3. Teoria de Opções Reais

Para avaliar projetos utilizando o método de opções reais, é necessário determinar de que forma as incertezas afetam seu fluxo de caixa. Sob esta ótica, um dos aspectos mais importantes é determinar o tratamento a ser dado às incertezas do projeto.

Na prática, são inúmeras as variáveis que impactam o valor do projeto, mas o mais importante é definir as que afetam mais significativamente seus fluxos esperados, e modelar como essas variáveis se comportam definindo seus processos estocásticos.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913429/CA

3.1. Processos Estocásticos

Um processo estocástico é uma variável que evolui com o tempo de forma que ao menos uma parcela desta variação é aleatória. Assim, parte da variação é determinística e previsível, enquanto outra parcela não pode ser prevista.

Em relação a suas propriedades estatísticas (basicamente média e variância), um processo estocástico pode ser estacionário (quando suas propriedades são constantes ao longo do tempo) ou não estacionário (quando suas propriedades variam ao longo do tempo). No que se refere ao fator tempo, processos estocásticos podem ser classificados como contínuos ou discretos.

Segundo Dias (2005), a escolha do processo estocástico para uma determinada variável deve levar em conta a adesão dos dados, de forma que haja lógica econômica ou consistência com os fatores que impactam o comportamento dos preços do ativo. Processos estocásticos podem ser vistos como uma sequência de distribuições de probabilidades ao longo do tempo, então se deve tentar buscar o tipo de distribuição de probabilidade mais adequado à variável em questão.

3.1.1. Processo de Wiener

O processo estocástico de Wiener, também conhecido como Movimento Browniano, é um processo em tempo contínuo que apresenta as seguintes propriedades:

(i) É um processo de Markov, ou seja, a distribuição de probabilidade para todos os valores futuros (x_{t+1}) do processo dependem exclusivamente do valor atual da variável (x_t), e não é afetada pelos eventos passados ou por nenhuma outra informação presente;

(ii) Os incrementos na variável são independentes. Isto significa que a variação em um intervalo de tempo independe da variação em outros intervalos de tempo;

(iii) As variações do processo seguem uma distribuição normal, com a variância crescendo linearmente em função do tempo.

Desta forma, se $x(t)$ é um processo de Wiener, então os incrementos dz esperados em um intervalo de tempo dt devem satisfazer as seguintes condições:

- $dz = \varepsilon_t \sqrt{dt}$ **, onde** ε_t **~ Normal (0,1)**
- $E[\varepsilon_t, \varepsilon_s] = 0 \; \forall \; t \neq s$

Ou seja, o erro aleatório do processo tem distribuição normal com média 0 e variância 1, e não há correlação entre os erros aleatórios para diferentes instantes do tempo.

3.1.2. Movimento Aritmético Browniano (MAB)

O Movimento Aritmético Browniano, ou movimento Browniano com *drift*, é o exemplo mais simples de processo estocástico com incremento de Wiener. O processo da variável x evolui conforme:

$$dx = \mu dt + \sigma dz$$

Onde,

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913429/CA

μ parâmetro de *drift*, que representa a taxa de crescimento esperada de x;

σ volatilidade do processo;

dz incremento de Wiener.

O MAB é um processo estocástico relativamente simples, mas é muito importante que seja entendido, pois ele serve como base para a compreensão de outros processos mais complexos. Para o intervalo de tempo ***dt***, a variação no valor de x tem distribuição normal com parâmetros:

- $\mathbf{E}[dx] = \mu\, dt$
- $\mathbf{Var}[dx] = \sigma^2\, dt$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913429/CA

3.1.3. Movimento Browniano Generalizado - Processo de Ito

O processo de Wiener pode servir como base para modelar uma série de variáveis estocásticas, todas derivadas da seguinte generalização do movimento Browniano com *drift* segundo a formulação abaixo:

$$\boldsymbol{dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz}$$

Onde,

a(x,t) expectativa de taxa de *drift* instantânea do processo de Ito;

b(x,t) desvio padrão instantâneo do processo;

dz incremento de Wiener.

Conforme a fórmula sugere, o *drift* e o coeficiente da variância não são constantes ao longo do tempo, e variam em função do presente estado e tempo. As propriedades estatísticas do processo de Ito são:

- $\mathbf{E\,(dx) = a(x,t)\,dt}$
- $\mathbf{Var\,(dx) = b^2\,(x,t)\,dt}$

3.1.4. Movimento Geométrico Browniano (MGB)

A grande maioria dos trabalhos que empregam a teoria de opções reais assume que as variáveis que geram incerteza no projeto seguem o Movimento Geométrico Browniano. O processo de MGB é um caso especial de Processo de Ito, cuja representação segue indicada abaixo:

$$\boldsymbol{dx = \mu x dt + \sigma x dz} \quad \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\mu dt + \sigma dz}$$

Onde,

μ parâmetro de *drift*, que representa a taxa de crescimento esperada de $\boldsymbol{x}$;

σ volatilidade do processo;

$\boldsymbol{dz}$ incremento de Wiener.

