PUC

ESTUDO EXPERIMENTAL DE VIGAS EM
BALANÇO SOB IMPACTOS AXIAIS

JAIME TUPIASSÚ PINHO DE CASTRO

Março de 1977

CENTRO TECNOLÓGICO QUÍMICO
Instituto Tecnológico Superior de São Paulo
Rua Gomes de Sá, 1000, 13080-000, São Carlos
São de Janeiro - RJ

JAIME TUPIASSÚ PINHO DE CASTRO

ESTUDO EXPERIMENTAL DE VIGAS EM
BALANÇO SOB IMPACTOS AXIAIS

Tese apresentada ao Departamento
de Engenharia Mecânica da PUC-RJ
como parte dos requisitos para
obtenção do título de Mestre em
Ciências em Engenharia Mecânica.

Departamento de Engenharia Mecânica
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro, 18 de março de 1977

A meus pais

que, pelo exemplo, ensinaram-me a viver.

A Lili

que, pelo carinho, ensinou-me a amar.

Meus agradecimentos aos mestres e companheiros que permitiram-me levar a bom termo esta pesquisa:

- Ao Prof. Visvanatha Sundararajan, pela indispensável orientação.
- Ao Prof. Sherif T. Nouh, a quem devo importantes sugestões.
- Ao Prof. Sidney Stuckenbruck, pelo valioso apoio.
- A todos os colegas do Departamento de Engenharia Mecânica, pelo excelente ambiente de trabalho e pelo estímulo constante à pesquisa e ao estudo.
- A André Rivola Čviĵák, pelas discussões sobre os problemas eletrônicos, e a Philemon Melo Cunha, pelos ensinamentos fotográficos.
- A Diney Mourão e a Marcos Bento de Melo pela ajuda na execução das fotografias.
- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela ajuda financeira recebida durante o curso, que nos possibilitou a apresentação deste trabalho.

RESUMO

Este estudo é uma investigação experimental das vibrações flexurais de uma viga em balanço causadas por impactos axiais. Uma série de medidas foi feita usando-se uma viga de aço inoxidável submetida a impactos de diferentes magnitudes, aplicados através de um arranjo massa-pêndulo. A amplitude dos impulsos foi variada mudando-se o peso e o ângulo de lançamento da massa do pêndulo.

Para a gama e a característica dos impactos utilizados nesta investigação, concluímos que a amplitude dos impulsos aplicados é o parâmetro relevante da resposta transversal da viga. As máximas tensões de flexão e os máximos deslocamentos laterais relacionam-se linearmente com a amplitude dos impulsos axiais aplicados. Não foi observada nenhuma instabilidade dinâmica, no sentido de deslocamentos laterais excessivos, na gama de impulsos utilizados nesta pesquisa.

ABSTRACT

This study is an experimental investigation of the dynamic response of a cantilever beam due to axial impact. A series of response measurements were made for a cantilevered stainless steel beam subjected to impulses of different magnitudes. The impulses were produced by a pendulum-impact mass arrangement and their magnitudes were varied by changing the weight and release angle of the pendulum mass.

For the range and character of impulses utilized in this investigation, it is concluded that the magnitude of the applied impulse is the relevant parameter for the transverse response of the beam. Moreover, both maximum bending stresses in the beam and its maximum lateral displacements were found to be linearly related to the magnitude of the applied axial impulses.

No dynamic instabilities, in the sense of excessive lateral displacements of the beam, was observed for the range of impulse magnitudes selected here.

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES.....	IV
LISTA DE TABELAS.....	V
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS.....	VI
1. INTRODUÇÃO	
1.1 - FINALIDADE.....	1
1.2 - COMENTÁRIOS SOBRE A LITERATURA EXISTENTE.....	2
1.3 - OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÃO DESTA PESQUISA.....	3
2. PARTE EXPERIMENTAL	
2.1 - O APARATO EXPERIMENTAL.....	4
2.2 - TÉCNICA DE MEDIÇÃO.....	8
2.3 - CALIBRAGEM E ERROS.....	10
2.4 - PROBLEMAS E SOLUÇÕES SURGIDOS E SURGERIDOS.....	14
3. RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	16
4. CONCLUSÕES.....	22
5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	50

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

	<u>Página</u>
Figura 1 - Vista de conjunto.....	24
Figura 2 - Vista de conjunto.....	25
Figura 3 - Esquema do Aparato Experimental.....	26
Figura 4 - Tampa da base.....	27
Figura 5 - Tampa da base.....	28
Figura 6 - Engaste da viga.....	29
Figura 7 - Suporte do martelo.....	30
Figura 8 - Medição do 1º período natural de vibração.....	31
Figura 9 - Medição do fator de amortecimento.....	31
Figura 10 - Expectros antes e depois do reisolamento.....	32
Figura 11 - Máximas Deformações de Flexão versus I_n/I_p	33
Figura 12 - Máximas Deformações de Flexão versus I_m/I_p	34
Figura 13 - Duração do Impacto versus Ângulo do Pêndulo... 35	
Figura 14 - Forças máximas versus Ângulo do Pêndulo.....	36
Figura 15 - Aceleração versus tempo, $M = 0,204$ kg.....	37
Figura 16 - Aceleração versus tempo, $M = 0,5714$ kg.....	38
Figura 17 - Aceleração versus tempo, $M = 1,172$ kg.....	39
Figura 18 - Deformação versus tempo.....	40
Figura 19 - Deformação versus tempo.....	40
Figura 20 - Deformação versus tempo.....	40
Figura 21 - Deformação versus tempo.....	40
Figura 22 - Deformação versus tempo.....	40
Figura 23 - Deformação versus tempo.....	40
Figura 24 - Curva de Calibração dos transdutores de desloca- mento.....	41
Figura 25 - Máximos Deslocamentos versus I_n/I_p	42
Figura 26 - Deslocamentos versus impulso, t fixo.....	43

LISTA DE ILUSTRAÇÕES (cont.)

	<u>Página</u>
Figura 27 - Deslocamentos versus tempo, I_n/I_p fixo.....	43
Figura 28 - Deslocamentos versus impulso, t fixo.....	43
Figura 29 - Medidas de Aceleração e Deformação.....	44
Figura 30 - Medidas de Deslocamento.....	45

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Especificações dos Instrumentos.....	46
Tabela 2 - Constantes da viga.....	47
Tabela 3 - Medidas de Flexão.....	48
Tabela 4 - Medidas de Deslocamento.....	49

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

- b - Largura da viga.
- Cr - Coeficiente de restituição.
- d - Distância entre o martelo e o esbarro fixo.
- div - Divisão da tela do osciloscópio.
- E - Módulo de Young.
- F - Força.
- G - Aceleração da gravidade = $9,8 \text{ m/s}^2$.
- h - Espessura da viga.
- I - Menor momento de inércia da seção reta.
- Im - Impulso medido = $\int_0^T F dt$
- In - Impulso nominal = MV.
- Ip - Impulso Padrão = $P_{cr} \times \tau_{1f}$
- L - Comprimento do balanço da viga.
- l - Comprimento do pêndulo.
- M - Massa do martelo.
- P_{cr} - Carga de Euler à flambagem.
- $\bar{P}_{max}$ - Média dos picos de força de impacto.
- t - Tempo.
- T - Tempo de contato entre o martelo e a viga.
- V - Velocidade de impacto do martelo.
- x - Coordenada paralela do eixo da viga.
- Y - Deslocamento transversal da viga.
- $\bar{Y}_{max}$ - Média dos picos de deslocamento transversais.
- ϵ - Deformações ($\Delta L/L$).
- σ - Tensões normais ou de flexão.
- $\hat{\sigma}$ - Desvio padrão.
- p - Massa por unidade de comprimento.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIMBOLOS (cont.)

- ξ - Fator de amortecimento.
- $\mu\epsilon$ - Micro-deformações ($10^{-6} \times \Delta L/L$).
- θ - Ângulo de lançamento do pêndulo.
- τ_{1f} - Primeiro período natural de vibração flexural.
- τ_{1a} - Primeiro período natural de vibração axial.

