

### 3.3 - RESULTADOS DA ESTIMAÇÃO DOS MODELOS

Nesta seção 3.3 são apresentados os principais resultados relativos à estimação dos parâmetros dos modelos, enquanto que em 3.4 são apresentados os resultados em termos de capacidade preditiva e explicativa

#### 3.3.1 – JANELA DE TEMPO

Este modelo não tem parâmetros, e o único problema em sua aplicação é o tamanho da janela a empregar, que já foi comentado na seção anterior.

#### 3.3.2 – AMORTECIMENTO EXPONENCIAL DO RETORNO QUADRADO

O único parâmetro estimado para este modelo é o  $q$ , conhecido como fator de decaimento. Os resultados obtidos estão na tabela 15:

	<b>ORIGINAL</b>	<b>MODIFICADA</b>
<b>TELB</b>	0.924	0.866
<b>PETR</b>	0.824	0.894
<b>ELET</b>	0.830	0.858
<b>BBDC</b>	0.948	0.876
<b>VALE</b>	0.870	0.902
<b>BRHA</b>	0.834	0.736

**TABELA 15: Fatores de decaimento**

Pode-se notar que os valores para séries originais e modificadas diferem bastante, não se notando tendência de um ser maior que o outro. O valor médio do fator é 0,864 e este valor está razoavelmente abaixo do valor 0,94 que é recomendado para retornos

diários pelo Manual Técnico do RiskMetrics, J. P. Morgan Bank (1995), e que também foi obtido de modo a minimizar erro (ponderado para um conjunto de séries estrangeiras).

O uso de um fator de decaimento maior implica em dar mais peso às observações menos recentes. Se este fator é próximo de a um, todas as observações têm praticamente o mesmo peso, recaindo-se no modelo anterior; se ele é próximo de zero, importa apenas a última observação, sendo desprezadas todas as mais antigas. Por exemplo, se o fator é 0,94 , o peso do retorno quadrado do dia  $(t-74)$  é cerca de 1% do peso do dia  $(t-1)$  ; já para um fator 0,864 , o peso do retorno quadrado do dia  $(t-32)$  é cerca de 1% do peso do dia  $(t-1)$ .

### 3.3.3 – AMORTECIMENTO EXPONENCIAL DO RETORNO ABSOLUTO

Novamente o parâmetro é o fator de decaimento, e os valores obtidos estão na tabela 16:

	<b>ORIGINAL</b>	<b>MODIFICADA</b>
<b>TELB</b>	0.880	0.896
<b>PETR</b>	0.910	0.932
<b>ELET</b>	0.858	0.878
<b>BBDC</b>	0.862	0.912
<b>VALE</b>	0.878	0.900
<b>BRHA</b>	0.890	0.874

**TABELA 16: Fatores de decaimento**

Novamente observa-se que há diferença entre os fatores das séries originais e modificadas, com estes tendendo a ser maiores que aqueles. A média geral é 0,889 .

## 3.3.4 – GARCH (p,q)

Os modelos GARCH foram estimados sem restrições no espaço dos parâmetros. Como se pode ver na tabela 17, houve dois parâmetros negativos mas, como isto não implicou em volatilidades negativas, não foi introduzida restrição forçando os parâmetros a serem maiores que zero.

Apenas dois parâmetros  $w$  não foram significativamente diferentes de zero, num nível de 5% , e estão marcados com asterisco.

Confirmando o que já tinha sido visto no capítulo anterior, todas as séries apresentaram grande persistência, mas sempre atendendo a condição de estacionariedade.

	w	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	b	a <sub>1</sub> +a <sub>2</sub> +b
otelb	0.022	0.160		0.812	0.972
mtelb	0.017	0.125		0.852	0.977
opetr	0.006(*)	0.078		0.912	0.990
mpetr	0.005(*)	0.067		0.925	0.992
oelet	0.009	0.108		0.879	0.986
melet	0.008	0.097		0.891	0.988
obbdc	0.083	0.384		0.530	0.915
mbbdc	0.064	0.278		0.644	0.922
ovale	0.035	0.230		0.732	0.962
mvale	0.031	0.212		0.755	0.967
obrha	0.008	0.355	-0.305	0.937	0.987
mbrha	0.008	0.365	-0.316	0.938	0.987

**TABELA 17: Parâmetros dos modelos GARCH**

A persistência em séries originais e modificadas de um mesmo papel é praticamente a mesma, mas os parâmetros mudam: os parâmetros GARCH ( $\beta$ ) são maiores e os ARCH ( $\alpha$ ) são menores nas séries modificadas, indicando que a retirada de valores extremos faz com que o modelo dê menos peso aos retornos quadrados passados e mais às volatilidades passadas, na previsão da próxima volatilidade.

As séries de Brahma apresentaram um modelo diferente das demais.

## 3.3.5 – EGARCH (p,q)

Na tabela 18 estão os parâmetros estimados para este modelo, nas diversas séries. O parâmetro de assimetria foi sempre negativo, indicando um impacto maior dos retornos negativos sobre a volatilidade; para MBBDC, o parâmetro está marcado com um asterisco porque não é significativamente diferente de zero, num nível de 5% .

Novamente as séries modificadas têm coeficientes menores para o retorno passado e ligeiramente maiores para a volatilidade passada.

Novamente o comportamento das séries de Brahma, especialmente OBRHA difere das dos outros papéis.

	w	a	g	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>
otelb	-0.242	0.263	-0.110	0.939	
mtelb	-0.211	0.228	-0.110	0.943	
opetr	-0.144	0.165	-0.048	0.978	
mpetr	-0.129	0.148	-0.041	0.980	
oelet	-0.183	0.213	-0.058	0.974	
melet	-0.176	0.203	-0.052	0.975	
obbdc	-0.520	0.548	-0.062	0.843	
mbbdc	-0.464	0.490	-0.048(*)	0.852	
ovale	-0.364	0.403	-0.065	0.923	
mvale	-0.338	0.375	-0.060	0.927	
obrha	-0.514	0.551	-0.056	0.409	0.392
mbrha	-0.505	0.525	-0.059	0.776	

**TABELA 18: Parâmetros dos modelos EGARCH**

## 3.3.6 – HENTSCHEL: GARCH (1,1) GENERALIZADO

A estimação deste modelo foi bastante problemática, provavelmente pelo grande número de parâmetros a estimar. Na tabela 19 estão os resultados obtidos na estimação.

O termo independente  $w$ , assim como os parâmetros  $a$  e  $b$ , análogos aos três parâmetros do GARCH (1,1) comum, mostraram valores coerentes, sem grandes saltos.

	w	a	b	b	c	l	x
otelb	-0.115	0.094	0.628	0.254(*)	0.288	2.941	1.700
mtelb	-0.087	0.067	0.823	0.218(*)	0.274(*)	1.575	1.728
opetr	-0.106	0.118	0.980	0.360	0.053(*)	0.000(1)	0.677
mpetr	-0.064	0.070	0.864	0.408	-0.038	2.000(2)	1.174
oelet	-0.157	0.191	0.900	-0.027(*)	0.370	0.478(*)	0.558
melet	-0.087	0.106	0.940	-0.121(*)	0.352	0.431(*)	0.987
obbdc	-0.277	0.341	0.818	-0.428	0.397	0.125(*)	0.936
mbbdc	-0.192	0.198	0.854	-0.242	0.242	0.000(1)	1.289
ovale	-0.227	0.316	0.722	-0.418	0.520	1.000(2)	0.633
mvale	-0.260	0.377	0.675	-0.458	0.576	1.000(2)	0.642
obrha	-0.345	0.377	0.453	0.147	0.047(*)	0.844	1.218
mbrha	-0.408	0.437	0.426	0.206	0.004(*)	0.640	1.067

**TABELA 19: Parâmetros dos modelos de Hentschel**

Os parâmetros de assimetria variaram bastante de uma série para outra, e oito deles (marcados com asterisco) não foram significativamente diferentes de zero, sempre num nível de 5% .

O ponto mais importante a comentar, entretanto, são os expoentes do modelo, em especial o expoente  $I$ , que dá o grau da dependência autorregressiva da volatilidade. Ele assumiu valores entre zero e 2,94; os valores marcados com asterisco na tabela não são significativamente diferentes de zero; os marcados com (1) são zero por força da restrição de  $I$  não negativo; os que estão marcados com (2) foram “arbitrados”, conforme será explicado mais adiante.

O primeiro comentário a fazer quanto ao  $I$  é que o valor estimado para este expoente na série OTELB foi muito alto: as variantes dos modelos GARCH comuns na literatura são modelos que procuram diminuir o expoente 2 do modelo original, e nunca aumentá-lo.

Os erros padrão de  $I$  são muito altos: por exemplo, para as duas séries Telebrás são da ordem de 0,8 ; para as duas Eletrobrás, da ordem de 0,5 (por isto seus coeficientes não são significantes). Com uma dispersão tão grande para este parâmetro tão importante, é razoável afirmar que o modelo como um todo não funcionou bem para estas séries e que toda a tabela 19 deve ser olhada com reservas.

Nos valores de  $I$  marcados com (2) houve problema de convergência do algoritmo de estimação, que foi contornado fixando-se valores para  $I$  e otimizando os demais parâmetros para cada um destes valores. Foi escolhida como solução aquela de maior verossimilhança entre as tentadas.

O valor do último parâmetro, o expoente  $x$ , teve média 1,1 e variou de 0,5 a 1,7 sendo sempre significativamente diferente de zero.

### 3.3.7 – GRAY: GARCH (1,1) COM TROCA ALEATÓRIA DE PARÂMETROS (COMPLETO)

Aqui o modelo, novamente, não é parcimonioso e houve problemas na estimação de seus 8 parâmetros; para duas das séries não houve convergência.

Os resultados desta estimação estão nas tabelas 20 e 21; na primeira estão os parâmetros relativos ao regime 1 e na segunda os do outro regime. Os resultados marcados com asterisco não são significativamente diferentes de zero, num nível de 5% . A última coluna das tabelas é a persistência do modelo GARCH do regime correspondente.

Observando primeiro o parâmetro  $P$ , na tabela 20, observa-se que esta probabilidade (de permanecer no estado 1) é relativamente baixa para OBBDC, OBRHA e MBRHA ; os resultados para estas séries não adequados, embora maximizem verossimilhança (vide anexo 3.6.4). Nas demais séries a probabilidade  $P$  foi bastante alta, como é usual. O mesmo fato ocorre na tabela 21. É interessante notar que, nas probabilidades altas, o erro padrão de  $P$  é da ordem de  $10^{-3}$  e nas mais baixas, da ordem de  $10^{-1}$  .

	$w_1$	$a_1$	$b_1$	<b>P</b>	$a_1+b_1$
otelb	0.518	0.387	0.361(*)	0.992	0.748
mtelb	0.541	0.583	0.137	0.975	0.719
opetr	0.239	0.182	0.655	0.997	0.837
mpetr	0.231	0.145	0.702	0.997	0.847
oelet	0.349	0.294	0.511	0.995	0.805
melet	0.314	0.229	0.598	0.994	0.828
obbdc	0.080(*)	1.048	0.845	0.293(*)	1.893
mbbdc	0.541	0.583	0.137	0.975	0.719
ovale					
mvale					
obrha	0.134	0.069(*)	2.277	0.354	2.346
mbrha	0.142	0.059(*)	2.367	0.336	2.426

**TABELA 20: Parâmetros dos modelos Gray-completo – regime 1**

	$w_2$	$a_2$	$b_2$	<b>Q</b>	$a_2+b_2$
otelb	0.063	0.105	0.649	0.997	0.754
mtelb	0.061	0.186	0.530	0.986	0.716
opetr	0.080	0.060(*)	0.608	0.998	0.668
mpetr	0.072	0.063(*)	0.645	0.998	0.708
oelet	0.158	0.130	0.232(*)	0.996	0.361
melet	0.170	0.129	0.199(*)	0.995	0.329
obbdc	0.099	0.138	0.150(*)	0.476(*)	0.288
mbbdc	0.061	0.186	0.530	0.986	0.716
ovale					
mvale					
obrha	-0.043	0.032(*)	0.349	0.716	0.381
mbrha	-0.042	0.049(*)	0.346	0.729	0.395

**TABELA 21: Parâmetros dos modelos Gray-completo – regime 2**

Quanto à persistência, à exceção das três séries de baixas probabilidades de mudança de regime, ela é menor que nos modelos GARCH comuns aqui estimados e menor que o usual para séries de retornos modeladas pelo GARCH (1,1)<sup>5</sup>.

<sup>5</sup> Uma das críticas que são feitas aos modelos GARCH comuns é que sua persistência é exageradamente alta. Uma possível explicação para as altas persistências do GARCH é que os parâmetros variam no tempo, e os modelos comuns não conseguem capturar estas mudanças.

É usual na literatura que, nos modelos onde se leva em conta a variação de parâmetros no tempo, os modelos que resultam para cada regime tenham persistência menor que um modelo de parâmetros fixos porventura ajustado aos dados.

As três séries de baixo  $P$  têm persistência maior que a unidade no regime 1, que corresponde a processos não estacionários, e têm persistência exageradamente baixa no regime 2. Esta persistência baixa no regime 2 também ocorre para as duas séries de Eletrobrás; isto se dá porque os coeficientes  $b_2$  são muito baixos (e não significantes) para estas séries, indicando um comportamento diferente das demais.

Resumindo, este modelo apresenta, como o anterior, problemas para sua estimação. Ele apresentou bons resultados nas quatro séries correspondentes aos dois papéis mais líquidos, resultados razoáveis para o terceiro papel mais líquido (Eletrobrás) e não teve boa estimação para os demais, com a exceção de MBBDC.

### 3.3.8 – GRAY: GARCH (1,1) COM TROCA ALEATÓRIA DE PARÂMETROS (SIMPLIFICADO)

Reduzido de 8 para 6 o número de parâmetros, o modelo apresentou convergência para todas as 12 séries. Os resultados estão na tabela 22 onde, novamente, os valores não significativamente diferentes de zero, num nível de 5%, estão marcados com asterisco.

	w	a	b	a+b	k	P	Q
otelb	0.279	0.238	0.610	0.848	0.503	0.987	0.989
mtelb	0.273	0.170	0.672	0.842	0.506	0.985	0.986
opetr	0.208	0.175	0.683	0.858	0.608	0.997	0.997
mpetr	0.195	0.150	0.718	0.868	0.625	0.997	0.997
oelet	0.350	0.292	0.512	0.804	0.451	0.995	0.996
melet	0.330	0.252	0.570	0.822	0.470	0.994	0.996
obbdc	0.173	0.759	0.878	1.638	0.269	0.354(*)	0.592
mbbdc	0.541	0.363	0.368	0.731	0.283	0.903	0.922
ovale	0.333	0.203	0.559	0.762	0.256	0.949	0.907
mvale	0.473	0.177	0.448	0.624	0.253	0.957	0.939
obrha	0.018(*)	0.093	2.474	2.568	0.102	0.373	0.713
mbrha	0.018(*)	0.085	2.499	2.585	0.102	0.376	0.718

TABELA 22: Parâmetros dos modelos Gray-simplificado

Os resultados da estimação do modelo simplificado parecem melhores que os do modelo completo, embora OBBDC, OBRHA e MBRHA continuem com resultados inadequados. Esta melhora vem dos bons resultados para as duas séries de Vale do Rio Doce e de números mais consistentes nas outras séries: por exemplo, o coeficiente GARCH ( $\mathbf{b}$ ) foi maior que o ARCH ( $\mathbf{a}$ ) em todas as séries, fato que é usual nos GARCH (1,1) e não havia acontecido no modelo Gray completo.

### 3.3.9 – VOLATILIDADE DE PARKINSON

Os parâmetros estimados neste modelo são os coeficientes da regressão da volatilidade de Parkinson em seus *lags*; o número de termos defasados foi determinado pelos critérios de informação de Akaike e Schwarz. Eles estão apresentados na tabela 23, para as 12 séries; na primeira coluna está o termo constante da regressão, nas cinco próximas colunas os coeficientes dos termos defasados de ordem um até cinco, e na última coluna está o ‘R quadrado’ da regressão (fração da variância do logaritmo da volatilidade explicada pelos logaritmos das volatilidades passadas).

