2
Cálculo de Invariantes Afins em Superfícies Paramétricas

Este capítulo apresenta algumas propriedades geométricas, em superfícies regulares paramétricas em $\mathbb{R}^3$, invariantes por transformações afins.

A etimologia da palavra *geometria* significa "medir a terra", e de fato os primeiros estudos geométricos descrevem métodos para medir objetos. A medição consiste em associar a um objeto (ou a parte deste objeto) um número (ou nos estudos mais recentes uma estrutura matemática) de forma *reprodutível*.

Existe mais de uma noção da forma como a operação de medir pode ser reproduzida, cada noção gerando uma geometria diferente: geometria Euclidiana, afim, projetiva, etc. Por exemplo, a geometria Euclidiana define medidas que podem ser extraídas de um objeto rígido, e reproduzidas com resultado equivalente no mesmo objeto após movimentos rígidos: translações, rotações e simetrias.

Essas formas foram caracterizadas por Felix Klein no final do século XIX no seu programa de Erlangen associando a cada geometria um grupo de transformações que um objeto S pode sofrer. A geometria Euclidiana estuda as propriedades sob a ação do grupo dos movimentos rígidos, enquanto a geometria afim abrange todas as transformações afins, ou seja, incluindo cisalhamento. Nesta tese, chamaremos (por um leve abuso de linguagem) de geometria afim a geometria equiafim, incluindo transformações equiafins que preservem a forma de volume no espaço.

Objetos Geométricos

Entendemos por objeto geométrico um conjunto contínuo de pontos no espaço $\mathbb{R}^n$. Nesta tese, limitaremos ao caso $n = 3$, ou seja, objetos no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$. Além de continuidade, exigiremos do conjunto a propriedade de variedade, isto é, de ter uma dimensão, e de diferenciabilidade.

Mais precisamente, um objeto geométrico S é uma variedade de dimensão d se ele é localmente *equivalente* ao espaço vetorial $\mathbb{R}^d$: para qualquer ponto $p \in S$, existe uma bola $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{B} \cap S$ é equivalente a uma bola $\mathcal{B}$ de

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921353/CA

$\mathbb{R}^d$. É importante notar que a dimensão d é a mesma para todos os pontos p. Se $d = 2$ então S é chamada de superfície.

A notação de equivalência do parágrafo anterior varia dependendo do contexto de estudo. Para estudar as propriedades topológicas usa-se geralmente a notação de homeomorfismo (existe uma função f contínua de inversa contínua entre $\mathcal{B} \cap S$ e $\mathcal{B}$). Para estudos de geometria diferencial, será necessária uma equivalência com difeomorfismo (a função f precisa ser de classe $\mathcal{C}^k$ ou $\mathcal{C}^\infty$). No caso da geometria discreta, ainda não foi desenvolvido uma noção de equivalência única comum aos diversos estudos.

Medidas Invariantes

Uma vez escolhida uma geometria, e definido o grupo $\mathcal{G}$ de transformações associadas, uma medida geométrica m é *invariante* pelo grupo $\mathcal{G}$ se $\forall S, \forall A \in \mathcal{G}, m(A(S)) = m(S)$. Tipicamente, medidas numéricas ($m(S) \in \mathbb{R}$) como o comprimento e a curvatura são invariantes, dependendo da geometria e do grupo $\mathcal{G}$. Quando a medida gera uma estrutura como um vetor, uma matriz ou um tensor, a medida geralmente não é invariante. Por exemplo, no caso Euclidiano a direção do vetor tangente a uma curva varia quando a curva sofre uma rotação. Porém, essa variação é simples de prever quando a rotação é conhecida. Uma medida m é *covariante* se $\forall S, \forall A \in \mathcal{G}, m(A(S)) = A(m(S))$, e *contravariante* se $\forall S, \forall A \in \mathcal{G}, m(A(S)) = A^{-T}(m(S))$. O vetor tangente é covariante, e o vetor normal, dual do vetor tangente, é portanto de natureza contravariante. No caso Euclidiano, as transformações essencialmente matrizes ortogonais $A^{-T} = A$, portanto a distinção é menos relevante, mas será mais clara no caso afim. Observemos ainda que no caso implícito, a transformação A se traduz algebricamente por A^{-1} nas fórmulas, portanto as noções de co e contra variância se escrevem de forma diferente.

2.1 Transformações Afins e Curvas Assintóticas

Queremos encontrar propriedades geométricas m que sejam invariantes por transformações do grupo

$$\mathcal{G} = SA(3, \mathbb{R}) = \left\{ B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; Bp = Ap + b, A \in M(3); \det(A) = 1, b \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Para isso, o primeiro passo é entendermos o significado de transformações *equiafins* e logo em seguida definirmos uma métrica que seja invariante em superfícies regulares.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921353/CA

2.1.1
Transformações Equiafins

As transformações *equiafins* são transformações do espaço que preservam volumes, mais precisamente

Definição 1 *Uma transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é equiafim se e só se T é da forma $T(u) = B(u) + v_0$, onde B é linear, $det(B) = 1$ e $v_0 \in \mathbb{R}^3$.*

Ou seja, T é equiafim se, somente se T é da forma

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz + t_0 \\ dx + ey + fz + t_1 \\ gx + hy + iz + t_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2, \end{pmatrix}$$

onde $det(B) = 1$ e $v_0 = (t_0, t_1, t_2)$.

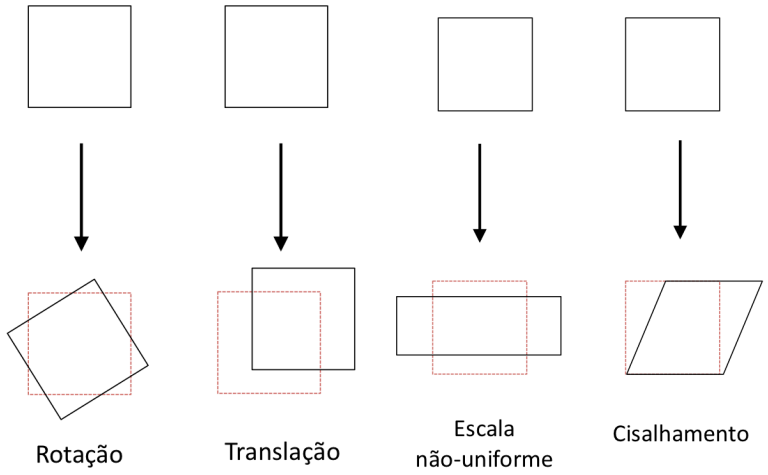

Figura 2.1: Transformações equiafins bidimensionais.

Em particular, obtemos que as transformações rígidas, que é o grupo das transformações da geometria Euclidiana, são transformações equiafins. Casos particulares de transformações equiafins são: identidade, translação, escalonamento, rotação e cisalhamento. A figura 2.1 exemplifica algumas transformações equiafins bidimensionais.

2.1.2
Curvas Assintóticas

Queremos encontrar uma métrica que seja invariante sobre transformações equiafins. A motivação dessa métrica vem do estudo de curvas assintóticas em superfícies regulares (8).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921353/CA

Uma superfície regular (15) em $\mathbb{R}^3$ é obtida tomando pedaços do plano, deformando-os e colando-os entre si de tal forma que a figura resultante não tenha pontas, arestas ou auto-interseções.

Definição 2 *Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $\mathbf{x} : U \to V \cap S$ de um aberto U de $\mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S$ tal que*

- *$\mathbf{x}$ é difeomorfismo: $\mathbf{x}$ é diferenciável e $\mathbf{x}$ tem inversa $\mathbf{x}^{-1} : V \cap S \to U$ que é diferenciável.*
- *Para todo $q \in U$ a diferencial $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é injetiva.*

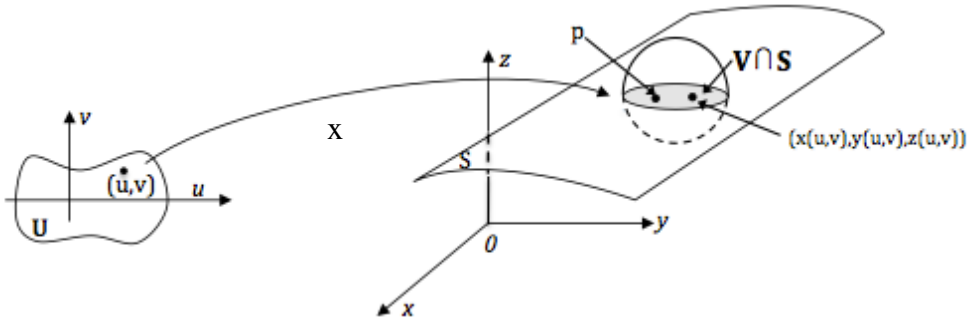

Figura 2.2: Definição de superfície parametrizada.

A figura 2.2 ilustra a definição de superfície regular.