O MGB é geralmente o processo utilizado para modelar preço de ações, taxas de juros, preços de commodities, bem como diversas outras variáveis econômicas. Uma restrição para a utilização deste processo é o fato de que a medida que o horizonte de previsão aumenta (quanto maior ***dt***), o processe tende a divergir (por conta do fator de aleatoriedade, que aumenta com o tempo), fazendo com que ***x(t)*** tenda a infinito. As propriedades estatísticas do MGB são:

- $\boldsymbol{E[x(t)] = x_0 e^{\mu t}}$
- $\boldsymbol{Var[x(t)] = x_0^2 e^{2\mu t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right)}$

Conforme Dixit e Pindyck (1994) demonstraram, as variações em ***dx/x*** tem distribuição normal, com média $\boldsymbol{\mu}$ e variância $\boldsymbol{\sigma^2}$. Portanto, como ***dx/x*** é o incremento no logaritmo de ***x*** e tem distribuição normal, então ***x*** teria distribuição lognormal. Ou seja, se o logaritmo neperiano de uma variável ***Y*** tem distribuição normal, então ***Y*** tem distribuição lognormal.

Y ~ Lognormal ⇔ X = Ln (Y) ~ Normal

Os principais motivos para a popularização da utilização da distribuição lognormal são:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913429/CA

(i) Não permite valores negativos à variável, o que é muito importante quando se tratam de preços de ativos;

(ii) O formato exponencial fornece um link entre retornos compostos em tempo contínuo, dado que uma vez que os retornos sejam assumidos como tendo distribuição normal, o preço do ativo teria distribuição lognormal. Assim, o retorno composto da variável entre 0 e t seria igual a:

$$R(0,t) = ln\frac{V_t}{V_0} \qquad => \qquad V_t = V_0 e^{R(0,t)}$$

(iii) É possível somar retornos compostos continuamente, ao contrário da análise em tempo discreto. Ou seja, se $t_0 < t_1 < t_2$, o retorno observado entre o período (t_0 , t_1) somado ao retorno observado entre o período (t_1 , t_2) é equivalente ao retorno durante todo o período (t_0,t_2).

Assim, o MGB assume que o valor do ativo tem distribuição lognormal, com uma tendência de aumento ou queda exponencial em seus valores, e sua variância crescendo ao longo do tempo. A representação deste processo pode ser observada no exemplo abaixo.

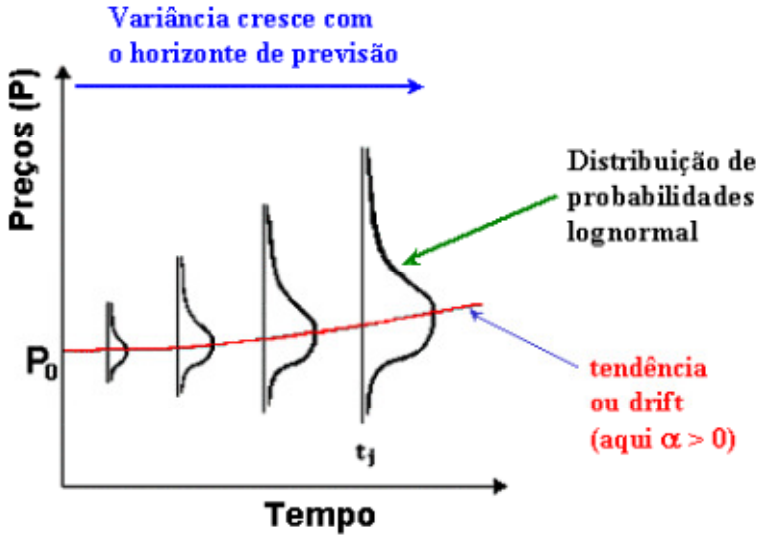


Figura 1. Processo de MGB com Drift Positivo (Fonte: Dias (2010))

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913429/CA

3.1.5. Processo de Reversão à Média

Como visto anteriormente, no MGB o valor da variável tende a divergir significativamente em relação a seu valor de partida original a medida que o horizonte de previsão aumenta. Para alguns casos, como nos preços de ações ou ativos especulativos, esta suposição pode ser uma característica desejada, porém em outros casos esta premissa não é realista.