1. INTRODUÇÃO

1.1 - FINALIDADE:

É fato conhecido que quando excitamos uma viga através de impactos axiais ela também vibra flexuralmente. Este efeito é, provavelmente, devido à imperfeições geométricas, excentricidade no carregamento, vibrações residuais ou a superposição destas causas.

Conhecer este fenômeno é necessário para que possamos projetar com mais segurança elementos estruturais ou membros de máquinas que estejam sujeitos a impactos axiais durante sua vida útil. Um bate-estacas ou um trocador de calor onde haja riscos de explosões são exemplos de projetos que necessitam deste estudo.

Há vários parâmetros que necessitam ser analisados:

- Qual a máxima amplitude de vibração flexural da viga em função da carga ou do impacto.

- Existência ou não de ressonâncias e estabilidade do sistema em função da geometria da viga e do impacto.

- Quais as máximas tensões desenvolvidas na viga pelos impactos (tensões normais e de flexão).

- Repetição ou aleatoriedade do fenômeno.

- Quais as frequências de resposta do sistema e quais os modos predominantes nesta resposta, em função do impacto e da geometria da viga.

- Existência ou não de "cargas críticas", a partir das quais haja diferenças marcantes na resposta do sistema.

- Efeitos do material e da geometria da viga, amortecimentos, tipo e material do martelo, forma e duração do impacto, condições de contorno do sistema.

Nas seções seguintes é feita uma revisão do estado atual do conhecimento e dos propósitos deste trabalho.

1.2 - COMENTÁRIOS SOBRE A LITERATURA EXISTENTE:

A literatura disponível relacionada à resposta flexural de colunas sob cargas axiais de impacto não é de forma alguma extensa. Devido a complexidade do problema completo, somente alguns aspectos foram abordados pelos autores publicados, cada um enfatizando certas variáveis do problema:

Hoff [1] estudou a flambagem dinâmica de colunas simplesmente apoiadas, cujas extremidades eram comprimidas sob velocidade constante. Para sua formulação não linear do problema, ele obteve uma solução em forma de série de potências. Sevin [2] estendeu o trabalho de Hoff incluindo o efeito de inércia axial, o qual, na gama de velocidades usadas, foi considerado pequeno.

Lindberg [3] estudou a flambagem sob impacto de uma barra fina, assumindo imperfeições aleatórias na barra. Sua determinação teórica da distribuição probabilística dos comprimentos de onda da barra flambada foi comparada favoravelmente com suas experiências. Nas experiências de Lindberg, finas barras de alumínio eram tracionadas sob altas tensões axiais e repentinamente separadas de um dos suportes. A onda de descompressão submetia partes crescentes da viga a uma tensão de compressão igual, em amplitude, à tração inicial. Os movimentos laterais da barra foram medidos com auxílio de um método ótico.

A estabilidade dinâmica de colunas simplesmente apoiadas

-das sob cargas axiais de curta duração, incluindo os efeitos de inércia axial e de dissipação interna, foi investigada por Mc Ivor e Bernard [4]. Estes autores usaram não linearidades geométricas para acoplar os movimentos axiais e flexurais. Do resultado da análise, McIvor e Bernard mostraram que ressonâncias paramétricas, devido a movimentos axiais transitórios, podem ser significantes e dominar a resposta da viga quando a duração do carregamento diminui.

Lyon e Zable [5] desenvolveram um transdutor de força usando impactos obtidos através de um pêndulo. Este transdutor pode ser usado para calibrações dinâmicas e para obter-se um impacto conhecido e repetitivo, com uma curva força versus tempo semi-senoidal. Alguns dos resultados obtidos por estes autores foram confirmados nesta pesquisa.

1.3 - OBJETIVOS DESTA PESQUISA:

Considerando que praticamente não eram disponíveis resultados experimentais no estudo das vibrações flexurais de vigas submetidas a impactos axiais, nos propusemos nesta pesquisa a:

1 - Estudar quais as máximas tensões e os máximos deslocamentos laterais de uma viga em balanço sob impactos axiais.

2 - Pesquisar a existência de cargas críticas dinâmicas, no sentido de instabilidades flexurais causadas por deslocamentos laterais excessivos.

3 - Identificar quais os parâmetros relevantes neste fenômeno.

2. PARTE EXPERIMENTAL

Neste capítulo o aparato experimental é detalhadamente descrito na seção 2.1; na seção 2.2 são abordadas as técnicas de medição; os erros esperados e as técnicas de calibração estão descritos na seção 2.3. Na seção 2.4 são comentados os problemas encontrados durante a execução da pesquisa.

2.1 - O APARATO EXPERIMENTAL:

Para facilitar a explanação dividiremos o conjunto de aparelhos usados na pesquisa em três grupos:

2.1.1 - Suportes.

2.1.2 - Aparelhos de medição.

2.1.3 - Aparelhos de calibração.

Uma visão geral do conjunto é dada nas figuras 1 e 2. Na figura 3 temos um esquema do aparato usado.

2.1.1 - Suportes:

A base da viga é constituída de duas partes:

- Uma sólida mesa de madeira apoiada em coxins de borracha e com um sobrepeso de cerca de 250 kg.

- Uma caixa de aço composta de: uma tampa de chapa de 1", lados de viga "U" de 4" x 3" x 1/4" e fundo de chapa de 3/16". Enchemos a caixa de chumbo e o conjunto pesa cerca de 100 kg. Usamos pregos para fixá-la à mesa.

Nesta pesquisa este suporte é considerado rígido e imóvel. Entretanto tivemos alguns problemas de isolamento que serão abordados na seção 2.4.

A tampa da caixa foi projetada de forma a permitir dois graus de liberdade à viga, para que pudessemos ajustá-la dentro da precisão do nosso instrumental de medida (ver figuras

4 e 5).

O engaste da viga é constituído de duas cantoneiras - de 14,5mm de espessura, reforçadas com abas. A viga é colocada entre as cantoneiras, fixadas por quatro parafusos 3/8" UNF e presa por dois pinos-guia de diâmetro 5mm. Estes pinos atravessam buchas temperadas, que também servem de guia de brocas para a furação da viga. A parte posterior do conjunto engaste + viga apoia-se num anteparo constituído de: uma cantoneira de 20mm, um parafuso de 3/4" UNF, porca e contra-porca e uma chapa de 3/16". Os deslocamentos axiais são evitados por este anteparo e os laterais por quatro grampos de aperto e quatro parafusos de 5/16" UNF. A força de atrito entre o engaste e a tampa é estimada em cerca de 2.000kg [6,7]. Em vista destes números consideramos o engaste rígido e fixado à base (ver figura 6).

Os suportes do martelo foram projetados de forma a - permitir um ajuste contínuo e preciso da altura e da posição do pêndulo. Eles são constituídos de tres partes:

- Uma chapa de 3/16", aparafusada ao teto e com um rasgo em arco de círculo, com graduação angular.

- Um braço móvel que pode ser ajustado à chapa em qualquer ângulo de 0° a 25°.

- Tarrachas de cavaquinho.

O ajuste angular dos braços nos permite fazer o plano de vibração do pêndulo coincidir com o plano da viga em teste;- as tarrachas de cavaquinho permitem que a altura e a inclinação do martelo sejam ajustadas com a precisão do instrumental de medida (ver figura 7).

O projeto da base e do suporte do pêndulo garante, teoricamente, que o impacto do martelo é axial à viga.

2.1.2 - Aparelhos de medição:

Necessitávamos medir quatro grandezas:

- Duração do impacto e períodos naturais da viga.
- Acelerações.
- Deformações (o ϵ da Lei de Hooke - $\sigma = E\epsilon$)
- Deslocamentos.

Como impactos são fenômenos transitórios necessitávamos usar aparelhos dotados de memória. Dois osciloscópios Tektronix constituíram o cerne do nosso aparato de medição.

As especificações completas dos instrumentos usados - encontram-se na tabela 1.

