & \phi_7 & 0 & 0 & 0 & \phi_8 & 0 & -\phi_7 & 0 & 0 & 0 & -\phi_9 \\ 0 & \frac{d\phi_3}{d\xi} & 0 & 0 & 0 & \frac{d\phi_5}{d\xi} & 0 & \frac{d\phi_4}{d\xi} & 0 & 0 & 0 & -\frac{d\phi_6}{d\xi} \\ 0 & 0 & \frac{d\phi_3}{d\xi} & 0 & -\frac{d\phi_5}{d\xi} & 0 & 0 & 0 & \frac{d\phi_4}{d\xi} & 0 & \frac{d\phi_6}{d\xi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d\phi_1}{d\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d\phi_2}{d\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{d\phi_7}{d\xi} & 0 & \frac{d\phi_8}{d\xi} & 0 & 0 & 0 & \frac{d\phi_7}{d\xi} & 0 & -\frac{d\phi_9}{d\xi} & 0 \\ 0 & \frac{d\phi_7}{d\xi} & 0 & 0 & 0 & \frac{d\phi_8}{d\xi} & 0 & -\frac{d\phi_7}{d\xi} & 0 & 0 & 0 & -\frac{d\phi_9}{d\xi} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

é a matriz representativa da variação da parcela não linear da compatibilidade geométrica dos incrementos de deformação e  ${}^t\boldsymbol{\tau}$  é a matriz das componentes de tensão do tensor de Cauchy para tensões  $(\sigma_{ij})$ , avaliadas no instante  $t$ ,

$${}^t\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 0 & {}^t\sigma_{12}/2 & {}^t\sigma_{13}/2 & -{}^t\sigma_{13} \\ {}^t\sigma_{12}/2 & 0 & 0 & 0 \\ {}^t\sigma_{13}/2 & 0 & 0 & 0 \\ -{}^t\sigma_{13} & 0 & 0 & {}^t\sigma_{11} \\ {}^t\sigma_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^t\sigma_{11}x_2/2 & {}^t\sigma_{11}x_3/2 & -{}^t\sigma_{11}x_3 \\ {}^t\sigma_{11}x_2/2 & 0 & (-{}^t\sigma_{12}x_3 + {}^t\sigma_{13}x_2)/2 & 0 \\ {}^t\sigma_{11}x_3/2 & ({}^t\sigma_{12}x_3 - {}^t\sigma_{13}x_2)/2 & 0 & 0 \\ {}^t\sigma_{12} & 0 & {}^t\sigma_{11}x_2/2 & {}^t\sigma_{11}x_3/2 \\ 0 & {}^t\sigma_{11}x_2/2 & 0 & ({}^t\sigma_{12}x_3 - {}^t\sigma_{13}x_2)/2 \\ 0 & {}^t\sigma_{11}x_3/2 & (-{}^t\sigma_{12}x_3 + {}^t\sigma_{13}x_2)/2 & 0 \\ 0 & -{}^t\sigma_{11}x_3 & 0 & 0 \\ {}^t\sigma_{11} & {}^t\sigma_{11}x_2 & 0 & 0 \\ {}^t\sigma_{11}x_2 & {}^t\sigma_{11}(x_2^2 + x_3^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^t\sigma_{11}x_3^2 & -{}^t\sigma_{11}x_2x_3 \\ 0 & 0 & -{}^t\sigma_{11}x_2x_3 & {}^t\sigma_{11}x_2^2 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

As linhas e colunas das matrizes  $\mathbf{B}_{NL}$  e  ${}^t\boldsymbol{\tau}$  estão relacionadas às componentes do vetor abaixo, referido à eq.(4.29)

$$\left[ v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad u_{2,1} \quad u_{3,1} \quad v_{1,1} \quad v_{2,1} \quad v_{3,1} \right]^T$$

#### 4.2.4. Matriz de inércia

##### 4.2.4.1. Matriz de inércia consistente incluindo inércia de rotação

Na obtenção da matriz de inércia consistente do elemento, similarmente ao tratamento com o módulo de elasticidade  $E$ , para materiais com gradação funcional considera-se a massa específica variável ao longo da coordenada radial- $r$  da seção tubular do *riser* (ver Fig. 3.6) segundo a seguinte lei de potência (conforme visto no capítulo 2)

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^\alpha, \quad r_1 \leq r \leq r_0 \quad (4.34)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro de não-homogeneidade relativo à massa específica do material.