Definição 3 *O plano definido pelos vetores tangente e normal a uma curva é chamado de plano osculador (ver figura 2.3).*

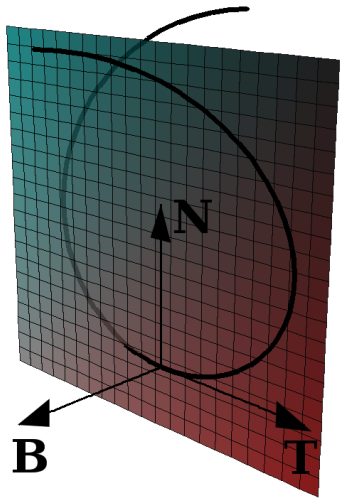

Figura 2.3: Ilustração do plano osculador (©wikipedia).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921353/CA

Definição 4 *Uma curva em uma superfície S é dita* assintótica *se em cada ponto da curva seu plano osculador coincide com o plano tangente da superfície no mesmo ponto.*

Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametrização da superfície S, onde U é um aberto e seja $\gamma : I \to U$ uma curva no domínio da parametrização, ou seja, $\gamma(t) = (\mathtt{u}(\mathtt{t}), \mathtt{v}(\mathtt{t}))$, sendo $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto real. A curva $\mathbf{x} \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^3$ é uma *curva assintótica* se, e somente se,

$$[\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, (\mathbf{x} \circ \gamma)_{tt}] = 0, \ \forall t \in I, \tag{2-1}$$

onde denotamos $[u, v, w]$ como o determinante da matriz 3×3 formada pelos vetores u, v, w (ver sumário de notações).

Notemos que os vetores $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$ definem o plano tangente a superfície em cada ponto e $(\mathbf{x} \circ \gamma)_{tt}$ define a direção do vetor normal a curva $\mathbf{x} \circ \gamma$. Por definição (ver (15)), uma curva é assintótica quando a curvatura normal $k_n = kcos(\theta) = 0$ (ver figura 2.4), onde k é a curvatura da curva no ponto p e θ é o ângulo entre os vetores normal a curva $\mathbf{x} \circ \gamma$ e o normal a superfície S no ponto p. Daí temos que $(\mathbf{x} \circ \gamma)_{tt} \in T_pS$, em particular $[\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, (\mathbf{x} \circ \gamma)_{tt}] = 0, \ \forall t \in I$.

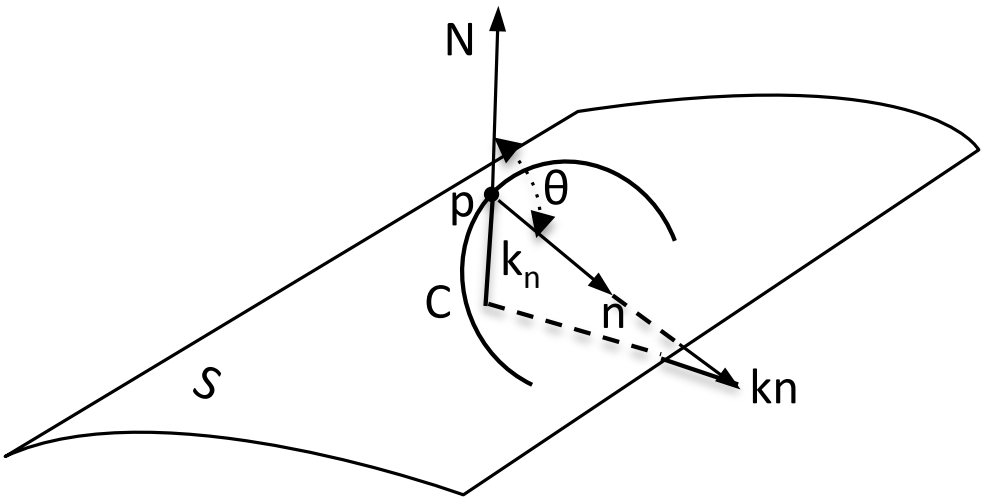

Figura 2.4: Curvatura normal.

A equação (2-1) é invariante por transformação equiafim, pois o plano tangente é covariante afim. Utilizando a regra da cadeia temos

$$(\mathbf{x} \circ \gamma)_t \ = \ \mathbf{x}_u \circ \gamma \cdot \frac{d\mathtt{u}}{dt} + \mathbf{x}_v \circ \gamma \cdot \frac{d\mathtt{v}}{dt} = \mathbf{x}_u \circ \gamma \cdot \dot{\mathtt{u}} + \mathbf{x}_v \circ \gamma \cdot \dot{\mathtt{v}},$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921353/CA

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}\circ\gamma)_{tt} &= \mathbf{x}_{uu}\circ\gamma\cdot\left(\frac{d\mathtt{u}}{dt}\right)^2+2\mathbf{x}_{uv}\circ\gamma\cdot\frac{d\mathtt{u}}{dt}\cdot\frac{d\mathtt{v}}{dt}+\mathbf{x}_{vv}\circ\gamma\cdot\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\\ &+ \mathbf{x}_u\circ\gamma\cdot\frac{d^2\mathtt{u}}{dt^2}+\mathbf{x}_v\circ\gamma\cdot\frac{d^2\mathtt{v}}{dt^2}\\ &= \mathbf{x}_{uu}\circ\gamma\cdot\dot{\mathtt{u}}^2+2\mathbf{x}_{uv}\circ\gamma\cdot\dot{\mathtt{u}}\cdot\dot{\mathtt{v}}+\mathbf{x}_{vv}\circ\gamma\cdot\dot{\mathtt{v}}^2+\mathbf{x}_u\circ\gamma\cdot\ddot{\mathtt{u}}+\mathbf{x}_v\circ\gamma\cdot\ddot{\mathtt{v}},\end{aligned}$$

onde $\dot{\mathtt{u}}=\frac{d\mathtt{u}}{dt},\ \dot{\mathtt{v}}=\frac{d\mathtt{u}}{dt}$. Assim, no ponto $p=\gamma(t)$ temos

$$\begin{aligned}[\mathbf{x}_u(p),\mathbf{x}_v(p),(\mathbf{x}\circ\gamma)_{tt}] &= \left[\mathbf{x}_u(p),\mathbf{x}_v(p),\dot{\mathtt{u}}^2\mathbf{x}_{uu}(p)+2\dot{\mathtt{u}}\dot{\mathtt{v}}\mathbf{x}_{uv}(p)+\dot{\mathtt{v}}^2\mathbf{x}_{vv}(p)\right]\\ &= \dot{\mathtt{u}}^2\left[\mathbf{x}_u(p),\mathbf{x}_v(p),\mathbf{x}_{uu}(p)\right]\\ &+ 2\dot{\mathtt{u}}\dot{\mathtt{v}}\left[\mathbf{x}_u(p),\mathbf{x}_v(p),\mathbf{x}_{uv}(p)\right]+\dot{\mathtt{v}}^2\left[\mathbf{x}_u(p),\mathbf{x}_v(p),\mathbf{x}_{vv}(p)\right].\end{aligned}$$

Definindo $L=[\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v,\mathbf{x}_{uu}]$, $M=[\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v,\mathbf{x}_{uv}]$ *e* $N=[\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v,\mathbf{x}_{vv}]$, obtemos $[\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v,(\mathbf{x}\circ\gamma)_{tt}]=L\dot{\mathtt{u}}^2+2M\dot{\mathtt{u}}\dot{\mathtt{v}}+N\dot{\mathtt{v}}^2$.

Portanto a curva $\mathbf{x}\circ\gamma$ é assintótica se, e somente se,

$$L\dot{\mathtt{u}}^2+2M\dot{\mathtt{u}}\dot{\mathtt{v}}+N\dot{\mathtt{v}}^2=0=(\gamma')^T\begin{bmatrix}L & M\\ M & N\end{bmatrix}(\gamma'). \tag{2-2}$$

Os deteminates L, M e N e a forma quadrática (2-2) são todos invariantes sobre um sistema fixo de parametros u e v.

Vamos estudar a forma diferencial

$$[\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v,(\mathbf{x}\circ\gamma)_{tt}]\,dt^2=Ld\mathtt{u}^2+2Md\mathtt{u}d\mathtt{v}+Nd\mathtt{v}^2 \tag{2-3}$$

mudando o sistema de coordenadas

$$\bar{\mathbf{x}}(\bar{u},\bar{v})=\mathbf{x}(u(\bar{u},\bar{v}),v(\bar{u},\bar{v})).$$

Notando que

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} &= \mathbf{x}_u\frac{\partial u}{\partial\bar{u}}+\mathbf{x}_v\frac{\partial v}{\partial\bar{u}},\\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}} &= \mathbf{x}_u\frac{\partial u}{\partial\bar{v}}+\mathbf{x}_v\frac{\partial v}{\partial\bar{v}}.\end{aligned} \tag{2-4}$$

