3.
Modelos Constitutivos

A complexidade envolvida no estudo da deformação de solos e rochas é um dos grandes desafios da engenharia. No entanto, apesar da diversidade desse comportamento, observações experimentais de ensaios triaxiais apontam um aspecto singular onde dependendo da história de carregamento e tensões atuantes no solo, deformações elásticas (reversíveis) e plásticas (irreversíveis) podem coexistir, justificando então a aplicação de modelos elasto-plásticos em equações constitutivas.

Devido à dificuldade de delinear o comportamento dos solos e rochas, busca-se a adequação de teorias já desenvolvidas para materiais de comportamento bem definido, como os metais, para que se possa determinar as suas variáveis de influência.

Para definir de forma mais realística o comportamento dos solos e rochas, é necessário que se tenha conhecimento das teorias que representam as suas condições em determinado estado. Para isso, é necessário que se domine assuntos como a teoria da elasticidade e plasticidade.

Este capítulo apresenta uma revisão bibliográfica concisa dos conceitos de elasticidade e plasticidade do ponto de vista geotécnico assim como as características e particularidades quando estes conceitos são submetidos aos critérios de modelagem elasto-plástica junto ao programa de elementos finitos Abaqus 6.10. Este capítulo foi todo baseado nas seguintes bibliografias: Desai (1979), Naylor (1981) e Chou & Pagano (1967); inclusive as equações e o formalismo apresentados.

3.1.
Noções de Elasticidade

O comportamento de um material elástico pode ser descrito por uma relação única entre tensão e deformação, ou seja, onde as tensões podem ser determinadas pela deformação. Por exemplo, caso a tensão normal atue somente na direção x (σ_x), temos a relação conhecida como lei de Hooke (equação (3.1)).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921938/CA

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \tag{3.1}$$

A constante E é conhecida como módulo de elasticidade ou módulo de Young e pode ser determinada experimentalmente através de valores de tensão e deformação medidos em um ensaio uniaxial. O módulo de elasticidade corresponde a inclinação do gráfico tensão-deformação gerado pelo ensaio.

A relação entre tensão e deformação pode ser muito complexa e principalmente dependente dos tipos de materiais e condições de carregamento. Para um estado geral de tensões, a parcela elástica da relação tensão-deformação, conhecida como Lei de Hooke generalizada, é governada pelas equações 3.2 a 3.7 (Chou & Pagano, 1967).

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \nu\left(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)\right] \tag{3.2}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \nu\left(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}\right)\right] \tag{3.3}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \nu\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)\right] \tag{3.4}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} \tag{3.5}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{2G} \tag{3.6}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{2G} \tag{3.7}$$

sendo:

$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}\ e\ \varepsilon_{zz}$ as deformações totais normais a direção x,y e z

$\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}\ e\ \varepsilon_{xz}$ as deformações totais cisalhantes em cada eixo

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}\ e\ \sigma_{zz}$ as componentes das tensões normais as direções x,y e z

$\sigma_{xy}, \sigma_{yz}\ e\ \sigma_{xz}$ as componentes das tensões cisalhantes em cada eixo

ν – coeficiente de poisson

E – módulo de elasticidade

G – Módulo Cisalhante

Nota-se que nessas equações três constantes elásticas (E, ν e G) governam a relação tensão-deformação para um material elástico isotrópico, mas são necessários somente dois destes parâmetros, um vez que ν e G podem ser relacionados de acordo com a equação 3.8 (Chou & Pagano, 1967).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921938/CA

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{3.8}$$

3.2.
Noções de Plasticidade

Os três conceitos básicos da plasticidade são: critério de escoamento (*yield function*); lei de endurecimento ou amolecimento (*Hardening/softenning law*); lei de fluxo (*flow* rule, engloba potencial plástico);

Antes de descrê-las detalhadamente, vale fazer uma distinção entre deformações elásticas e plásticas. Isto é comumente realizado com o comportamento de metais, como pode ser observado na figura 18 abaixo.