Pode-se observar na tabela que os parâmetros para as séries originais e modificadas de um mesmo papel são semelhantes, mesmo para Telebrás onde há mudança de modelo (de 5 para 4 termos autorregressivos). Os valores de  $R^2$  são relativamente altos nas três séries mais líquidas e também para Vale do Rio Doce. Todos os parâmetros são significativamente diferentes de zero, num nível de 5% , exceto os três marcados com asterisco e, pelos resultados da tabela, conclui-se que existe dependência autorregressiva entre as volatilidades de Parkinson. Isto indica que existe consistência na formulação teórica do modelo e que, em princípio, a esta dependência pode ser modelada para prever volatilidade.

	const.	AR-1	AR-2	AR-3	AR-4	AR-5	R <sup>2</sup>
otelb	-4.150	0.399	0.156	0.138	0.073(*)	0.091	0.548
mtelb	-4.149	0.406	0.171	0.153	0.114		0.540
opetr	-4.018	0.423	0.232	0.131			0.488
mpetr	-4.024	0.422	0.232	0.132			0.483
oelet	-4.055	0.374	0.161	0.142	0.075	0.100	0.525
melet	-4.062	0.373	0.158	0.142	0.077	0.099	0.520
obbdc	-4.233	0.329	0.237				0.234
mbbdc	-4.234	0.323	0.235				0.226
ovale	-4.215	0.357	0.139	0.093	0.101	0.110	0.423
mvale	-4.220	0.355	0.137	0.093	0.101	0.111	0.417
obrha	-5.032	0.286	0.059(*)	0.078	0.090	0.124	0.205
mbrha	-5.037	0.286	0.058(*)	0.075	0.091	0.124	0.202

**TABELA 23: Coeficientes dos modelos autorregressivos da volatilidade de Parkinson**

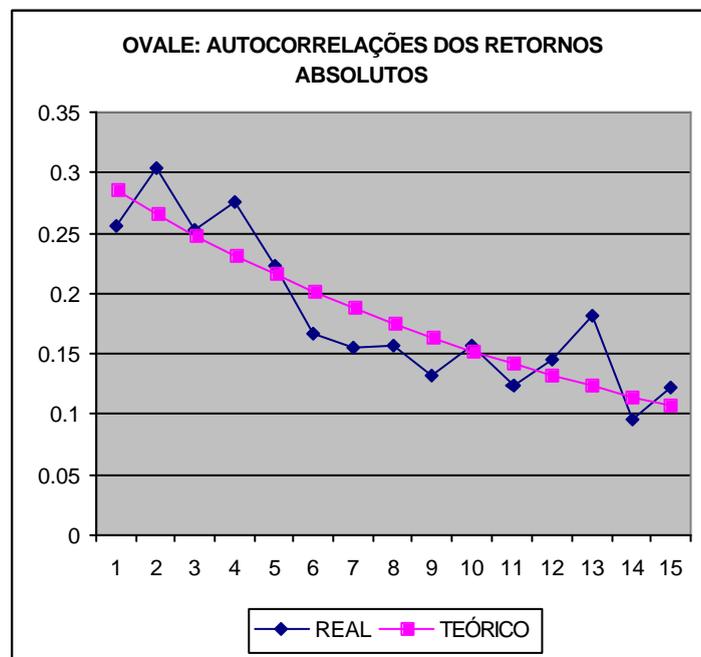
### 3.3.10 – TAYLOR: VOLATILIDADE LOGNORMAL AUTORREGRESSIVA

A estimação dos parâmetros deste modelo é simples, apesar da complexidade da sua formulação: para cada série são estimados, por mínimos quadrados, os dois parâmetros ( $k$  e  $f$ ) da função de autocorrelação teórica dos retornos absolutos. Os resultados obtidos estão na tabela 24.

	k	f
otelb	0.260	0.904
mtelb	0.297	0.896
opetr	0.353	0.963
mpetr	0.290	0.981
oelet	0.287	0.984
melet	0.299	0.933
obbdc	0.319	0.880
mbbdc	0.285	0.908
ovale	0.381	0.964
mvale	0.330	0.969
obrha	0.310	0.973
mbrha	0.306	0.932

**TABELA 24: Parâmetros das autocorrelações dos retornos absolutos do modelo de Taylor**

Os resultados obtidos para todas as séries estão dentro da ordem de grandeza dos valores obtidos por Taylor (1986). A título de ilustração, o gráfico da figura 11 mostra as duas funções de autocorrelação (real e teórica estimada) dos retornos absolutos para a série OVALE.



**FIGURA 11: Autocorrelações reais e estimadas para os retornos absolutos de OVALE**

### 3.4 – AVALIAÇÃO DOS MODELOS

#### 3.4.1 – INTRODUÇÃO

Os modelos são avaliados através de seus resíduos e através das previsões de volatilidade. Note-se que, para cada um dos dois tipos de análise, dez modelos são aplicados a 12 séries de retornos, resultando 120 séries de resíduos e 120 séries de previsões de volatilidade.

Os resíduos analisados são os retornos re-escalados, que vêm a ser o quociente, para cada período, entre o retorno e a previsão da volatilidade do modelo. Se o modelo capturou toda a dependência, os resíduos devem ser IID  $N(0,1)$ <sup>6</sup> ou pelo menos IID.

Outra forma de avaliar os modelos é através de seus erros de previsão; a aplicação deste método aqui é problemática porque a variância condicional em cada dia não é observável e, conseqüentemente, não se pode comparar *previsto e real*. A comparação vai ser feita com base em *representantes* da variância condicional.

#### 3.4.2 – ANÁLISE DOS RESÍDUOS

Para verificação das características da distribuição dos resíduos dos modelos foram feitas as seguintes análises:

- Teste de normalidade Jarque-Bera: para as 120 séries houve rejeição da hipótese de normalidade, num nível de 5% , dentro e fora da amostra. Os resultados numéricos deste teste não são aqui apresentados.

---

<sup>6</sup> Dentro da suposição de normalidade condicional para os retornos, dada a volatilidade, o retorno re-escalado (resíduo) deve ser também normal.

- Coeficiente de curtose: a rejeição de normalidade se deve ao excesso de curtose. Uma indicação da qualidade do modelo é o coeficiente de curtose de seus resíduos: quanto menor (mais próximo de três) melhor o modelo, assumindo-se que os retornos condicionais à informação disponível deveriam, por hipótese, ser normais, se os modelos capturassem toda a influência desta informação.
- Autocorrelação dos resíduos: se os resíduos são independentes, eles devem ser também descorrelacionados. Para avaliar esta autocorrelação, determinou-se o *p* valor para o teste de Ljung-Box, que tem como hipótese nula serem conjuntamente nulas as primeiras quinze autocorrelações dos resíduos. Sempre que este valor for menor que o nível de significância (5%), rejeita-se a hipótese de descorrelação.
- Autocorrelação dos resíduos ao quadrado: foi visto no capítulo 2 que os quadrados dos retornos são altamente correlacionados; isto é indicação de dependência não linear, que seria modelável por um modelo de variância. Então, se o modelo capturou esta dependência, ela não pode estar presente nos quadrados dos seus resíduos. De uma maneira mais simples: se os resíduos são independentes, seu quadrados também o são, e não podem apresentar autocorrelação. Para avaliar a autocorrelação dos quadrados dos resíduos também foi usado o teste de Ljung-Box, da mesma forma que para os resíduos.
- Teste BDS: este teste já foi descrito no capítulo dois. Se os resíduos são independentes, a estatística do teste tem distribuição assintótica normal padronizada, e assim rejeita-se a hipótese nula de resíduos IID se o valor da estatística for maior que 1,96, para um nível de 5%. Quando este teste é aplicado a resíduos de modelos da família GARCH há uma tendência no sentido de sub-rejeitar a hipótese nula. Fernandes e Preumont (1996) usaram simulação e superfícies de resposta para determinar fatores de correção para os valores críticos do teste. Este fatores estão sendo empregados aqui, para as séries de resíduos dos cinco modelos da família GARCH. Para que o valor crítico seja o mesmo para todos os dez modelos estudados, a correção de Fernandes e Preumont foi aplicada aos valores da estatística BDS dos cinco modelos GARCH, e não aos valores críticos.

Para cada série foram calculadas quatro estatísticas BDS: para  $m$  (número de dimensões) igual a 2 e 3, e  $d$  (distância máxima entre pontos) igual a 1 e 2 desvios padrão. O valor apresentado para a estatística BDS é a média destes quatro valores, para cada série.

Na tabela 25 estão apresentados os coeficientes de curtose das 120 séries, dentro e fora da amostra.

Dentro da amostra, nota-se inicialmente o bom desempenho dos modelos da família GARCH, e o bom desempenho do modelo de volatilidade de Parkinson nas três séries mais líquidas. O modelo de janela de tempo tem os piores resultados, e chamam atenção os maus resultados para as séries de Brahma, em todos os modelos.

Olhando agora os resultados fora da amostra, as diferenças entre os modelos são menos marcantes. As menores curtoses são, na média, as do modelo de volatilidade de Parkinson e o de janela de tempo continua o pior; agora, as séries de Brahma estão bem comportadas.

Não há superioridade para resultados de modelos de séries originais ou modificadas.

Na tabela 26 estão os  $p$  valores do teste de Ljung-Box para as 15 primeiras autocorrelações dos resíduos das 120 séries, dentro e fora da amostra; os valores que correspondem a autocorrelações significantes, num nível de 5%, estão em negrito. Na última linha das tabelas está apresentada, apenas para ilustração, a média dos  $p$  valores, que não tem um significado estatístico.

Os dois modelos de Gray e o de Parkinson apresentaram, na amostra, resíduos correlacionados em quase todas as séries; os dois de amortecimento exponencial e o de janela de tempo também tiveram muitas séries com resíduos correlacionados, na amostra, e as séries de resíduos Bradesco foram quase todas correlacionadas.

Nos resíduos fora da amostra, há menos correlação: o modelo de janela de tempo tem metade de suas séries de resíduos correlacionadas e, nos demais modelos, esta quantidade varia de zero (Parkinson) a quatro (Taylor e GARCH).

Não se nota diferença importante entre os resíduos de séries originais e modificadas.

## NA AMOSTRA:

	janela	amort r.qdr	amort r.abs	GAR CH	EGA RCH	Hent.	Gray comp	Gray simp	Park	Taylor
otelb	4.81	4.29	4.27	3.97	3.73	3.65	4.29	4.24	3.74	4.13
mtelb	4.32	4.25	4.13	3.65	3.36	3.42	4.03	3.90	3.76	3.78
opetr	3.76	3.66	3.52	3.40	3.34	3.37	3.55	3.58	3.83	3.40
mpetr	3.72	3.50	4.57	3.33	3.28	3.32	3.54	3.57	3.84	3.33
oelet	4.45	4.55	4.19	4.16	4.02	3.88	4.11	4.12	3.86	4.13
melet	4.43	4.39	4.10	3.99	3.99	3.89	4.13	4.17	3.87	4.00
obbdc	5.16	5.14	4.19	4.22	4.11	3.96	4.17	4.17	5.01	4.44
mbbdc	6.43	4.13	4.18	4.02	3.90	3.91	3.88	4.16	4.63	5.61
ovale	5.55	5.33	5.40	4.43	4.28	4.66		4.80	5.39	4.59
mvale	5.54	5.35	5.44	4.58	4.46	4.29		5.05	5.43	5.01
obrha	41.26	44.84	20.74	6.59	6.76	6.43	7.80	7.99	21.87	7.37
mbrha	41.23	67.68	31.78	6.62	6.90	6.21	7.90	8.01	21.92	9.48
<b>média</b>	10.89	13.09	8.04	4.41	4.34	4.25	4.74	4.81	7.26	4.94

## FORA DA AMOSTRA:

	janela	amort r.qdr	amort r.abs	GAR CH	EGA RCH	Hent.	Gray comp	Gray simp	Park	Taylor
otelb	8.18	8.67	6.46	5.95	4.70	4.26	6.04	6.08	4.58	6.19
mtelb	8.16	6.76	6.90	6.74	4.94	4.79	6.63	6.50	4.59	6.89
opetr	10.12	6.38	9.38	8.45	7.30	7.84	5.51	5.56	4.16	7.23
mpetr	10.13	7.61	9.75	8.91	7.84	8.06	5.81	5.76	4.18	8.89
oelet	8.40	6.05	6.27	6.11	5.70	6.96	5.29	5.29	8.21	5.72
melet	8.38	6.05	6.38	6.67	6.67	6.09	5.28	5.21	8.15	6.01
obbdc	6.42	6.55	5.79	5.22	4.95	4.56	5.47	5.32	5.09	5.52
mbbdc	4.62	5.70	5.79	4.90	4.67	4.46	5.62	5.33	5.11	5.03
ovale	13.21	10.30	9.24	9.07	11.06	10.69		8.44	6.84	9.46
mvale	13.20	11.61	9.92	8.53	10.57	9.62		9.11	6.87	9.00
obrha	5.77	5.44	5.33	4.98	5.03	5.18	5.86	5.80	5.77	4.83
mbrha	5.78	5.88	5.27	4.94	4.86	5.80	5.79	5.95	5.76	4.78
<b>média</b>	8.53	7.25	7.21	6.71	6.52	6.53	5.73	6.20	5.78	6.63

TABELA 25: Coeficientes de curtose dos resíduos

## NA AMOSTRA:

	janela	amort r.qdr	amort r.abs	GAR CH	EGA RCH	Hent.	Gray comp	Gray simp	Park	Taylor
otelb	0.872	0.845	0.772	0.252	0.170	0.112	0.500	0.604	0.350	0.317
mtelb	0.782	0.658	0.728	0.780	0.646	0.646	0.437	0.526	0.266	0.799
opetr	0.074	0.051	0.070	0.599	0.700	0.716	<b>0.032</b>	<b>0.035</b>	<b>0.011</b>	0.577
mpetr	0.084	<b>0.043</b>	<b>0.040</b>	0.820	0.861	0.875	<b>0.037</b>	<b>0.038</b>	<b>0.014</b>	0.796
oelet	<b>0.000</b>	<b>0.003</b>	<b>0.003</b>	0.259	0.295	0.286	<b>0.001</b>	<b>0.001</b>	<b>0.001</b>	0.233
melet	<b>0.000</b>	<b>0.003</b>	<b>0.002</b>	0.343	0.429	0.439	<b>0.001</b>	<b>0.001</b>	<b>0.001</b>	<b>0.424</b>
obbdc	<b>0.009</b>	<b>0.005</b>	<b>0.001</b>	<b>0.006</b>	<b>0.001</b>	<b>0.002</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	0.021
mbbdc	<b>0.007</b>	<b>0.002</b>	<b>0.001</b>	<b>0.022</b>	<b>0.010</b>	<b>0.009</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	0.075
ovale	<b>0.024</b>	<b>0.006</b>	<b>0.007</b>	0.731	0.745	0.694		<b>0.002</b>	<b>0.007</b>	0.779
mvale	<b>0.025</b>	<b>0.006</b>	<b>0.006</b>	0.806	0.789	0.758		<b>0.002</b>	<b>0.007</b>	0.755
obrha	0.126	0.282	0.101	<b>0.029</b>	0.063	0.193	<b>0.001</b>	<b>0.001</b>	<b>0.015</b>	<b>0.042</b>
mbrha	0.135	0.638	0.161	<b>0.019</b>	<b>0.047</b>	0.129	<b>0.001</b>	<b>0.001</b>	<b>0.010</b>	0.061
<b>média</b>	0.178	0.212	0.158	0.389	0.396	0.405	0.101	0.101	0.057	0.407

## FORA DA AMOSTRA:

	janela	amort r.qdr	amort r.abs	GAR CH	EGA RCH	Hent.	Gray comp	Gray simp	Park	Taylor
otelb	0.532	0.417	0.410	0.283	0.157	0.173	0.190	0.265	0.276	0.261
mtelb	0.523	0.415	0.411	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	0.196	0.279	0.301	<b>0.000</b>
opetr	<b>0.009</b>	0.089	0.109	0.310	0.624	0.744	<b>0.047</b>	<b>0.042</b>	0.227	0.514
mpetr	<b>0.009</b>	<b>0.043</b>	0.131	0.415	0.676	0.720	<b>0.045</b>	<b>0.044</b>	0.232	0.539
oelet	0.172	0.175	0.112	0.455	0.287	0.191	0.070	0.070	0.126	0.311
melet	0.172	0.165	0.106	0.219	0.120	0.121	0.076	0.077	0.122	0.142
obbdc	<b>0.015</b>	<b>0.030</b>	0.055	0.192	0.187	0.129	0.106	0.103	0.079	0.180
mbbdc	<b>0.021</b>	<b>0.049</b>	<b>0.049</b>	0.640	0.657	0.597	0.067	0.092	0.079	0.616
ovale	0.377	0.303	0.281	<b>0.029</b>	<b>0.032</b>	<b>0.018</b>		0.262	0.263	<b>0.018</b>
mvale	0.379	0.347	0.300	0.073	0.071	0.057		0.294	0.259	0.051
obrha	<b>0.020</b>	0.313	0.145	<b>0.003</b>	<b>0.041</b>	0.067	0.125	0.087	0.606	<b>0.036</b>
mbrha	<b>0.020</b>	0.548	0.191	<b>0.002</b>	0.063	0.088	0.134	0.828	0.619	<b>0.035</b>
<b>média</b>	0.187	0.241	0.192	0.218	0.243	0.242	0.106	0.204	0.266	0.225

TABELA 26: Resíduos – *p* valores do teste de Ljung-Box para as 15 primeiras autocorrelações

Na tabela 27 estão os *p* valores do teste de Ljung-Box das autocorrelações dos quadrados dos resíduos da mesma forma que na tabela 26.