A matriz de inércia consistente obtém-se do primeiro termo na equação de equilíbrio incremental em (3.46) e representa o trabalho das forças de inércia devido à soma das parcelas dos efeitos axial, de torção e de flexão, assim tem-se

$$\int_V \rho^{t+\Delta t} \ddot{u}_i \delta u_i dV = \delta u \left( \int_V \rho \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{H}} dV \right)^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} \quad (4.35)$$

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{H}} dV \quad (4.36)$$

O efeito da inércia de rotação resultante da rotação da seção reta do elemento de viga é obtido a partir da parcela linear da eq.(3.37) relativa aos deslocamentos de um ponto P qualquer da seção tubular do elemento de viga (ver Fig. 3.6), assim

$$\begin{aligned} u_{P_1}(\xi, x_2, x_3) &= u_1 - x_2 v_3 + x_3 v_2 \\ u_{P_2}(\xi, x_2, x_3) &= u_2 - x_3 v_1 \\ u_{P_3}(\xi, x_2, x_3) &= u_3 + x_2 v_1 \end{aligned} \quad (4.37)$$

em que os termos do lado direito das equações (4.37) se referem à superposição do campo de deslocamentos definidos em (4.3) ao longo da linha central e  $x_2$  e  $x_3$  são as coordenadas deste ponto na seção transversal tubular. Os campos de deslocamentos em (4.37) são escritos em função dos deslocamentos dos pontos nodais após substituir (4.3) e (4.4) em (4.37), obtendo-se

$$\mathbf{u}_P = \bar{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{u}} \quad (4.38)$$

onde:

$$\mathbf{u}_P^T = [u_{P_1} \quad u_{P_2} \quad u_{P_3}] \quad (4.39a)$$

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_3^1 \quad v_1^1 \quad v_2^1 \quad v_3^1 \quad | \quad u_1^2 \quad u_2^2 \quad u_3^2 \quad v_1^2 \quad v_2^2 \quad v_3^2] \quad (4.39b)$$

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \phi_1 & -x_2\phi_7 & -x_3\phi_7 & 0 & x_3\phi_8 & -x_2\phi_8 & \phi_2 & x_2\phi_7 & x_3\phi_7 & 0 & -x_3\phi_9 & x_2\phi_9 \\ 0 & \phi_3 & 0 & -x_3\phi_1 & 0 & \phi_5 & 0 & \phi_4 & 0 & -x_3\phi_2 & 0 & -\phi_6 \\ 0 & 0 & \phi_3 & x_2\phi_1 & -\phi_5 & 0 & 0 & 0 & \phi_4 & x_2\phi_2 & \phi_6 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.39c)$$

Substituindo-se em (4.36) a matriz de interpolação  $\bar{\mathbf{H}}$  definida em (4.39c) e a expressão para a massa específica na eq.(4.34) e, integrando-se no volume do elemento a expressão para a matriz de inércia consistente incluindo o efeito da inércia de rotação é obtida na forma

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{1,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & M_{2,2} & 0 & 0 & 0 & M_{2,6} & 0 & M_{2,8} & 0 & 0 & 0 & M_{2,12} \\ & & M_{3,3} & 0 & M_{3,5} & 0 & 0 & 0 & M_{3,9} & 0 & M_{3,11} & 0 \\ & & & M_{4,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{4,10} & 0 & 0 \\ & & & & M_{5,5} & 0 & 0 & 0 & M_{5,9} & 0 & M_{5,11} & 0 \\ & & & & & M_{6,6} & 0 & M_{6,8} & 0 & 0 & 0 & M_{6,12} \\ & & & & & & M_{7,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & M_{8,8} & 0 & 0 & 0 & M_{8,12} \\ & & & & & & & & M_{9,9} & 0 & M_{9,11} & 0 \\ & & & & & & & & & M_{10,10} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & M_{11,11} & 0 \\ & & & & & & & & & & & M_{12,12} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Simétrica

onde:

$$M_{1,1} = \frac{\bar{m}}{3}, \quad M_{1,7} = \frac{\bar{m}}{6}, \quad M_{2,2} = \left( \frac{13}{35} + \frac{6k^2}{5L^2} \right) \bar{m}, \quad M_{2,6} = \left( \frac{11L}{210} + \frac{k^2}{10L} \right) \bar{m}$$

$$M_{2,8} = \left( \frac{9}{70} - \frac{6k^2}{5L^2} \right) \bar{m}, \quad M_{2,12} = \left( -\frac{13L}{420} + \frac{k^2}{10L} \right) \bar{m}, \quad M_{3,3} = M_{2,2}, \quad M_{3,5} = -M_{2,6},$$