Temos,

$$\begin{aligned}[\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}},\bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}},(\bar{\mathbf{x}}\circ\bar{\gamma})_{tt}] &= \left[\mathbf{x}_u\frac{\partial u}{\partial\bar{u}}+\mathbf{x}_v\frac{\partial v}{\partial\bar{u}},\mathbf{x}_u\frac{\partial u}{\partial\bar{v}}+\mathbf{x}_v\frac{\partial v}{\partial\bar{v}},(\mathbf{x}\circ\gamma)_{tt}\right]\\ &= [\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v,(\mathbf{x}\circ\gamma)_{tt}]\frac{\partial u}{\partial\bar{u}}\frac{\partial v}{\partial\bar{v}}+[\mathbf{x}_v,\mathbf{x}_u,(\mathbf{x}\circ\gamma)_{tt}]\frac{\partial u}{\partial\bar{v}}\frac{\partial v}{\partial\bar{u}}\\ &= [\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v,(\mathbf{x}\circ\gamma)_{tt}]\frac{\partial u}{\partial\bar{u}}\frac{\partial v}{\partial\bar{v}}-[\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v,(\mathbf{x}\circ\gamma)_{tt}]\frac{\partial u}{\partial\bar{v}}\frac{\partial v}{\partial\bar{u}}\\ &= [\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v,(\mathbf{x}\circ\gamma)_{tt}]jac,\end{aligned} \tag{2-5}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921353/CA

onde $jac = \dfrac{\partial u}{\partial \bar{v}}\dfrac{\partial v}{\partial \bar{u}} - \dfrac{\partial u}{\partial \bar{v}}\dfrac{\partial v}{\partial \bar{u}}$ é o Jacobiano da mudança de parâmetros, $\bar{\gamma}(t) = (\bar{u}(t), \bar{v}(t))$ é uma curva no domínio da nova parametrização e a curva $\gamma(t) = (u(\bar{\gamma}(t)), v(\bar{\gamma}(t)))$ é tal que

$$\bar{\mathbf{x}}(\bar{\gamma}(t)) = \mathbf{x}(u(\bar{\gamma}(t)), v(\bar{\gamma}(t))) = \mathbf{x}(\gamma(t)).$$

Utilizamos a propriedade da função determinante ser multilinear e a propriedade antisimétrica para obtermos a equação (2-5).

Logo,

$$[\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}, (\bar{\mathbf{x}} \circ \bar{\gamma})_{tt}] = [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, (\mathbf{x} \circ \gamma)_{tt}] \cdot jac. \tag{2-6}$$

Podemos ainda escrever a equação (2-6) da seguinte maneira

$$\bar{L}d\bar{u}^2 + 2\bar{M}d\bar{u}d\bar{v} + \bar{N}d\bar{v}^2 = (Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2)jac. \tag{2-7}$$

Vamos encontrar os coeficientes $\bar{L}, \bar{M}$ e $\bar{N}$. Para isso, notemos que

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}\bar{u}} &= \mathbf{x}_{uu}\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\right)^2 + 2\mathbf{x}_{uv}\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\right) + \mathbf{x}_{vv}\left(\frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\right)^2 + \mathbf{x}_u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{u}^2}\right) + \mathbf{x}_v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \bar{u}^2}\right), \\
\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}\bar{v}} &= \mathbf{x}_{uu}\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial u}{\partial \bar{v}}\right) + \mathbf{x}_{uv}\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\frac{\partial u}{\partial \bar{v}}\right) + \mathbf{x}_{vv}\left(\frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{v}}\right) + \mathbf{x}_u\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{u}\partial \bar{v}} \\
&+ \mathbf{x}_v\frac{\partial^2 v}{\partial \bar{u}\partial \bar{v}}, \\
\bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}\bar{v}} &= \mathbf{x}_{uu}\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{v}}\right)^2 + 2\mathbf{x}_{uv}\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{v}}\frac{\partial v}{\partial \bar{v}}\right) + \mathbf{x}_{vv}\left(\frac{\partial v}{\partial \bar{v}}\right)^2 + \mathbf{x}_u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{v}^2}\right) + \mathbf{x}_v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \bar{v}^2}\right),
\end{aligned}$$

daí, por definição temos que

$$\begin{aligned}
\bar{L} &= [\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}\bar{u}}] \\
&= \left[\mathbf{x}_u\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \mathbf{x}_v\frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \mathbf{x}_u\frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \mathbf{x}_v\frac{\partial v}{\partial \bar{v}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}\bar{u}}\right] \\
&= \left[\mathbf{x}_u\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}, \mathbf{x}_v\frac{\partial v}{\partial \bar{v}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}\bar{u}}\right] + \left[\mathbf{x}_v\frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \mathbf{x}_u\frac{\partial u}{\partial \bar{v}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}\bar{u}}\right] \\
&= \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{v}}[\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}\bar{u}}] - \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\frac{\partial u}{\partial \bar{v}}[\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}\bar{u}}] \\
&= [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}\bar{u}}]jac \\
&= \left[\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu}\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\right)^2 + 2\mathbf{x}_{uv}\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\right) + \mathbf{x}_{vv}\left(\frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\right)^2\right. \\
&+ \left.\mathbf{x}_u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{u}^2}\right) + \mathbf{x}_v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \bar{u}^2}\right)\right] jac
\end{aligned}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921353/CA

$$
\begin{aligned}
&= \left\{ [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu}] \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\right)^2 + [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uv}] \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\right) \right. \\
&+ \left. [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vv}] \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\right)^2 \right\} jac \\
&= \left\{ L \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\right)^2 + M \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\right) + N \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\right)^2 \right\} jac.
\end{aligned}
$$

Seguindo os mesmos passos que no cálculo do coeficiente $\bar{L}$, ou seja, utilizando as propriedades da função determinante, obtemos

$$
\begin{aligned}
\bar{M} &= [\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}\bar{v}}] \\
&= [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}\bar{v}}] jac \\
&= \left[\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu} \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial u}{\partial \bar{v}}\right) + \mathbf{x}_{uv} \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\frac{\partial u}{\partial \bar{v}}\right) + \mathbf{x}_{vv} \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{v}}\right) \right. \\
&+ \left. \mathbf{x}_u \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{u}\partial \bar{v}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{u}\partial \bar{v}} \right] jac \\
&= \left\{ [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu}] \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial u}{\partial \bar{v}}\right) + [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uv}] \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\frac{\partial u}{\partial \bar{v}}\right) \right. \\
&+ \left. [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vv}] \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{v}}\right) \right\} jac \\
&= \left\{ L \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial u}{\partial \bar{v}}\right) + M \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\frac{\partial u}{\partial \bar{v}}\right) + N \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{v}}\right) \right\} jac.
\end{aligned}
$$

Para encontrarmos $\bar{N} = [\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}\bar{v}}]$ basta trocarmos na expressão do $\bar{L}$ a variável $\bar{u}$ por $\bar{v}$, daí

$$
\begin{aligned}
\bar{N} &= [\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}\bar{v}}] \\
&= \left\{ L \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{v}}\right)^2 + M \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{v}}\frac{\partial v}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}\frac{\partial v}{\partial \bar{v}}\right) + N \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{v}}\right)^2 \right\} jac.
\end{aligned}
$$

Afirmamos que $\bar{L}\bar{N} - \bar{M}^2 = (LN - M^2) jac^4$.

De fato, como

$$
\begin{aligned}
\bar{L} &= \left\{ L \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + M \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\right) + N \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right\} jac, \\
\bar{M} &= \left\{ L \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + M \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\frac{\partial u}{\partial \bar{v}}\right) + N \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right\} jac, \\
\bar{N} &= \left\{ L \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}\frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + M \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{v}}\frac{\partial v}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}\frac{\partial v}{\partial \bar{v}}\right) + N \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}\frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right\} jac,
\end{aligned}
$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921353/CA

temos que

$$\begin{aligned}\bar{L}\bar{N} &= jac^2\left\{L^2\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{u}}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{v}}\right)^2+2LM\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{u}}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{v}}\frac{\partial v}{\partial\bar{v}}\right)+LN\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{u}}\right)^2\left(\frac{\partial v}{\partial\bar{v}}\right)^2\right.\\ &+ 2LM\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{u}}\frac{\partial v}{\partial\bar{u}}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{v}}\right)^2+4M^2\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{u}}\frac{\partial v}{\partial\bar{u}}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{v}}\frac{\partial v}{\partial\bar{v}}\right)+2MN\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{u}}\frac{\partial v}{\partial\bar{u}}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial\bar{v}}\right)^2\\ &+ \left.LN\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{v}}\right)^2\left(\frac{\partial v}{\partial\bar{u}}\right)^2+2NM\left(\frac{\partial v}{\partial\bar{u}}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{v}}\frac{\partial v}{\partial\bar{v}}\right)+N^2\left(\frac{\partial v}{\partial\bar{u}}\right)^2\left(\frac{\partial v}{\partial\bar{v}}\right)^2\right\} \qquad (2\text{-}8)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\bar{M}^2 &= jac^2\left\{L^2\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{u}}\frac{\partial u}{\partial\bar{v}}\right)^2+M^2\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{u}}\frac{\partial v}{\partial\bar{v}}+\frac{\partial v}{\partial\bar{u}}\frac{\partial u}{\partial\bar{v}}\right)^2+N^2\left(\frac{\partial v}{\partial\bar{u}}\frac{\partial v}{\partial\bar{v}}\right)^2\right.\\ &+ 2LM\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{u}}\frac{\partial u}{\partial\bar{v}}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{u}}\frac{\partial v}{\partial\bar{v}}+\frac{\partial v}{\partial\bar{u}}\frac{\partial u}{\partial\bar{v}}\right)+2LN\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{u}}\frac{\partial u}{\partial\bar{v}}\frac{\partial v}{\partial\bar{u}}\frac{\partial v}{\partial\bar{v}}\right)\\ &+ \left.2MN\left(\frac{\partial v}{\partial\bar{u}}\frac{\partial v}{\partial\bar{v}}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{u}}\frac{\partial v}{\partial\bar{v}}+\frac{\partial v}{\partial\bar{u}}\frac{\partial u}{\partial\bar{v}}\right)\right\}. \qquad (2\text{-}9)\end{aligned}$$