Na amostra, observa-se que as séries de Bradesco têm seus resíduos quadrados, a exemplo dos resíduos, correlacionados em 19 das 20 séries. Tirando estas séries, os resíduos quadrados dos modelos são, em sua maioria descorrelacionados; as exceções são janela de tempo, amortecimento exponencial do retorno quadrado e volatilidade de Parkinson com mais algumas séries correlacionadas, além das de Bradesco.

Fora da amostra, o modelo de volatilidade de Parkinson apresenta quatro séries de resíduos quadrados correlacionados, e os demais modelos uma ou duas séries.

Não se nota diferença importante entre os valores para resíduos quadrados de séries originais e modificadas.

Na tabela 28 estão os valores das estatísticas do teste BDS, para as diversas séries e modelos. Como as estatísticas dos modelos da família GARCH estão corrigidas, o valor crítico, para um nível de 5% , é igual a 1,96 (em valor absoluto). Os valores em negrito correspondem à rejeição da hipótese nula, ou seja, as séries não são IID.

Dentro da amostra, o modelo de janela de tempo produziu resíduos não IID para todas as séries e os dois modelos de Gray e o de Hentschel apresentaram os melhores resultados. Nos demais modelos, cerca de metade das séries de resíduos não são IID. As séries de Bradesco e, principalmente, de Brahma têm resíduos predominantemente não IID. Não se nota diferença entre resíduos de séries originais e modificadas

Fora da amostra, o modelo de janela de tempo continuou produzindo resíduos não IID para todas as séries e os 5 modelos da família GARCH tiveram muitas séries com resíduos não IID. As séries de Bradesco, Brahma e, principalmente, Petrobrás tiveram resíduos predominantemente não IID. As rejeições de resíduos IID ocorreram mais entre as séries originais.

## NA AMOSTRA:

	janela	amort r.qdr	amort r.abs	GAR CH	EGA RCH	Hent.	Gray comp	Gray simp	Park	Taylor
otelb	0.122	0.296	0.419	0.343	0.234	0.070	0.946	0.881	0.599	0.221
mtelb	<b>0.040</b>	0.643	0.186	0.453	0.246	0.248	0.765	0.666	0.436	0.075
opetr	<b>0.011</b>	<b>0.013</b>	0.127	0.217	0.337	0.274	0.613	0.701	<b>0.006</b>	0.192
mpetr	<b>0.029</b>	<b>0.049</b>	0.568	0.298	0.488	0.438	0.399	0.559	<b>0.019</b>	0.438
oelet	0.318	0.465	0.389	0.865	0.854	0.782	0.943	0.944	0.886	0.882
melet	0.414	0.575	0.448	0.743	0.742	0.729	0.968	0.968	0.916	0.788
obbdc	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.026</b>	<b>0.010</b>	<b>0.001</b>	<b>0.001</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>
mbbdc	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.002</b>	<b>0.018</b>	<b>0.026</b>	0.309	<b>0.003</b>	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>
ovale	0.216	0.853	0.793	0.983	0.988	0.990		0.887	<b>0.000</b>	0.952
mvale	0.249	0.804	0.720	0.898	0.887	0.877		0.846	0.657	0.816
obrha	1.000	1.000	1.000	0.989	0.996	0.708	0.847	0.905	0.542	0.950
mbrha	1.000	1.000	1.000	0.959	0.840	0.509	0.783	0.828	0.531	0.489
<b>média</b>	0.283	0.475	0.471	0.563	0.555	0.472	0.657	0.682	0.383	0.484

## FORA DA AMOSTRA:

	janela	amort r.qdr	amort r.abs	GAR CH	EGA RCH	Hent.	Gray comp	Gray simp	Park	Taylor
otelb	0.135	0.840	0.893	0.930	0.730	0.173	0.572	0.877	0.318	0.667
mtelb	0.143	0.877	0.540	0.936	0.638	<b>0.000</b>	0.750	0.939	0.274	0.615
opetr	0.077	0.191	0.140	0.525	0.392	0.744	0.792	0.617	0.646	0.440
mpetr	0.080	0.227	0.109	0.488	0.369	0.720	0.752	0.647	0.630	0.345
oelet	<b>0.000</b>	0.294	<b>0.000</b>	0.141	<b>0.017</b>	0.191	0.671	0.669	<b>0.025</b>	<b>0.007</b>
melet	<b>0.000</b>	0.117	<b>0.000</b>	0.111	<b>0.009</b>	0.121	0.580	0.635	<b>0.021</b>	<b>0.007</b>
obbdc	0.139	<b>0.000</b>	0.574	<b>0.000</b>	0.059	0.129	0.056	0.056	<b>0.001</b>	0.161
mbbdc	0.140	0.459	0.191	0.085	0.070	0.597	<b>0.036</b>	<b>0.037</b>	<b>0.001</b>	0.128
ovale	0.988	0.995	0.978	0.995	1.000	<b>0.018</b>		0.994	0.985	0.997
mvale	0.988	0.997	0.979	0.990	1.000	0.057		0.994	0.997	0.997
obrha	0.117	0.671	0.407	0.063	0.194	0.067	0.135	0.111	0.318	0.420
mbrha	0.121	0.718	0.468	0.068	0.071	0.088	0.178	0.430	0.298	0.479
<b>média</b>	0.244	0.532	0.440	0.444	0.379	0.242	0.452	0.584	0.376	0.439

TABELA 27: Resíduos ao quadrado – *p* valores do teste de Ljung-Box para as 15 primeiras autocorrelações

## NA AMOSTRA:

	janela	amort r.qdr	amort r.abs	GAR CH	EGA RCH	Hent.	Gray comp	Gray simp	Park	Taylor
otelb	<b>3.70</b>	<b>2.49</b>	0.92	<b>6.00</b>	<b>2.25</b>	1.84	-0.74	-0.65	0.03	<b>1.99</b>
mtelb	<b>3.43</b>	0.40	1.32	<b>2.12</b>	1.58	1.08	0.09	0.43	0.00	<b>2.58</b>
opetr	<b>2.94</b>	-0.66	0.76	1.75	1.39	1.80	-0.37	-1.11	-0.53	-0.22
mpetr	<b>2.73</b>	0.61	1.83	<b>2.23</b>	<b>1.99</b>	<b>2.14</b>	0.28	-0.43	-0.40	0.48
oelet	<b>4.09</b>	0.55	0.93	<b>3.23</b>	<b>2.89</b>	<b>2.86</b>	-0.25	-0.24	0.51	0.06
melet	<b>3.90</b>	0.96	1.27	<b>3.82</b>	<b>2.89</b>	<b>3.41</b>	0.10	-0.01	0.48	0.41
obbdc	<b>6.55</b>	<b>6.95</b>	<b>4.82</b>	0.58	1.68	1.61	1.23	1.77	<b>4.57</b>	<b>3.61</b>
mbbdc	<b>6.14</b>	<b>4.90</b>	<b>5.74</b>	1.93	1.75	1.59	1.50	<b>2.54</b>	<b>4.34</b>	<b>3.74</b>
ovale	<b>4.91</b>	<b>2.63</b>	<b>2.49</b>	-0.14	-0.60	0.02		1.39	<b>3.11</b>	0.50
mvale	<b>4.82</b>	<b>3.44</b>	<b>3.22</b>	-0.01	-0.33	-0.68		1.85	<b>3.09</b>	0.93
obrha	<b>4.96</b>	1.90	<b>3.48</b>	<b>2.15</b>	<b>2.56</b>	0.15	<b>9.42</b>	<b>9.48</b>	<b>3.13</b>	<b>3.00</b>
mbrha	<b>5.22</b>	-0.02	<b>3.06</b>	1.81	<b>2.78</b>	-0.12	<b>9.68</b>	<b>10.05</b>	<b>3.34</b>	<b>3.76</b>
<b>média</b>	4.45	2.01	2.49	2.12	1.74	1.31	2.09	2.09	1.80	1.74

## FORA DA AMOSTRA:

	janela	amort r.qdr	amort r.abs	GAR CH	EGA RCH	Hent.	Gray comp	Gray simp	Park	Taylor
otelb	<b>3.18</b>	<b>2.52</b>	0.81	<b>2.13</b>	<b>-2.52</b>	<b>-2.32</b>	<b>-2.13</b>	-1.80	-0.38	1.01
mtelb	<b>3.07</b>	0.28	1.33	-0.30	-1.88	0.83	-0.88	-0.96	-0.27	0.94
opetr	<b>4.33</b>	0.70	<b>2.95</b>	<b>4.81</b>	<b>2.96</b>	<b>3.65</b>	<b>1.97</b>	1.88	0.54	0.93
mpetr	<b>4.21</b>	<b>2.38</b>	<b>3.85</b>	<b>5.43</b>	<b>3.51</b>	<b>3.87</b>	<b>2.44</b>	<b>2.08</b>	0.28	<b>2.13</b>
oelet	<b>3.99</b>	0.97	1.24	<b>2.61</b>	<b>2.00</b>	<b>2.51</b>	-0.48	-0.47	0.62	0.53
melet	<b>4.00</b>	1.63	1.79	<b>3.33</b>	<b>2.00</b>	<b>2.86</b>	0.23	0.08	0.66	0.86
obbdc	<b>2.34</b>	<b>2.91</b>	0.30	<b>-2.60</b>	<b>-2.14</b>	<b>-2.57</b>	<b>-2.75</b>	<b>-3.26</b>	<b>2.46</b>	-0.22
mbbdc	<b>2.14</b>	0.28	1.11	-1.21	-1.21	<b>-2.26</b>	<b>-2.88</b>	<b>-2.78</b>	<b>2.43</b>	1.10
ovale	<b>2.22</b>	0.00	-0.10	-1.86	-0.92	0.91		<b>-3.27</b>	-1.21	-0.44
mvale	<b>2.18</b>	0.75	0.35	-1.27	-0.25	1.44		<b>-3.09</b>	-1.22	-0.15
obrha	<b>3.59</b>	0.99	<b>2.05</b>	-1.05	-1.67	<b>-2.52</b>	<b>4.56</b>	<b>4.75</b>	1.20	0.15
mbrha	<b>3.33</b>	-0.67	1.36	-1.12	-1.85	<b>-3.03</b>	<b>3.94</b>	1.42	1.01	-0.04
<b>média</b>	3.22	1.06	1.42	0.74	-0.16	0.28	0.40	-0.45	0.51	0.57

TABELA 28: Estatísticas do teste BDS

A conclusão desta análise dos resíduos dos modelos não é fácil porque não há homogeneidade nos resultados obtidos pelos quatro critérios, nem entre resultados dentro e fora da amostra. A exceção é o método de janela de tempo que mostrou-se sempre pior que os demais.

De maneira geral, o melhor compromisso entre resultados dentro e fora da amostra no que diz respeito a análise dos resíduos, ficou com o modelo de Taylor, mas não chega a haver um predomínio marcante.

Quanto às séries, apenas no teste BDS fora da amostra notam-se resultados um pouco melhores para as séries modificadas que nas originais. Isto indica que a retirada das observações aberrantes não chega a melhorar significativamente a modelagem da volatilidade, pelo menos quanto à obtenção de melhores resíduos.

Nota-se também que há uma tendência de as séries dos papéis mais líquidos terem melhores resíduos, indicando uma maior facilidade de modelagem para estas séries.

### 3.4.3 – ANÁLISE DAS PREVISÕES DE VOLATILIDADE

As previsões de volatilidade dos diversos modelos, dentro e fora da amostra, serão em seguida analisadas por dois processos.

O primeiro parte do fato de que a variância condicional à informação disponível em  $(t-1)$  é dada por

$$\text{var}(x_t | I_{t-1}) = E[x_t^2 | I_{t-1}] - \left( E[x_t | I_{t-1}] \right)^2 ,$$

onde  $x_t$  é o retorno em  $t$ . Se a segunda parcela à direita da igualdade for (como usualmente é) desprezível face à primeira, a variância condicional é o valor esperado, condicional à informação, do retorno quadrado. Assim, é razoável representar o valor realizado da variância do dia  $t$  pelo valor realizado do retorno quadrado naquele dia.

Dentro desta ótica, o primeiro processo considera como *erro de previsão*, a diferença entre a variância condicional prevista para o dia e o quadrado do retorno realizado naquele dia; a grandeza que vai medir o erro para a série é a raiz quadrada da média dos quadrados destes erros, ou seja,

$$E_1 = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N \sigma_k^2 - \hat{s}_k^2}{N}} \cdot h$$

onde  $N$  é o tamanho da amostra.

O segundo processo de análise das previsões de volatilidade usa o trabalho de Taylor (1986) que mostra que, se o retorno padronizado tem distribuição normal, o desvio padrão condicional pode ser previsto pelo valor absoluto do retorno (multiplicado por uma constante). Isto sugere o uso do retorno absoluto realizado no dia como representante do desvio padrão naquele dia.

Então, o segundo processo considera como erro a diferença entre a volatilidade prevista para o dia e o valor absoluto do retorno realizado naquele dia; a grandeza que vai medir o erro da série é a média dos quadrados destes erros, ou seja,

$$E_2 = \frac{\sum_{k=1}^N |\sigma_k| - \hat{s}_k}{N} \cdot h$$

O período correspondente aos dados “fora da amostra” vai de setembro de 1997 a maio de 1999 ; este é um período de maior turbulência no mercado de ações do que o período “dentro da amostra” e, conseqüentemente, a variância (incondicional) é maior fora da amostra. Isto leva a um maior erro de previsão para o período fora da amostra, mesmo que o modelo se comporte tão bem fora da amostra com dentro dela. Para contornar este problema, os erros  $E_1$  e  $E_2$  acima serão chamados de erros *absolutos* de previsão, e foram determinados os erros *relativos* de previsão, que são os erros absolutos divididos pela raiz quadrada do quarto momento amostral do período (para variância contra retorno quadrado, primeiro processo) ou pela variância amostral do período (para

volatilidade contra retorno absoluto, segundo processo). Formalmente, os erros relativos são dados por:

$$ER_1 = E_1 \cdot \frac{\sum_{k=1}^N (y_k - \bar{x})^2}{N}^{-1/2} \quad \text{e} \quad ER_2 = E_2 \cdot \frac{\sum_{k=1}^N (y_k - \bar{x})^2}{N}^{-1}$$

Nestas expressões,  $\bar{x}$  é a média amostral.

Na tabela 29 estão apresentados os erros absolutos de previsão, em termos de raiz quadrada do erro quadrático médio, dentro e fora da amostra, segundo o primeiro processo, ou seja, variância contra retorno quadrado.

Observando os resultados dentro da amostra, nota-se inicialmente que os erros das séries originais são bem maiores que os das modificadas, principalmente nas séries dos papéis mais líquidos. Isto reflete o fato de que os modelos das séries originais não conseguem levar adequadamente em conta as observações aberrantes, e sua retirada da amostra, portanto, reduz erro. Fora da amostra, os modelos para séries originais e modificadas são diferentes, mas as séries são semelhantes (só há retirada de observações aberrantes dentro da amostra), e sucede o inverso: os erros das séries modificadas são (um pouco) maiores que os das originais, indicando que os modelos ajustados nos dados originais prevêem um pouco melhor que os ajustados nas séries modificadas.

Comparando as médias das previsões dentro e fora da amostra, para os diversos modelos, pode-se notar que a média dos erros fora da amostra é cerca de duas vezes o valor dentro da amostra para todos os modelos e, por isto, foram calculados os erros relativos de previsão, ou seja, para que se possam comparar os modelos sem a influência da variação da variância dentro/fora da amostra.

Com relação à comparação entre os modelos pode-se notar que, dentro e fora da amostra, a diferença entre a melhor e a pior média dos erros dos modelos (não considerando Gray completo, que tem séries a menos) é da ordem 5%. Desta forma, a comparação aqui é entre resultados muito mais homogêneos que os da seção anterior.