$$M_{3,9} = M_{2,8}, \quad M_{3,11} = -M_{2,12}, \quad M_{4,4} = \frac{\bar{m}}{3} k_r^2, \quad M_{4,10} = \frac{\bar{m}}{6} k_r^2,$$

$$M_{5,5} = \left( \frac{L^2}{105} + \frac{2k^2}{15} \right) \bar{m}, \quad M_{5,9} = M_{2,12}, \quad M_{5,11} = \left( -\frac{L^2}{140} - \frac{k^2}{30} \right) \bar{m}, \quad M_{6,6} = M_{5,5},$$

$$M_{6,8} = -M_{2,12}, \quad M_{6,12} = M_{5,11}, \quad M_{7,7} = M_{1,1}, \quad M_{8,8} = M_{2,2}, \quad M_{8,12} = -M_{2,6},$$

$$M_{9,9} = M_{2,2}, \quad M_{9,11} = M_{2,6}, \quad M_{10,10} = M_{4,4}, \quad M_{11,11} = M_{5,5},$$

$$M_{12,12} = M_{5,5} \quad (4.41)$$

com  $\bar{m} = \rho V$ ,  $k^2 = I/A$  e  $k_r^2 = J/A$

Os termos para a matriz de inércia consistente mostrada acima referem-se a um elemento de pórtico tridimensional de material homogêneo (ver Ref.[62]). No entanto, para materiais com gradação funcional segundo a lei de potência descrita em (4.34) verifica-se que estes termos têm a mesma forma, sendo as diferenças as seguintes

$$\bar{m} = \frac{2\pi\rho_o r_o^2}{\alpha+2} \left[ 1 - \left( \frac{r_i}{r_o} \right)^{\alpha+2} \right], \quad k^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha+2}{\alpha+4} \right) \left( \frac{r_o^{\alpha+4} - r_i^{\alpha+4}}{r_o^{\alpha+2} - r_i^{\alpha+2}} \right), \quad k_r^2 = 2k^2 \quad (4.42)$$

#### 4.2.4.2.

#### Matriz de inércia concentrada (*lumped mass model*)

Neste modelo a massa dos elementos é transferida diretamente aos nós e a matriz de inércia resultante é diagonal, trazendo como vantagem uma redução considerável no número de operações para a integração temporal das equações de equilíbrio no problema dinâmico [15]. Nos exemplos considerados neste trabalho, com o objetivo de melhorar o desempenho computacional, adota-se o modelo da inércia concentrada, considerando-se desprezível o efeito da inércia de rotação associada. (Esta é uma condição realista considerando-se a análise de *risers* em que numa malha de elementos esbeltos, este efeito é desprezível).

A obtenção da matriz de inércia concentrada pode ser feita a partir da matriz de inércia consistente, conforme propõe Mathisen [51]. Neste procedimento são somados aos termos da diagonal de linha aqueles de acoplamento que possuam a mesma unidade. Assim, obtém-se

$$\mathbf{M} = \text{diag}(M_{i,i}) \quad (i=1,12) \quad (4.43)$$

onde:

$$M_{1,1} = M_{2,2} = M_{3,3} = M_{7,7} = M_{8,8} = M_{9,9} = \frac{\bar{m}}{2},$$

$$M_{4,4} = M_{10,10} = \frac{\bar{m}}{2} k_r^2, \quad M_{5,5} = M_{6,6} = M_{11,11} = M_{12,12} = \frac{\bar{m} L^2}{420}.$$

onde as expressões para  $\bar{m}$  e  $k_r^2$  para os materiais com gradação funcional, estão definidas em (4.42).

O procedimento descrito acima para a obtenção da matriz de inércia concentrada tem uma justificativa numérica devido a sua maior eficiência computacional em comparação com a matriz de inércia consistente. No entanto como mostrado por Archer [10] no cálculo das frequências de vibração de uma viga em balanço, este método apresenta bom desempenho na determinação dos modos de vibração associados às frequências mais baixas. Neste mesmo trabalho é mostrado que o método de diagonalização “*optimal lumping*”, onde a matriz de inércia concentrada é obtida usando o método de integração numérica de Lobatto, com os pontos de integração numérica coincidentes com os nós do elemento, obtem-se melhor aproximação para os modos de vibração mais altos e, portanto, torna-se uma boa estimativa para a matriz de inércia concentrada, recomendada em estudos futuros associados ao tema.