Notemos que

$$jac^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial\bar{u}}\frac{\partial v}{\partial\bar{v}}\right)^2-2\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{u}}\frac{\partial v}{\partial\bar{v}}\frac{\partial u}{\partial\bar{v}}\frac{\partial v}{\partial\bar{u}}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{v}}\frac{\partial v}{\partial\bar{u}}\right)^2. \qquad (2\text{-}10)$$

Subtraindo (2-8) por (2-9) temos

$$\begin{aligned}\bar{L}\bar{N}-\bar{M}^2 &= jac^2\left\{LN\left(\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{u}}\frac{\partial v}{\partial\bar{v}}\right)^2-2\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{u}}\frac{\partial v}{\partial\bar{v}}\frac{\partial u}{\partial\bar{v}}\frac{\partial v}{\partial\bar{u}}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{v}}\frac{\partial v}{\partial\bar{u}}\right)^2\right)\right.\\ &\quad \left.-M^2\left(\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{u}}\frac{\partial v}{\partial\bar{v}}\right)^2-2\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{u}}\frac{\partial v}{\partial\bar{v}}\frac{\partial u}{\partial\bar{v}}\frac{\partial v}{\partial\bar{u}}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{v}}\frac{\partial v}{\partial\bar{u}}\right)^2\right)\right\} \qquad (2\text{-}11)\\ &= jac^2\left\{(LN-M^2)jac^2\right\}\\ &= jac^4(LN-M^2).\end{aligned}$$

O que mostra o afirmado.

Finalmente, usando as equações (2-7) e (2-11), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{[\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}},\bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}},(\bar{\mathbf{x}}\circ\bar{\gamma})_{tt}]}{|\bar{L}\bar{N}-\bar{M}^2|^{1/4}}dt^2 &= \frac{\bar{L}d\bar{u}^2+2\bar{M}d\bar{u}d\bar{v}+\bar{N}d\bar{v}^2}{|\bar{L}\bar{N}-\bar{M}^2|^{1/4}}\\ &= \frac{(Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2)jac}{|\bar{L}\bar{N}-\bar{M}^2|^{1/4}}\\ &= \frac{(Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2)jac}{|jac^4(LN-M^2)|^{1/4}}\\ &= \frac{[\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v,(\mathbf{x}\circ\gamma)_{tt}]}{|LN-M^2|^{1/4}}dt^2.\end{aligned}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921353/CA

Isto mostra, que exceto pela eventual mudança de sinal, devido a $\frac{jac}{(jac^4)^{1/4}}$, mas que não gera problemas se fixarmos uma orientação, a forma quadrática (2-7) é uma forma diferencial invariante afim.

Essa forma quadrática é a métrica de Berwald-Blaschke dada por

$$ds^2 = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{|LN - M^2|^{1/4}},$$

onde $L = [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu}]$, $M = [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uv}]$ *e* $N = [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vv}]$, e $\mathsf{d} = LN - M^2$ é o coeficiente da métrica. Ao longo do desenvolvimento teórico, a métrica será considerada não-degenerada, isto é, $\mathsf{d} \neq 0$.

Na geometria Euclidiana a primeira forma fundamental $I_p : T_pS \to \mathbb{R}$ é definida pela forma quadrática $I_p(w) = \langle w, w\rangle_p \geq 0$. Escrevendo I_p em coordenadas, obtemos $I_p = E_e du^2 + 2F_e dudv + G_e dv^2$, onde $E_e = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u\rangle$, $F_e = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\rangle$, $G_e = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u\rangle$ e o produto interno definido no plano tangente T_pS é herdado do espaço vetorial ambiente, ou seja, em coordenadas é dado por $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$, sendo $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Observemos que na geometria Euclidiana buscamos propriedades geométricas que são invariantes por movimentos rígidos, ou ainda transformações que preservam ângulos, já na geometria afim (equiafim) tentamos encontrar propriedades que são invariantes por transformações equiafins, ou seja, as transformações que preservam volumes, em particular as transformações rígidas estão contidas nas transformações equiafins.

Observação 1 *Por simplicidade no texto ao escrevermos transformação afim estamos nos restringirmos as transformações equiafins.*

Definição 5 *A primeira forma fundamental afim é a aplicação definida por*

$$\mathcal{I}_{\mathbf{x}} = \sum_{i,j=u,v} g_{ij} didj,$$

onde $g_{11} = \frac{L}{|LN - M^2|^{1/4}}$, $g_{12} = g_{21} = \frac{M}{|LN - M^2|^{1/4}}$ *e* $g_{22} = \frac{N}{|LN - M^2|^{1/4}}$.

Observação 2 *Podemos relacionar os coeficientes da primeira forma fundamental afim com os coeficientes l_{ij} da segunda forma fundamental Euclidiana da seguinte maneira*

$$l_{ij} = \langle \mathbf{N}_e, \mathbf{x}_{ij}\rangle = \left\langle \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{||\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v||}, \mathbf{x}_{ij} \right\rangle = \frac{[\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{ij}]}{||\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v||},$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921353/CA

sendo $\mathbf{N}_e$ *o normal Euclidiano dado por*

$$\mathbf{N}_e = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{||\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v||}.$$

Dessa forma, temos que o sinal da curvatura Gaussiana Euclidiana $K_e = \dfrac{det(l_{ij})}{E_e G_e - F_e^2}$ está relacionada com o de $\mathsf{d} = LN - M^2$. Logo,

1. $K_e < 0 \Longleftrightarrow \mathsf{d} < 0$,
2. $K_e = 0 \Longleftrightarrow \mathsf{d} = 0$,
3. $K_e > 0 \Longleftrightarrow \mathsf{d} > 0$.

O ponto onde $\mathsf{d} < 0$, $\mathsf{d} = 0$ ou $\mathsf{d} > 0$ é chamado, respectivamente, ponto hiperbólico, parabólico ou elíptico (ver figura 2.5).

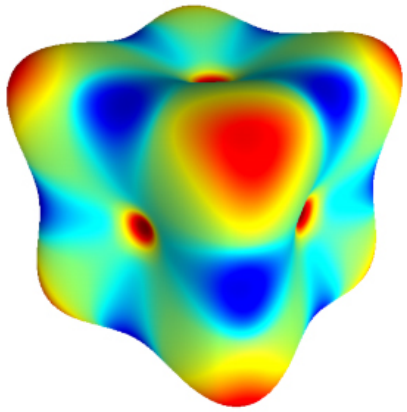

Figura 2.5: Interpretação geométrica do sinal de d. As regiões vermelhas, verdes e azuis indicam respectivamente curvaturas Gaussianas positivas, nulas e negativas (9).

2.2 Co-normal Afim e Normal Afim

Os vetores co-normal e normal afins são propriedades geométricas fundamentais para definirmos as curvaturas Gaussiana e média afins. Inicialmente, temos que calcular o normal Euclidiano e a curvatura Gaussiana Euclidiana. Seguimos a abordagem de Calabi (10) para a definição dos vetores co-normal e normal afins.

Consideremos uma parametrização $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$ da superfície S. Relações de ortonormalidade não são preservadas sobre transformações afins. O normal Euclidiano $\mathbf{N}_e$ é um vetor que satisfaz $\mathbf{N}_e(A(p)) = \dfrac{1}{||A^T \mathbf{N}_e||} A^{-T} \mathbf{N}_e$, onde

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921353/CA

$A \in M(3)$; $det(A) = 1$ e $p \in S$, ou seja, o normal Euclidiano não é contravariante, mas notemos que o plano tangente é de natureza covariante, pois se $\mathbf{x}_u \in T_pS$ *e* $\langle \mathbf{N}_e, \mathbf{x}_u \rangle = 0$, então $\langle A^{-T}\mathbf{N}_e, A\mathbf{x}_u \rangle = 0$. Portanto, podemos definir um vetor contravariante afim com a mesma direção de $\mathbf{N}_e$ chamado de *co-normal afim* ν (ver figura 2.6). Ele é obtido fazendo uma mudança de escala no vetor normal Euclidiano

$$\nu = |K_e|^{-1/4}\mathbf{N}_e, \tag{2-12}$$

onde K_e é a curvatura Gaussiana Euclidiana. O co-normal afim satisfaz $\langle \nu, \mathbf{x}_u \rangle = 0$, $\mathbf{x}_u \in T_pS$ e a métrica afim satisfaz $\mathsf{d}^{1/4} = \pm[\nu, \nu_u, \nu_v]$. O sinal $\pm$ depende se o ponto é elíptico ou hiperbólico. De fato, usando a definição do co-normal afim temos

$$\begin{aligned}
\nu_u &= \left(|K_e|^{-1/4}\right)_u \mathbf{N}_e + |K_e|^{-1/4}\mathbf{N}_{eu} \\
&= \left(|K_e|^{-1/4}\right)_u \mathbf{N}_e + |K_e|^{-1/4}(a_{11}\mathbf{x}_u + a_{12}\mathbf{x}_v), \\
\nu_v &= \left(|K_e|^{-1/4}\right)_v \mathbf{N}_e + |K_e|^{-1/4}\mathbf{N}_{ev} \\
&= \left(|K_e|^{-1/4}\right)_v \mathbf{N}_e + |K_e|^{-1/4}(a_{21}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v),
\end{aligned}$$

sendo $K_e = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Utilizando a multilinearidade e a antisimetria da função determinante, obtemos

$$\begin{aligned}
[\nu, \nu_u, \nu_v] &= K_e^{-3/4}[\mathbf{N}_e, a_{11}\mathbf{x}_u + a_{12}\mathbf{x}_v, a_{21}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v] \\
&= K_e^{-3/4}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})[\mathbf{N}_e, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v] \\
&= K_e^{1/4}\mathbf{N}_e \cdot \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \\
&= K_e^{1/4}||\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v||.
\end{aligned}$$

Notando que $\mathsf{d} = K_e||\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v||^4$. Temos que $\mathsf{d}^{1/4} = \pm[\nu, \nu_u, \nu_v]$.