## NA AMOSTRA:

	janela	amort r.qdr	amort r.abs	GAR CH	EGA RCH	Hent.	Gray comp	Gray simp	Park	Taylor
otelb	3.20	3.11	3.05	3.08	2.94	2.87	3.22	3.11	2.99	2.86
mtelb	1.34	1.29	1.31	1.28	1.24	1.23	1.29	1.28	1.28	1.29
opetr	1.80	1.72	1.75	1.74	1.69	1.70	1.69	1.69	1.70	1.75
mpetr	1.50	1.47	1.49	1.47	1.45	1.45	1.45	1.45	1.46	1.41
oelet	2.40	2.24	2.24	2.26	2.17	2.14	2.25	2.25	2.22	2.36
melet	1.86	1.76	1.78	1.76	1.72	1.71	1.77	1.78	1.76	1.63
obbdc	3.39	3.31	3.25	3.38	3.11	3.04	3.30	3.31	3.25	3.40
mbbdc	1.69	1.68	1.70	1.62	1.59	1.56	1.65	1.62	1.66	1.56
ovale	1.66	1.64	1.63	1.64	1.58	1.59		1.62	1.56	1.56
mvale	1.28	1.30	1.32	1.30	1.27	1.26		1.30	1.25	1.29
obrha	2.38	2.48	2.50	2.43	2.23	2.46	2.48	2.48	2.29	2.26
mbrha	2.39	2.46	2.49	2.30	2.31	2.28	2.48	2.49	2.29	2.33
<b>média</b>	2.07	2.04	2.04	2.02	1.94	1.94	2.16	2.03	1.98	1.97

## FORA DA AMOSTRA:

	janela	amort r.qdr	amort r.abs	GAR CH	EGA RCH	Hent.	Gray comp	Gray simp	Park	Taylor
otelb	5.48	5.38	5.31	5.38	5.16	5.13	5.58	5.41	5.29	5.16
mtelb	5.89	5.83	5.72	5.77	5.59	5.58	5.82	5.74	5.70	5.57
opetr	3.63	3.40	3.49	3.45	3.39	3.42	3.32	3.32	3.45	3.46
mpetr	3.73	3.52	3.61	3.56	3.51	3.53	3.42	3.42	3.55	3.63
oelet	4.07	3.91	3.88	3.91	3.82	3.82	3.84	3.84	3.87	4.12
melet	4.23	4.07	4.06	4.09	4.00	4.01	3.98	3.98	4.04	4.48
obbdc	3.91	3.79	3.76	3.71	3.62	3.75	3.76	3.73	3.85	3.68
mbbdc	4.20	4.01	4.09	3.89	3.85	3.97	4.06	3.94	4.15	3.74
ovale	6.74	6.74	6.60	6.92	6.71	6.59		6.68	6.59	6.77
mvale	6.93	6.89	6.78	7.06	6.85	6.78		6.83	6.78	6.70
obrha	4.01	3.92	3.93	3.92	3.86	3.98	3.89	3.90	3.92	3.91
mbrha	4.02	3.97	3.93	3.94	3.84	4.00	3.89	3.98	3.92	3.92
<b>média</b>	4.74	4.62	4.60	4.63	4.52	4.55	4.16	4.57	4.59	4.59

**TABELA 29: Erros absolutos de previsão – processo 1  
variância x retorno quadrado**

## NA AMOSTRA:

	janela	amort r.qdr	amort r.abs	GAR CH	EGA RCH	Hent.	Gray comp	Gray simp	Park	Taylor
otelb	0.414	0.382	0.322	0.364	0.319	0.316	0.382	0.367	0.299	0.318
mtelb	0.315	0.297	0.267	0.293	0.279	0.276	0.301	0.299	0.254	0.265
opetr	0.343	0.325	0.289	0.322	0.304	0.306	0.312	0.314	0.361	0.281
mpetr	0.318	0.307	0.275	0.303	0.297	0.294	0.301	0.304	0.268	0.262
oelet	0.397	0.352	0.312	0.351	0.319	0.319	0.349	0.349	0.297	0.304
melet	0.360	0.327	0.292	0.320	0.306	0.303	0.326	0.327	0.280	0.273
obbdc	0.501	0.469	0.381	0.440	0.385	0.381	0.433	0.431	0.366	0.373
mbbdc	0.387	0.373	0.324	0.357	0.354	0.393	0.366	0.357	0.445	0.308
ovale	0.341	0.327	0.287	0.330	0.308	0.306		0.325	0.266	0.275
mvale	0.314	0.306	0.271	0.310	0.284	0.282		0.310	0.255	0.261
obrha	0.495	0.490	0.412	0.485	0.432	0.486	0.481	0.491	0.382	0.379
mbrha	0.497	0.490	0.412	0.466	0.449	0.531	0.486	0.492	0.382	0.386
<b>média</b>	0.390	0.370	0.320	0.362	0.336	0.349	0.374	0.364	0.321	0.307

## FORA DA AMOSTRA:

	janela	amort r.qdr	amort r.abs	GAR CH	EGA RCH	Hent.	Gray comp	Gray simp	Park	Taylor
otelb	0.893	0.825	0.670	0.755	0.629	0.610	0.763	0.729	0.649	0.650
mtelb	0.956	0.866	0.722	0.837	0.671	0.686	0.776	0.750	0.708	0.745
opetr	0.816	0.707	0.648	0.713	0.631	0.629	0.647	0.647	0.801	0.610
mpetr	0.838	0.745	0.684	0.743	0.675	0.658	0.663	0.663	0.633	0.639
oelet	0.810	0.707	0.625	0.703	0.629	0.631	0.654	0.653	0.599	0.632
melet	0.842	0.742	0.654	0.747	0.674	0.661	0.671	0.674	0.625	0.691
obbdc	0.912	0.876	0.726	0.770	0.701	0.753	0.789	0.778	0.715	0.679
mbbdc	0.979	0.891	0.792	0.784	0.767	0.779	0.853	0.793	1.097	0.678
ovale	1.024	0.964	0.796	0.983	0.880	0.819		0.831	0.760	0.813
mvale	1.052	0.994	0.819	1.002	0.857	0.851		0.833	0.783	0.829
obrha	0.969	0.907	0.774	0.835	0.780	0.847	0.861	0.908	0.745	0.731
mbrha	0.971	0.907	0.776	0.841	0.829	0.892	0.872	0.756	0.746	0.737
<b>média</b>	0.922	0.844	0.724	0.809	0.727	0.735	0.755	0.751	0.738	0.703

**TABELA 30: Erros absolutos de previsão – processo 2  
volatilidade x retorno absoluto**

## NA AMOSTRA:

	janela	amort r.qdr	amort r.abs	GAR CH	EGA RCH	Hent.	Gray comp	Gray simp	Park	Taylor
otelb	1.032	1.002	0.985	0.993	0.950	0.926	1.039	1.003	0.966	0.923
mtelb	0.843	0.813	0.826	0.808	0.784	0.779	0.817	0.812	0.808	0.815
opetr	0.885	0.845	0.859	0.854	0.830	0.833	0.830	0.830	0.834	0.858
mpetr	0.890	0.874	0.890	0.874	0.861	0.862	0.864	0.864	0.868	0.840
oelet	0.898	0.838	0.837	0.844	0.810	0.801	0.842	0.842	0.830	0.880
melet	0.971	0.917	0.925	0.914	0.894	0.891	0.922	0.926	0.916	0.847
obbdc	0.947	0.924	0.909	0.944	0.869	0.848	0.922	0.924	0.909	0.948
mbbdc	0.967	0.961	0.972	0.930	0.911	0.893	0.944	0.926	0.949	0.892
ovale	0.935	0.923	0.922	0.926	0.892	0.894		0.913	0.880	0.879
mvale	0.858	0.869	0.880	0.866	0.847	0.843		0.866	0.835	0.861
obrha	0.974	1.015	1.022	0.995	0.913	1.004	1.013	1.015	0.935	0.922
mbrha	0.941	0.969	0.979	0.906	0.909	0.898	0.974	0.978	0.899	0.916
<b>média</b>	0.928	0.913	0.917	0.905	0.873	0.873	0.917	0.908	0.886	0.882

## FORA DA AMOSTRA:

	janela	amort r.qdr	amort r.abs	GAR CH	EGA RCH	Hent.	Gray comp	Gray simp	Park	Taylor
otelb	1.009	0.992	0.979	0.992	0.952	0.945	1.029	0.997	0.975	0.950
mtelb	1.007	0.996	0.978	0.988	0.956	0.954	0.996	0.983	0.975	0.953
opetr	0.937	0.877	0.900	0.889	0.874	0.883	0.856	0.856	0.888	0.891
mpetr	0.926	0.875	0.897	0.884	0.872	0.878	0.851	0.850	0.881	0.902
oelet	0.903	0.870	0.863	0.870	0.850	0.850	0.853	0.853	0.860	0.915
melet	0.871	0.839	0.836	0.843	0.825	0.825	0.820	0.821	0.832	0.922
obbdc	0.968	0.939	0.932	0.918	0.895	0.928	0.930	0.924	0.954	0.911
mbbdc	1.019	0.975	0.993	0.944	0.936	0.965	0.987	0.958	1.009	0.907
ovale	0.965	0.964	0.944	0.989	0.959	0.942		0.955	0.942	0.968
mvale	0.998	0.991	0.977	1.016	0.986	0.976		0.983	0.976	0.966
obrha	0.952	0.930	0.934	0.931	0.916	0.946	0.923	0.926	0.931	0.926
mbrha	0.950	0.939	0.929	0.932	0.908	0.946	0.919	0.941	0.928	0.928
<b>média</b>	0.959	0.932	0.930	0.933	0.911	0.920	0.916	0.921	0.929	0.928

**TABELA 31: Erros relativos de previsão – processo 1  
variância x retorno quadrado**

## NA AMOSTRA:

	janela	amort r.qdr	amort r.abs	GAR CH	EGA RCH	Hent.	Gray comp	Gray simp	Park	Taylor
otelb	0.527	0.486	0.410	0.462	0.405	0.401	0.486	0.467	0.380	0.404
mtelb	0.434	0.409	0.368	0.404	0.384	0.381	0.415	0.411	0.350	0.366
opetr	0.453	0.429	0.381	0.426	0.401	0.404	0.413	0.415	0.477	0.371
mpetr	0.436	0.421	0.377	0.415	0.408	0.403	0.413	0.416	0.367	0.360
oelet	0.527	0.467	0.413	0.465	0.423	0.424	0.463	0.463	0.394	0.404
melet	0.510	0.463	0.414	0.453	0.433	0.429	0.462	0.464	0.397	0.386
obbdc	0.659	0.618	0.502	0.579	0.506	0.501	0.569	0.567	0.482	0.491
mbbdc	0.566	0.545	0.473	0.523	0.518	0.574	0.535	0.523	0.651	0.451
ovale	0.504	0.483	0.425	0.489	0.456	0.453		0.481	0.394	0.408
mvale	0.476	0.463	0.411	0.470	0.431	0.427		0.470	0.387	0.396
obrha	0.674	0.667	0.561	0.661	0.588	0.663	0.655	0.668	0.521	0.516
mbrha	0.670	0.660	0.555	0.629	0.605	0.717	0.656	0.664	0.515	0.521
<b>média</b>	0.536	0.509	0.441	0.498	0.463	0.481	0.507	0.501	0.443	0.423

## FORA DA AMOSTRA:

	janela	amort r.qdr	amort r.abs	GAR CH	EGA RCH	Hent.	Gray comp	Gray simp	Park	Taylor
otelb	0.629	0.582	0.472	0.532	0.443	0.430	0.538	0.514	0.458	0.458
mtelb	0.597	0.540	0.450	0.522	0.418	0.428	0.484	0.468	0.441	0.465
opetr	0.562	0.487	0.446	0.491	0.435	0.433	0.445	0.445	0.552	0.420
mpetr	0.562	0.500	0.459	0.498	0.453	0.441	0.445	0.445	0.425	0.429
oelet	0.555	0.485	0.429	0.482	0.431	0.432	0.448	0.448	0.411	0.433
melet	0.543	0.479	0.422	0.482	0.435	0.427	0.433	0.435	0.403	0.446
obbdc	0.629	0.605	0.501	0.531	0.484	0.520	0.545	0.537	0.493	0.469
mbbdc	0.645	0.588	0.522	0.517	0.506	0.514	0.562	0.523	0.723	0.447
ovale	0.601	0.565	0.466	0.576	0.516	0.480		0.487	0.445	0.476
mvale	0.602	0.568	0.468	0.573	0.490	0.487		0.476	0.448	0.474
obrha	0.649	0.607	0.518	0.559	0.523	0.567	0.577	0.608	0.499	0.490
mbrha	0.649	0.606	0.518	0.562	0.554	0.596	0.583	0.505	0.498	0.493
<b>média</b>	0.602	0.551	0.473	0.527	0.474	0.480	0.506	0.491	0.483	0.458

**TABELA 32: Erros relativos de previsão – processo 2  
volatilidade x retorno absoluto**

Dentro e fora da amostra, o EGARCH e o modelo de Hentschel tiveram o menor erro médio, e a pior média foi do modelo de janela de tempo.

Na tabela 30 estão os erros absolutos de previsão do segundo processo, onde são comparadas previsões de volatilidade com valor absoluto dos retornos realizados; os valores mostrados na tabela são erros quadráticos médios.

Aqui se repete a tendência de erros das séries originais serem maiores que os das modificadas dentro da amostra e menores fora, pelo mesmo motivo que nos resultados da tabela 29. Os erros fora da amostra também são bem maiores que dentro e a diferença entre a média dos erros do melhor para o pior modelo é da ordem de 30% .

Os melhores resultados em termos de erros médios dentro e fora da amostra foram do modelo de Taylor, seguido pelo de amortecimento exponencial do retorno absoluto<sup>7</sup> e pelo EGARCH . A pior média foi do modelo de janela de tempo.

Na tabela 31, estão os erros relativos do processo 1 (variância contra retorno quadrado): as médias dos erros dentro e fora da amostra agora são da mesma ordem de grandeza. Dentro e fora da amostra, algumas séries originais têm erros menores que os das correspondentes modificadas, e outras têm maiores: isto significa que, padronizados pela variância da amostra, os erros de previsão de séries originais e modificadas se equívalem, e que a retirada de observações aberrantes na amostra não melhora a capacidade explicativa ou preditiva dos modelos. Como seria de se esperar, em quase todas as séries a média dos erros relativos fora da amostra é maior que na amostra, mas as diferenças são pequenas (4% ou menos) , indicando que os modelos prevêm variância quase tão bem (ou tão mal) fora da amostra como dentro dela.

Os resultados médios continuam variando pouco do melhor para o pior modelo, e a mudança de erros absolutos para relativos não alterou a posição relativa dos modelos no que diz respeito à média dos erros de previsão dentro e fora da amostra.

---

<sup>7</sup> Note-se que isto é natural, já que tanto o modelo de Taylor como o de amortecimento exponencial dos retornos absolutos são estimados a partir dos retornos absolutos e o valor *observado* da volatilidade, por este método, é justamente o valor absoluto dos retorno.

Na tabela 32 estão os resultados do processo 2 (volatilidade contra retorno absoluto) em termos de erros relativos de previsão. Novamente as médias dos erros de previsão dentro e fora da amostra ficaram da mesma ordem de grandeza. Os erros das séries originais são maiores que os das modificadas com mais frequência que o inverso, significando que talvez a retirada das observações aberrantes melhore ligeiramente a capacidade preditiva e explicativa dos modelos.

As médias dos erros de previsão fora da amostra foram maiores que na amostra, exceto para os modelos de Hentschel e de Gray completo, que tiveram a mesma média dentro e fora da amostra, e o de Gray simplificado, que previu melhor fora da amostra. Nos demais, a vantagem para a previsão dentro da amostra é mais acentuada que na tabela 31.

A ordem de grandeza da variação do erro médio do melhor para o pior modelo continua da ordem de 30% , e a posição relativa dos modelos, em termos de erros médios, também é a mesma que na tabela 30 (de erros absolutos, processo 2).

Aqui também, a mudança de erros absolutos para relativos não altera a posição relativa dos modelos e serve apenas para mostrar que os erros das previsões fora da amostra, descontado o efeito do aumento da variância no período mais recente, não são muito maiores que dentro da amostra.

Como na seção anterior, não é fácil resumir os resultados obtidos para os erros de previsão em uma conclusão, principalmente na escolha dos melhores modelos, porque os resultados obtidos dependem de como se define a variável que vai representar o 'realizado' do que se está modelando, e o comportamento dos modelos não é homogêneo quanto a esta definição. De maneira geral, o melhor compromisso entre resultados ficou com EGARCH e o modelo de Taylor, novamente sem um predomínio marcante, mas há um destaque negativo para o modelo de janela de tempo.

Também como na seção anterior, não é notada alteração importante quando se retiram as observações aberrantes: os erros relativos de previsão de séries originais e modificadas, de maneira geral, se equivalem.

Finalmente, pode-se notar que os erros relativos pelo processo 2 (volatilidade  $\times$  retorno absoluto) tendem a ser menores para as séries mais líquidas, mas isto não acontece para o processo 1.