O processo de reversão à média, também conhecido como processo de Ornstein-Uhlenbeck, estabelece que a variável evolui com uma parcela de aleatoriedade no curto prazo, mas que no longo prazo seu valor tende a retornar para os patamares próximos a seu valor inicial. A equação deste processo é dada por:

$$\boldsymbol{dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma dz}$$

Onde,

η velocidade de reversão, ou seja, a velocidade com que a variável reverte à sua média de longo prazo;

$\boldsymbol{\bar{x}}$ valor para o qual $\boldsymbol{x}$ reverte (sua média de longo prazo);

σ volatilidade do processo;

$\boldsymbol{dz}$ incremento de Wiener.

O processo de reversão à média é muito frequentemente utilizado para modelar as incertezas inerentes aos preços de commodities, principalmente as agrícolas. Como se pode observar, o incremento $\boldsymbol{dx}$ é proporcional à diferença entre $\boldsymbol{\bar{x}}$ e $\boldsymbol{x}$. Portanto, se os preços estão abaixo da média, existe uma tendência de que subam, e da mesma forma, se estiverem acima da média, a tendência é que os preços caiam até patamares próximos à média ($\boldsymbol{\bar{x}}$). Esse efeito é análogo às forças de oferta e demanda, em que uma queda nos preços pode fazer com que a oferta de um determinado produto caia e sua demanda aumente, fazendo com que haja uma pressão nos preços. Da mesma forma, uma alta no preço do produto tende a reduzir sua demanda.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913429/CA

Assim como o MGB, este é um processo de Markov, porém seus incrementos não são independentes, já que dependem do valor corrente de $\boldsymbol{x}$. Suas propriedades estatísticas seguem indicadas abaixo, e a Figura 2 em seguida ilustra um exemplo de como uma variável modelada por este processo se comporta:

- $\boldsymbol{E[x_t] = \bar{x} + (x_0 - \bar{x})e^{-\eta t}}$
- $\boldsymbol{Var[x_t - \bar{x}] = \frac{\sigma^2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta t})}$

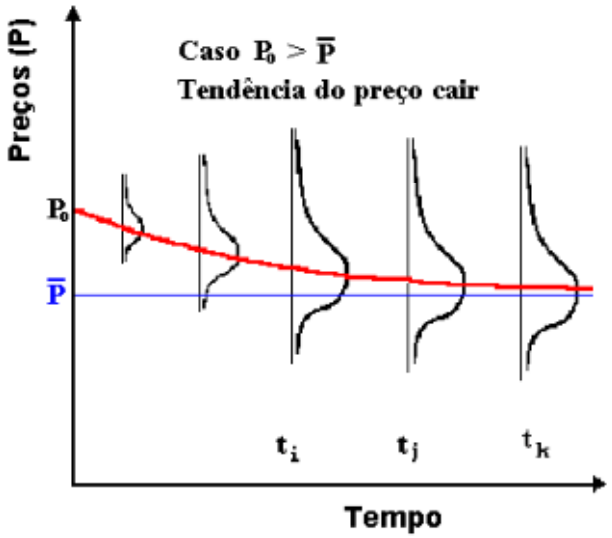


Figura 2. Processo de Reversão à Média (Fonte: Dias (2010))

3.2. Opções Financeiras

Uma opção financeira é uma opção sobre um ativo financeiro. Uma opção de compra (do inglês, *call*) concede ao seu detentor o direito, mas não a obrigação, de comprar um ativo por um preço pré-estabelecido (preço de exercício ou *strike*), em data futura (data de expiração ou de exercício). Analogamente, uma opção de venda (do inglês, *put*) concede ao seu detentor o direito de vender o ativo pelo preço de exercício na data de exercício.

As opções de compra e venda podem ser classificadas como européias ou americanas, em função da sua data de exercício. Enquanto as opções européias

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913429/CA

somente podem ser exercidas na data de sua expiração, as opções americanas podem ser exercidas a qualquer momento até seu vencimento.

Para adquirir uma opção, o investidor paga um valor denominado "prêmio", que é também o valor financeiro máximo que o investidor poderá perder ao entrar na transação. Por serem direitos e não obrigações para os investidores que detém sua propriedade, as opções de compra européias somente serão exercidas caso, na data de exercício, o preço de exercício da opção seja inferior ao valor de mercado do ativo subjacente, de forma que seu *payoff* nesta data será **call = Max (S – K;0)**, onde ***S*** é o valor de mercado do ativo e ***K*** o preço de exercício da opção. Da mesma forma, opções européias de venda somente serão exercidas se o valor de mercado do ativo for inferior ao preço de exercício, e seu *payoff* na data de exercício será **put = Max (K – S;0)**.

As opções podem ser negociadas sobre quaisquer ativos subjacentes, como ações, índices de ações, taxas de câmbio, taxas de juros, commodities, contratos futuros, entre outros.