Por simplicidade no texto vamos considerar que estamos trabalhando em pontos elípticos.

Afirmação 1 *O vetor co-normal afim definido na equação (2-12) é um vetor contravariante, ou seja,* $\nu(A(p)) = A^{-T}(\nu(p))$, *onde* $p \in S$ *e* A *é uma transformação afim.*

Demonstração: Com efeito, por definição de curvatura Gaussiana Euclideana

$$K_e(p) = \frac{det(l_{ij})}{E_eG_e - F_e^2} = \frac{det(l_{ij})}{||\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v||^2}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921353/CA

e como $A\mathbf{x}_u \times A\mathbf{x}_v = A^{-T}(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)$, temos $K_e(A(p)) = \dfrac{K_e(p)}{||A^{-T}\mathbf{N}_e||^4}$.

Usando a definição do co-nomal afim, obtemos

$$\begin{aligned}\nu(A(p)) &= |K_e(A(p))|^{-1/4}\mathbf{N}_e(A(p)) = \left(\frac{K_e(p)}{||A^{-T}\mathbf{N}_e||^4}\right)^{-1/4} \cdot \frac{1}{||A^{-T}\mathbf{N}_e||} A^{-T}\mathbf{N}_e \\ &= A^{-T}(\nu(p)).\end{aligned}$$

□

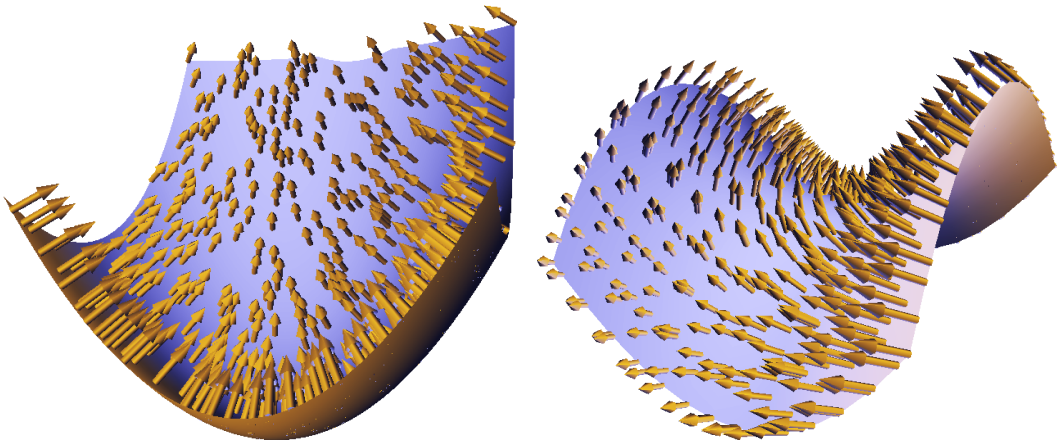

Figura 2.6: Os parabolóides elíptico e hiperbólico têm co-normal afim apontando para o centro de cada superfície.

Como $\mathsf{d}^{1/4} = [\nu, \nu_u, \nu_v] \neq 0$, as derivadas $\nu_{\{u,v\}}$ definem um plano não degenerado. O vetor normal afim pode ser obtido através do vetor ortogonal ao plano gerado por $\{\nu_u, \nu_v\}$, este seria análogo ao vetor normal Euclidiano $\mathbf{N}_e$. Mais precisamente, o vetor *normal afim* ξ é definido localmente pela relação

$$\langle \nu, \xi \rangle = 1, \ \langle \xi, \nu_u \rangle = 0 \ , \ \langle \xi, \nu_v \rangle = 0.$$

Se A é uma transformação afim, então os vetores co-normal e normal afins da superfície AS satisfazem

$$\langle \nu(A(p)), \xi(A(p)) \rangle = \langle A^{-T}\nu(p), A\xi(p) \rangle = \langle \nu, \xi \rangle = 1.$$

O normal afim satisfaz $\langle \nu, \xi_{\{u,v\}} \rangle = 0$ e $\mathsf{d}^{1/4} = [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \xi]$, pois $\langle \nu, \xi \rangle = 1$ e usando a equação (2-12) temos

$$[\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \xi] = K_e^{1/4}||\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|| = |LN - M^2|^{1/4} = \mathsf{d}^{1/4} \neq 0.$$

Esta última relação mostra que uma base local em cada ponto p da superfície pode ser obtida por $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \xi\}$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921353/CA

Isto permite definir estruturas a partir da teoria de Cartan dos "moving frames". Como $\langle \nu, \xi \rangle = 1$, $\langle \xi, \nu_u \rangle = 0$ e $\langle \xi, \nu_v \rangle = 0$, temos que existe uma função $\lambda : U \to \mathbb{R}$ tal que $\xi = \lambda(\nu_u \times \nu_v)$, com $\lambda = [\nu, \nu_u, \nu_v]^{-1} = \mathsf{d}^{-1/4}$.

2.3 Curvaturas Afins

No caso de geometria Euclidiana as curvaturas descrevem a variação do normal. Vimos que $\langle \nu, \xi_{\{u,v\}} \rangle = 0$, isto é, as derivadas $\xi_{\{u,v\}}$ são ortogonais a ν, que é paralelo a $\mathbf{N}_e$. Portanto, podemos definir o operador forma $\mathcal{S}_p : T_pS \to T_pS$ por $\mathcal{S}_p(w) = -D_w\xi$.

Definição 6 *Os autovetores e autovalores do operador forma são chamados, respectivamente, direções e curvaturas principais afins.*

Como $\xi_{\{u,v\}}$ são tangentes à superfície temos que existem funções $(b_{ij})_{1\leq i\leq 2} : U \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} \xi_u &= b_{11}\mathbf{x}_u + b_{12}\mathbf{x}_v, \\ \xi_v &= b_{21}\mathbf{x}_u + b_{22}\mathbf{x}_v. \end{aligned} \tag{2-13}$$

Podemos escrevê-los explicitamente como

$$\begin{aligned} b_{11} &= \mathsf{d}^{-1/4} \cdot [\xi_u, \mathbf{x}_v, \xi], \\ b_{12} &= \mathsf{d}^{-1/4} \cdot [\mathbf{x}_u, \xi_u, \xi], \\ b_{21} &= \mathsf{d}^{-1/4} \cdot [\xi_v, \mathbf{x}_v, \xi], \\ b_{22} &= \mathsf{d}^{-1/4} \cdot [\mathbf{x}_u, \xi_v, \xi]. \end{aligned}$$

Os coeficientes b_{ij} formam uma matrix $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq 2}$, cujo determinante e o traço são respectivamente a curvaturas Gaussiana $\mathcal{K} = detB$ e menos o dobro da curvatura média afim $\mathcal{H} = -\frac{1}{2}trB$.

Observação 3 *Notemos que para calcularmos as curvaturas Gaussina e média afins em cada ponto da superfície são necessários obtermos a variação do vetor normal afim, ou seja, é necessário termos a derivada da parametrização da superfície até a quarta ordem, enquanto que na geometria Euclidiana precisava apenas da derivada segunda, mas no caso afim ganhamos a invariância dessas curvaturas por transformações afins.*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921353/CA

2.4
Caso de Superfície Parametrizadas como Gráfico

Suponhamos que a superfície S seja um gráfico, ou seja, ele é parametrizado por $\mathbf{x}(x,y) = (x, y, g(x,y))$, onde $(x,y) \in U \subset \mathbb{R}^2$, U é um aberto e $g : U \to \mathbb{R}$ é uma função.

Vamos encontrar as fórmulas dos invariantes afins definidos anteriormente.

Os coeficientes da métrica de Berwald-Blaschke são dados por

$$L = g_{xx},\ M = g_{xy}\ e\ N = g_{yy}\ e\ d = g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2.$$

O vetor co-normal é dado por

$$\nu = |\,K_e\,|^{-1/4}\ \mathbf{N}_e = \left|\,g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2\,\right|^{-1/4}\ (\ -g_x, -g_y, 1\ )\,, \tag{2-14}$$

sendo $K_e = \left(1 + g_y^2 + g_x^2\right)^{-2}\left(g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2\right)$ a curvatura Gaussiana Euclidiana.