### 3.5 – CONCLUSÃO DO CAPÍTULO

Este capítulo apresentou a formulação de dez modelos de volatilidade, bastante diferentes na sua concepção, estimou os parâmetros destes modelos aplicados a diferentes séries de retornos e, finalmente, avaliou os resultados obtidos.

Quanto à *escolha* dos modelos para análise, os resultados obtidos indicam que ela foi adequada pois, se alguns dos modelos são muito simples e mostraram resultados ruins, no outro extremo, os modelos mais complexos (com muitos parâmetros) nem sempre puderam ser bem estimados e os resultados obtidos não foram os melhores.

Quanto à *estimação* dos modelos, ela foi feita sem problemas para sete dos dez modelos: os algoritmos de estimação convergiram sem problemas e os valores parâmetros ficaram dentro do esperado. Os problemas aconteceram com os dois modelos de Gray e o de Hentschel: dificuldade de convergência do algoritmo de estimação, restrições sobre valores de parâmetros se mostrando ativas, resultados muito diferentes para diferentes séries e algumas vezes fora da faixa razoável. Os problemas foram maiores nas séries menos líquidas. A conclusão é que estes três modelos não são adequados às características de nossas ações.

Alguns fatos importantes ficam evidentes na estimação: a divergência entre o fator de decaimento ótimo e aquele recomendado pelo RiskMetrics para o amortecimento exponencial; a grande persistência dos modelos GARCH (que já havia surgido no capítulo 2); e a assimetria na resposta aos choques positivos e negativos evidenciada pelo EGARCH.

Quanto à *avaliação* dos modelos, o fato mais evidente são as caudas pesadas dos resíduos (retornos re-escalados) de todos os modelos, e a conseqüente rejeição de

normalidade. A explicação mais plausível para este fato é a falta de capacidade dos modelos para representar o processo gerador dos dados, pois muitas séries de resíduos apresentam correlação, e/ou correlação nos seus quadrados, e/ou têm rejeitada a hipótese nula (ser IID) no teste BDS.

Esta explicação parte do princípio, muito aceito em Finanças, que o retorno condicional à informação disponível tem distribuição normal. Se este princípio não for aceito, não há razão para os resíduos terem distribuição normal, e haveria um ganho em fazer as estimações por máxima verossimilhança usando outras distribuições para os resíduos (t de Student ou GED, por exemplo).

A comparação entre os modelos a partir das avaliações leva à conclusão que, olhando em conjunto os resíduos e as previsões, o modelo de Taylor e o EGARCH tiveram o melhor desempenho, embora não se destaquem marcadamente, porque as diferenças de resultados são pequenas e em alguns critérios eles sejam superados por outros modelos. Já o modelo de janela de tempo é claramente pior que os demais, em qualquer circunstância

As avaliações mostram também que a retirada das observações aberrantes (dentro da amostra) para formar as séries modificadas não teve influência importante no desempenho dos modelos: os seus parâmetros mudam, e seus resíduos e previsões são melhores em algumas séries/modelos e piores em outras, não permitindo que se conclua que o desempenho dos modelos das séries modificadas é melhor ou pior que o das séries originais.

De maneira geral, os modelos aplicados às séries mais líquidas produziram melhores resíduos e, em alguns casos, melhores previsões que os modelos aplicados às séries menos líquidas.

Um dado importante para melhor analisar os resultados aqui obtidos é o comportamento do mercado no período analisado: o período ‘dentro da amostra’ é menos volátil que os 400 dias finais ‘fora da amostra’, onde há uma sucessão de crises. Esta diferença de volatilidade, inclusive, fez com que fosse necessário criar os erros *relativos* de previsão, na seção 3.4.4.3, para permitir a comparação entre erros dentro e fora da amostra. Os resultados obtidos no capítulo dois não permitem que se conclua a

respeito de estacionariedade na variância das séries, e esta diferença de volatilidades dentro e fora da amostra é um claro indício de não estacionariedade, fato que é razoável em séries que cobrem vários anos (Taylor 1986).

Esta não estacionariedade na variância explica uma possível ‘falta de capacidade dos modelos para representar o processo gerador dos dados’, pois tende a piorar o desempenho dos modelos<sup>8</sup> em termos de resíduos e erros de previsão, nivelando-os por baixo, como parece ter ocorrido neste trabalho.

A duração que foi usada para as séries neste trabalho foi escolhida para ser da mesma ordem de grandeza (atendida a restrição de não buscar dados antes do ‘plano Real’) do que geralmente é empregado em estudos deste tipo, inclusive nos trabalhos que foram usados como referência para a formulação de modelos aqui estudados.

Os resultados obtidos para o valor em risco, como será visto a seguir, no capítulo 4, são também uma forte evidência de que não há estacionariedade na variância.

---

<sup>8</sup> À exceção do modelo de janela de tempo e dos dois de amortecimento exponencial, que não são estacionários.

### 3.6 – APÊNDICE DO CAPÍTULO 3

#### 3.6.1 – MODELAGEM DA ASSIMETRIA PELO EGARCH

A “curva de impacto da inovação” introduzida por Pagan e Schwert (1990) é uma ferramenta útil para ilustrar a assimetria. Ela relaciona revisões na volatilidade condicional em função de choques no retorno e é usada, não só no EGARCH, mas também na descrição do modelo de Hentschel, na seção 3.2.6 .

Supondo, para simplificar a exposição, um modelo EGARCH(p,1) , a influência (impacto) de um valor de retorno  $x_{t-1}$  sobre o logaritmo da variância condicional no

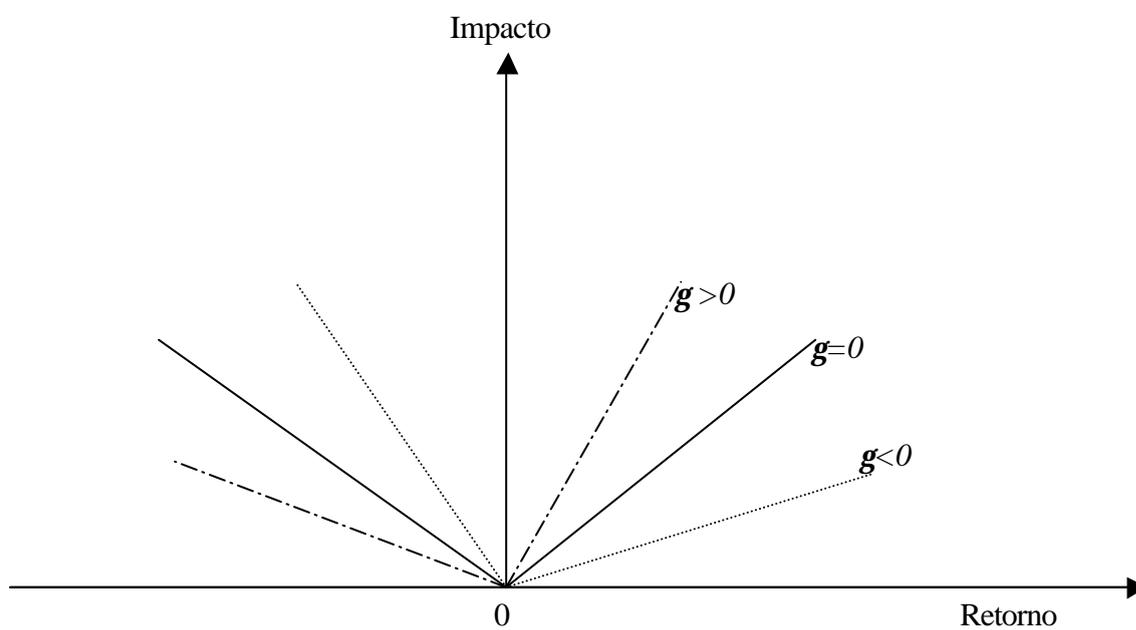
instante seguinte é dada por  $a \frac{|x_{t-1}|}{\hat{s}_{t-1}} + g \frac{x_{t-1}}{\hat{s}_{t-1}}$  .

Se  $x_{t-1}$  é positivo, este impacto é igual a  $a + g \frac{|x_{t-1}|}{\hat{s}_{t-1}}$  ;

Se  $x_{t-1}$  é negativo, este impacto é igual a  $a - g \frac{|x_{t-1}|}{\hat{s}_{t-1}}$  .

É fácil notar que um valor negativo para o parâmetro  $g$  faz com que o impacto de um retorno negativo será maior que o de um positivo, de mesmo valor absoluto.

Na figura 12 estão esboçadas as curvas de impacto, para três possíveis valores da constante  $g$  ; se ela for nula, o impacto é simétrico, ou seja, retornos positivos e negativos influenciam da mesma forma a volatilidade um período adiante, e esta situação corresponde às retas em traço cheio na figura; se a constante for positiva, retornos positivos impactam mais que negativos, e a curva gira para a esquerda, resultando as retas em traço-ponto; se ela for negativa, os retornos negativos impactam mais, e a curva gira para a direita, resultando as retas tracejadas da figura 12 , que correspondem à situação mais comum.



**FIGURA 12: Impacto da inovação – linha cheia se  $g=0$  (simétrica) ;  
tracejada se  $g<0$  ;traço-ponto se  $g >0$**

### 3.6.2 – CASOS PARTICULARES MAIS IMPORTANTES DO MODELO DE HENTSCHEL

- GARCH de Bollerslev (1986):  $\lambda=2$  ,  $\xi=2$  ,  $b=0$  ,  $c=0$  Este é o mais comum dos modelos da família e dispensa comentários.

- GARCH de valor absoluto de Taylor (1986) e de Schwert (1989):

$$I=1 , \mathbf{x}=1 , b=0, c=0$$

O modelo GARCH comum calcula a variância do próximo período a partir do quadrado do choque de retorno do período atual. Para choques muito grandes, isto pode produzir aumentos exageradamente grandes de variância. Friedman e Laibson (1989) argumentam que choques muito grandes são eventos extraordinários e propõem truncar sua influência na variância condicional. Taylor (1986) e Schwert (1989) propõem uma abordagem menos radical: um modelo ARCH que especifica o desvio padrão condicional com uma média móvel dos resíduos absolutos passados. Sua argumentação está de acordo com Davidian e Carroll (1987) que mostram, num contexto de regressão, que estimadores de variância baseados em resíduos absolutos são robustos a observações aberrantes. Nelson e Foster (1994) mostram que esse argumento similar vale num contexto GARCH. Cabe observar que a formulação ARCH de Taylor (1986) e de Schwert (1989) não permite assimetrias no processo da variância mas pode ser estendida para incluí-las.

- TGARCH de Zakoian (1991):  $I=1$  ,  $\mathbf{x}=1$  ,  $b=0$  ,  $c=qualquer$

O GARCH de limiar de Zakoian (1991) também trata o desvio padrão condicional como uma função linear dos choques e desvios padrão passados. Ele permite assimetria através da rotação da curva de impacto, mas não através de deslocamento.

- EGARCH de Nelson (1991):  $I=0$  ,  $\mathbf{x}=1$  ,  $b=0$  ,  $c=qualquer$

Este modelo já foi anteriormente comentado.

- GARCH não linear assimétrico:  $I=2$  ,  $\mathbf{x}=2$  ,  $b=qualquer$  ,  $c=0$

Esta é uma versão do GARCH comum, desenvolvida por Engle e Ng (1993), que inclui um deslocamento da curva de impacto, para modelar assimetria.

- GJR-GARCH:  $I=2$  ,  $\mathbf{x}=2$  ,  $b=0$  ,  $c=qualquer$

Esta também é uma versão do GARCH comum, desenvolvida por Glosten, Jagannathan e Runkle (1993), que inclui a possibilidade de giro na curva de impacto, para modelar assimetria.

- NARCH de Higgins e Bera (1992):  $I=\mathbf{x}$  ,  $b=0$  ,  $c=0$

Este modelo, chamado por seus autores de *Nonlinear ARCH*, também faz uma transformação de Box-Cox sem, entretanto admitir expoentes diferentes para desvios padrão e choques. Ele não admite assimetria e foi especificado originalmente como um modelo ARCH, mas pode ser facilmente estendido para a especificação GARCH.

- A-PARCH de Ding, Granjer e Engle (1993):  $\lambda=\xi$  ,  $b=0$  ,  $c=qualquer$

O Asymmetric Power ARCH foi desenvolvido a partir do GARCH não linear acima, incluindo parâmetro de assimetria por rotação da curva de impacto.

### 3.6.3 – DETALHAMENTO DO MODELO DE GRAY

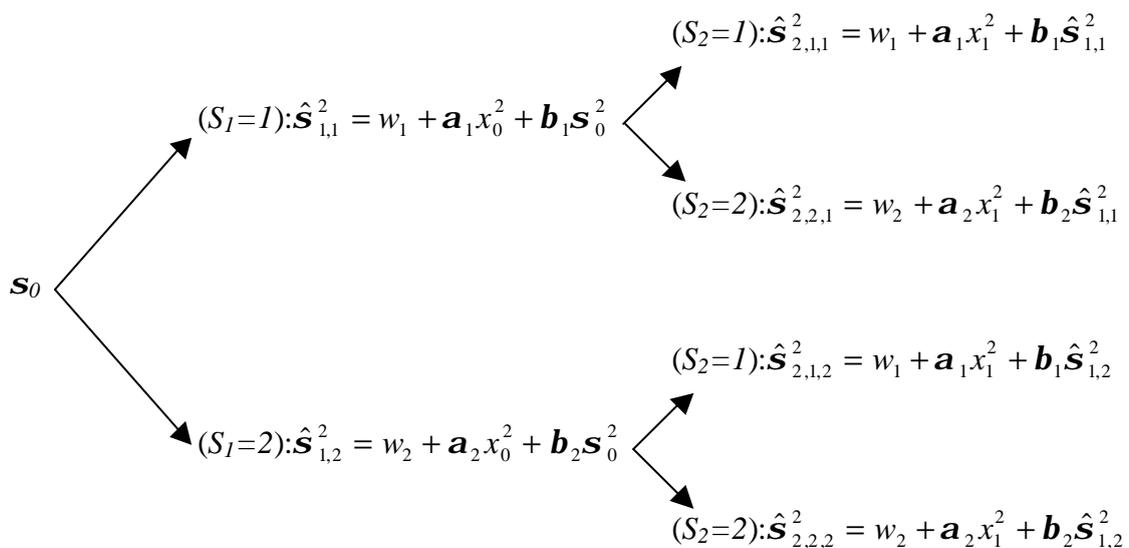
Nos modelos GARCH com mudança de regime, a variância condicional apresenta dependência com relação a toda a história dos dados. Esta dependência surge porque a distribuição do retorno no tempo  $t$  , condicional ao estado da natureza  $S_t$  e à informação disponível em  $t-1$  , depende diretamente de  $S_t$  e também indiretamente de  $\mathbf{I}_{S_{t-1}, S_{t-2}, \dots, \mathbf{C}}$  , por causa da dependência autorregressiva da variância condicional que existe nos modelos GARCH: a variância condicional no tempo  $t$  depende da variância condicional em  $t-1$  , que depende do regime em  $t-1$  e da variância condicional em  $t-2$  , e

assim por diante, e por conseqüência a variância condicional em  $t$  depende de toda a seqüência de regimes até  $t$ . No caso de serem dois estados possíveis em cada instante, a variância condicional em  $t$  depende de  $2^t$  possíveis regimes desde o instante inicial até  $t$ , tornando intratável o problema de maximização da função de verossimilhança.

A figura 13 ilustra este problema de dependência. Partindo de um instante zero, onde a volatilidade  $\mathbf{s}_0$  é suposta conhecida, pode-se chegar ao instante 1 com volatilidade condicional igual a  $\mathbf{s}_{1,1}$  ou  $\mathbf{s}_{1,2}$ , conforme ocorra o estado da natureza 1 ou 2, respectivamente.

A chegada ao instante 2 pode-se dar de quatro maneiras diferentes, a cada uma delas correspondendo uma diferente volatilidade:

- dado que ocorreu o estado 1 no instante 1, no instante 2 podem ocorrer os estados 1 ou 2, e as correspondentes volatilidades serão  $\mathbf{s}_{2,1,1}$  ou  $\mathbf{s}_{2,2,1}$  (o primeiro subscrito corresponde ao instante 2, o segundo corresponde ao estado da natureza em 2, e o terceiro ao estado da natureza em 1);
- dado que ocorreu o estado 2 no instante 1, no instante 2 podem ocorrer os estados 1 ou 2, e as correspondentes volatilidades serão  $\mathbf{s}_{2,1,2}$  ou  $\mathbf{s}_{2,2,2}$ .