Além das opções de compra e venda tradicionais (também conhecidas como opções *vanilla*), existem também opções exóticas, cuja complexidade será limitada apenas pela imaginação das partes que estiverem negociando o contrato. Opções podem incluir barreiras de entrada e saída – *knock in* ou *knock out* (gatilhos a partir do qual a opção poderá ser exercida ou terá seu valor reduzido a zero), *caps*, *floors*, e outras estruturas financeiras complexas que dificultam muito sua precificação.

Segundo Hull (2003) existem três principais tipos de investidores que procuram as opções financeiras: *hedgers*, especuladores e arbitrários. *Hedgers* utilizam derivativos para se proteger do risco que eles se deparam em relação a potenciais futuros movimentos em uma variável de mercado. Especuladores os utilizam para apostar em uma direção para esta variável de mercado, e arbitrários utilizam posições contrárias em dois ou mais instrumentos ou mercados para obter ganhos fixos sem risco.

Segundo Copeland e Antikarov (2002), uma opção é "o direito, e não a obrigação, de empreender uma ação (ex. diferir, expandir, contrair ou abandonar)

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913429/CA

a um custo pré determinado, denominado preço de exercício, por um período pré estabelecido – a vida da opção".

3.3. Modelo de Black & Scholes

Em seu artigo publicado em 1973, Fisher Black, Myron Scholes e Robert Merton propõem o que viria a ser o modelo mais conhecido nas finanças para precificação de opções européias. Este método ganhador do premio Nobel em 1997 ficou mundialmente conhecido como modelo de Black-Scholes.

O modelo Black-Scholes foi desenvolvido assumindo que o ativo subjacente à opção segue um processo estocástico contínuo conforme o Movimento Geométrico Browniano, além da adoção das seguintes premissas:

(i) O preço do ativo segue distribuição lognormal, com média (μ) e desvio padrão (σ) constantes ao longo do tempo;
(ii) A taxa livre de risco (r) é constante;
(iii) Não existem custos de transação, impostos ou margens
(iv) Os ativos são infinitamente divisíveis;
(v) O ativo subjacente não paga dividendos, e sua negociação é contínua;
(vi) Não existem oportunidades de arbitragem;
(vii) É permitida a venda a descoberto.

A equação para cálculo do valor de uma opção de compra segue a fórmula abaixo.

$$\boldsymbol{c = S\,N(d1) - Ke^{-r(T-t)}\,N(d2)}$$

Em que:

$$\boldsymbol{d1 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{d2 = d1 - \sigma\sqrt{T-t}}$$

e:

c prêmio da opção de compra (call);

S valor de mercado do ativo subjacente;

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913429/CA

K preço de exercício da opção;

T – t prazo até a expiração da opção;

σ volatilidade do ativo subjacente;

N(.) função densidade de probabilidade normal.

Apesar de sua enorme popularidade, o método de Black-Scholes limita-se a precificação de opções de compra e venda européias, o que não costuma ser o caso das opções reais, em que as empresas constantemente podem tomar decisões que afetam o andamento do projeto.

3.4. Opções Reais

Como visto anteriormente, o método do VPL pressupõe que os fluxos de caixa futuros de um projeto são certos, e, portanto não é capaz de capturar de que forma as incertezas relativas ao projeto impactam seu fluxo de caixa. Além disso, considera que a estratégia inicial de gestão será mantida, desprezando o valor das decisões que podem ser tomadas pelos gestores durante a vida do projeto.

Projetos de investimento tem como característica uma série de flexibilidades gerenciais, também conhecidas como opções reais, que podem ser utilizadas pela firma para maximizar seu valor a medida que novas informações sobre o mercado e o projeto são capturadas. Estas flexibilidades, conforme amplamente debatido na literatura de finanças, tem valor, e podem aumentar significativamente o valor dos projetos se levadas em conta na análise do investimento.

A Figura 3 abaixo ilustra os diversos tipos de opções reais, e em seguida estão detalhadas as opções mais relevantes e relacionadas ao presente estudo.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913429/CA