- Duração do impacto e períodos naturais da viga:

Duração do impacto, frequências naturais e módulos de elasticidade exigem medidas de tempo. Os aparelhos usados nestas medições foram as bases de tempo dos osciloscópios. Algumas medidas foram checadadas usando-se um freqüencímetro digital.

- Acelerações:

A medição das acelerações do impacto eram relevantes. Necessitávamos saber qual a máxima força e o aspecto da curva força versus tempo. Acelerômetros e pre-amplificadores Brüel e Kjaer, ligados aos osciloscópios, foram usados nestas medidas.

- Deformações:

Através das medidas de deformação achamos a relação - entre o impulso aplicado à viga e as tensões de flexão. Um indicador digital de deformações, com memória, Brüel e Kjaer, e extensômetros BLH (Strain-Gauges) foram usados nestas medidas.

- Deslocamentos:

Para medirmos deslocamentos usamos transdutores capa-

-citivos, osciladores e conversores de reatância, de fabricação Disa. A medida dos deslocamentos laterais da viga eram importantes para que tivéssemos a sua resposta no tempo, aos impactos.

Na figura 3 vemos um esquema da interligação destes instrumentos.

Após a execução de cada teste, as leituras feitas nas telas dos osciloscópios eram fotografadas por câmeras presas a monopés especialmente projetados para este fim.

2.1.3 - Aparelhos de calibração:

Para calibrar o acelerômetro foi usado um pequeno vibrador capaz de manter o nível de 1 G.

Um microscópio acoplado a um micrômetro foi usado para o levantamento das curvas dos transdutores de deslocamento.

A axialidade do impacto entre o martelo e a viga era garantida com o auxílio de um telescópio de alinhamento.

Um multímetro digital foi usado para testar os estensômetros e o isolamento entre estes e a viga.

A resposta do sistema às várias frequências foi testada usando-se um gerador de sinais.

As bases de tempo dos osciloscópios foram checadas usando-se um freqüencímetro de cristal.

Um espectrômetro acoplado a um gravador e um acelerômetro especial foram usados para isolar-se a base da viga das vibrações do prédio.

O indicador de deformações foi calibrado usando-se uma resistência de precisão.

As dimensões das vigas foram medidas no Laboratório de Metrologia da PUC-RJ.

2.2 - TÉCNICAS DE MEDIÇÃO:

Sabemos que a vibração das vigas de seção reta constante em balanço é função de quatro parâmetros físicos.

$$Y(x,t) = f(I, \rho, L, E)$$

Logo, as medidas iniciais eram necessariamente as destas grandezas.

A altura e a largura da seção reta eram medidas em vãrios pontos, e, os valores médios destas medidas eram tomados para calcular-se o menor momento de inércia pela conhecida fórmula $bh^3/12$.

A massa por unidade de comprimento era medida pela maneira óbvia: pesando-se a viga e dividindo-se sua massa pelo seu comprimento.

Achadas estas medidas as vigas eram postas entre as cantoneiras de engaste e fixadas à base. Com um nível de bolha garantíamos a horizontalidade do balanço e, após o aperto dos parafusos, procedíamos a furação para passagem dos pinos-guia. Desta forma evitávamos qualquer movimento na parte engastada das -vigas.

Após a cuidadosa colagem dos extensômetros, [8, 9, 10], próximos ao engaste, e de sua ligação a braços opostos da ponte de Wheatstone, medíamos o primeiro período natural de vibração flexural na tela do osciloscópio. Na figura 8 vemos um exemplo destas medições. Com o valor deste período calculávamos o módulo de elasticidade da viga pela fórmula: [11]

$$E = \frac{4 \pi^2}{12,355} \frac{\rho L^4}{I \tau_{1f}^2}$$

O fator de amortecimento do primeiro modo de vibração era calculado pela fórmula: [12] (ver figura 9).

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \quad \delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_0}{x_n} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{onde:} \\ n - \text{n}^\circ \text{ de ciclos} \\ x_0 - \text{amplitude do ciclo zero} \\ x_n - \text{amplitude do enésimo ciclo.} \end{array} \right.$$

A seqüência de nossa pesquisa exigia o alinhamento do pêndulo e da viga. Este alinhamento revelou-se fator crítico - durante a pesquisa.

Foram usados tres martelos: dois pintados de amarelo e um de preto.

Nos primeiros testes o alinhamento era feito visualmente, o que para ângulos pequenos e com os martelos amarelos - mostrou-se satisfatório. No entanto, para os ângulos maiores e com o martelo preto (o que diminui sensivelmente a acuidade visual) a dispersão das leituras começou a aumentar muito. Passamos a usar então um telescópio de alinhamento. Alguns comentários sobre a técnica de utilização deste telescópio e sobre os erros cometidos serão feitos na próxima seção. Uma verificação auxiliar bastante útil da axilidade do impacto era o ruído da batida entre o martelo e a viga: com um alinhamento bem feito o ruído era "seco" e o martelo recuava sem oscilações laterais, enquanto que, com um mau alinhamento, o ruído era diferente (espirrado) e o recuo do martelo apresentava oscilações laterais.

Após o alinhamento, a distância entre o martelo e um esbarro fixo era ajustada, para que tivéssemos o impulso desejado. Este impulso era calculado em função desta distância como:

$$I_n = Mv = M \arcsen \frac{d}{l} \sqrt{Gl}.$$

O domínio da técnica de soltar o pêndulo exige algum treino, mas é bastante simples. Usamos um fio preso ao centro de gravidade do martelo, puxando-o manualmente até encostá-lo - no esbarro fixo e soltando-o após ter ficado completamente em repouso. Com este processo manual evitamos qualquer interferên

-cia magnética no sinal do acelerômetro e simplificamos o sistema.

Após serem feitas as leituras desejadas, fotografávamos as telas dos osciloscópios. O processo fotográfico é bastante econômico (aproximadamente Cr\$0,15 por foto, preço de janeiro de 77), e nos proporcionou um registro completo das experiências para verificações posteriores. Assim pudemos conferir resultados e checar a repetição do fenômeno. Outra grande vantagem do registro fotográfico é permitir que façamos menos leituras ao mesmo tempo, o que diminui a probabilidade de erros do operador.

De grande importância nas medidas de fenômenos transitórios é o disparo (Trigger) do instrumental de medidas. Todos os nossos instrumentos eram disparados pelo começo do sinal de aceleração, evitando-se assim erros devidos a diferentes inícios nas várias medidas.

Todas as irregularidades ocorridas durante as medições eram anotadas para conferência posterior.

2.3 - CALIBRAGEM E ERROS:

A calibração das leituras de deformação era feita provocando-se um desbalanceamento na ponte de Weatstone equivalente a 2.000 $\mu\epsilon$. Como calibrador usávamos uma resistência de precisão. O "Gagefactor" dos extensômetros (especificado pela fábrica) era suposto verdadeiro. Além da calibragem especificada pelo fabricante do indicador de deformações, foi feita uma viga de teste para checar seu comportamento. Submetida a um momento fletor conhecido, nos deu uma diferença de 0,5% entre as deformações calculadas teoricamente e as medidas. Acreditamos que apenas os erros normais do instrumento tenham influido no resul-

-tado das deformações de flexão, já que a leitura dos valores máximos, sendo digital, praticamente elimina os erros do operador. As especificações do aparelho preveem $\pm 0,25\% \pm 1$ dígito de precisão. Durante a execução dos testes o indicador de deformações era considerado zerado entre $\pm 0,3 \mu\epsilon$.

Os osciloscópios foram completamente calibrados antes do início da pesquisa e foram rechecados, usando-se as voltagens de referência disponíveis no 564 e no 51B00 Disa, pelo menos cinco vezes durante a execução dos testes. Não foram notadas variações sensíveis nos amplificadores verticais. As bases de tempo foram calibradas contra a frequência da rede e também não apresentaram variações no decorrer da pesquisa. Além disto a base de tempo do 5103N foi testada usando-se um freqüencímetro padrão, e apresentou um erro máximo de 3%, o que está dentro das especificações do aparelho. Acreditamos que $\pm 3\% \pm 0,1$ divisão da tela seja um limite válido para os erros cometidos com os osciloscópios.