#### 4.2.5. Vetor de esforços externos

O vetor de esforços externos é o resultado da composição das forças que realizam trabalho externo e resulta da discretização do primeiro e segundo termo do lado direito da equação de equilíbrio incremental (3.46), i.e.,

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R} = \int_S \mathbf{H}^{ST} {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{f}^S dS + \int_V \mathbf{H}^T {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{f}^B dV \quad (4.44)$$

Os esforços externos considerados no presente estudo incluem o peso próprio, o empuxo, as cargas distribuídas causadas por flutuadores, pressões, cargas hidrodinâmicas, forças de interação *riser*-solo e amortecimento estrutural.

##### 4.2.5.1. Consideração das pressões externas e interna

Na avaliação dos deslocamentos e esforços globais atuantes em um *riser*, dois aspectos devem ser considerados: a pressão do fluido no interior do *riser* (pressão interna) e a pressão da água do mar circundante (pressão externa). Nesta seção, é mostrado como os efeitos das pressões internas e externas são incluídas no vetor de esforços externos da eq.(4.44). O método mais utilizado inclui estes efeitos como forças estaticamente equivalentes, atuantes sobre o *riser* e é abordado por Sparks [81].

Este procedimento está ilustrado na Fig. 4.3, a qual mostra o diagrama de corpo livre de um segmento de *riser* de comprimento  $dL$  submetido à ação das pressões hidrostáticas devido aos fluidos interno e externo e a força de tração sobre as paredes do *riser* (Fig. 4.3a), no segmento de *riser* considerado a perda de carga é desprezível.

O sistema original de forças e pressões está apresentado na Fig. 4.3a é decomposto em três parcelas (Fig. 4.3b): na primeira considera-se a pressão externa, cuja resultante corresponde ao empuxo sobre o segmento fechado; na segunda tem-se a pressão interna, que resulta no peso do fluido confinado e na última parcela considera-se além das forças de tração na parede do *riser*, também o peso próprio e as forças correspondentes às pressões interna e externa estas devidas ao fechamento do segmento, agora no sentido oposto. Desta forma, a soma do empuxo com o peso do fluido interno mais o peso real do segmento do

*riser* ( $W_{real}$ ) na Fig. 4.3c resulta no peso aparente desse segmento com o fluido interno ( $W_{ap}$ ).

Da mesma forma a força de tração efetiva é obtida do somatório da força axial real atuante nas paredes do *riser* ( $N_{real}$ ) com as forças resultantes do acréscimo das pressões interna e externa nas extremidades do segmento. Assim, conclui-se que o sistema resultante de forças equivalentes deve produzir as mesmas deflexões e curvaturas que o sistema original.