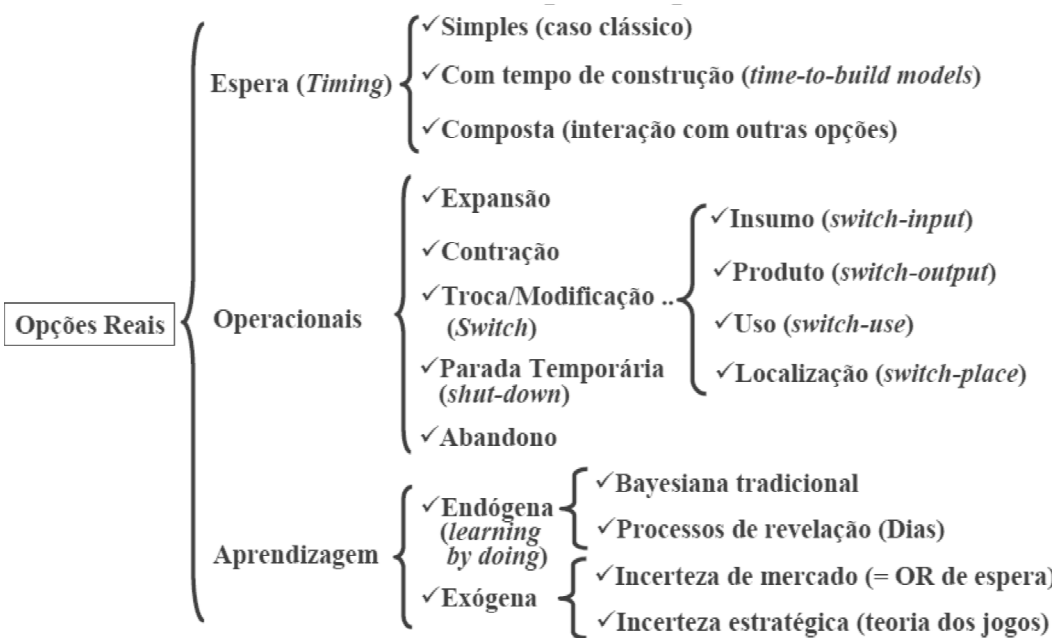


Figura 3. Principais tipos de Opções Reais (Fonte: Dias (2010))

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913429/CA

Opção de Abandono

A opção de abandonar um projeto pode ser comparada a uma opção americana (que pode ser exercida a qualquer momento) de venda do projeto. Trigeorgis (1996), ao caracterizar esta opção, divide tais opções em duas categorias: opção de desistir do investimento durante a fase de investimento, e abandono do projeto pelo seu valor residual.

O primeiro tipo se faz presente quando o investimento no projeto é fracionado, ou seja, não é concentrado todo em um único período. Assim, na medida em que novas informações são obtidas, a realização do projeto pode não mais se tornar vantajosa, e a opção de não realizar os demais investimentos planejados pode ter valor considerável.

Pode-se citar como exemplo a exploração de um campo de petróleo, em que o processo de exploração leva muito tempo até o momento em que o campo inicia a produção. Caso durante a fase de investimentos do projeto a previsão para os preços do petróleo caiam abaixo de um valor que não compense mais os

investimentos remanescentes para viabilizar a produção, então a empresa abandonaria o projeto, evitando ainda mais perdas além das já realizadas.

Já a opção de abandono pelo valor residual é inerente a projetos em fase de operação, e deve ser exercida quando o valor de venda ou abandono do projeto for superior a sua expectativa de fluxos futuros. Isso ocorre geralmente quando o projeto demonstrar-se, ao longo da sua vida, um mau investimento, e manter este projeto operando pode não compensar a manutenção de seus custos fixos.

O valor da opção será maior quanto mais líquidos forem os ativos relacionados ao projeto. Por exemplo, uma planta industrial cujas máquinas e equipamentos são padronizados terá valor residual superior a uma planta que requer ferramental customizado especificamente para este projeto, e consequentemente, sua opção de abandono será superior à da fábrica customizada.

A opção de abandono pelo valor residual pode ser vista como uma opção de venda americana do projeto, sendo seu preço de exercício equivalente ao maior entre (i) valor residual do projeto, ou (ii) valor da possibilidade de uso alternativo deste projeto. Esta consideração é bastante intuitiva ao se considerar que os mercados são competitivos e completos. Na existência da possibilidade de realizar investimentos alternativos e mais rentáveis (como por exemplo, adaptando o projeto a outro uso), o valor residual do projeto deve ser maior que o valor do projeto considerando seu uso original.

Opção de Adiar o Investimento

A opção de adiar o início de um projeto é o direito, mas não a obrigação, que os gestores tem de retardar o início do investimento. A opção de adiar pode ser enxergada como uma opção de compra americana sobre o valor do projeto (V) pagando o preço de exercício, equivalente aos investimentos necessários para sua execução. Assim, ao optar pela execução do projeto, o investidor abre mão da opção de espera em detrimento da expectativa dos frutos gerados pelo projeto.