O acelerômetro também foi recalibrado várias vezes durante a execução dos testes. Para evitar-se superposição de erros, a calibração era feita usando-se o conjunto acelerômetro + pre-amplificador + osciloscópio. O processo consistia em colocar-se o acelerômetro sobre o pequeno vibrador do pre-amplificador B e K 1606, e, mantendo sua amplitude em 1 G, ajustar a sensibilidade do pre-amplificador 2622 para lermos 10 mv na tela do osciloscópio. O oscilador do 1606 vibra senoidalmente na frequência da rede. Possui um pequeno cilindro com uma esfera dentro, que, ao atingir amplitudes de aceleração superiores a 1 G, choca-se com ele. O fabricante do aparelho garante uma precisão de 10% para calibrações auditivas [13]. cremos que usando-se um

osciloscópio (ao atingirmos 1 G nota-se claramente que um ruído superpõe-se ao sinal senoidal, devido ao choque esfera-cilindro) possamos conseguir uma precisão bem melhor, apesar de não possuirmos dados quantitativos. As variações da sensibilidade do acelerômetro foram pequenas ($0,3 \text{ pC/G} = 1,6\%$).

Outra fonte de erros nas medidas de aceleração foi a baixa frequência superior de corte do pre-amplificador 2622. Cálculos teóricos [14] preveem a necessidade de um limite superior de frequências de 30 kHz para durações de impacto da ordem de 0,4ms. Como no 2622 este corte superior de frequências se dá em 10 kHz cremos que houve uma vibração eletrônica superposta ao sinal de aceleração [15, 16, 17]. Podemos observar estas vibrações nas curvas de aceleração versus tempo dos tres martelos usados na pesquisa, figuras 15, 16 e 17. Se admitirmos um aspecto de arco de seno para estas curvas verificamos que as oscilações eletrônicas são proporcionalmente mais importantes para os tempos de impacto mais curtos. Para obtermos os impulsos aplicados à viga, (que chamamos de "Impulsos medidos, I_m "), integramos numericamente estas curvas de aceleração versus tempo e multiplicamos o resultado pela massa do martelo usado. I_m deve ser igual a variação da quantidade de movimento do martelo: [18]

$$I_m = \int_{t_0}^{t_1} F \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} (MV) \, dt = MV \Big|_{t_0}^{t_1} = M\Delta V$$

Como o coeficiente de restituição C_r entre os martelos e a viga está no intervalo $0,8 < C_r \leq 1,0$ (o choque é quase perfeitamente elástico) devemos ter $1,8V \leq \Delta V \leq 2,0V$. Logo deveríamos ter os valores de I_m entre:

$$1,8 \text{ MV} < I_m < 2,0 \text{ MV}$$

Entretanto ao calcularmos I_m para o martelo de menor

massa (cujo tempo de impacto é da ordem de 0,4ms) chegamos a obter $I_m = 2,3$ MV. Na tabela 3 do próximo capítulo encontramos a razão I_m/MV para todas as medidas feitas. Considerando as observações acima estimamos, em, no máximo 25% o erro cometido no cálculo de I_m para os tempos de impacto da ordem de 0,4ms. Os valores de I_m para os tempos de impacto maiores tiveram erros sensivelmente menores.

As leituras de deslocamento foram as mais difíceis e precárias. Os transdutores do tipo capacitivo são altamente não lineares na faixa em que necessitávamos usá-los. Ver curvas de calibração na figura 24. Para o levantamento destas curvas necessitávamos de duas pessoas: - uma ficava em frente ao osciloscópio 564 (para evitar erros de paralaxe na leitura) enquanto a outra deslocava a viga, estaticamente, até que o traço na tela se movesse de 0,2 divisões. Com auxílio do microscópio, medíamos a distância correspondente em mm. Desta forma o sistema como um todo era calibrado. Após o levantamento da curva deslocamento versus nº de divisões, eram feitos os testes dinâmicos, e, pelas fotografias, medíamos os deslocamentos correspondentes às divisões, usando-se a curva de calibração. É claro que neste processo há muitos erros somando-se: curva de calibração dos transdutores, eventuais diferenças entre comportamento estático e dinâmico, erros de leitura e variações no dielétrico (ar) entre a viga e o transdutor. Não nos foi possível precisar rigorosamente os erros, mas uma estimativa de $\pm 20\%$, baseada no desvio padrão médio das medidas, nos parece coerente com a realidade. Este número, se não nos garante uma precisão muito grande, - pelo menos justifica a validade física dos resultados expostos no capítulo 3.

Foi usado um telescópio de alinhamento na calibração da axialidade do impacto entre o pêndulo e a viga, com o qual a justávamos a bissetriz do ângulo dos fios de suporte do martelo com o centro da seção reta da viga. Este ajuste é preciso dentro de $\pm 0,01\text{mm}$. O plano de vibração do pêndulo também era ajustado com o auxílio do telescópio. O maior ângulo medido entre este plano e o plano das vigas em teste foi de cerca de $30'$.

Todos os instrumentos usados na tese foram calibrados pelo menos duas vezes durante o correr da pesquisa, seguindo-se cuidadosamente as especificações dos respectivos manuais de instrução.

2.4 - PROBLEMAS E SOLUÇÕES SURTIDOS E SURGERIDOS:

O primeiro problema sério surgido durante a execução da pesquisa foi a confiabilidade no sinal do acelerômetro. Inicialmente o acoplamos diretamente ao módulo amplificador 3A10 da Tektronix, que, segundo o fabricante, dispensaria o uso de pre-amplificador. No entanto, o sinal lido na tela do osciloscópio, em vez de representar a curva da aceleração versus tempo, nos levava a medir apenas a descarga do capacitor equivalente do sistema! O aspecto da curva - uma exponencial decrescente - nos alertou para o problema. Este tornou-se evidente quando colocamos um capacitor em paralelo na entrada do osciloscópio e mudamos a leitura do tempo de impacto, o que era uma impossibilidade física. O problema foi solucionado colocando-se um pre-amplificador B e K entre o acelerômetro e o osciloscópio.

Outro problema, que persistiu até o fim da pesquisa, foi o de uma (suposta) oscilação eletrônica superposta ao sinal de aceleração. Uma solução proposta para este problema seria u

-tilizar-se um pre-amplificador de maior faixa útil de frequências. No entanto é importante frisar a necessidade de filtração dos ruídos que acompanham as frequências superiores. Todos os pre-amplificadores disponíveis no laboratório foram testados e apresentaram grande quantidade de ruídos superpostos ao sinal de aceleração.

O aterramento do sistema também constituiu-se num sério problema. Uma ótima ligação terra teve que ser providenciada para que pudessemos eliminar o constante ruído de 60 Hz superposto a todos os sinais. Como dado interessante, para exemplificar a complexidade deste problema, muitas horas foram empregues para descobrir-se que uma lâmpada fluorescente, fixada ao suporte da vigã (que não estava aterrado), era a responsável pelo comportamento totalmente diverso do esperado, dos sinais de deformação.

Para diminuir a possibilidade do rompimento accidental das ligações dos extensômetros, usamos um pingo de araldite sobre os contatos e não os ligamos diretamente aos cabos de leitura (foram usados pontos intermediários de soldagem). O ponto crítico na utilização de extensômetros é sua colagem. Usamos araldite comercial para fixá-los às vigas, tendo o cuidado de manter a camada de cola a mais fina possível.

Inicialmente os fios que seguravam o martelo eram de nylon (linhas de pescar), mas apresentaram grande fluência. Optamos pelo uso de linha de costura comum (de algodão) nº10, que apresentou excelentes resultados.

O maior problema enfrentado durante a execução da pesquisa foi o projeto e construção de uma fonte para alimentação dos módulos Tektronix da série 3. Esta fonte seria necessária

para que pudéssemos medir também as tensões normais despertadas pelos impactos. O projeto não se tornou operacional, mas alguns resultados qualitativos daquelas tensões são apresentados no capítulo 3.