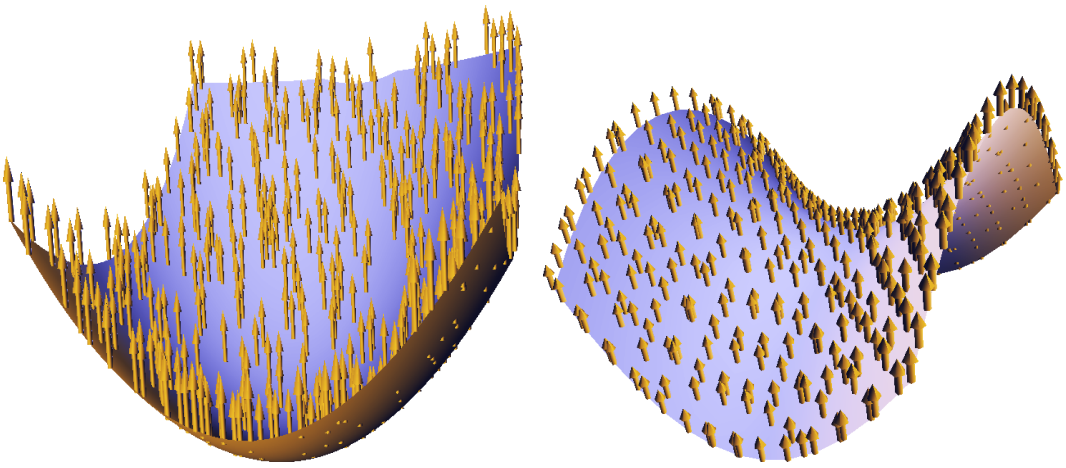

Figura 2.7: Os parabolóides elíptico e hiperbólico têm normal afim ξ constante. Eles têm o papel do plano Euclidiano na geometria afim.

As coordenadas do normal afim ξ são

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{1}{4}\,\mathsf{d}^{-7/4}\left(g_{xx}g_{xy}g_{yyy} - g_{xx}g_{yy}g_{xyy} - g_{yy}^2 g_{xxx} - 2g_{xy}^2 g_{xyy} + 3\,g_{yy}g_{xy}g_{xxy}\right),\\
\xi_2 &= \frac{1}{4}\,\mathsf{d}^{-7/4}\left(g_{yy}g_{xy}g_{xxx} - g_{xx}g_{yy}g_{xxy} - g_{xx}^2 g_{yyy} - 2g_{xy}^2 g_{xxy} + 3\,g_{xx}g_{xy}g_{xyy}\right), \qquad (2\text{-}15)\\
\xi_3 &= \frac{1}{4}\,\mathsf{d}^{-7/4}\left(\ 4\,g_{xy}^4 + 4\,g_{xx}^2 g_{yy}^2 - 8\,g_{xx}g_{yy}g_{xy}^2 + 3\,g_x g_{yy}g_{xy}g_{xxy} + 3\,g_y g_{xx}g_{xy}g_{xyy}\right.\\
&- g_x g_{yy}^2 g_{xxx} - g_y g_{xx}^2 g_{yyy} - 2\,g_x g_{xy}^2 g_{xyy} - 2\,g_y g_{x,y}^2 g_{xxy}\\
&\left. - g_x g_{xx}g_{yy}g_{xyy} - g_y g_{xx}g_{yy}g_{xxy} + g_x g_{xx}g_{xy}g_{yyy} + g_y g_{yy}g_{xy}g_{xxx}\right).
\end{aligned}$$

Agora usando as equações (2-13) temos as curvaturas Gaussiana e média afins.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921353/CA

2.4.1
Exemplos Fundamentais

As formas mais simples da geometria Euclidiana são o plano cuja normal é constante e portanto a curvatura é zero e a esfera com curvatura constante. Na geometria afim as formas equivalentes são os parabolóides elíptico e hiperbólico com normal afim constante (ver figura 2.7), o elipsóide com curvatura constante. Suas estruturas afins estão atribuídas na tabela 2.1.

	Parabolóide Elíptico	Parabolóide Hiperbólico	Esfera
$\mathbf{x}(x,y)$	$(x, y, \frac{1}{2}(x^2+y^2))$	$(x, y, \frac{1}{2}(x^2-y^2))$	$(x, y, \sqrt{-x^2-y^2+r^2})$
$\mathbf{N}_e$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \cdot (-x,-y,1)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \cdot (-x,y,1)$	$\frac{1}{r} \cdot (x,y,z)$
K_e	$\left(1+x^2+y^2\right)^{-2}$	$-\left(1+x^2+y^2\right)^{-2}$	r^{-2}
d	1	-1	$r^2(-x^2-y^2+r^2)^{-2}$
ν	$(-x,-y,1)$	$(-x,y,1)$	$r^{-1/2}\left(x, y, \sqrt{-x^2-y^2+r^2}\right)$
ξ	$(0,0,1)$	$(0,0,1)$	$r^{-3/2}\left(x, y, \sqrt{-x^2-y^2+r^2}\right)$
$\mathcal{K}$	0	0	r^{-3}
$\mathcal{H}$	0	0	$-2r^{-3/2}$

Tabela 2.1: Exemplos fundamentais de estruturas afins.

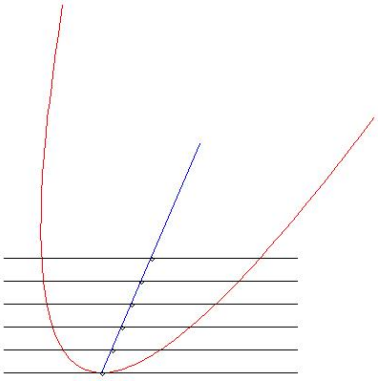

Figura 2.8: (©Wikipedia) Interpretação geométrica do normal afim.

2.4.2
Interpretação Geométrica do Normal Afim

Existe uma interpretação geométrica do normal afim em pontos elípticos (8). Consideremos uma superfície S e seja $p \in S$ um ponto elíptico. Seja $\mathcal{T}_t$ uma família de planos paralelos ao plano tangente a distância t de $\mathcal{T}_0 = T_pS$. A interseção de $\mathcal{T}_t$ com a superfície, para t suficientemente pequeno, limita um domínio convexo em $\mathcal{T}_t$. Cada domínio convexo tem um centro de massa. O lugar do centro de massa, ou centro de gravidade, desses domínios define uma curva $c(t)$ cuja direção tangente é a direção do normal afim de $\mathbf{x}$ em $p : \xi = c'(t)$. A figura 2.8 ilustra essa interpretação geométrica.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921353/CA

2.4.3
Interpretação Geométrica da Curvatura Afim

Nesta subseção apresentaremos uma interpretação geométrica da curvatura Gaussiana afim. Esse resultado é uma extensão da interpretação geométrica da curvatura Gaussiana Euclidiana (15).

Teorema 1 (Interpretação Geométrica da Curvatura Gaussiana) *Seja p um ponto de uma superfície S e seja V uma vizinhança conexa de $p \in S$, onde $\mathcal{K}(p) > 0$. Sejam $A(B)$ a área de uma região $B \subset V$, contendo p, $A'(B)$ é a área da imagem de B pela imersão $\xi : S \to \mathbb{R}^3$ induzida pelo normal afim ξ. Então a curvatura Gaussiana afim no ponto p é dada por*

$$\mathcal{K}(p) = \lim_{B_n \to p} \frac{A'(B_n)}{A(B_n)},$$

onde o limite é tomado através de uma sequência de regiões B_n cujos diâmetros decrescem para 0.

Demonstração: A área de B é dada por

$$A(B) = \iint_R ||\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|| du dv,$$

onde $\mathbf{x}(u, v)$ é uma parametrização com $\mathbf{x}(0) = p$, cuja vizinhança contém V e R é a região do plano uv parametrizando B. A área $A'(B)$ é dada a partir das equações de ξ na parametrização dada por

$$A'(B) = \iint_R ||\xi_u \times \xi_v|| du dv.$$

Sabemos por (2-13) que podemos escrever

$$\begin{aligned} \xi_u &= b_{11}\mathbf{x}_u + b_{12}\mathbf{x}_v, \\ \xi_v &= b_{21}\mathbf{x}_u + b_{22}\mathbf{x}_v, \end{aligned} \tag{2-16}$$

sendo a curvatura Gaussiana afim em p igual a $b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$, obtemos

$$A'(B) = \iint_R \mathcal{K}||\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|| du dv. \tag{2-17}$$

Passando ao limite quando $|R| \to 0$, temos

$$\lim_{|R|\to 0} \frac{A'}{A} = \lim_{|R|\to 0} \frac{\frac{A'}{|R|}}{\frac{A}{|R|}}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921353/CA

$$\lim_{|R|\to 0}\frac{A'}{A} = \frac{\lim_{|R|\to 0}\frac{1}{R}\iint_R \mathcal{K}||x_u \times x_v||dudv}{\lim_{|R|\to 0}\frac{1}{R}\iint_R ||x_u \times x_v||dudv} = \frac{\mathcal{K}||x_u \times x_v||}{||x_u \times x_v||} = \mathcal{K}.$$

Usamos o teorema do valor médio na penúltima igualdade.