A opção de adiar o investimento tem muito valor quando se está analisando projetos com longos prazos para execução e muitas incertezas, como os projetos nos setores de óleo e gás, mineração, grandes obras de infra-estrutura, e também projetos no setor imobiliário.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913429/CA

A opção de adiar o investimento permite que o gestor aprenda mais sobre o mercado e examine os as incertezas acerca do projeto antes de efetivamente investir recursos no mesmo, evitando perdas em caso de cenários desfavoráveis. No entanto, caso o mercado se demonstre favorável, o projeto poderá ser realizado em condições mais vantajosas, se demonstrando um negócio mais rentável.

Brealey e Myers (2003) avaliam que quando maiores as incertezas do projeto ou menores os fluxos de caixa gerados nos períodos iniciais do projeto, maior será o valor da opção. Assim, é muito comum que as empresas adiem o início de seus projetos, mesmo com VPL positivos, para manter viva a opção de deferir o investimento.

Considerando-se um cenário de monopólio, o momento de investir ocorre quando o VPL do projeto sem a opção de adiar o investimento é maior que o valor presente da opção. Porém, em um mercado competitivo, o valor da espera varia em função da ameaça de novos entrantes no mercado, e do posicionamento que a empresa se coloca em relação aos concorrentes, conforme estabelecido na teoria dos jogos.

Opção de Expansão

A opção de expansão, como o próprio nome sugere, consiste na possibilidade de crescer ou aumentar as dimensões de um projeto. A opção de expansão pode ser vista como uma opção americana de comprar uma proporção adicional do projeto (x%), pagando-se o custo necessário para tal expansão (I_E). A opção de expansão geralmente será exercida caso o projeto original tenha se demonstrado um bom investimento, fazendo jus ao investimento para aumentar seu porte. Assim, um projeto que tenha uma opção de expansão pode ser enxergado como um projeto sem opção somado à opção de expansão:

$$\textit{Valor do Projeto com Opção de Expansão} = V + Max\ (xV - I_E\ ;\ 0)$$

Trigeorgis (1996) afirma que a opção de expansão pode ter importância estratégica para o projeto, principalmente se possibilitar à empresa explorar oportunidades futuras de crescimento. Esta opção pode fazer com que projetos aparentemente inviáveis (com VPL negativo), sejam realizados, porque caso se confirme o cenário positivo para o investimento, a expansão será exercida e

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913429/CA

adicionará valor ao projeto. Assim, a administração da empresa pode optar por uma tecnologia mais cara, por exemplo, caso esta ofereça mais flexibilidades e permita o aumento na produção, caso este se demonstre vantajoso.

Opção de Contração

Ao contrário da opção de expansão, que será exercida quando as condições de mercado se tornarem favoráveis, caso o cenário se torne negativo para o projeto, a empresa pode optar por reduzir a escala do projeto, recuperando parte do investimento ou economizando custos fixos. Esta redução (ou contração) do projeto é análoga a uma opção de venda sobre uma parte do projeto (c%), com preço de exercício equivalente aos custos recuperados ou economizados esta decisão (I_c). Assim, o valor da opção é o maior entre I_c – cV e zero, pois a empresa tem o direito, mas não a obrigação de exercê-la.

$$\textit{Valor do Projeto com Opção de Contração} = V + Max\ (I_c - cV\ ;\ 0)$$

Este tipo de opção pode ser muito valioso, por exemplo, quando se está estudando o desenvolvimento de uma fábrica para produção de um bem em que há muita incerteza associada a sua demanda. Neste caso, a opção por projetos com menor custo inicial e maiores custos variáveis será vantajosa por fornecer maior flexibilidade na redução da produção, evitando a perda do capital investido caso a redução se faça necessária.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913429/CA

3.5. Breve Histórico das Opções Reais

O termo opções reais foi utilizado pela primeira vez por Myers (1977), quatro anos após a publicação dos artigos de Black & Scholes e Merton, sobre a metodologia para precificação de opções financeiras. O artigo de Myers foi o primeiro a considerar as oportunidades de investimento em projetos pelas empresas como opções de compra sobre estes ativos.

A despeito da enorme quantidade de estudos sobre este tópico, a aplicação de métodos de avaliação utilizando opções reais pelas empresas ainda é bastante limitada, muito em função da sua complexidade matemática, pelas assunções teóricas restritas e pela falta de apelo intuitivo.

A complexidade matemática associada a teoria advém do fato de que o problema geral requer uma solução probabilística para a decisão ótima de investimento da firma, não apenas no instante inicial em que se está avaliando o projeto, mas também durante toda a vida do projeto. Para resolver este problema de programação dinâmica, as incertezas que afetam o valor do projeto são inicialmente modeladas como processos estocásticos.