As vibrações do prédio do laboratório também causaram problemas. Constatamos que o ruído de aceleração aumentava proporcionalmente a intensificação do tráfego na Rua Marques de São Vicente. A solução encontrada foi reisolar o sistema, fazendo-se uma análise espectral das vibrações induzidas e mudando-se a frequência natural de vibração da base da viga. As curvas de vibração da base e do chão do laboratório, antes e depois de reisolamento, estão na figura 10.

Algumas práticas que se mostraram úteis durante a execução dos testes:

Deixar aquecer o instrumental pelo menos 20 minutos (evita variações nas leituras).

Projetar cuidadosamente a disposição da aparelhagem e manter a área de pesquisa sempre arrumada (diminui a fadiga do operador e aumenta o rendimento do trabalho).

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES:

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados desta pesquisa.

Na tabela 2, no fim deste capítulo, são apresentadas as constantes das vigas 1 e 2.

Na figura 11 temos a relação entre as máximas deformações de flexão e os impulsos aplicados à viga 2. No eixo vertical as deformações estão dadas em μe e no eixo horizontal temos o impulso adimensional definido pela razão I_n/I_p . I_n representa o impulso nominal aplicado ($I_n = MV$, massa x velocidade do mar-

-telo) e I_p , o impulso padrão da viga, é definido como:

$$I_p = P_{cr} \times \tau_{1f} = \frac{\pi^3}{7,030} \sqrt{\rho EI}$$

Estas definições do impulso padrão e do impulso nominal visam facilitar os cálculos das tensões de flexão por engenheiros que não possuam o sofisticado instrumental necessário para medir os impulsos reais aplicados à viga. O impulso padrão, sendo o produto da carga crítica de Euler à flambagem pelo primeiro período natural de flexão da viga, só exige para o seu cálculo o conhecimento da massa por unidade de comprimento, do módulo de elasticidade e do menor momento de inércia da seção reta. O desvio padrão médio das medidas de deformação foi

%. Os 50 pontos experimentais definem uma relação linear entre $\mu\epsilon$ e I_n/I_p cuja equação é:

$$\mu\epsilon = 350 \frac{I_n}{I_p} \quad (1)$$

O desvio médio entre os pontos experimentais e a reta foi de 5,0%.

As tensões de flexão podem facilmente ser calculadas usando-se a equação (1) e aplicando-se a lei de Hooke:

$$\sigma = 350 \times 10^{-6} \frac{I_n}{I_p} \cdot E \quad (2)$$

Na figura 12 temos a relação entre as máximas deformações de flexão e os impulsos medidos, isto é, os impulsos realmente aplicados à viga e obtidos pela integração numérica das curvas aceleração versus tempo, como será explicado mais abaixo. No eixo horizontal temos a razão entre os impulsos medidos, I_m , e o impulso padrão da viga, I_p . No eixo vertical temos as deformações em $\mu\epsilon$. Conforme pode ser constatado pelo gráfico a relação também é linear e tem por equação

$$\mu_e = 187 \frac{I_m}{I_p} \quad (3)$$

Como já foi discutido na seção 2.3 sabemos que:

$$I_m \approx 1,9 I_n \quad (4)$$

Substituindo (4) em (3) temos:

$$\mu_e \approx 355 \frac{I_n}{I_p} \quad (5)$$

Comparando as equações (5) e (1) vemos que justifica-se plenamente a proposição de usarmos o impulso nominal I_n para os cálculos das deformações de flexão. É importante notar que ao traçarmos o gráfico da figura 12 os pontos experimentais obtidos com o martelo de maior massa foram considerados mais precisos. (ver seção 2.3).

Para os tres martelos usados temos, na figura 13, a relação entre a duração do impacto e o ângulo do pêndulo. No eixo vertical temos o tempo de contato entre o martelo e a viga, T , em, ms. No eixo horizontal marcamos o ângulo de lançamento do martelo, θ , em rd. Observamos que para os ângulos maiores que 0,050 rd a duração do impacto é praticamente constante, enquanto que um ligeiro aumento nesta duração é constatado para ângulos menores. Lyon e Zable previram esta constância no tempo de impacto, como também que martelos mais pesados tenham um contato mais longo com a viga, o que constatamos em nossa pesquisa. Segundo estes pesquisadores o aumento no tempo de contato para ângulos menores seria explicado por amortecimentos entre a viga e o martelo.

Na figura 14 temos a relação entre as máximas forças e o ângulo do pêndulo para os tres martelos de massas diferentes. No eixo vertical temos a razão entre $\overline{P_{max}}$ (a média dos picos de força de impacto) e P_{cr} (a carga de Euler a flambagem). No eixo horizontal temos θ - o ângulo de lançamento do pêndulo em rd.-

P_{max} foi obtido experimentalmente medindo-se os picos das curvas de aceleração versus tempo, e multiplicando-os pela massa dos martelos. A relação é linear, conforme o esperado para ângulos pequenos de lançamento [5].

Nas figuras 15, 16 e 17 temos curvas de aceleração versus tempo, típicas, para os tres martelos usados. No eixo vertical temos a amplitude de aceleração em G (aceleração da gravidade = $9,80 \text{ m/s}^2$) e no horizontal o tempo em ms. No capítulo 2 são comentadas as técnicas de medição e de calibragem do osciloscópio. Os picos de aceleração necessários para a execução da figura 14, eram obtidos medindo-se diretamente as fotografias. Para a obtenção do impulso medido (I_m), usavamos a regra de Simpson para integração numérica. Os intervalos foram divididos em 12 partes conforme vê-se nas figuras. A regra de Simpson é bastante precisa. [19].

$$\int_a^b f(x) dx = \left[\frac{(b-a)}{6n} \right] \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + \left(\frac{b-a}{n}\right)i\right) + \right. \\ \left. + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ \Delta i=1}}^{2n-1} f\left(a + \left(\frac{b-a}{2n}\right)i\right) \right] - \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \frac{d^4 f(\delta)}{dx^4}$$

2n pontos entre a e b $a \leq \delta \leq b$

Para tornar o processo de integração mais rápido foi desenvolvido um programa numa calculadora HP55, evitando-se assim a necessidade de perfurar cartões. O aspecto das curvas de aceleração permanecia constante com a variação do ângulo de lançamento, sendo função apenas da massa dos martelos.

Nas figuras 18 a 23 temos curvas de deformação versus tempo, típicas. O aspecto destas curvas permaneceu constante com a variação dos martelos e com o ângulo de lançamento do pêndulo. O pico de deformação, atingido após tres "ciclos", também é um comportamento típico da viga. Esta constância no aspecto

da curva (deformação x tempo) levou-nos a concluir que não há importantes variações na composição harmônica da resposta.

Na figura 24 temos as curvas de calibração dos transdutores de deslocamento. No eixo vertical temos o deslocamento entre a viga e o transdutor, em mm, e no eixo horizontal temos o número de divisões da tela do osciloscópio 564 correspondente. "DD" e "DE" significam transdutores Pu3A e 51D11, respectivamente. Conforme vemos no gráfico o comportamento dos transdutores é sensivelmente não linear na faixa em que necessitavam ser usados e também depende da "distância estática," isto é, da distância entre a viga e o transdutor quando aquela está em repouso. (ver seção 2.3) Para a execução da figura 20 o amplificador do osciloscópio e o conversor de reatância foram regulados para um ganho de 2V/div. Quando necessário amplificações diferentes multiplicávamos o número de divisões pela razão entre as amplificações. Convencionamos que a aproximação entre a viga e o transdutor significaria divisões positivas. Note-se que "DD" e "DE" possuem o eixo horizontal simétrico para facilitar a leitura. É importante frisarmos que só foram usados transdutores capacitivos com este comportamento não linear por ausência de outros transdutores disponíveis em nosso mercado.