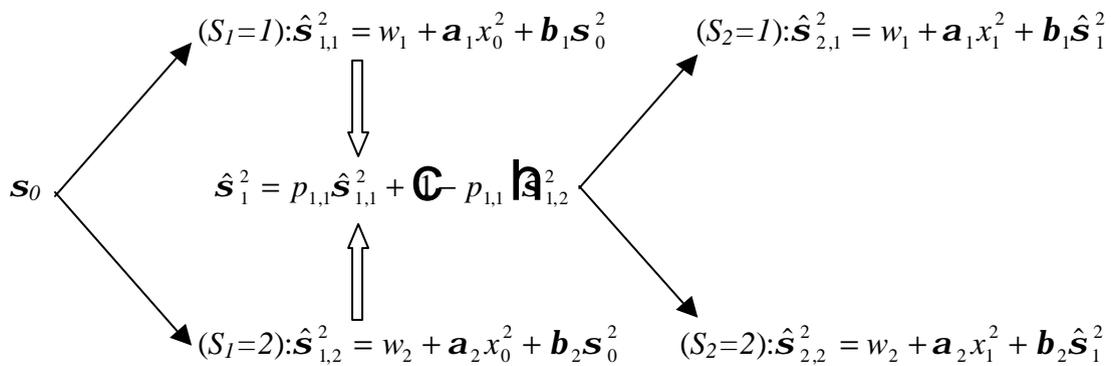
**FIGURA 13: Dependência da volatilidade com os estados da natureza nos modelos GARCH**

É interessante observar que esta dependência é causada pelo termo GARCH na equação da variância, e não ocorreria se  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 = 0$ , ou seja, se o modelo fosse ARCH.

Para não cair neste problema, o modelo de Gray utiliza a variância condicional à informação disponível no período anterior, mas não condicional aos estados da natureza,  $\mathbf{s}_t$ . Para determiná-la, é necessário conhecer a probabilidade de ocorrência de um dado estado, em um dado instante (no caso  $S_t=1$ ), condicional à informação disponível até o instante anterior,  $I_{t-1}$ . Esta probabilidade será chamada de  $p_{1,t}$ , logo,

$$p_{1,t} = \Pr\{\mathbf{G}_t = 1 | I_{t-1}\}.$$

Não é difícil mostrar que  $\mathbf{s}_t^2 = p_{1,t}\mathbf{s}_{t,1}^2 + \mathbf{C} - p_{1,t}\mathbf{h}_{t,2}^2$  e, assim, a figura 14 mostra como o esquema da dependência da volatilidade com os estados da natureza fica extremamente simplificado quando, em cada instante, determina-se a variância condicional apenas à informação disponível um período antes.



**FIGURA 14: Dependência da volatilidade com os estados da natureza nos modelos GARCH, usando a variância condicional apenas à informação passada**

Gray desenvolve em seu artigo uma fórmula recursiva para determinação das probabilidades condicionais à informação passada:

$$p_{1,t} = \frac{P g_{1,t-1} p_{1,t-1} + (1-Q) g_{2,t-1} p_{1,t-1}}{g_{1,t-1} p_{1,t-1} + g_{2,t-1} p_{1,t-1}}$$

Nesta equação define-se:  $g_{1,t} = f(v_t | S_t = 1) h$  e

$$g_{2,t} = f(v_t | S_t = 2) h$$

e  $f(v_t)$  é função densidade de probabilidade. No caso do GARCH comum tem-se  $x_t = \hat{s}_t u_t$  onde  $u_t$  tem distribuição idêntica e independente com média zero e variância um. No modelo de Gray tem-se também, para cada estado  $i$ ,  $v_t | S_t = i \sim \hat{s}_{t,i} u_t$ ; assumindo-se normalidade para a inovação (ou retorno re-escalado)  $u_t$ , vem que

$$g_{i,t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \hat{s}_{t,i}^2}} \exp\left\{-\frac{x_t^2}{2\hat{s}_{t,i}^2}\right\}$$

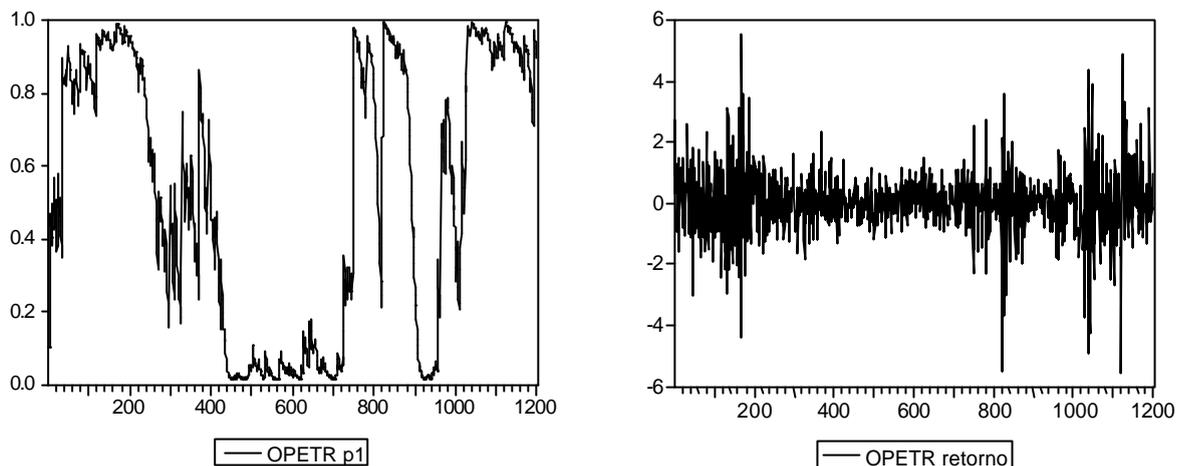
Então, assumida a normalidade condicional em cada regime, e com a fórmula recursiva de cálculo de probabilidades condicionais à informação passada, torna-se viável a estimação dos parâmetros por maximização de verossimilhança.

### 3.6.4 – SOLUÇÕES INADEQUADAS DO MODELO DE GRAY

Na estimação dos parâmetros para as séries em estudo surgiram algumas soluções que, embora de máxima verossimilhança, não correspondem à idéia que está por trás do modelo: estas soluções estão sendo aqui chamadas de ‘inadequadas’, e são comentadas a seguir.

A solução ótima ‘adequada’ não é difícil de identificar: ela deve apresentar probabilidades  $P$  e  $Q$  elevadas, para ser coerente com a interpretação do modelo: existem dois regimes de volatilidade, correspondentes a duas possíveis situações do mercado (tensão e calma, por exemplo) e, dado que se está num regime, a tendência é continuar nele, a não ser que mude o mercado.

Na figura 15 está o gráfico para a probabilidade de se estar no estado 1, condicional apenas à informação passada,  $p_{1,t}$ , e também o gráfico do retorno diário, para a série OPETR, que apresentou os maiores valores para  $P$  e  $Q$ , da ordem de 0,997 e 0,998, respectivamente:

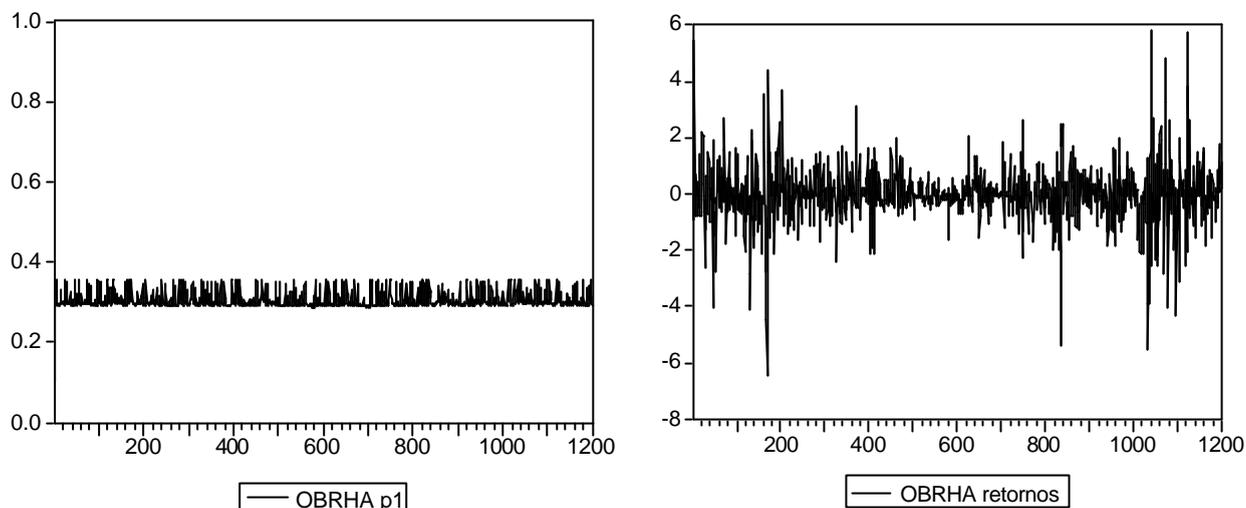


**FIGURA 15: Probabilidade de se estar no estado 1 e retorno da série OPETR**

Nesta figura fica claro que a probabilidade de se estar no estado 1 é extremamente alta nos períodos de tensão e extremamente baixa nos períodos de calma. Entre os dias 230 e 400 (de maio/95 a fevereiro/96) o modelo está ‘indeciso’, num período em que o mercado está passando de um período de grande tensão (crise do México) para um longo período de calma, que só irá terminar por volta do dia 720 (maio/97), onde começa um período de maior volatilidade que precede o crise da Ásia, em outubro/97 (por volta do dia 820).

Este tipo de gráfico e os valores obtidos para as probabilidades  $P$  e  $Q$  são consistentes com o que é encontrado na literatura sobre este tema.

Contrastando com a série OPETR, a figura 16 mostra os mesmos gráficos para a série OBRHA, para qual os valores ótimos de  $P$  e  $Q$  foram, respectivamente 0,354 e 0,716.



**FIGURA 16: Probabilidade de se estar no estado 1 e retorno da série OBRHA**

Na figura 16 pode-se observar que, embora a solução obtida seja ótima, ela não corresponde à idéia que está por trás da formulação do modelo, pois a probabilidade de se estar no estado 1 fica saltando quase que diariamente, oscilando entre os valores  $P$  e  $(1-Q)$ .

Este problema ocorreu para mais duas séries, além de OBRHA.

### 3.6.5 – PROCEDIMENTO DE ESTIMAÇÃO DO MODELO DE TAYLOR

Seguindo a sistemática teórica apresentada em 3.2.10, o procedimento de estimação dos parâmetros e volatilidades para cada série foi:

1. Determinar as 15 primeiras autocorrelações amostrais dos retornos absolutos, dentro da amostra. Neste trabalho optou-se por arbitrar  $j=15$ , enquanto Taylor recomenda que se usem as 30 ou 50 primeiras defasagens. O valor 15 foi escolhido porque observou-se que as defasagens de ordem mais altas, nas séries aqui estudadas, acrescentam mais ruído que informação e não melhoram o desempenho do modelo.

2. Usando estas autocorrelações amostrais, determinar  $k$  e  $\mathbf{f}$  de modo a minimizar  $F(k, \mathbf{f})$ , ou seja, minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre as autocorrelações empíricas dos retornos absolutos e as teóricas.
3. Determinar os parâmetros do ARMA(1,1) que tem função de autocorrelação  $k \mathbf{f}^t$ .
4. Determinados estes parâmetros, usar este ARMA e a série dos  $(q-1)$  primeiros retornos absolutos para prever o  $q$ -ésimo retorno absoluto, com  $q$  variando de 3 a 1200. Desta forma, estará gerada a série dos retornos absolutos previstos.
5. Dividir a série acima por  $\sqrt{2/p}$ , obtendo finalmente a série das previsões de volatilidade.

## CAPÍTULO 4 – VALOR EM RISCO

### 4.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo é feita uma aplicação dos modelos de volatilidade estudados no capítulo anterior, que consiste em usá-los para estimar valor em risco.

São consideradas as séries dos seis papéis dos capítulos anteriores, originais e modificadas. São empregados os modelos estimados no período inicial de 800 dias ‘na amostra’ e seus parâmetros são mantidos constantes para estimar o VaR em cada um dos 400 dias do período ‘fora da amostra’.

São utilizados dois processos para estimar o VaR: através dos quantis da distribuição empírica dos resíduos e pela determinação destes quantis usando a distribuição generalizada de Pareto, conforme a teoria dos valores extremos (TVE). A estimação dos parâmetros desta distribuição, e também dos correspondentes quantis da distribuição dos resíduos é feita com o auxílio do programa XTREMES.

Na seção 2.2, onde é feita a descrição das séries de retorno analisadas neste trabalho, está observado que as séries foram ‘modificadas’ (foram retiradas observações aberrantes) apenas para que se verificasse a consequência de modificá-las, em termos dos resultados obtidos na modelagem da variância. Foi também comentado que o uso de séries modificadas no trabalho não implica em julgamento da correção ou da conveniência de modificar as séries.

Aqui neste capítulo, há uma situação em que claramente não é conveniente a retirada de observações aberrantes das séries: a determinação de VaR a partir de quantis obtidos com o auxílio da TVE.

É evidente que não faz sentido retirar valores extremos dos dados quando se está usando justamente os valores extremos para obter os resultados.

No entanto, os resultados de VaR por TVE estão aqui apresentados para manter a unidade do trabalho, permitindo verificar como ficam os resultados neste caso.

Também é interessante notar que a retirada de observações é feita ‘na amostra’ e vai influenciar os valores dos parâmetros dos modelos, enquanto que a TVE é empregada na estimação dos quantis dos resíduos dos modelos ‘fora da amostra’, onde não há retirada de observações.

O VaR que é calculado é de um dia, com probabilidade de 95% . Esta probabilidade é muito usada na prática porque facilita os testes dos modelos de VaR pois, se o modelo está correto, uma vez por mês (um dia em cada vinte), em média, deverá ocorrer uma perda superior ao VaR..

A análise dos resultados obtidos pelos modelos é feita através da contagem do número de dias em que o retorno de cada papel foi pior que o VaR.

No apêndice 4.5.1 , no fim deste capítulo, estão apresentados os principais conceitos aqui empregados no cálculo do VaR e na avaliação dos resultados

A TVE lida com eventos raros, e pode-se obter melhores resultados de VaR quando a probabilidade de perda superior ao VaR é mais baixa. Por isto, todo o trabalho apresentado neste capítulo foi feito também para o VaR de 99% , onde deve haver em média uma perda superior ao VaR em cada 100 observações. Os principais resultados estão apresentados no anexo 4.5.5 , no final deste capítulo.

Também é feita uma análise dos formatos das curvas de VaR obtidas pelos modelos e sua capacidade de ‘envolver’ os mínimos dos retornos observados, assim como do valor médio do VaR correspondente a cada modelo.

Os resultados obtidos mostram que, em termo de contagem do número de vezes em que o VaR é ultrapassado pelo retorno, não há vantagem no uso de modelos de volatilidade mais elaborados: pelo contrário, as médias dos modelos mais simples são melhores. Isto se deve à não estacionariedade da variância das séries.

Para as séries mais líquidas, as médias de ultrapassagens em todos os modelos tendem a se igualar, mas o VaR médio dos modelos mais elaborados tende a ser menor, em valor

absoluto, evidenciando uma vantagem em termos de custo financeiro para os usuários destes modelos, naquelas séries.

Os resultados obtidos por TVE, com a estimação dos quantis de 5% através da distribuição generalizada de Pareto são apenas marginalmente melhores que os do outro método; para o VaR de 99% não há melhora com o uso de TVE.

Na seção 4.2, a seguir, estão os resultados obtidos com os quantis da distribuição empírica dos resíduos; na seção 4.3 estão os resultados obtidos usando TVE e em 4.4 estão as conclusões. No fim do capítulo está o apêndice, seção 4.5.

## **4.2 - VaR A PARTIR DOS QUANTIS DA DISTRIBUIÇÃO EMPÍRICA**

Nesta seção não há desenvolvimento teórico a apresentar: os quantis são obtidos ordenando-se os 800 resíduos (retornos re-escalados) dentro da amostra e fazendo-se interpolação linear entre o valor do quadragésimo e o do quadragésimo primeiro retorno.

Os quantis de 5% dos resíduos para as diversas séries e modelos estão na tabela 33. Comparando as médias dos diferentes modelos com o valor deste quantil para a distribuição normal padronizada (-1,645) pode-se notar que alguns modelos têm quantis, na média, abaixo deste valor, enquanto outros os têm bem acima. Isto acontece porque apenas os modelos estimados por máxima verossimilhança (os da família GARCH e os de Gray) têm necessariamente resíduos (retornos re-escalados) com desvio padrão igual a um. As séries de resíduos do modelo de amortecimento exponencial do retorno absoluto, por exemplo, têm desvio padrão da ordem de 1,4.