□

Vale comentar que usamos a convensão de que a área de uma região contida em uma vizinhança conexa V e a área de sua imagem por ξ, equação (2-17), têm o mesmo sinal se $\mathcal{K} > 0$ em V, e sinais opostos se $\mathcal{K} < 0$ em V. Sendo assim, o resultado acima também é válido quando $\mathcal{K}(p) < 0$.

2.4.4 Vizinhança Tubular Afim

Na geometria Euclidiana é possível mostrar a existência de vizinhança tubular, além disso prova-se que uma superfície orientável em $\mathbb{R}^3$ é a imagem inversa de um valor regular de uma função diferenciável (15). Neste sentido, mostraremos a existência de uma vizinhança tubular afim e provaremos que localmente a superfície é dada como a pré-imagem do valor regular 0.

Definição 7 (Vizinhança Tubular Afim) *Dizemos que V é uma vizinhança tubular afim de S, se é possível escolher sobre a reta normal afim passando por $p \in S$ um intervalo aberto Q_p em torno de p e de comprimento $2\epsilon_p$, $\epsilon_p > 0$ variando com p, de tal forma que se $p \neq q \in S$ então $Q_p \cap Q_q = \emptyset$. Além disso, a união $\bigcup Q_p$, $p \in S$, constitui um conjunto aberto V em $\mathbb{R}^3$, que contém S e tem a propriedade de que para cada ponto de V passa uma única reta normal afim a S.*

Mostraremos agora a existência da vizinhança tubular afim de uma superfície conexa, convexa e orientável. Inicialmente, provaremos uma versão local desse fato, isto é, mostraremos que para cada p de uma superfície regular existe uma vizinhança de p em S que tem uma vizinhança tubular afim.

Proposição 1 (Existência da Vizinhança Tubular Afim Local) *Consideremos $S \subset \mathbb{R}^3$ superfície regular, conexa, convexa e orientável e $\mathbf{x} : U \to S$ uma parametrização de S, onde $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto e seja $p = \mathbf{x}(u_0, v_0) \in S$ ponto tal que $K_e \neq 0$, então, existe uma vizinhança tubular afim $W \subset \mathbb{R}^3$ tal que $p \in W$.*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921353/CA

Demonstração: Seja $T : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação definida por

$$T(u, v, t) = \mathbf{x}(u, v) + t\xi(u, v) \ (u, v) \in U \ e \ t \in \mathbb{R},$$

onde $\xi(u, v)$ é o vetor normal afim calculado em p. Notemos que T é diferenciável e em $(u_0, v_0, 0)$ o seu Jacobiano é $[\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \xi] \neq 0$. Pelo Teorema da função inversa existe um paralelepípedo $\mathcal{P} = (u_0 - \delta, u_0 + \delta) \times (v_0 - \delta, v_0 + \delta) \times (-\epsilon, \epsilon)$, com $\epsilon > 0, \delta > 0$, em torno de $(u_0, v_0, 0)$, tal que $T\Big|_{\mathcal{P}}$ é injetiva. Basta tomar $W = T(\mathcal{P})$. Com efeito, se $p \neq q \in W \cap S$ então existem $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$ tais que $\mathbf{x}(u_1, v_1) = p$ e $\mathbf{x}(u_2, v_2) = q$.

Logo para todo $r, s \in (-\epsilon, \epsilon)$, pela injetividade de $T\Big|_{\mathcal{P}}$, temos $T(u_1, v_1, t) \neq T(u_2, v_2, s)$. O que mostra que W é uma vizinhança tubular afim.

□

Fixemos uma orientação para a superfície convexa S, vimos na proposição 1 que o par de segmentos Q_p e Q_q, $p \neq q$ da vizinhança tubular W não se intersectam. Assim, para cada $w \in W$ passa uma única reta normal afim a S que encontra S em um ponto s. Com a notação da proposição 1 obtemos que $T : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^3$ é injetora e seu Jacobiano não se anula. Logo, a aplicação $T^{-1} : W \subset \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}$ dada por $T^{-1}(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), t(x, y, z))$ é diferenciável e em particular $t : W \to \mathbb{R}$ é diferenciável. Como $t^{-1}(0) = W \cap S$ e 0 é valor regular para t, pois o Jacobiano de T não se anula e portanto $dT^{-1} \neq 0$.

Queremos estudar o caso global, isto é, provar a existência de uma vizinhança tubular de uma superfície convexa e orientável inteira. Vamos nos restringir ao caso de superfície compacta.

Proposição 2 *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular compacta, orientável e estritamente convexa. Então existe um número $\epsilon > 0$ tal que sempre que $p, q \in S$, os segmentos das retas normais de comprimento 2ϵ, centrados em p e q, são disjuntos, ou seja, S tem uma vizinhança tubular afim.*

Demonstração: Pela propriedade de Lebesgue da cobertura de compactos, temos que para cada $p \in S$ existe uma vizinhança W_p e um número $\epsilon_p > 0$ tais que vale a proposição para pontos de W_p com $\epsilon = \epsilon_p$. Tomando todos os pontos $p \in S$, obtemos uma família de $\{W_p\}$ com $S \subset \bigcup_{p \in S} W_p$. Utilizando a propriedade de Heine-Borel da cobertura de compactos é possível escolher um número finito de elementos de $\{W_p\}$, digamos, $W_1, \cdots, W_k$ correspondendo a

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921353/CA

$\epsilon_1, \cdots, \epsilon_k$, tais que $S \subset \bigcup_{i=1}^{k} W_i$. Tome

$$0 < \epsilon < min\left(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_k, \frac{\delta}{2}\right),$$

onde δ é o número de Lebesgue da família $\{W_i\}$.

Mostraremos que ϵ definido acima satisfaz a proposição. De fato, sejam dois pontos distintos $p, q \in S$. Suponhamos que ambos pertençam a algum $W_i,\ i = 1, \cdots, k$, então os segmentos das retas normais afins centrados em p e q com comprimento 2ϵ não se intersectam, pois $\epsilon < \epsilon_i$.

Agora, se p e q não pertencem a um mesmo W_i, então a distância entre eles é maior ou igual a δ, caso os segmentos das retas normais afins centrados em p e q e com comprimento 2ϵ, se encontrassem em um ponto $Q \in \mathbb{R}^3$, teríamos

$$2\epsilon \geq d(p, Q) + d(Q, q) \geq d(p, q) \geq \delta,$$

o que contradiz a definição do ϵ.

□

Usando o resultado da proposição 2 temos imediatamente o seguinte teorema.

Teorema 2 *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, compacta, orientável e estritamente convexa. Então existe uma função diferenciável $t : W \to \mathbb{R}$, definda em $W \subset \mathbb{R}^3$, com $W \supset S$, vizinhança tubular afim de S, que tem zero como valor regular e é tal que $S = t^{-1}(0)$.*

2.4.5
Superfícies Paralelas Afins

Seja S superfície convexa parametrizada por $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, a superfície paralela afim S_t é parametrizada por $T_t = \mathbf{x} + t\xi$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Na literatura encontramos um texto que trabalha com superfícies paralelas afins (14), cujo objetivo do autor é obter informações sobre singularidades em determinados conjuntos. Já o nosso objetivo é relacionar as informações geométricas das superfícies paralelas afins com a vizinhança tubular afim. O número t é conhecido na literatura como distância afim.

Uma pergunta natural de se fazer é a seguinte

"Qual a condição sobre t para que S_t seja uma superfície regular?"

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921353/CA

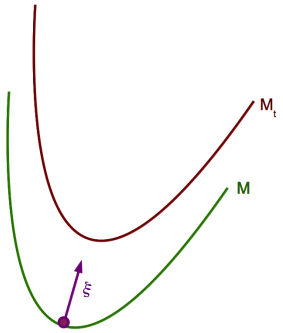

Figura 2.9: Curvas paralelas.