Na figura 25 temos os máximos deslocamentos em função dos impulsos nominais aplicados à viga. No eixo horizontal temos a razão entre os impulsos nominais e o impulso padrão. No eixo vertical temos o deslocamento adimensional $\bar{Y}_{max}/h$. Apesar da grande dispersão podemos dizer que constatamos uma relação linear entre $\bar{Y}_{max}/h$ e I_n/I_p de equação:

$$\frac{\bar{Y}_{max}}{h} = \frac{I_n}{I_p} \times 1,85 \quad (6)$$

Este comportamento é coerente com a equação (1)

Nas figuras 26 e 28 temos respostas típicas deslocamentos reais da viga versus tempo para um impulso fixo. Na figura 27 observamos a resposta de deslocamento real da viga versus impulso para um tempo fixo. No eixo horizontal temos o comprimento da viga, em mm, e no eixo vertical os deslocamentos laterais também em mm. Na figura 26, ("DD pico inferior" significa pico de afastamento entre a viga e o transdutor "DD") temos uma predominância do primeiro modo natural de vibração para os impulsos adimensionais menores, mas para $I_n/I_p = 0,441$ há uma sensível influência do segundo modo. Não podemos afirmar que isto caracterize uma diferença marcante de comportamento, já que o pico de deslocamento para $I_n/I_p = 0,441$ foi obtido num tempo diferente dos outros. Entretanto, conforme pode ser visto na figura 27, esta grande influência do segundo modo de vibração para este impulso parece permanecer constante no tempo. Na figura 28 vemos que o segundo modo é relevante para todos os impulsos. ("DD pico superior" significa máxima aproximação entre a viga e o transdutor).

Os deslocamentos da viga não apresentaram um comportamento tão repetitivo (em função do ângulo de lançamento e da massa do martelo) como as deformações.

Baseados nos resultados experimentais expostos acima não concluímos pela existência de nenhuma carga crítica nos intervalos pesquisados.

Nas tabelas 3 e 4 apresentamos uma síntese de todos os resultados experimentais da pesquisa.

Nas figuras 29 e 30 apresentamos uma sequência completa dos testes feitos para acharmos cada ponto experimental. Na figura 29 temos as fotografias da tela do osciloscópio 5103N, com as medidas de aceleração e de deformação. Note-se a variação da

varredura horizontal. Na figura 30 são mostradas as medidas de deslocamento.

4. CONCLUSÕES:

Nesta pesquisa foi feito um estudo experimental das vibrações flexurais de uma viga de seção reta constante, em balanço, causadas por impactos axiais. Concluimos, no intervalo pesquisado, que:

1 - A resposta da viga aos impactos é um fenômeno repetitivo.

2 - Os impulsos são parâmetros importantes no problema. Os impulsos nominais aplicados à viga, definidos como o produto da massa pela velocidade do martelo, podem ser usados nos cálculos. Não é necessário medir os impulsos reais por integração da curva força versus tempo.

3 - Existe uma relação linear entre as máximas deformações de flexão e os impulsos nominais aplicados, de equação:-
 $\mu_e = 350 I_n / I_p$.

4 - Há uma relação linear entre as máximas tensões de flexão e os impulsos nominais aplicados à viga, de equação:-
 $\sigma = 350 \times 10^{-6} (I_n / I_p) E$.

5 - Existe uma relação linear entre as máximas deformações de flexão e os impulsos nominais aplicados à viga, de equação:- $\bar{Y}_{max} / h = 1,85 (I_n / I_p)$.

6 - A curva deformação versus tempo tem uma composição harmônica constante, independente da massa e da velocidade dos martelos.

7 - A duração do impacto é praticamente constante para um martelo fixo, aumentando ligeiramente nos ângulos menores de lançamento do pêndulo.

8 - Martelos de massas maiores tem uma duração de impacto mais longa.

9 - Há grande influência do segundo modo natural de vibração nos deslocamentos laterais da viga.

10 - Não foi constatada a existência de nenhuma carga crítica dinâmica no intervalo pesquisado.

VISTA DO CONJUNTO

VISTA DO CONJUNTO

ESQUEMA DO APARATO EXPERIMENTAL

TAMPA DA BASE

TAMPA DA BASE

ENGASTE DA VIGA

SUPORE DO MARTELO

MEDIÇÃO DO 1º PERÍODO NATURAL DE VIBRAÇÃO FLEXURAL

- fig. 8 -

MEDIÇÃO DO FATOR DE AMORTECIMENTO

- fig. 9 -

- fig.10 -

- fig. 11 -

- fig. 12 -

+ - M = 1.172 kg
 • - M = 0.204 kg
 Δ - M = 0.571 kg

DURAÇÃO DO IMPACTO VERSUS ÂNGULO DO PÊNDULO

- fig. 13 -

ACELERAÇÃO VERSUS TEMPO, $M = 0.204 \text{ kg}$.

ACELERAÇÃO VERSUS TEMPO, $M = 0.5714 \text{ kg}$.

ACELERAÇÃO VERSUS TEMPO, $M = 1.172 \text{ kg}$.

- fig. 18 - $M = 0.204 \text{ kg}$ - $d = 150 \text{ mm}$

- fig. 19 - $M = 0.5714 \text{ kg}$ - $d = 50 \text{ mm}$

- fig. 20 - $M = 1.172 \text{ kg}$ - $d = 25 \text{ mm}$

- fig. 21 - $M = 1.172 \text{ kg}$ - $d = 120 \text{ mm}$

NOTAR QUE NAS FIG. 18 A 21 AS FREQUÊNCIAS COMPONENTES DO SINAL SÃO SEMPRE AS MESMAS, VARIANDO APENAS SUA AMPLITUDE

- fig. 22 - $M = 1.172 \text{ kg}$ - $d = 40 \text{ mm}$

- fig. 23 - $M = 1.172 \text{ kg}$ - $d = 120 \text{ mm}$

NAS FIG. 22 E 23 OBSERVAMOS QUE O SINAL DE FLEXÃO INICIA-SE APÓS O TÉRMINO DO IMPULSO.

NA FIG. 22 O SINAL CENTRAL É A VIBRAÇÃO AXIAL DA VIGA.

CURVA DE CALIBRACÃO DOS TRANSDUTORES DE DESLOCAMENTO

MÁXIMOS DESLOCAMENTOS VERSUS I_n/I_p

Fig. 23

- fig.26 -

- fig.27 -

- fig.28 -

MEDIDAS DE ACELERAÇÃO E DEFORMAÇÃO

MEDIDAS DE DESLOCAMENTO

TABELA 1 - ESPECIFICAÇÃO DOS INSTRUMENTOS

1-OSCILOSCÓPIOS:

Tektronix 5103N Dual Trace Storage, com 5B12N Dual Time Base, 5A18N Dual Trace Amplifier e 5A20N Differential Amplifier; Tektronix 564 Storage, com 3B3 Time Base e 3A72 Dual Trace Amplifier; Disa Universal Indicator 51B00, com dois Reactance Converter & Amplifier.

2-MEDIDORES DE DEFORMAÇÃO:

Strain Indicator Brüel & Kjaer type 1526; Tektronix Carrier Amplifier type 3C66; Extensômetros BLH FAE-12-12S6L.

3-MEDIDORES DE ACELERAÇÃO:

Acelerômetro Brüel & Kjaer type 4333; Pré-Amplificador - Brüel & Kjaer type 2622.

4-MEDIDORES DE DESLOCAMENTO:

Transdutores de deslocamento Disa PU3A e 51D11.

5-CALIBRADORES:

Multímetro Fluke 8000A; Geradores de Sinal Tektronix - FG501 e B&K 1041; Analisador de Frequências B&K 2107 e - Gravador B&K 2305; Microscópio Carl Zeiss e Telescópio de Alinhamento Hensoldt Wetzlar.