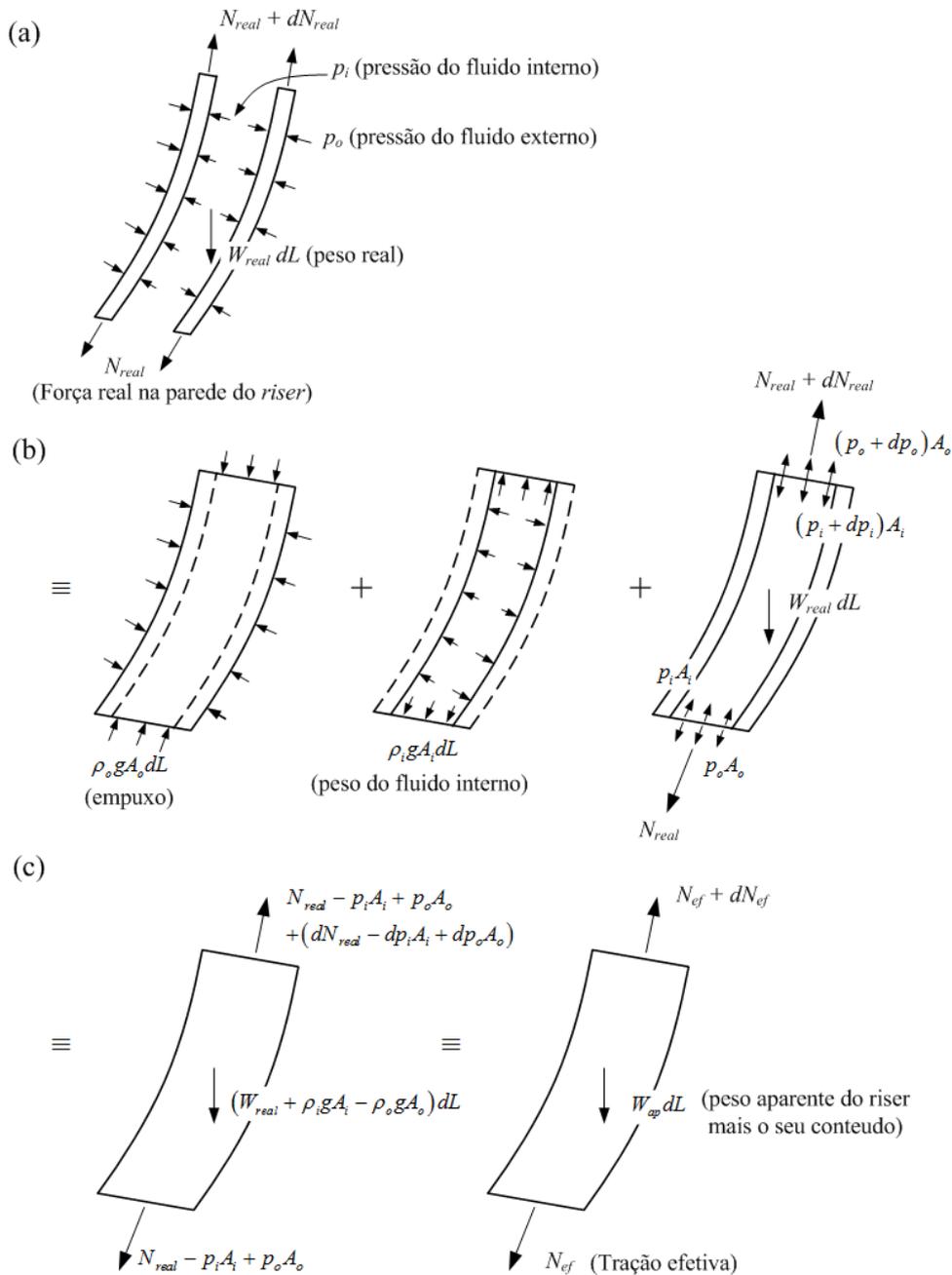


Figura 4.3 – Representação equivalente das pressões externas e interna num segmento de *riser*.

Com base no exposto e no que está mostrado na Fig. 4.3c a força de tração efetiva e peso aparente são, respectivamente, expressas por

$$N_{ef} = N_{real} + p_o A_o - p_i A_i \quad (4.45)$$

$$W_{ap} = W_{real} - \rho_o g A_o + \rho_i g A_i \quad (4.46)$$

As equações acima são gerais e válidas para linhas mais complexas, com qualquer seção transversal, feito de qualquer material, preenchido com fluido compressível e de massa específica variável a diferentes pressões.

Observa-se das expressões (4.45) e (4.46) que a parcela que diz respeito à pressão externa tem o mesmo efeito na estabilidade estrutural que uma força de tração, que é o de enrijecer lateralmente o *riser* (na eq.(4.45) ela é adicionada à da força axial, enquanto que em (4.47) ela diminui o peso aparente), mas a parcela referente à pressão interna tem o efeito oposto. Assim, conceitualmente falando, temos dois tipos de forças axiais a considerar: a real, para o cálculo das tensões membranais e a efetiva, para o cálculo dos deslocamentos, efeitos de flexão e estabilidade.

No princípio dos trabalhos virtuais a força de corpo por unidade de comprimento do elemento devida ao peso aparente é representada em coordenadas globais na forma.

$$\mathbf{f}_{W_{ap}}^B = -(\rho A - \rho_o A_o + \rho_i A_i) g \mathbf{e}_3 \quad (4.47)$$

onde:

$A, A_o, A_i$  = Áreas da coroa circular e do círculo externo e interno da seção transversal do *riser*, respectivamente.

$\rho, \rho_o, \rho_i$  = Massas específicas do *riser*, da água do mar e do fluido interno, respectivamente.

$g$  é a aceleração da gravidade e  $\mathbf{e}_3$  é o vetor unitário na direção do eixo global Z.

#### 4.2.5.2. Cargas hidrodinâmicas

Na análise de estruturas *offshore* as forças hidrodinâmicas representam as ações do fluido sobre a estrutura sem considerar-se aquelas provenientes das alterações dos movimentos do fluido. Assim, estas forças representam uma aproximação da interação fluido-estrutura sendo dominantes no movimento resultante causado pela ação de ondas, de correntes marinhas, do empuxo e da resistência do fluido ao movimento da estrutura.