Esta falta de padronização nas distribuições dos resíduos indica que as volatilidades estimadas não estão na escala correta. Por exemplo, seria necessário multiplicar por uma constante da ordem de 1,4 as volatilidades obtidas pelo método de amortecimento exponencial do retorno absoluto, para obter resíduos com desvio padrão igual a um. No entanto, este problema não afeta o cálculo do VaR, já que  $VaR = volatilidade \times quantil$

e, se a volatilidade está subestimada e o quantil superestimado pelo mesmo fator, o fator é irrelevante. Isto não seria verdade se as volatilidades fossem, por exemplo, ser usadas para precificar opções.

	janela	amort r.qdr	amort r.abs	GAR CH	EGA RCH	Hent.	Gray comp	Gray simp	Park	Taylor
otelb	-1.688	-1.640	-2.131	-1.618	-1.608	-1.641	-1.646	-1.620	-2.032	-1.975
mtelb	-1.672	-1.691	-2.086	-1.623	-1.663	-1.667	-1.627	-1.611	-2.097	-1.988
opetr	-1.623	-1.696	-1.975	-1.562	-1.574	-1.603	-1.522	-1.511	-2.058	-1.800
mpetr	-1.618	-1.617	-1.911	-1.550	-1.530	-1.568	-1.523	-1.516	-2.060	-1.900
oelet	-1.643	-1.641	-2.046	-1.552	-1.543	-1.544	-1.567	-1.565	-2.001	-1.892
melet	-1.632	-1.616	-2.051	-1.560	-1.541	-1.533	-1.570	-1.588	-2.034	-1.856
obbdc	-1.749	-1.526	-2.272	-1.607	-1.545	-1.590	-1.563	-1.564	-1.881	-1.857
mbbdc	-1.727	-1.738	-2.138	-1.589	-1.581	-1.599	-1.617	-1.617	-1.927	-1.871
ovale	-1.678	-1.696	-2.129	-1.544	-1.525	-1.510		-1.551	-1.907	-1.910
mvale	-1.670	-1.609	-2.110	-1.524	-1.516	-1.574		-1.538	-2.007	-1.864
obrha	-1.715	-1.697	-2.243	-1.605	-1.583	-1.619	-1.418	-1.409	-2.407	-1.810
mbrha	-1.712	-1.839	-2.252	-1.558	-1.526	-1.572	-1.412	-1.397	-2.435	-1.856
<b>média</b>	-1.677	-1.667	-2.112	-1.574	-1.561	-1.585	-1.547	-1.541	-2.070	-1.882

**TABELA 33: Quantis de 5% das distribuições empíricas dos resíduos**

Na tabela 34 está o número de vezes em que o retorno esteve pior que o VaR (perda além do VaR), fora da amostra. Os valores críticos do teste de Kupiec (vide anexo 4.5.1.2, no final deste capítulo), para um nível de 5%, correspondem a uma faixa de 13 a 29 ultrapassagens, incluídos os extremos, ou seja, não se pode rejeitar a hipótese nula de que a probabilidade de o VaR ser ultrapassado está correta, se o número de ultrapassagens estiver entre aqueles dois valores. Na tabela 34, há aproximadamente o mesmo número de valores dentro e fora do intervalo [13,19], e preferiu-se marcar com asterisco os casos em que não há rejeição da hipótese nula, ou seja, o VaR do modelo/série tem probabilidade correta.

Pode-se notar na tabela 34 uma concentração de asteriscos no canto superior esquerdo da tabela: ou seja, a combinação de modelo sofisticado com série menos líquida resulta na rejeição da hipótese de que o modelo de VaR está correto. As duas séries de Telebrás têm asterisco para todos os modelos, e o número de ultrapassagens está quase

sempre próximo de 20, que é o valor esperado deste número. As séries de Eletrobrás também mostraram bons valores para o número de ultrapassagens em praticamente todos os modelos, enquanto que as duas séries de Brahma têm asterisco somente para um modelo, mesmo assim, com valor alto de ultrapassagens. Isto indica que, as séries as mais líquidas tendem a responder melhor aos modelos.

	janela	amort r.qdr	amort r.abs	GAR CH	EGA RCH	Hent.	Gray comp	Gray simp	Park	Taylor
otelb	21(*)	16(*)	17(*)	22(*)	25(*)	24(*)	18(*)	21(*)	28(*)	21(*)
mtelb	21(*)	20(*)	18(*)	16(*)	21(*)	21(*)	18(*)	22(*)	29(*)	19(*)
opetr	30	29(*)	29(*)	30	28(*)	29(*)	32	33	32	38
mpetr	30	27(*)	30	30	29(*)	30	31	33	32	30
oelet	23(*)	23(*)	21(*)	25(*)	25(*)	27(*)	26(*)	26(*)	25(*)	31
melet	23(*)	22(*)	20(*)	23(*)	25(*)	26(*)	23(*)	23(*)	25(*)	33
obbdc	21(*)	19(*)	25(*)	28(*)	29(*)	30	30	31	35	37
mbbdc	21(*)	22(*)	27(*)	29(*)	28(*)	29(*)	26(*)	29(*)	35	36
ovale	28(*)	24(*)	25(*)	28(*)	35	38		36	37	36
mvale	28(*)	25(*)	26(*)	29(*)	37	36		36	34	38
obrha	33	35	34	34	35	37	38	36	27(*)	46
mbrha	33	37	35	35	38	38	38	62	27(*)	48
<b>média</b>	26.0	24.9	25.6	27.4	29.6	30.4	28.0	32.3	30.5	34.4

**TABELA 34: Número de vezes em que o VaR foi ultrapassado fora da amostra Esperado 20 – mínimo 13 – máximo 29**

Não se nota diferença sistemática, mais uma vez, entre os resultados para os modelos de séries originais e modificadas.

Quanto à avaliação do desempenho dos modelos, pode-se notar que as melhores médias (mais próximas de 20) são as dos três modelos mais simples: o de janela de tempo, que não tem parâmetros, e os dois de amortecimento exponencial que têm um parâmetro.

Estes resultados de desempenho dos modelos são consequência da não estacionariedade das séries, já comentada no capítulo 3. Lá, o modelo de janela de tempo foi inferior aos demais, em termos de resíduos e previsões, e os outros modelos tiveram desempenho semelhante. Aqui, o efeito da não estacionariedade da variância é mais acentuado, fazendo que os três modelos mais simples, que são não estacionários, apresentem

desempenho superior ao dos outros sete, em termos de número médio de ultrapassagens do VaR.

Na seção 4.3 , a seguir, o VaR é calculado a partir dos quantis obtidos por TVE, e os resultados, em termos de número de ultrapassagens, são semelhantes aos da tabela 34; os resultados são melhores apenas quando o período fora da amostra é reduzido da 400 para 100 dias. Isto indica, mais uma vez, que os maus resultados obtidos pelos sete modelos mais elaborados são consequência da não estacionariedade das séries, pois não podem ser melhorados com uma melhor estimação dos quantis.

Um outro tipo de comparação que pode ser feito entre modelos de VaR é quanto ao seu custo financeiro. Supondo que uma instituição financeira tenha que manter reservas proporcionais ao VaR de determinada aplicação, e dado que diferentes modelos de volatilidade resultam em valores diferentes para o VaR, é interessante para a instituição usar o modelo que resulte, em média, em menor volume de reservas, desde que todos os modelos apresentem número de ultrapassagens dentro dos limites do teste de Kupiec.

Dentro desta ótica, atendidos o limites do teste, o melhor modelo é o que apresenta o menor (em valor absoluto) VaR médio diário. A série OTELB teve número de ultrapassagens satisfatório em todos os modelos. Na tabela 35 está o VaR médio diário fora da amostra correspondente a cada modelo<sup>9</sup>, para esta série. As linhas estão organizadas do menor para o maior (em valor absoluto) VaR médio.

<b>MODELO</b>	<b>VaR MÉDIO</b>
EGARCH	-1.522
Taylor	-1.553
Hentschel	-1.555
Gray simplificado	-1.612
GARCH	-1.638
Gray completo	-1.684
Amortec. expo. retorno absoluto	-1.742
Janela de tempo	-1.767
Amortec. expo. retorno quadrado	-1.826

**TABELA 35: VaR médio diário para a série OTELB**

<sup>9</sup> Não foi incluído o modelo de volatilidade de Parkinson porque a série de retornos usada neste modelo não é a mesma dos outros (vide seção 3.2.9).

Esta tabela mostra que os dois modelos melhor avaliados no capítulo 3 são os que têm melhor VaR médio e os três modelos mais simples são os de VaR médio mais alto.

Os quantis empíricos são determinados dentro da amostra e, por definição, o VaR dentro da amostra é ultrapassado 40 vezes (5% dos 800 dias) pelo retorno, em todos os modelos. Assim se esta análise for feita dentro da amostra, o custo médio diário de cada modelo (média para todas as séries) estará sempre associado a um mesmo resultado de ultrapassagens do VaR. Na tabela 36 estão apresentados estes valores, também ordenados da mesma forma que na tabela anterior; a nova coluna significa classificação anterior.

<b>MODELO</b>	<b>CLASS. ANT.</b>	<b>VaR MÉDIO</b>
Taylor	2	-1.192
EGARCH	1	-1.204
Gray simplificado	4	-1.217
Gray completo	6	-1.225
Hentschel	3	-1.229
GARCH	5	-1.235
Amortec. expo. retorno absoluto	7	-1.266
Janela de tempo	8	-1.275
Amortec. expo. retorno quadrado	9	-1.279

**TABELA 36: Média do VaR médio diário para todas as séries, dentro da amostra**

Observa-se na tabela 36 que os dois primeiros classificados são os mesmos que na tabela 35, embora em ordem trocada, e os três últimos modelos confirmaram suas posições.

Desta análise pode-se concluir que, atendida a restrição de contagem de ultrapassagens, há uma vantagem no uso de melhores modelos de volatilidade condicional para determinar o VaR.

Para ilustrar as razões desta vantagem, estão apresentadas a seguir quatro figuras com a previsão do VaR diário e o retorno observado para a série OTELB, modelos de janela de tempo, amortecimento exponencial do retorno quadrado, GARCH e EGARCH.

Quanto às circunstâncias em que as ultrapassagens ocorrem, pode-se notar inicialmente que há retornos negativos que são de alto valor absoluto e são ‘inesperados’, ou seja,

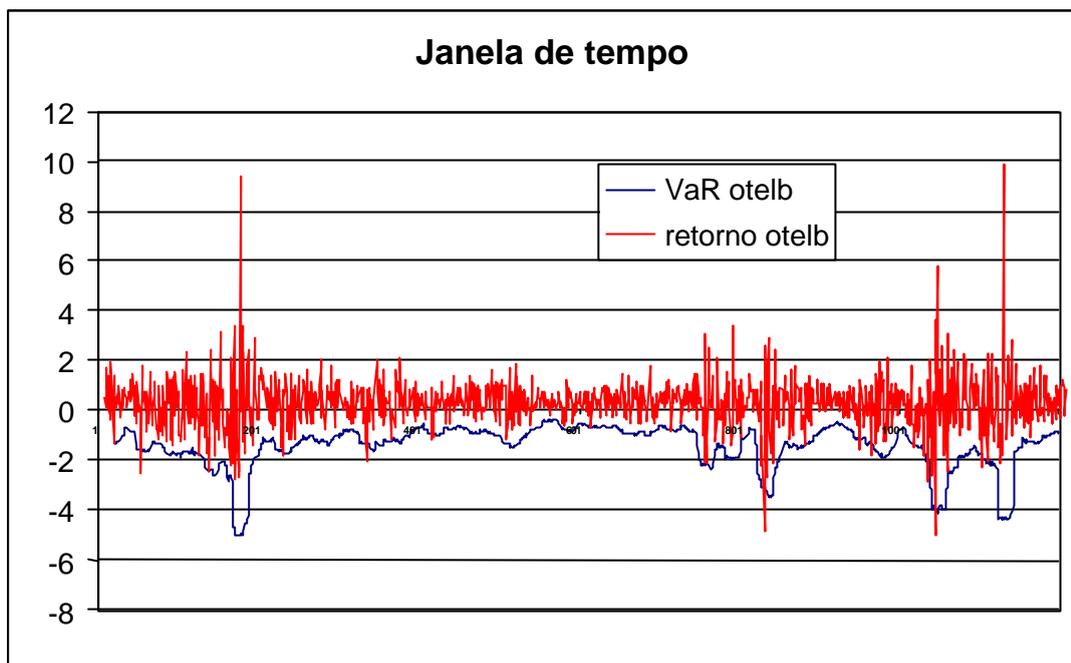
não são precedidos por período de turbulência. Dentro da amostra há por exemplo os dias 46 (5/9/94), 327 (26/10/95) e 748 (15/7/97) onde houve quedas altas e inesperadas no preço de Telebrás. Fora da amostra há os dias 822 (27/10/97, na crise da Ásia) e 1037 (10/9/98, crise da Rússia; este já dentro de um período turbulento, mas com uma queda de preço muito alta, de mais de 5 desvios padrão). Estes retornos inesperados ultrapassam o VaR de todos os modelos e correspondem a situações de tensão no mercado onde, por definição, não se aplica o conceito de VaR.

Há outras ultrapassagens que ocorrem pela incapacidade do modelo em gerar uma curva de valores de VaR que envolva perfeitamente a parte inferior da curva de retornos observados. Como é impossível para os modelos prever com perfeição a volatilidade, o VaR é definido com uma probabilidade de ultrapassagem.

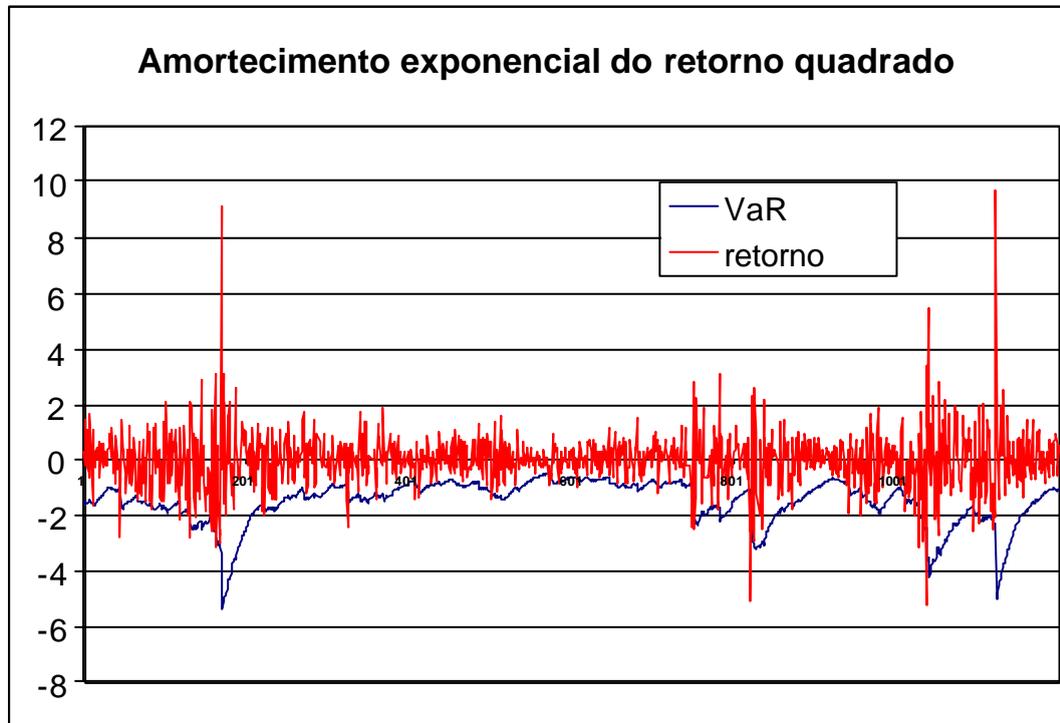
Evidentemente, quanto melhor a previsão, mais próxima a curva de VaR estará da parte inferior da curva de retornos.

Observando-se os gráficos das figuras 17 a 20, pode-se notar que as curvas de VaR dos modelos de janela de tempo e de amortecimento exponencial do retorno quadrado seguem de longe os mínimos dos retornos. Os dois modelos seguintes, GARCH e EGARCH apresentam um comportamento melhor sob este aspecto mas, ainda assim, notam-se alguns 'claros' entre o VaR do modelo GARCH e os retornos negativos, principalmente em função da alta persistência da volatilidade, que demora a cair após os choques.