Notemos que T_t é diferenciável, vamos encontrar os coeficientes da métrica de Berwald-Blaschke L_t, M_t e $N_t : U \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\begin{aligned} L_t &= [(T_t)_u, (T_t)_v, (T_t)_{uu}], \\ M_t &= [(T_t)_u, (T_t)_v, (T_t)_{uv}], \\ N_t &= [(T_t)_u, (T_t)_v, (T_t)_{vv}]. \end{aligned}$$

Utilizando as equações (2-16) temos que

$$\begin{aligned} (T_t)_u &= (1 + b_{11}t)\mathbf{x}_u + tb_{12}\mathbf{x}_v, \\ (T_t)_v &= tb_{21}\mathbf{x}_u + (1 + b_{22}t)\mathbf{x}_v, \\ (T_t)_{uu} &= (b_{11})_u t\mathbf{x}_u + (b_{12})_u t\mathbf{x}_v + (1 + b_{11}t)\mathbf{x}_{uu} + tb_{12}\mathbf{x}_{uv}, \\ (T_t)_{uv} &= (b_{11})_v t\mathbf{x}_u + (b_{12})_v t\mathbf{x}_v + (1 + b_{11}t)\mathbf{x}_{uv} + tb_{12}\mathbf{x}_{vv}, \\ (T_t)_{vu} &= (b_{21})_u t\mathbf{x}_u + (b_{22})_u t\mathbf{x}_v + b_{21}t\mathbf{x}_{uu} + (1 + b_{22}t)\mathbf{x}_{uv}, \\ (T_t)_{vv} &= (b_{21})_v t\mathbf{x}_u + (b_{22})_v t\mathbf{x}_v + b_{21}t\mathbf{x}_{uv} + (1 + b_{22}t)\mathbf{x}_{vv}. \end{aligned} \tag{2-18}$$

Proposição 3 *O coeficiente da nova métrica é dado por*

$$d_t = |L_t N_t - M_t^2|^{1/4} = \mathsf{d}(1 - 2t\mathcal{H} + t^2\mathcal{K})^{3/4}. \tag{2-19}$$

Demonstração: Com efeito, usando a expressão (2-18), temos que os coeficientes da métrica de Berwald-Blascke L_t, M_t, N_t são dados por

$$\begin{aligned} L_t(u,v) &= p(t)((1 + tb_{11})L_0 + tb_{12}M_0), \\ M_t(u,v) &= p(t)((1 + tb_{11})M_0 + tb_{12}N_0), \\ M_t(u,v) &= p(t)(tb_{21}L_0 + (1 + tb_{22})M_0), \\ N_t(u,v) &= p(t)(tb_{21}M_0 + (1 + tb_{22})N_0), \end{aligned}$$

onde $p(t) = t^2(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) + t(b_{11} + b_{22}) + 1$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921353/CA

Temos duas expressões para $M_t(u,v)$ que são iguais, devido a definição de $(T_t)_{uv} = (T_t)_{vu}$. Escrevendo em forma matricial, obtemos

$$\begin{pmatrix} L_t \\ M_t \end{pmatrix} = p(t) \begin{pmatrix} (1+tb_{11}) & tb_{12} \\ tb_{21} & (1+tb_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_0 \\ M_0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} N_t \\ -M_t \end{pmatrix} = p(t) \begin{pmatrix} (1+tb_{22}) & -tb_{21} \\ -tb_{12} & (1+tb_{11}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0 \\ -M_0 \end{pmatrix}.$$

Como

$$L_tN_t - M_t^2 = \begin{pmatrix} L_t & M_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_t \\ -M_t \end{pmatrix}.$$

Segue que $L_tN_t - M_t^2 = p(t)^3(L_0N_0 - M_0^2) = \mathsf{d}^4(1 - 2t\mathcal{H} + t^2\mathcal{K})$, donde

$$d_t = |L_tN_t - M_t^2|^{1/4} = \mathsf{d}(1 - 2t\mathcal{H} + t^2\mathcal{K})^{3/4}.$$

□

Logo, dentro das hipóteses da proposição 2 podemos enunciar o seguinte resultado

Proposição 4 *A superfície S_t é regular com métrica não degenerada se, e somente se, $(1-2\mathcal{H}t+\mathcal{K}t^2)\neq 0$, para $t<\epsilon$, onde $\epsilon>0$ é dado na proposição 2.*

Observação 4 *Da proposição anterior temos que se $\mathbf{x}_t$ é regular, então os vetores ξ_u e ξ_v são linearmente independentes, pois*

$$1 + (b_{11} + b_{22})t + (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{22})t^2 \neq 0,$$

ou ainda que $1/t$ não é um autovalor do operador forma.

Colorário 1 *Se $p \in S$ é uma ponto elíptico ou hiperbólico, então $p_t \in S_t$ também será, desde que S_t seja uma superfície regular.*

Demonstração: Isto segue diretamente da equação (2-19).

□

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921353/CA

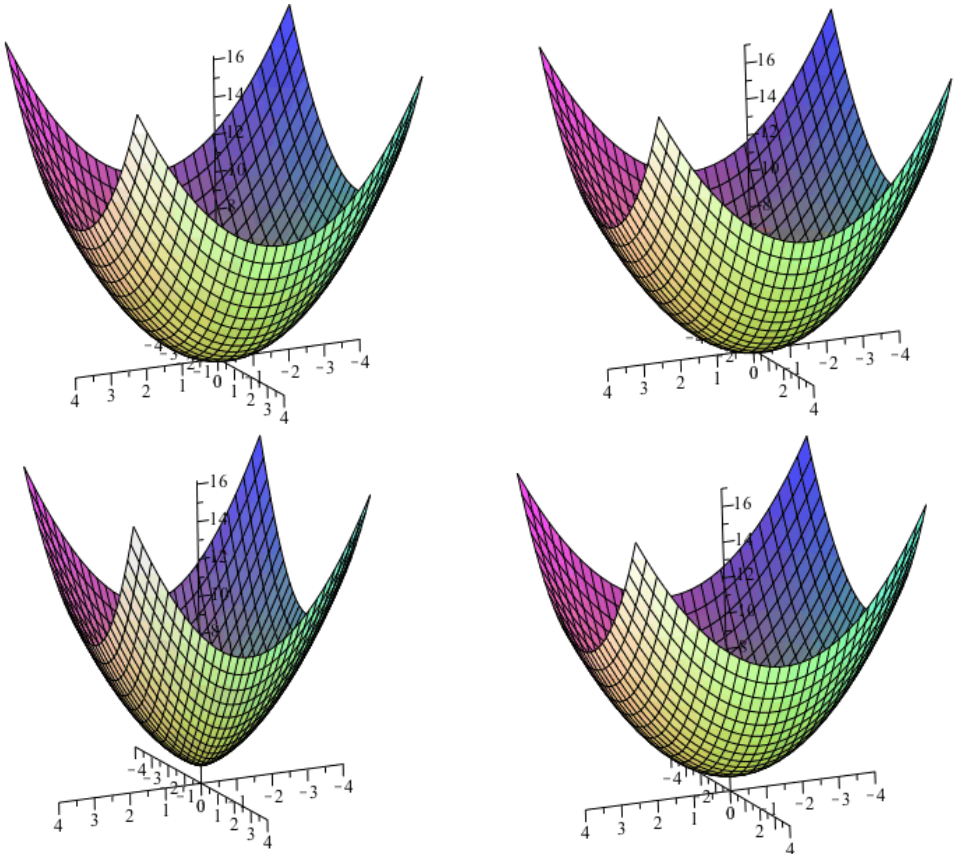

Figura 2.10: Superfícies paralelas afins no parabolóide elíptico.

Na figura 2.10 usamos o normal Euclidiano (à esquerda) e o normal afim (à direita) para obter as superfícies paralelas para o parabolóide elíptico.

2.4.6 Fórmula de Minkwoski Afim

Nesta subseção estendemos a conhecida fórmula de Minkwoski para dados geométricos afins.

Teorema 3 (Fórmula de Minkwoski Afim) *Sejam S uma superfície compacta e convexa, e $\mathbf{x} : U \to S$ parametrização de S. Consideremos uma variação dessa superfície ao longo do vetor normal afim, isto é,*

$$T_t(u,v) = \mathbf{x}(u,v) + t\xi(u,v),$$

onde $0 \leq t \leq M$, de modo que S_t seja regular. Então,

$$Vol(S_t) = Vol(S) + M\bar{A}(S) - M^2 \int_S \mathcal{H} d\bar{A} + \frac{M^3}{3} \int_S \mathcal{K} d\bar{A},$$

onde $d\bar{A} = d^{1/4} dA = K_e^{1/4} ||\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|| dudv$ é forma de área afim.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921353/CA

Demonstração: Por definição temos que

$$Vol(S_t) \;=\; Vol(S) + \iiint_{T_t(\mathcal{D})} 1dV,$$

onde $\mathcal{D} = \{(u,v,w)/(u,v) \in U,\ w \in [0,M]\}$. Usando a fórmula de mudança de variáveis temos que

$$\iiint_{T_t(\mathcal{D})} 1dV = \iiint_{\mathcal{D}} 1|det(jac(T_t))|dtdA,$$

onde $jac(T_t)$ é a matriz Jacobiana de T_t. Obtemos

$$\begin{aligned} det(jac(T_t)) &= \left[\frac{\partial T_t}{\partial u}, \frac{\partial T_t}{\partial v}, \frac{\partial T_t}{\partial t}\right] \\ &= [\mathbf{x}_u + t\xi_u, \mathbf{x}_v + t\xi_v, \xi] \\ &= [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \xi] + t([\xi_u, \mathbf{x}_v, \xi] + [\mathbf{x}_u, \xi_v, \xi]) + t^2\,[\xi_u, \xi_v, \xi] \\ &= (1 - 2t\mathcal{H} + t^2\mathcal{K})(\mathsf{d}^{1/4}). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} Vol(S_t) &= Vol(S) + \iint_U \int_{w=0}^{M} (1 - 2w\mathcal{H} + w^2\mathcal{K})\mathsf{d}^{1/4} dwdA \\ &= Vol(S) + \iint_U \int_{w=0}^{M} (1 - 2w\mathcal{H} + w^2\mathcal{K})d\bar{A}dw \\ &= Vol(S) + M\bar{A}(S) - M^2 \int_S \mathcal{H}d\bar{A} + \frac{M^3}{3}\int_S \mathcal{K}d\bar{A}. \end{aligned}$$

□

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921353/CA