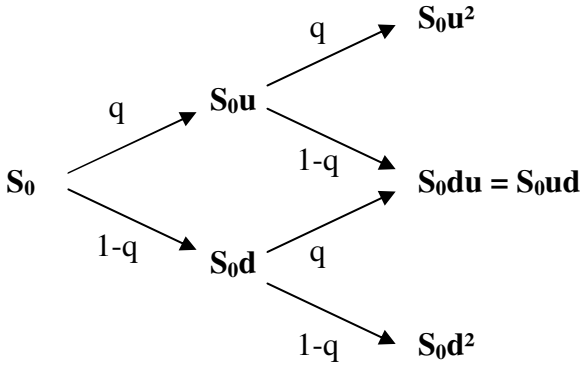
Posteriormente o valor da política ótima da firma é descrito através de uma equação diferencial parcial, obtida como solução para uma função representada pelo princípio de otimalidade de Bellman, em que as condições de contorno refletem as condições iniciais e finais do *payoff* do projeto.

Quando não for possível obter uma solução matemática analítica, como nos casos em que existem muitas fontes de incerteza e mais de um tipo de opção, é necessária a utilização de métodos numéricos mais complexos e programação dinâmica em tempo discreto devem ser utilizada para se chegar a uma solução do problema. A aproximação discreta do processo estocástico contínuo é utilizada para fornecer um modelo eficiente do ponto de vista computacional.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913429/CA

3.6. O Modelo Binomial

Um método muito útil para a avaliação de opções é a construção de árvores binomiais. Utilizado pela primeira vez por Cox, Ross e Rubinstein (1979), o modelo foi primeiramente utilizado para simular a variação no preço de ações segundo o processo de difusão lognormal. Trata-se de uma árvore de probabilidades em que existe uma probabilidade q de que o valor da ação aumente (u) no instante seguinte, e probabilidade $(1-q)$ que seu valor diminua ($d = 1/u$). Um aspecto muito importante do modelo é que o valor da ação após um movimento de subida e posterior descida será igual ao movimento inverso, e o fato de os vértices se recombinarem reduz significativamente o número de nós na malha, como pode ser visto abaixo.



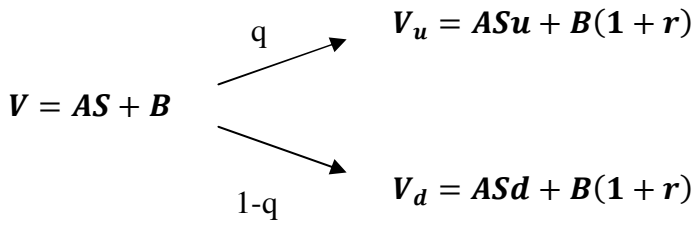
A abordagem utilizada para precificação de opções parte da premissa que não existem oportunidades de arbitragem, e que o mercado é completo, no sentido que existem ativos negociados capazes de replicar o *payoff* do ativo em qualquer estado e em qualquer período futuro. Para o caso de uma opção de compra sobre uma ação, assume-se que é possível comprar ou vender a ação, seu derivativo ou aplicar e tomar empréstimos a uma taxa livre de risco ***r***.

Como não há oportunidades de arbitragem, assume-se que $u < 1 + r < d$, pois caso ***u*** fosse inferior a ***r***, não faria sentido investir no ativo, e, caso ***r*** fosse inferior a ***d***, mesmo em um cenário de queda, investir na ação seria mais rentável que no ativo sem risco.

Para determinar a taxa de desconto apropriada do projeto e capturar as informações de mercado sobre seu risco, pode-se usar o método de portfólio replicante. Assumindo que existe um projeto com valor desconhecido ***V***, constitui-se no instante inicial um portfólio para contendo quantidade ***A*** de ações negociadas no mercado, com preço unitário ***S***, e um montante financeiro ***B*** aplicado em um ativo livre de risco que rende a taxa ***r***, para representar este projeto. Como visto anteriormente, existe a probabilidade ***q*** de que a ação siga a trajetória ***u***, e ***(1-q)*** de que siga a trajetória ***d***.

O portfólio inicial pode então ser representado por:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913429/CA



Resolvendo-se o sistema acima assumindo que os únicos parâmetros desconhecidos são A e B, chega-se à solução para estas duas variáveis sem a necessidade de conhecer-se q. Porém, caso q fosse conhecido, a taxa de desconto k do projeto poderia ser obtida através da fórmula abaixo:

$$V = \frac{quV + (1-q)dV}{1+k}$$

Para evitar a necessidade de se estimar q ou k, uma formulação mais simples tem sido amplamente utilizada na teoria de finanças para resolver tais problemas. Trata-se da construção do portfólio e da árvore binomial considerando-se probabilidades neutras ao risco. Nesta formulação, ao invés de ajustar o risco do projeto por sua taxa de desconto apropriada (k), o ajuste é feito nas probabilidades de acréscimo (u) ou decréscimo (d) no valor do projeto.