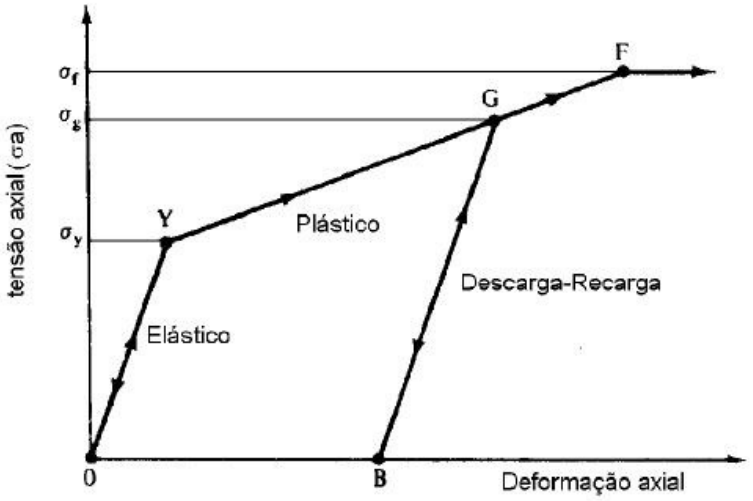

Figura 18 - Comportamento elasto-plástico de um metal (Atkinson & Bransby, 1978).

Como pode ser observado, para tensões menores que σ_y, o comportamento do material é classificado como linear elástico, ou seja, quando carregado e descarregado suas deformações são totalmente recuperáveis. Acima das tensões de σ_y começa a ocorrer deformações plásticas e o material se comporta como elastoplástico. Assim, se este material for descarregado no ponto G, ocorrerão deformações elásticas e plásticas. A tensão σ_y é conhecida com tensão de escoamento e este aumento verificado do ponto Y para o ponto G é conhecido como endurecimento.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921938/CA

3.2.1.
Função Escoamento

O critério de escoamento define o limite entre a zona de comportamento elástico e plástico do material em questão. Sendo assim, o primeiro passo para os modelos matemáticos é estabelecer esse limite.

Para um estado de tensões uniaxial (figura 18), a tensão de escoamento σ_y indica o início das deformações plásticas. Para uma situação multiaxial não existe uma tensão de escoamento já que existem componentes em outras direções, assim, torna-se necessário definir uma função escoamento (F).

A função escoamento define o limite entre o comportamento elástico e o comportamento plástico de um material, como demonstrado na figura 19, e é expresso pela equação (3.9). Nesta equação (3.9) observa-se que F é função das componentes de tensão, tensões principais ou invariantes de tensão.

$$F\left(\underset{\sim}{\sigma}\right) = 0 \tag{3.9}$$

onde:

F – é a função escalar da tensão escoamento

$\underset{\sim}{\sigma}$ – representa as componentes de tensão, tensões principais ou invariantes de tensão.

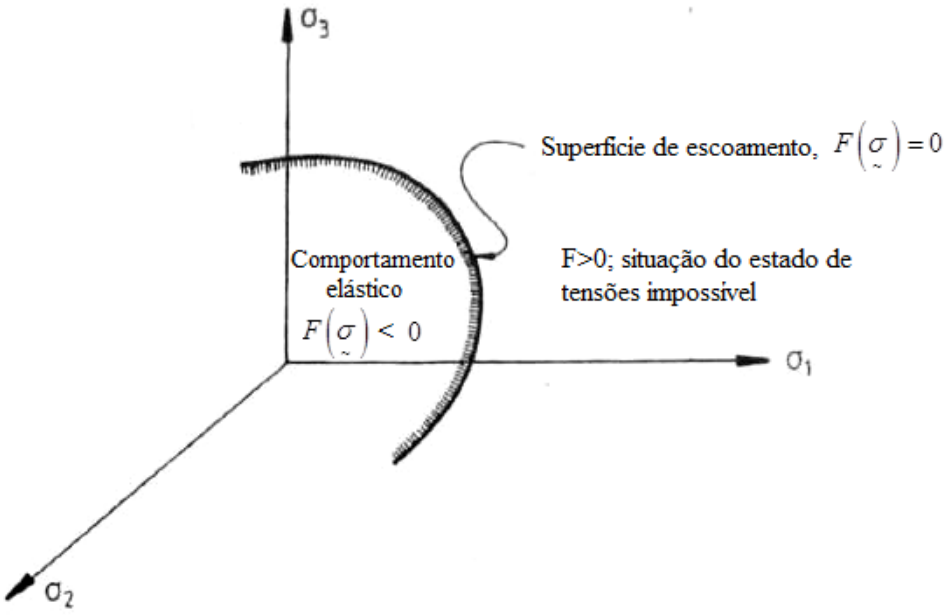

Figura 19 - Representação da superfície de escoamento em um espaço de tensões (adaptado do Naylor, 1981).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921938/CA