TABELA 2- CONSTANTES DAS VIGAS

	VIGA 1	VIGA 2
h	1,010 mm	1,015 mm
b	30,238 mm	29,824 mm
ρ	0,232 kg/m	0,232 kg/m
L	0,5573 m	0,2601 m
I	$2,596 \times 10^{-12} \text{ m}^4$	$2,599 \times 10^{-12} \text{ m}^4$
A	$3,054 \times 10^{-5} \text{ m}^2$	$3,027 \times 10^{-5} \text{ m}^2$
τ_{1f}	0,351 s	0,077 s
E	$2,236 \times 10^{11} \text{ Pa}$	$2,202 \times 10^{11} \text{ Pa}$
P_{cr}	4,611 N	20,870 N
ξ	0,002	0,002
I_p	1,618 Ns	1,607 Ns
τ_{1a}	----	0,21 ms

363	398	413	428	443	458	473	488	503	517	533	547	562	577	592	607
397	412	427	442	457	472	487	502	516	532	546	561	576	591	606	621
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
204	204	204	204	204	204	204	204	204	204	204	204	204	204	204	204
150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150
1680	1680	1680	1680	1680	1680	1680	1680	1680	1680	1680	1680	1680	1680	1680	1680
089	089	089	089	089	089	089	089	089	089	089	089	089	089	089	089
363	363	363	363	363	363	363	363	363	363	363	363	363	363	363	363
074	074	074	074	074	074	074	074	074	074	074	074	074	074	074	074
046	046	046	046	046	046	046	046	046	046	046	046	046	046	046	046
15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
218	218	218	218	218	218	218	218	218	218	218	218	218	218	218	218
436	436	436	436	436	436	436	436	436	436	436	436	436	436	436	436
871	871	871	871	871	871	871	871	871	871	871	871	871	871	871	871
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
418	418	418	418	418	418	418	418	418	418	418	418	418	418	418	418
24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
1809	1809	1809	1809	1809	1809	1809	1809	1809	1809	1809	1809	1809	1809	1809	1809
118	118	118	118	118	118	118	118	118	118	118	118	118	118	118	118
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36
34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34
155	155	155	155	155	155	155	155	155	155	155	155	155	155	155	155
370	370	370	370	370	370	370	370	370	370	370	370	370	370	370	370
096	096	096	096	096	096	096	096	096	096	096	096	096	096	096	096
209	209	209	209	209	209	209	209	209	209	209	209	209	209	209	209

NO CONSIDERADO

NO CONSIDERADO

TABELA 3

FOTOS	1	32	64	93	125	147	169	191	213	237	264	288	315	338	363	382
RÉGUA	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
M (kg)	1.172	1.172	1.172	1.172	1.172	.204	.204	.204	.204	.204	.204	.204	.204	.204	.204	.204
d (mm)	100	150	200	250	431	19,5	30	40	60	100	150	200	250	300	400	150
l (mm)	1666	1666	1666	1666	1666	1680	1680	1680	1680	1680	1680	1680	1680	1680	1680	1680
$\theta_0 = \arcsen d/l(\text{rd})$	.060	.090	.120	.151	.262	.012	.018	.024	.036	.060	.089	.119	.149	.187	.240	.089
$V = \theta_0 \sqrt{g l}$ (m/s)	.243	.364	.486	.609	1.057	.047	.072	.097	.145	.242	.363	.484	.606	.728	.975	.363
$I_n = MV$ (Ns)	.284	.427	.570	.713	1.239	.010	.015	.020	.030	.049	.074	.099	.124	.149	.199	.074
I_n / I_p	.176	.264	.352	.441	.766	.006	.009	.012	.018	.031	.046	.061	.077	.092	.124	.046
Nº TESTES acel.	17	18	17	17	6	24	24	24	24	23	26	26	26	15	14	15
$\overline{\text{div.}}$	4.53	2.79	3.61	2.21	4	2.52	3.96	2.25	3.39	2.82	2.08	2.92	3.77	4.64	2.47	2.18
$\overline{G}$ (g)	90.6	139.7	180.3	220.6	400	50.42	79.17	112.5	169.38	218.17	416.15	584.23	753.85	928.00	1235.71	436.00
$\overline{P_{\max.}}$ (N)	1040.6	1604.8	2070.8	2533.6	4594.2	100.8	158.3	224.3	338.6	436.2	832	1168	1507	1865.3	2470.4	871.7
$\hat{\sigma}_{ac} \%$	2.0	.8	.7	1.1	0	4.0	4.0	3.1	2.7	1.4	2.4	2.7	2.1	1.3	2.8	1.8
$\overline{P_{\max.}} / P_{cr}$	225.7	348	449.1	549.5	996.4	4.8	7.6	10.8	16.2	20.9	39.9	56	72.2	88.9	118.4	41.8
Nº TESTES flexão	52	48	48	45	26	35	38	39	41	43	41	45	40	23	24	24
$\overline{ME}$	95.1	145.9	200.5	259.8	446	2.50	3.59	4.34	6.27	10.39	22.38	22.46	26.20	33.52	42.49	18.09
$\hat{\sigma}_{ME} \%$	.7	.6	.5	.4	2.7	10.4	10.0	10.6	10.7	8.0	7.3	9.9	8.8	5.5	5.3	11.8
Nº TESTES pulso	17	18	17	17	6	17	17	18	14	18	17	20	21	10	13	10
T (ms)	1	1	1	1	1	.4	.4	.38	.38	.38	.38	.37	.38	.36	.36	.36
$\hat{\sigma}_T \%$	0	0	0	0	0	.8	0	0	2.3	0.9	1.7	2.9	3.5	1.4	2.0	3.4
$\int_0^T F dt = I_m(Ns)$						.023	.032	.045	.066	.109	.149	.209	.264	.308	.433	.155
Foto da Integração Regra de Simpson	24	55	86	113	125	151	172	194	214	239	264	291	318	338	354	370
I_m / I_p						.014	.020	.028	.041	.068	.093	.130	.164	.192	.269	.096
I_m / I_n						2.33	2.22	2.33	2.28	2.19	2.02	2.13	2.13	2.09	2.17	2.09
OBSERVAÇÕES																

NÃO CONSIDERADO

2	2	2	2	2	2	2	2
814	.5714	1.172	1.172	1.172	1.172	1.172	1.172
20	350	115	140	160	180	200	230
86	1686	1686	1686	1686	1686	1686	1686
91	.209	.068	.083	.095	.107	.119	.137
776	.850	.277	.338	.386	.435	.483	.556
44	.486	.325	.396	.453	.510	.566	.652
76	.302	.202	.246	.282	.317	.352	.406

-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-

6	16	16	16	16	16	16	16
4	107.4	72.2	83.2	99.9	114.6	120.8	144.6

6	6.4	4.0	3.8	1.5	2.8	5.0	4.5
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-