Em 1950, Morison [54] propôs uma equação baseada em resultados empíricos da força de uma onda atuante na direção perpendicular a um cilindro vertical rígido de diâmetro  $D$ . Esta é amplamente utilizada no projeto de estruturas *offshore*. A força por unidade de comprimento da equação de Morison resulta da soma das parcelas de inércia  $\mathbf{f}_I$  e de arrasto  $\mathbf{f}_D$  na forma

$$\mathbf{f}_h = \mathbf{f}_I + \mathbf{f}_D = \rho_o \frac{\pi}{4} D^2 C_M \ddot{\mathbf{d}}_w + \frac{1}{2} \rho_o D C_D \dot{\mathbf{d}}_w |\dot{\mathbf{d}}_w| \quad (4.48)$$

onde  $\rho_o$  é a densidade do fluido;  $\dot{\mathbf{d}}_w$  e  $\ddot{\mathbf{d}}_w$  são a velocidade e aceleração do fluido, respectivamente;  $C_D$  e  $C_M$  são os coeficientes de arrasto e inércia, respectivamente.

Os coeficientes de arrasto e inércia são obtidos empiricamente e variam entre 0.4 e 2.0 [93]. Sarpkaya e Isaccson [75] mostram a dependência destes coeficientes com a rugosidade do cilindro e com as condições do escoamento através dos números de Reynolds e de Kaulegan-Carpenter. Na análise de linhas de ancoragem e *risers* usualmente empregam-se valores de  $C_D$  variando entre 0.7 e 1.2 e valores de  $C_M$  em torno de 2.0 [76].

Para estruturas flexíveis, onde a velocidade e a aceleração do *riser* são significativas relativamente ao fluido, a equação de Morison deve ser modificada [93]. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_h = \mathbf{f}_I + \mathbf{f}_{D_n} + \mathbf{f}_{D_t} = \rho_o \frac{\pi}{4} D^2 C_M \ddot{\mathbf{d}}_{wn} - \rho_o \frac{\pi}{4} D^2 (C_M - 1) \ddot{\mathbf{d}}_n \\ + \frac{1}{2} \rho_o D C_{D_n} \dot{\mathbf{d}}_{rn} |\dot{\mathbf{d}}_{rn}| + \frac{1}{2} \rho_o D C_{D_t} \dot{\mathbf{d}}_{rt} |\dot{\mathbf{d}}_{rt}| \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde

$$\dot{\mathbf{d}}_{rn} = \dot{\mathbf{d}}_r - \dot{\mathbf{d}}_{rt} = \dot{\mathbf{d}}_r - (\dot{\mathbf{d}}_r^T \mathbf{r}_1) \mathbf{r}_1 \quad (4.50)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{rt} = (\dot{\mathbf{d}}_r^T \mathbf{r}_1) \mathbf{r}_1 \quad (4.51)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_r = \dot{\mathbf{d}}_w + \dot{\mathbf{d}}_c - \dot{\mathbf{d}} \quad (4.52)$$

com

$\dot{\mathbf{d}}_r$ , velocidade relativa entre o fluido e a estrutura;

$\dot{\mathbf{d}}_w$ , velocidade das partículas do fluido devido às ondas e calculada usando a teoria de onda linear de Airy [56,65];

$\dot{\mathbf{d}}_c$ , velocidade da correnteza, a corrente é definida no modelo através de um perfil poligonal, em que são fornecidos valores de velocidade e ângulos de ataque correspondentes a valores da coordenada Z-global do fundo para a superfície. Os ângulos de ataque são referidos ao eixo X-global e contados no sentido anti-horário;

$\dot{\mathbf{d}}$ , velocidade da estrutura;

$\dot{\mathbf{d}}_{rn}$ , velocidade relativa entre o fluido e a estrutura na direção normal ao membro estrutural;

$\dot{\mathbf{d}}_{rt}$ , velocidade relativa entre o fluido e a estrutura na direção tangencial ao membro estrutural;

$\ddot{\mathbf{d}}_{wn} = \ddot{\mathbf{d}}_w - (\ddot{\mathbf{d}}_w^T \mathbf{r}_1) \mathbf{r}_1$ , aceleração do fluido projetada na direção normal ao membro estrutural ( $\mathbf{r}_1$  é o vetor unitário que define a orientação do elemento no sistema local móvel co-rotacionado);

$\ddot{\mathbf{d}}_n = \ddot{\mathbf{d}} - (\ddot{\mathbf{d}}^T \mathbf{r}_1) \mathbf{r}_1$ , aceleração da estrutura projetada na direção normal ao membro estrutural;

$D$ , diâmetro hidrodinâmico do riser;

$C_{D_t}$  e  $C_{D_n}$ , coeficientes de arrasto tangencial e normal, respectivamente;

$C_M$ , coeficiente de inércia.