Como F é uma função escalar das tensões principais, o critério de escoamento pode ser interpretado como uma superfície. Portanto, quando F<0 implica em um comportamento elástico do material e quando F=0, ou seja, estando as tensões localizadas na própria superfície de escoamento, implica em um comportamento plástico. Sendo F>0 caracteriza-se uma situação impossível (Naylor, 1981).

3.2.2. Lei de Endurecimento-Amolecimento

A lei de endurecimento-amolecimento indica como o limite de escoamento varia de acordo com a deformação plástica. Em uma situação elastoplástica uniaxial, como na figura 20, a tensão de escoamento aumenta com o aumento da deformação plástica (“endurecimento”).

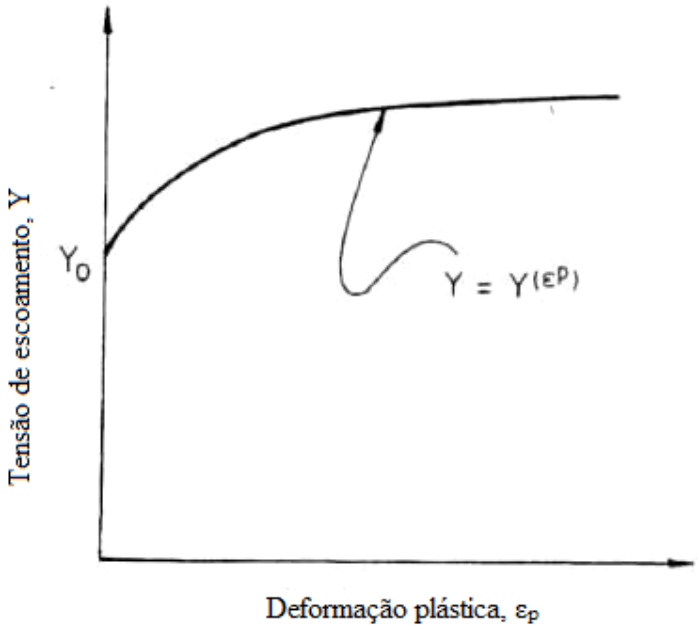

Figura 20 - Representação da lei de endurecimento em uma condição uni-axial (adaptado do Naylor, 1981).

Segundo Naylor (1981), em uma situação multi-axial, a função escoamento não é somente função das tensões como também das deformações plásticas. Em sua forma mais geral pode ser escrita como:

$$F\left(\underset{\sim}{\sigma}, h\right) = 0 \tag{3.10}$$

ou

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921938/CA

$$F\left(\underset{\sim}{\sigma}, \underset{\sim}{\varepsilon}^{p}\right) = 0 \tag{3.11}$$

onde h representa uma função escalar da deformação plástica conhecida como parâmetro de endurecimento e $\underset{\sim}{\varepsilon}^{p}$ corresponde as componentes da deformação plástica.

3.2.3. Lei de Fluxo

No exemplo uniaxial apresentado no item 3.2, não era necessário discutir a direção da deformação plástica, pois ela tem a mesma direção da tensão aplicada. Isto pode não acontecer em uma condição multiaxial onde as tensões e deformações contabilizam 6 componentes. Logo, para especificar a direção da deformação plástica existe a lei de fluxo.

Quando o estado de tensões atinge a função plastificação (F), o material sofre deformações plásticas. Isto é definido como fluxo plástico. Segundo Naylor (1981), na teoria da plasticidade, a direção dos vetores de deformação plástica é definida através da lei de fluxo. Assim, o incremento de deformação plástica pode ser determinado através de uma lei de fluxo, como na expressão (3.12). Esta lei é expressa por:

$$d\,\underset{\sim}{\varepsilon}^{p} = d\lambda \frac{\partial F\left(\underset{\sim}{\sigma}\right)}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \tag{3.12}$$

Onde:

$d\,\underset{\sim}{\varepsilon}^{p}$: representa os componentes dos incrementos da deformação plástica;

dλ: escalar positivo

Esta equação (3.12) pode ser definida graficamente como pode ser visto na figura 21, na qual o vetor normal a superfície de escoamento possui componentes dos incrementos da deformação plástica.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921938/CA

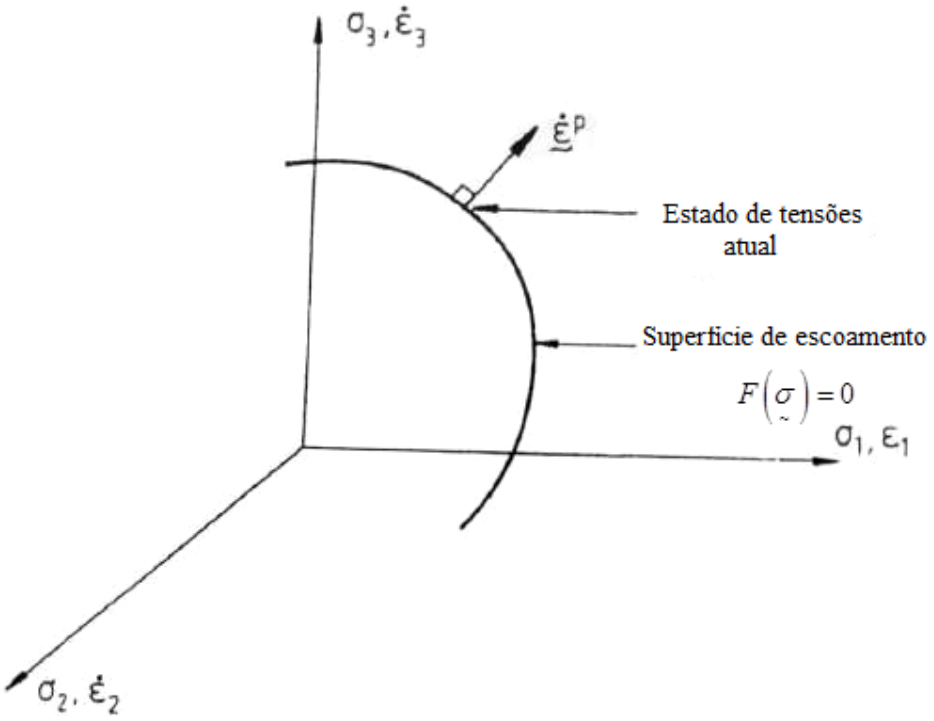

Figura 21 - Lei de Fluxo associado (adaptado do Naylor, 1981) .

Nota-se que na equação (3.12), dada a direção das tensões, não é possivel determinar os valores das componentes das deformações plásticas, apesar de definirem suas direções. Logo, a lei de fluxo pode ser dividida em dois casos: associado e não associado.

Quando a direção das deformações plásticas está associada à superfície de escoamento, a lei de fluxo representada pela equação (3.12) também é conhecida como lei de fluxo associada. Esta expressão também é conhecida como condição de normalidade.

Para os materiais geotécnicos é comum que a função de escoamento não reproduza a condição de normalidade. Neste caso, adota-se outra função, e a lei de fluxo é classificada como não associado.

Então, quando a direção das deformações plásticas não estão associadas à superfície de escoamento ou função escoamento, esta é conhecida como lei de fluxo não-associado. Para isso, assume-se a existência de uma função chamada de potencial plástico (Q), à qual os componentes de deformação incremental são ortogonais como pode ser observado na figura 22. Então, os incrementos da deformação plástica podem ser expressos como:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921938/CA

$$d\underset{\sim}{\varepsilon}^{p} = d\lambda \frac{\partial Q\left(\underset{\sim}{\sigma}\right)}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \tag{3.13}$$

sendo:

dλ: escalar positivo

Q: função potencial plástica

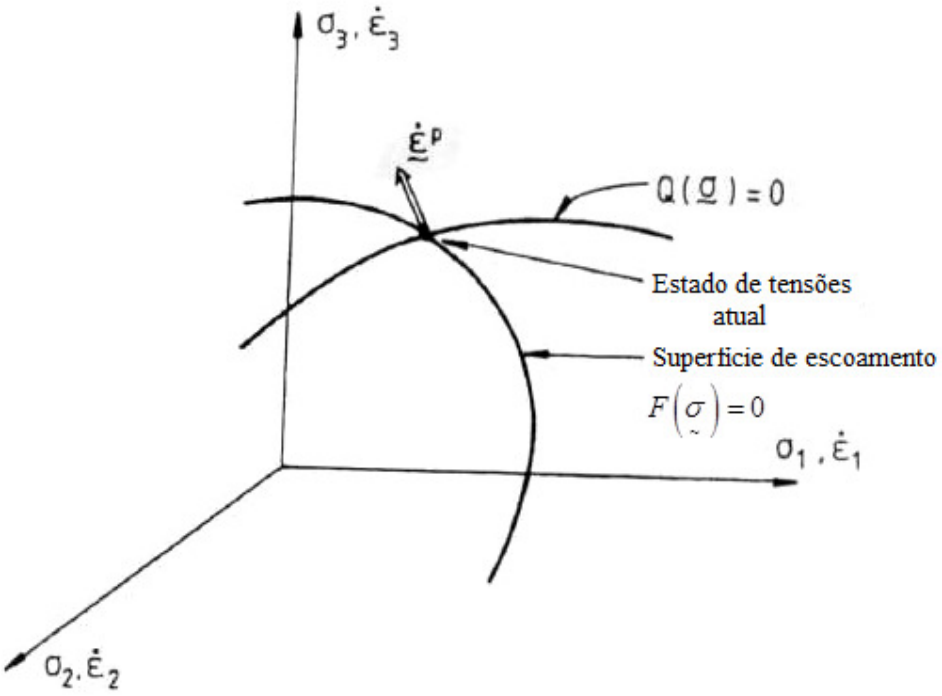

Figura 22 - Lei de Fluxo Não-Associado (adaptado do Naylor, 1981).

Vale lembrar que o incremento da deformação total é composto por uma parcela elástica e outra plástica. A parcela elástica, relacionada a Lei de Hooke, pode ser expressa como:

$$d\underset{\sim}{\varepsilon}^{e} = D_{e}^{-1} d\underset{\sim}{\sigma} \tag{3.14}$$

sendo:

D_e: matriz constitutiva elástica do material

$d\underset{\sim}{\varepsilon}$: vetor incremento das componentes da deformação elástica

$d\underset{\sim}{\sigma}$: vetor incremento das componentes de tensão

Logo, a relação constitutiva elastoplástica é difinida pela equação 3.15.

$$d\underset{\sim}{\sigma} = D_{e}\left(d\underset{\sim}{\varepsilon} - d\underset{\sim}{\varepsilon}^{p}\right) \tag{3.15}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921938/CA

onde:

$$d\underset{\sim}{\varepsilon}^{e} = d\underset{\sim}{\varepsilon} - d\underset{\sim}{\varepsilon}^{p} \tag{3.16}$$

3.3. Modelo de Mohr-Coulomb

Um dos critérios de ruptura mais utilizados na área geotécnica é o critério de Mohr - Coulomb e é um dos modelos adotados pelo programa de elementos finitos Abaqus.

3.3.1.1. Critério de Ruptura

Este modelo, proposto por Coulomb em 1773, é representado em termos da tensão cisalhante e da tensão efetiva normal no plano de fratura satisfazendo a seguinte igualdade:

$$|\tau| \leq \sigma_N \tan\varphi + c \tag{3.17}$$

onde c, φ são a coesão e o ângulo de atrito interno do material respectivamente.

A equação (3.17) não é usualmente utilizada em elementos finitos visto que se torna necessário definir a orientação do plano de fratura antes da utilização da equação (Naylor, 1981). Logo, a equação (3.17) pode ser expressa em termos de tensões principais efetivas ou de invariantes:

$$\sigma_1(1-\sin\varphi) - \sigma_3(1+\sin\varphi) - 2c\cos\varphi = 0 \tag{3.18}$$

onde φ é o ângulo de atrito interno do material e c é a sua coesão.