Assim, ao invés da probabilidade ajustada ao risco q de o projeto atingir o valor V_u no instante seguinte, utiliza-se a probabilidade neutra ao risco p. Assumindo que não há oportunidades de arbitragem, e que se está analisando o projeto sob a ótica de neutralidade ao risco, pode-se utilizar a taxa livre de risco r para descontar os valores futuros, e o cálculo de V considerando-se dois períodos seria então:

$$V = \frac{puV+(1-p)dV}{1+r} \quad \text{onde,} \quad p = \frac{1+r-d}{u-d}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913429/CA

Apesar de suas limitações, esta formulação apresenta um grande benefício que é eliminar a necessidade de estimação de k. O problema passa então a ser encontrar a probabilidade neutra ao risco p para o projeto, que geralmente é uma tarefa bem mais simples, já que a probabilidade p pode ser obtida através de dados de mercado ou calculada através de argumentos relativos ao processo estocástico associado ao valor do projeto.

Para prever variações de preços futuros, o processo estocástico mais utilizado é o Movimento Geométrico Browniano (MGB). Esta premissa é utilizada por Hull (2003) para modelar as incertezas associadas ao preço e ações, e por Copeland e Antikarov (2002) para as incertezas associadas a projetos reais.

Sob esta ótica, o valor do projeto em cada momento tem distribuição lognormal, e através da análise dos momentos da árvore de decisão e desta distribuição é possível encontrar os valores de u e d, e o cálculo do valor do projeto pode ser efetuado dispondo apenas de informações sobre seu valor no instante inicial (V), a volatilidade de seus retornos, e a taxa livre de risco.

Quando aplicado a precificação de opções, o método binomial fornece soluções aproximadas ao método de avaliação desenvolvido por Black, Scholes e Merton (1973), mas ainda apresenta a vantagem de permitir que sejam analisadas soluções para opções americanas, em que a opção pode ser exercida anteriormente à sua data de vencimento, ao contrário do método de Black, Scholes e Merton, que somente avalia opções européias.

Para avaliação de opções reais em tempo discreto, o procedimento mais comum envolve inicialmente a construção de uma árvore binomial com o valor do projeto ao final de cada vértice. Posteriormente, incluem-se nós de decisões em cada instante em que as opções podem ser exercidas, conforme será detalhado mais adiante.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913429/CA

3.7. O Modelo Binomial com Dividendos

Para projetos que geram dividendos, o valor do projeto sofre uma descontinuidade após cada distribuição. Este efeito é semelhante ao que ocorre no preço de ações quando pagam dividendos.

A árvore binomial deve ser modelada então considerando-se que, em cada instante do tempo, o projeto pagará dividendos a uma taxa $\boldsymbol{D}$, calculada como o percentual que o dividendo no período representa em relação ao valor do projeto.

$$\boldsymbol{D_t = \frac{C_t}{V_t}}$$

Após cada distribuição, o valor do projeto cai na proporção da taxa de dividendos, e seu valor pode ser calculado da seguinte forma

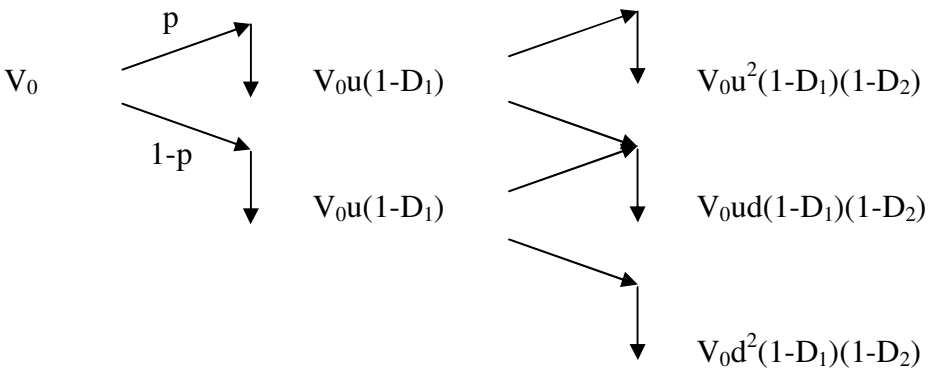
Valor do Projeto Antes de Dividendos:

$$\boldsymbol{V_{i,j} = V_0 u^{i-j} d^j \prod_{k=1}^{i-1} (1 - D_k)}$$

Valor do Projeto Pós Dividendos:

$$\boldsymbol{V^*_{i,j} = V_0 u^{i-j} d^j \prod_{k=1}^{i} (1 - D_k)}$$

Assim, a árvore binomial do ativo que paga dividendos pode ser representada por:



PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913429/CA