Os dois primeiros termos no lado esquerdo da eq.(4.49) representam as forças de inércia sobre um corpo fixo num fluido ideal (não viscoso) acelerado mais a contribuição devido a um corpo acelerado num fluido ideal parado [33]. O termo

$\rho_0 \frac{\pi}{4} D^2 (C_M - 1)$  é comumente chamado de massa adicionada. Na equação de

equilíbrio dinâmico (3.46), este termo é passado ao lado esquerdo e somado ao de

massa estrutural. Este termo é chamado de massa adicionada externa, uma vez que se pode ter ainda uma parcela correspondente à massa contida no interior dos elementos.

O carregamento hidrodinâmico por unidade de comprimento na eq.(4.49) é calculado apenas nas extremidades dos elementos, considerando-se uma variação linear ao longo do comprimento, assim

$$\mathbf{f}_h(\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) \mathbf{f}_h^1 + \left(\frac{\xi}{L}\right) \mathbf{f}_h^2 \quad (4.53)$$

A distribuição acima é uma aproximação da distribuição do carregamento hidrodinâmico, já que este é função quadrática da velocidade relativa do escoamento em cada ponto do elemento, fato que só é verificado na eq.(4.53) para os pontos nodais do elemento. No entanto, devido ao pequeno comprimento dos elementos, a variação da velocidade relativa do escoamento entre dois nós de um elemento é pequena, validando portanto, a aproximação mostrada em (4.53).

#### 4.2.5.3.

#### Forças de interação *riser*-solo

Nesta seção é descrita a formulação implementada no programa de elementos finitos Anflex (utilizado neste trabalho) para o tratamento dos efeitos não-lineares da interação *riser*-solo. Os efeitos relativos à interação solo-estrutura são modelados por molas não-lineares automaticamente associados a cada nó na discretização espacial do *riser*. As molas atuam no fundo plano representando a fricção entre o *riser* e o solo e também o contato na direção vertical.

A reação vertical do solo sobre o *riser*, é modelada no Anflex associando-se molas bi-lineares aos nós da estrutura. Um nó, na sua posição deformada, ao entrar em contato com o solo ativa a rigidez de mola de solo, cuja relação força-deslocamento está mostrada na Fig. 4.4. Desta forma, no instante em que o *riser* encontra-se em contato com o fundo marinho, a reação passa a ser diretamente proporcional à rigidez fornecida. Da mesma forma, não havendo o contato, não há qualquer efeito sobre o *riser*.

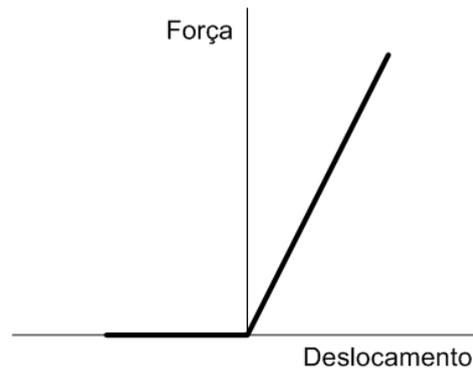


Figura 4.4 – Curva força-deslocamento bi-linear usada no solo.

A fricção entre o *riser* e o solo é representada por uma formulação elasto-plástica que permite a consideração do atrito anisotrópico, com a definição de coeficientes de atrito do solo distintos para as direções axial e transversal do *riser*  $\mu_a$  e  $\mu_t$ , respectivamente. O comportamento elasto-plástico considerado nesta formulação está ilustrado na Fig. 4.5, que apresenta uma função força-deslocamento não linear típica, associada ao grau de liberdade horizontal de cada mola. O parâmetro  $d$  indica o deslocamento de mobilização ou limite elástico, a partir do qual passa haver deslizamento e a resistência do solo atinge seu valor máximo. Por sua vez, a resistência máxima é determinada multiplicando o coeficiente de atrito do solo  $\mu$  por  $N$ , a força nodal equivalente corresponde ao peso do *riser* agindo sobre cada mola.

As setas na Fig. 4.5 indicam o caminho seguido pelos valores de resistência do solo quando os deslocamentos variam entre o valor máximo (positivo)  $d_{máx}$  e o valor mínimo (negativo)  $d_{mín}$ . No caso particular de atrito isotrópico, o ciclo fica definido pelo coeficiente  $\mu$  e pelo parâmetro  $d$ , independente da direção do deslocamento horizontal. Nesse caso, quando o movimento do duto ocorre em uma direção arbitrária, o limite de flexão elástica é assumido como um contorno circular de raio  $d$ , assumindo-se não ocorrer mobilização quando o vetor de deflexão se encontra no interior neste círculo. A força necessária para início da mobilização é  $\mu N$ .