Observa-se que a superfície de plastificação independe da tensão principal intermediária σ_2. Este modelo é definido como elastoplástico perfeito, mas diferentemente de outros modelos, pode assumir ou não a lei de fluxo associada (Mendonsa, 2005).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921938/CA

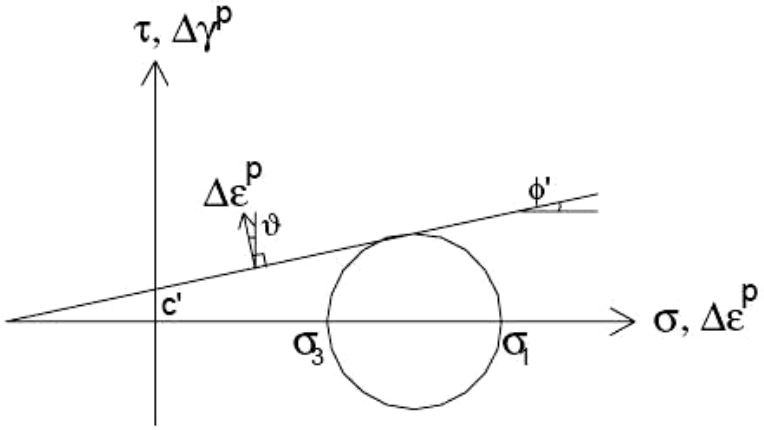

Figura 23 - Círculo de Mohr: Envoltória de Mohr Coulomb (Mendonsa, 2005).

A **Figura 24** apresenta a superfície de plastificação de Mohr-Coulomb.

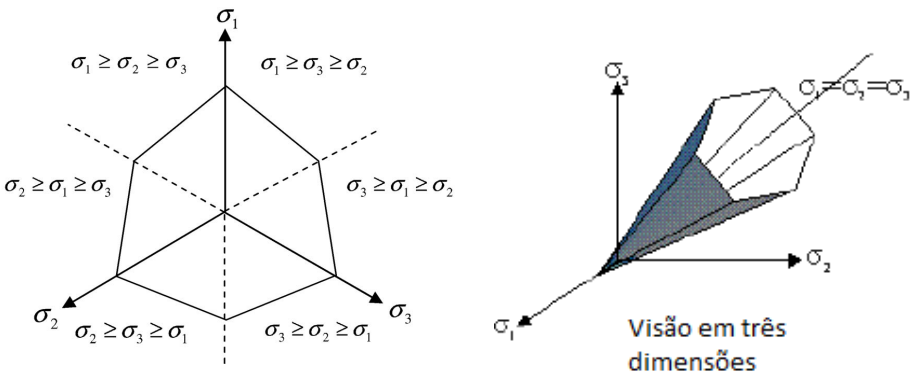

Figura 24 - Superfície de Plastificação de Mohr-Coulomb.

A implementação do modelo elastoplástico de Mohr-Coulomb pelo Abaqus está baseado na equação (3.18), como relatado anteriormente. Todo o formalismo utilizado nos itens a seguir estão de acordo com o *Abaqus Theory Manual*, 6.10.

3.3.1.2. Função de Escoamento

A função escoamento segundo Abaqus (2010) segue o critério de ruptura demonstrado anteriormente. Para estados mais gerais de tensão é mais conveniente adotar o modelo em termos de três invariantes de tensão como segue:

$$F = R_{mc} q' - p' \tan\varphi - c = 0 \qquad (3.19)$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921938/CA

onde:

$$R_{mc}(\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{3}\cos\varphi}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\tan\varphi \tag{3.20}$$

$$\cos(3\theta)=\left(\frac{r}{q}\right)^3 \tag{3.21}$$

Sendo:

R_{mc} a medida de tensão desviadora;

θ o ângulo polar desviador segundo Chen and Han (1988) *apud* Abaqus Theory Manual.

e os invariantes são:

- Tensão Equivalente :

$$p^{'}=-\frac{1}{3}tr(\sigma) \tag{3.22}$$

- Tensão equivalente de Mises:

$$q^{'}=\sqrt{\frac{3}{2}(S:S)} \tag{3.23}$$

- Terceiro invariante de tensão desviadora:

$$r^{'}=\left(\frac{9}{2}S.S:S\right)^{\frac{1}{3}} \tag{3.24}$$

Sendo a Tensão desviadora:

$$S=\sigma+pI\ \therefore I=matriz\quad Indentidade \tag{3.25}$$

Em relação as operações descritas acima, a seguinte convenção é adotada pelo Abaqus:

- um ponto (.) representa multiplicação entre vetores ou matriz;
- dois pontos (:) representam a multiplicação das componentes conjugadas correspondentes de duas matrizes aos pares onde o produto é somado.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921938/CA

3.3.1.3. Lei de Fluxo

A lei de fluxo assumida pelo Abaqus é:

$$d\varepsilon^{pl} = \frac{d\,\bar{\varepsilon}^{pl}}{g}\frac{dQ}{d\sigma} \tag{3.26}$$

onde:

$$g = \frac{1}{c}\sigma : \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \tag{3.27}$$

$$Q = \sqrt{\left(\grave{o}c\big|_0 \tan\Psi\right)^2 + \left(R_{mw}q\right)^2} - p\tan\Psi \tag{3.28}$$

$$R_{mw}\left(\theta, e\right) = \frac{4\left(1-e^2\right)\cos^2\theta + \left(2e-1\right)^2}{2\left(1-e^2\right)\cos\theta + \left(2e-1\right)\sqrt{4\left(1-e^2\right)\cos^2\theta + 5e^2 - 4e}} R_{mc}\left(\frac{\pi}{3}, \varphi\right) \tag{3.29}$$

$$e = \frac{3-\sin\varphi}{3+\sin\varphi} \tag{3.30}$$

sendo:

Q: é a função potencial plástica

ϵ: parâmetro relacionado à excentricidade que define a taxa com que a função Q se aproxima de uma assíntota (a função potencial tende a uma linha reta à medida que a excentricidade se aproxima de zero).

ψ: ângulo de dilatância medido no plano p-q

R_{mw}: função desviadora elíptica

e: excentricidade que descreve o contorno da função potencial plástica no plano octaédrico.

$c|_0$: coesão no início da plastificação

$\bar{\varepsilon}^{pl}$: deformação plástica equivalente

Segundo Menétrey e Willam (1995) apud *Abaqus Theory Manual*, é adotada a função desviadora elíptica em que demonstra ser contínua e suave no plano octaédrico (plano π) e garante apenas uma direção de fluxo, como apresentado na figura 25 abaixo.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921938/CA

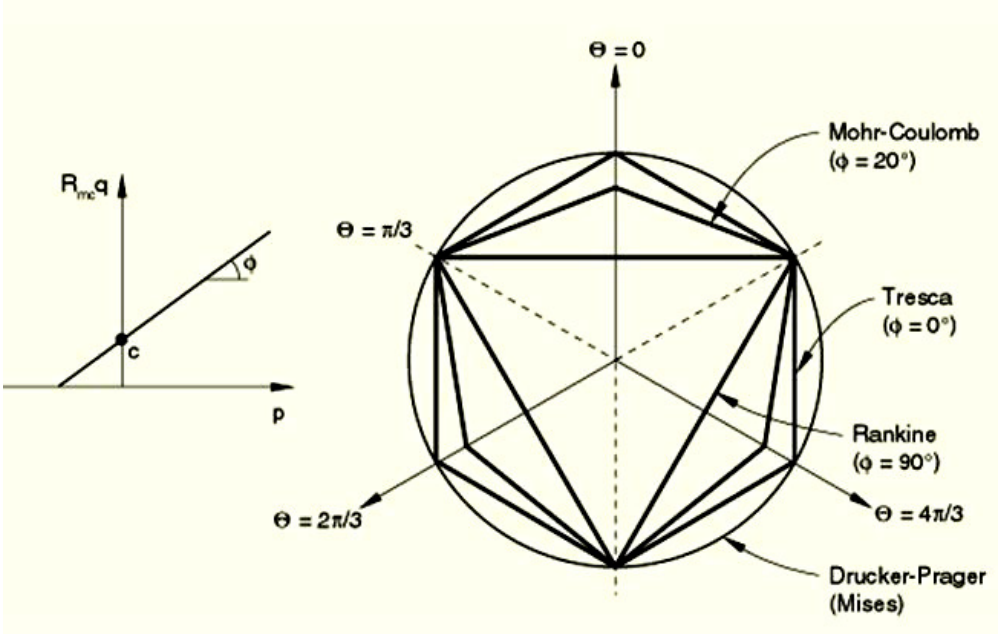

Figura 25 - Fluxo potencial plástico no plano desviador (Willam e Menetrey, 1995 *apud* Abaqus Theory Manual).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921938/CA