-	-	-	-	-	-	-	-
---	---	---	---	---	---	---	---

-	-	-	-	-	-	-	-
---	---	---	---	---	---	---	---

TABELA 3

N

F

N

N

Fo
Re

TABELA 4

FOTOS	D1/ D8	D9/ D16	D17/ D24	D25/ D32	D33/ D40	D41/ D48	D49/ D56	D57/ D64	D65/ D72	D73/ D80	D81/ D88	D89/ D96	D97/ D104	D105/ D112	D113/ D120	D121/ D128	D129/ D136	D143/ D144	D153/ D152	D161/ D160	D169/ D176
RÉGUA	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
M(kg)	1.172	1.172	1.172	1.172	1.172	1.172	1.172	1.172	204	204	204	204	204	204	204	204	5714	5714	5714	5714	5714
d (mm)	25	35	50	65	85	120	175	280	15	25	50	80	125	175	240	380	25	50	80	120	160
In / Ip	.044	.062	.088	.114	.150	.211	.308	.441	.005	.008	.015	.024	.038	.054	.074	.108	.021	.043	.069	.103	.137
DD-PICO SUPERIOR div.	1.68	.78	1.11	.82	1.13	1.04	.94	1.33	.56	.43	.59	.70	.92	1.24	-	-	-	.79	1.35	.86	1.42
DD-PICO SUPERIOR mm	.08	.07	.10	.15	.30	.56	.52	.68	.06	.04	.06	.07	.09	.11	-	-	-	.07	.23	.15	.24
DD-PICO SUPERIOR G %	19.2	11.7	10.3	18.5	16.7	16.4	26.2	7.6	12.8	20.1	5.8	10.4	9.8	10.9	-	-	-	18.1	10.8	17.4	21.6
DD-PICO SUPERIOR t (ms)	13	13	13	13	13	13	13	13	13	16	52	52	16	52	-	-	-	52	52	14	52
DD-PICO SUPERIOR DE div.	-.5	-.8	-1.2	-.6	-.2	-.2	-.5	-.8	0	0	0	-.2	-.6	-.7	-	-	-	-.7	0	-.8	-.7
DD-PICO SUPERIOR DE mm	-.01	-.06	-.08	-.08	-.05	-.12	-.34	-.62	0	0	0	.01	.04	.05	-	-	-	-.05	0	-.12	-.10
DD-PICO INFERIOR div.	1.54	.75	1.13	.79	.80	.57	.61	.63	.53	.46	.52	.73	.75	1.34	-	-	-	.73	1.21	.82	1.23
DD-PICO INFERIOR mm	.07	.07	.10	.15	.32	.40	.51	.52	.05	.04	.05	.07	.07	.12	-	-	-	.07	.23	.15	.24
DD-PICO INFERIOR G %	19.4	12.9	8.9	15.3	17.7	12.7	15.1	7.2	13.0	29.4	12.6	6.2	16.1	10.2	-	-	-	21.7	8.8	20.5	20.1
DD-PICO INFERIOR t (ms)	46	46	46	46	46	46	46	22	46	60	21	21	58	21	-	-	-	21	21	21	21
DD-PICO INFERIOR DE div.	.5	0	0	0	.2	.3	.3	-1.0	.1	.1	0	-.1	-.4	-.5	-	-	-	0	-.4	.4	.6
DD-PICO INFERIOR DE mm	.1	0	0	0	.06	.18	.18	-.44	.2	.01	.01	.01	-.03	-.04	-	-	-	0	-.06	.06	.08

DE-PICO SUPERIOR	134	125	158	105	118	104	111	190	38	31	40	47	50	24	26	106	103	173	90
div																			
DE-PICO SUPERIOR	134	125	158	105	118	104	111	190	38	31	40	47	50	24	26	106	103	173	90
mm	87	08	71	16	25	24	27	84	03	02	03	03	03	03	03	03	03	03	03
DE-PICO SUPERIOR G %	8.6	5.3	9.6	10.1	14.2	11.0	15.6	6.7	11.9	30.6	13.4	10.1	6.4	8.3	-	18.0	6.0	9.2	15.1
DE-PICO SUPERIOR t (ms)	19 (7)	7 (10)	7	7	7 (24)	21	20 (46)	7 (12)	10	21	58	58	8	58	-	58	58	58 (20)	58
DE-PICO SUPERIOR DD div.	.2	.2	.2	.2	.3	.5	.2	.3	.2	.2	.4	.2	0	0	-	.1	.8	.2	.1
DE-PICO SUPERIOR DD mm	.01	.01	.01	.03	.11	.32	.13	-.23	.01	.01	.04	.01	0	0	-	.20	.13	-.03	.02
DE-PICO INFERIOR div.	1.23	1.00	1.39	1.00	.83	.69	.71	.90	.38	.33	.43	.66	.94	1.31	-	.89	.96	1.04	1.38
DE-PICO INFERIOR mm	.06	.07	.10	.16	.27	.51	.53	.74	.03	.02	.03	.04	.06	.09	-	.06	.15	.16	.23
DE-PICO INFERIOR G %	12.1	5.2	1.8	6.5	17.4	11.2	11.7	0	11.9	32.5	21.9	17.6	6.9	9.5	-	13.4	6.4	6.0	12.0
DE-PICO INFERIOR t (ms)	51	39 (22)	39	39	52 (38)	52	52 (104)	4	52	52	16	28	52	27	-	27	27	27 (54)	27
DE-PICO INFERIOR DD div.	.2	0	0	0	.2	.4	.2	-.12	.2	.3	0	0	-.2	0	-	.1	-.5	0	.2
DE-PICO INFERIOR DD mm	.20	0	0	0	.07	.31	.15	-.64	.01	.02	0	0	-.01	0	-	.20	-.09	0	.03

5 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 - Hoff, N.J. - "The Dynamics of the Buckling of Elastic Columns", Journal of Applied Mechanics, Vol. 18, March 51, pgs. 68-74 (Trans. ASME, Series E, Vol. 73).
- 2 - Sevin, E. - "On the Elastic Bending of Columns Due to Dynamic Axial Forces, Including the Effects of Axial Inertia", Journal of Applied Mechanics, Vol. 27, March 60, pg. 125-131 (Trans. ASME, Series E, Vol. 82).
- 3 - Lindberg, H.E. - "Impact Buckling of a Thin Bar", Journal of Applied Mechanics, Vol. 32, June 65, pg. 315-322 (Trans. ASME, Series E).
- 4 - McIvor, I.K. e Bernard, J.E. - "The Dynamic Response of Columns under Short Duration Axial Loads" - Journal of Applied Mechanics, Vol. 40, September 73, pg. 688-692 (Trans. ASME, Series E).
- 5 - Lyon, R.L. e Zable, J.L. - "Impact-Force Source and Impact Force Calibrator", Experimental Mechanics, Vol. 13, June 73, pg. 257-264.
- 6 - Shigley, J.E. - "Mechanical Engineering Design", McGraw Hill 1974, cap. 7.
- 7 - Mark's - "Mechanical Engineers Handbook", McGraw Hill 1958, pg. 3-40.
- 8 - Vaughan, J. - "Strain Measurements", Brüel & Kjaer 1975.
- 9 - Arthur, K. - "Transducer Measurements", Tektronix 1971.
- 10 - _____ "DLH", Strain Gauge Handbook" (sem data).

- 11 - Timoshenko, S; Young D.H. e Weaver, W. - "Vibrations Problems in Engineering", 4th - Ed. John Wiley & Sons 1974 - cap. 5.
- 12 - Vierk, R.K. - "Vibration Analysis" - Intext 1967 - cap.3.
- 13 - _____ - "Accelerometers, Instructions and Applications", Brüel & Kjaer 1972, cap. 6.
- 14 - Broch, J.T. - "Mechanical Vibrations and Shok Measurements" Brüel & Kjaer 1972, cap.6.
- 15 - Kittelsen, K.E. - "Measurement and Description of Shock", Brüel & Kjaer Tech. Review nº3, 1966.
- 16 - Olesen, H.P. - "Frequency Analysis of Single Pulses" - Brüel & Kjaer Tech.Review nº3, 1969.
- 17 - Broch, J.T. e Olesen, H.P. - "On the Frequency Analysis of Mechanical Shocks and Single Impulses" - Brüel & Kjaer Tech. Review nº3, 1970.
- 18 - McCuskey, S.W. - "An Introduction to Advanced Dynamics", Addison - Wesley 1962, cap.1.
- 19 - Carnahan, B; Luther, H.A. e Wilkes, J.O. - "Applied Numerical Methods", John Wiley 1969, cap.2.

BIBLIOGRAFIA ADICIONAL

- 1 - Timoshenko, S.P. e Goodier - "Theory of Elasticity," 3a. Ed. McGraw Hill 1969, cap. 14.

- 2 - Clough, R.W. e Penzien, J. - "Dynamics of Structures".
McGraw Hill 1975, cap. 6.
- 3 - Marin, J. - "Mechanical Behavior of Engineering Materials",
Prentice Hall 1966, cap. 5.
- 4 - Juvinat, R.C. - "Stress, Strain and Strength". McGraw Hill
1967, cap. 9, 22 e 25.
- 5 - Spotts, M.F. - "Mechanical Design Analysis" - Prentice Hall
1964, cap. 18.
- 6 - Beckwith, T.G. e Buck, N.L. - "Mechanical Measurements", -
Addison - Wesley 1965 - cap. 10, 14 e 15.