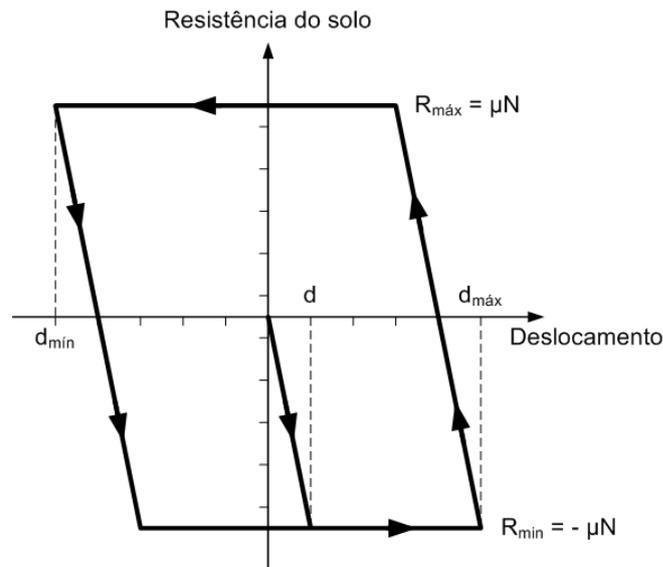


Figura 4.5 – Comportamento elasto-plástico do efeito da fricção [35].

No caso geral de atrito anisotrópico, a formulação requer os pares de valores  $(\mu_a, \mu_t)$  e  $(d_a, d_t)$  correspondentes às direções axial e transversal do *riser*, respectivamente. Neste caso, as deflexões axial e transversal são acopladas e o limite de deflexão elástica é assumido como um contorno elíptico definido por  $d_a$  e  $d_t$ . O valor máximo da resistência do solo, isto é, a força necessária para iniciar a mobilização, varia sobre a elipse [53]. Nas equações a seguir tem-se as expressões para as forças de resistência do solo  $fs$  considerando-se a formulação anisotrópica:

$$fs_{ai} = \mu_a ks_i \delta u_{ai} \quad (4.54)$$

$$fs_{ti} = \mu_t ks_i \delta u_{ti} \quad (4.55)$$

onde o subscrito  $i=1,2$  refere-se a cada nó do elemento.

Os coeficientes  $ks_i$  são obtidos por

$$ks_i = \frac{N\gamma_i}{\sqrt{(\delta u_{ai})^2 + (\delta u_{ti})^2}}; \quad i=1,2 \quad (4.56)$$

onde  $N$  é a carga nodal equivalente correspondente ao peso submerso do *riser* agindo sobre o nó e o parâmetro de correção  $\gamma_i$  é definido por

$$\gamma_i = \begin{cases} \gamma_i, & \text{if } 0 < \gamma_i < 1 \\ 1, & \text{if } \gamma_i \geq 1 \end{cases}; \quad \gamma_i = \sqrt{\left(\frac{\delta u_{ai}}{d_a}\right)^2 + \left(\frac{\delta u_{ti}}{d_t}\right)^2}; \quad i=1,2 \quad (4.57)$$

As componentes de deslocamento axial e transversal

$$\delta u_{ai} = u_{ai} - \bar{u}_{ai} \quad \text{e} \quad \delta u_{ti} = u_{ti} - \bar{u}_{ti}. \quad (4.58)$$

são definidas a partir dos deslocamentos  $\bar{u}_{ai}$  e  $\bar{u}_{ti}$ , respectivamente, que representam as coordenadas da origem da elipse que define o contorno elástico e permanecem inalterados, enquanto o ponto  $(\delta u_{ai}, \delta u_{ti})$  está sobre a elipse. Quando o ponto  $(\delta u_{ai}, \delta u_{ti})$  está fora da elipse, novos valores de  $\bar{u}_{ai}$  e  $\bar{u}_{ti}$  são obtidos de forma a redefinir o contorno elástico.

Esta correção é obtida computacional inserindo-se uma mola atuando em cada nó da malha de elementos finitos e, assim, a modelagem da interação *riser*-solo requer apenas a definição dos coeficientes de atrito e limite elástico para as direções axial e transversal  $(\mu_a, \mu_t)$  e  $(d_a, d_t)$ .