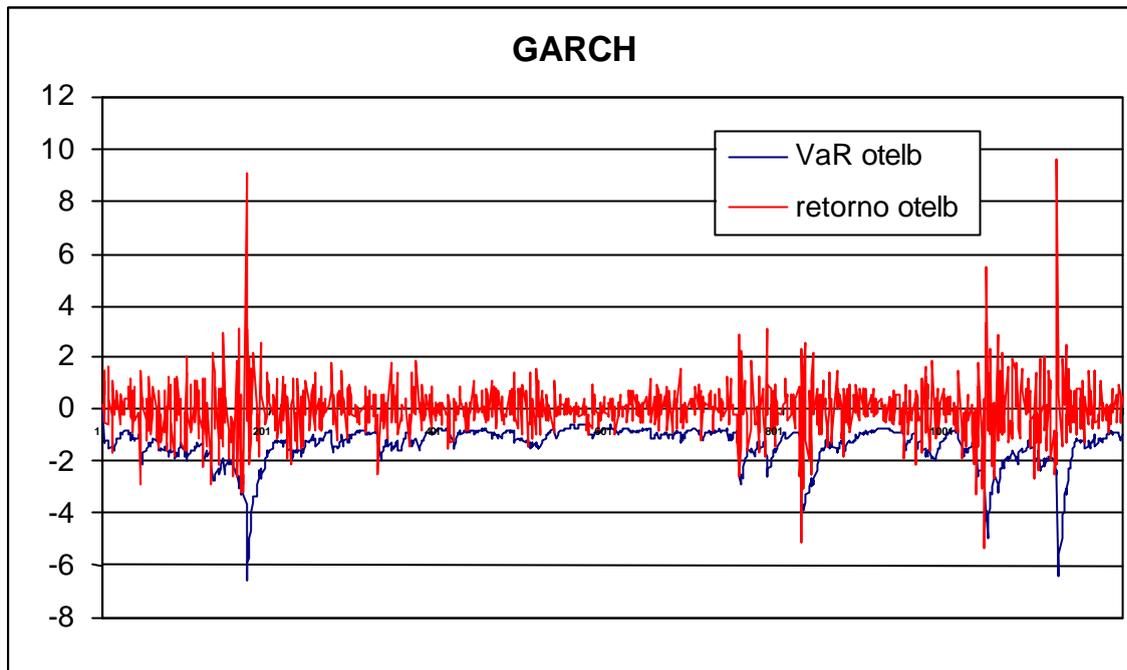
O gráfico de EGARCH, na figura 20, evidencia que a capacidade de modelar assimetricamente a influência de choques positivos e negativos traz uma sensível melhora com relação ao GARCH, e isto fica evidente, por exemplo, no grande choque positivo do dia 170 (10/3/95, crise do México).



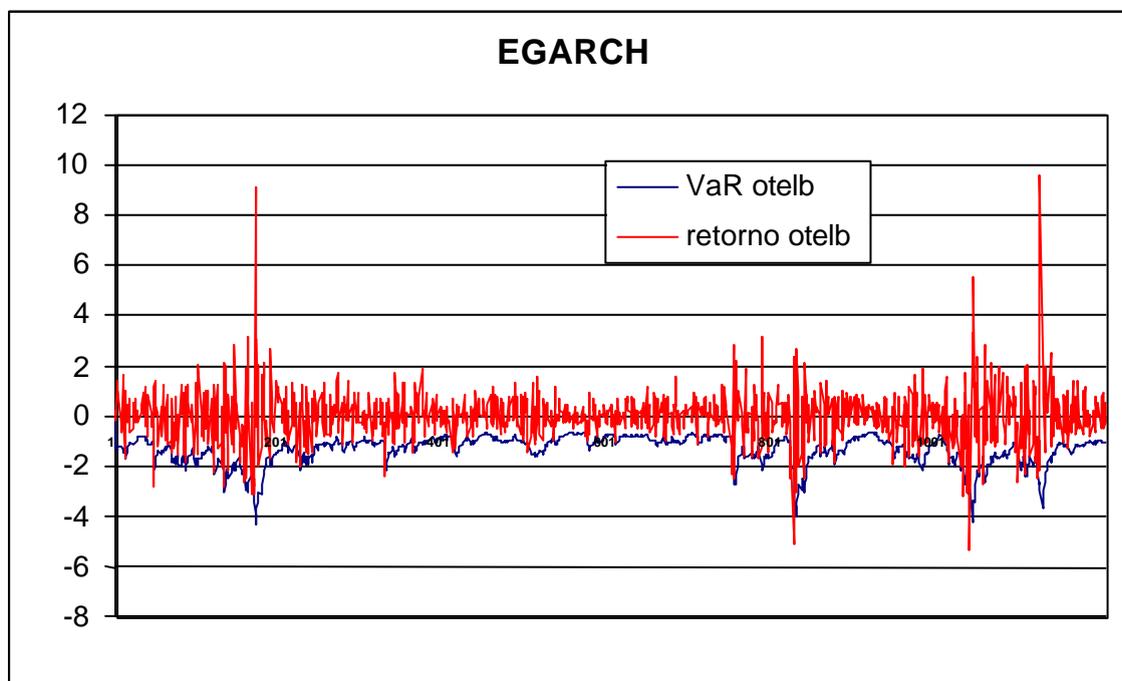
**FIGURA 17: VaR a partir do quantil da distribuição empírica versus retorno. Série OTELB - modelo de janela de tempo**



**FIGURA 18: VaR a partir do quantil da distribuição empírica versus retorno. Série OTELB - modelo de amortecimento exponencial do retorno quadrado**



**FIGURA 19: VaR a partir do quantil da distribuição empírica versus retorno. Série OTELB - modelo GARCH**



**FIGURA 20: VaR a partir do quantil da distribuição empírica versus retorno. Série OTELB - modelo EGARCH**

### 4.3 –VaR A PARTIR DOS QUANTIS ESTIMADOS PELA TVE

Para todos os modelos, o retorno (resíduo ARMA) é suposto da forma  $x_t = e_t \cdot s_t$ , onde  $s_t$  é modelado pelo correspondente modelo de volatilidade e, desta forma, conhece-se a distribuição empírica dos resíduos dada pelos retornos re-escalados  $\hat{e}_t = x_t / \hat{s}_t$ . A estimação do quantil de cada distribuição de resíduos será feita a partir da modelagem da sua cauda esquerda, e esta modelagem será baseada em resultados da TVE conforme o resumo teórico que está apresentado no anexo 4.5.2, no fim deste capítulo.

Na modelagem da cauda esquerda da distribuição dos resíduos são usados apenas os menores (mais negativos) resíduos. A determinação da quantidade de valores extremos a ser usada é, por vezes, problemática; no anexo 4.5.3 estão os critérios usados nesta determinação.

A estimação dos quantis por TVE não teve resultado satisfatório para três séries/modelos ( OELET/janela de tempo, MTELB/GARCH e MBBDC/Hentschel), que foram excluídas da análise por TVE. Também no anexo 4.5.3 estão os critérios usados para esta exclusão.

Na tabela 37 estão os quantis de 5% das distribuições dos resíduos obtidos por TVE. . Pode-se notar que, via de regra, o quantil obtido por TVE não é muito diferente do empírico: considerando o valor absoluto, as maiores diferenças entre os quantis por TVE e os empíricos são: para mais, +16% (OELET/janela de tempo, que foi excluído, e MBRHA/amortecimento do retorno quadrado) e, para menos, -18% (MBBDC/Hentschel, que também foi excluído).

No anexo 4.5.4 estão dez tabelas com resultados detalhados da estimação dos quantis por TVE.

	janela	amort r.qdr	amort r.abs	GAR CH	EGA RCH	Hent.	Gray comp	Gray simp	Park	Taylor
otelb	-1.688	-1.640	-2.131	-1.618	-1.608	-1.641	-1.646	-1.620	-2.032	-1.975
mtelb	-1.672	-1.691	-2.086	-1.623	-1.663	-1.667	-1.627	-1.611	-2.097	-1.988
opetr	-1.623	-1.696	-1.975	-1.562	-1.574	-1.603	-1.522	-1.511	-2.058	-1.800
mpetr	-1.618	-1.617	-1.911	-1.550	-1.530	-1.568	-1.523	-1.516	-2.060	-1.900
oelet	-1.643	-1.641	-2.046	-1.552	-1.543	-1.544	-1.567	-1.565	-2.001	-1.892
melet	-1.632	-1.616	-2.051	-1.560	-1.541	-1.533	-1.570	-1.588	-2.034	-1.856
obbdc	-1.749	-1.526	-2.272	-1.607	-1.545	-1.590	-1.563	-1.564	-1.881	-1.857
mbbdc	-1.727	-1.738	-2.138	-1.589	-1.581	-1.599	-1.617	-1.617	-1.927	-1.871
ovale	-1.678	-1.696	-2.129	-1.544	-1.525	-1.510		-1.551	-1.907	-1.910
mvale	-1.670	-1.609	-2.110	-1.524	-1.516	-1.574		-1.538	-2.007	-1.864
obrha	-1.715	-1.697	-2.243	-1.605	-1.583	-1.619	-1.418	-1.409	-2.407	-1.810
mbrha	-1.712	-1.839	-2.252	-1.558	-1.526	-1.572	-1.412	-1.397	-2.435	-1.856
<b>média</b>	<b>-1.677</b>	<b>-1.667</b>	<b>-2.112</b>	<b>-1.574</b>	<b>-1.561</b>	<b>-1.585</b>	<b>-1.547</b>	<b>-1.541</b>	<b>-2.070</b>	<b>-1.882</b>

**TABELA 37: Quantis de 5% das distribuições dos resíduos obtidas por TVE**

Os resultados da contagem de ultrapassagens fora da amostra estão na tabela 38 ; estes resultados são semelhantes aos da tabela 34, onde estão as contagens de ultrapassagens fora da amostra para o VaR estimado com os quantis da distribuição empírica. As médias também crescem da esquerda para a direita, e os asteriscos (não rejeição da hipótese de VaR com probabilidade correta) aparecem com mais frequência no canto superior esquerdo da tabela.

	janela	amort r.qdr	amort r.abs	GAR CH	EGA RCH	Hent.	Gray comp	Gray simp	Park	Taylor
otelb	21(*)	19(*)	19(*)	26(*)	25(*)	24(*)	21(*)	23(*)	28(*)	21(*)
mtelb	21(*)	20(*)	18(*)		23(*)	21(*)	21(*)	22(*)	29(*)	19(*)
opetr	28(*)	24(*)	29(*)	29(*)	28(*)	29(*)	32	33	32	38
mpetr	28(*)	27(*)	30	26(*)	29(*)	26(*)	29(*)	33	33	29(*)
oelet		23(*)	20(*)	22(*)	28(*)	29(*)	26(*)	26(*)	25(*)	33
melet	23(*)	24(*)	20(*)	25(*)	20(*)	24(*)	26(*)	23(*)	25(*)	33
obbdc	22(*)	25(*)	25(*)	25(*)	29(*)	25(*)	24(*)	31	37	37
mbbdc	21(*)	21(*)	20(*)	37	24(*)		26(*)	25(*)	35	37
ovale	30	23(*)	24(*)	29(*)	34	38		36	39	35
mvale	30	26(*)	25(*)	27(*)	36	36		33	38	34
obrha	35	35	37	34	41	37	39	36	28(*)	46
mbrha	35	26(*)	36	36	38	35	38	62	28(*)	46
<b>média</b>	<b>26.7</b>	<b>24.4</b>	<b>25.3</b>	<b>28.7</b>	<b>29.6</b>	<b>29.5</b>	<b>28.2</b>	<b>31.9</b>	<b>31.4</b>	<b>34.0</b>

**TABELA 38: Número de vezes em que o VaR foi ultrapassado fora da amostra. Esperado 20 – mínimo 13 – máximo 29**

De maneira geral, as conclusões a respeito dos modelos e séries, baseadas nos resultados da tabela 34 são confirmados pela tabela 38, sendo desnecessário repeti-las.

Contando os asteriscos das duas tabelas, verifica-se que a tabela 38 tem dois asteriscos a mais, e que as três séries que não entraram na análise fora da amostra tinham asterisco na tabela 34, resultando uma vantagem de 5 asteriscos para a tabela 38. As séries de Petrobrás, segundo papel mais líquido, que tinham tido apenas seis asteriscos quando os quantis foram estimados pela distribuição empírica, têm treze asteriscos na tabela 38. Conclui-se, portanto que houve realmente alguma melhora nas previsões do VaR, quando o quantil de 5% foi estimado pela TVE.

Finalmente, foi feita também a mesma análise de número de ultrapassagens do VaR usando um período mais curto fora da amostra: apenas os primeiros 100, dos 400 dias. Esta contagem foi feita apenas com os quantis estimados pela TVE, e os resultados estão na tabela 39.

	janela	amort r.qdr	amort r.abs	GAR CH	EGA RCH	Hent.	Gray comp	Gray simp	Park	Taylor
otelb	4(*)	4(*)	3(*)	5(*)	6(*)	6(*)	4(*)	5(*)	8(*)	5(*)
mtelb	4(*)	4(*)	4(*)		5(*)	4(*)	4(*)	5(*)	8(*)	5(*)
opetr	6(*)	4(*)	6(*)	6(*)	7(*)	8(*)	8(*)	8(*)	9(*)	8(*)
mpetr	6(*)	6(*)	6(*)	5(*)	7(*)	6(*)	7(*)	8(*)	9(*)	7(*)
oelet		5(*)	5(*)	4(*)	5(*)	7(*)	5(*)	5(*)	6(*)	6(*)
melet	4(*)	5(*)	4(*)	4(*)	4(*)	4(*)	5(*)	5(*)	6(*)	7(*)
obbdc	5(*)	6(*)	6(*)	7(*)	7(*)	7(*)	7(*)	7(*)	12	9(*)
mbbdc	5(*)	5(*)	5(*)	8(*)	7(*)		7(*)	8(*)	11	9(*)
ovale	8(*)	7(*)	7(*)	9(*)	10	10		9(*)	10	10
mvale	8(*)	7(*)	7(*)	9(*)	10	11		8(*)	10	10
obrha	8(*)	9(*)	10	9(*)	9(*)	9(*)	10	9(*)	6(*)	14
mbrha	8(*)	7(*)	9(*)	9(*)	9(*)	8(*)	10	17	6(*)	13
<b>média</b>	6.0	5.8	6.0	6.8	7.2	7.3	6.7	7.8	8.4	8.6

**TABELA 39: Número de vezes em que o VaR foi ultrapassado nos primeiros 100 dias fora da amostra. Esperado 5 – mínimo 2 – máximo 9**

Esta tabela traz os resultados mais favoráveis, em termos de não rejeição da hipótese de que a probabilidade do VaR está correta: a grande maioria das contagens de ultrapassagens está dentro dos limites do teste, para um nível de 5% - o intervalo [2,9].

Estes melhores resultados são coerentes com a não estacionariedade das séries. Entretanto permanecem os problemas já comentados: o número médio de ultrapassagens cresce para a direita da tabela e o canto inferior direito é pobre em asteriscos, confirmando o mau desempenho dos modelos mais sofisticados nas séries correspondentes aos papéis menos líquidos.

A TVE permite a modelagem das caudas e estimativas relacionadas com eventos com probabilidades muito baixas, da ordem de 1% ou 0,1%. Nestas situações, a vantagem de trabalhar com quantis estimados pela TVE e não com quantis empíricos pode ser maior. Mendes (2000) usa a TVE para estimar VaR de até 99,9% para séries de índices de mercados latino-americanos.

No anexo 4.5.5, no fim deste capítulo, foi calculado o VaR de 99%, com quantis empíricos e quantis determinados por TVE. Os resultados obtidos, embora os números de ultrapassagens sejam outros, são semelhantes aos do VaR de 95% : os três modelos não estacionários têm melhores médias de ultrapassagens, os resultados obtidos com o uso da TVE não são melhores que os obtidos com quantis empíricos e o encurtamento do período fora da amostra resulta em melhores resultados.

O fato de não haver melhora de resultados de VaR de 1% com quantis por TVE, em comparação aos valores obtidos com os quantis empíricos, confirma que os maus resultados de VaR decorrem da não estacionariedade das séries e não de deficiência na estimação dos quantis.

#### 4.4 – CONCLUSÃO DO CAPÍTULO

Este capítulo tem dois pontos que chamam mais a atenção: os maus resultados das contagens de ultrapassagens do VaR pelos modelos mais elaborados, e os resultados obtidos com VaR calculado a partir de quantis estimados por TVE, equivalentes aos obtidos a partir dos quantis empíricos.

No capítulo 2 surgiram evidências de não estacionariedade na variância das séries; no capítulo 3 estas evidências foram reforçadas e os resultados obtidos nos resíduos e nas previsões dos modelos foram explicados por esta não estacionariedade.

Neste capítulo, mais uma vez, o bom resultado na contagem das ultrapassagens do VaR resultante das previsões de volatilidade dos modelos não estacionários, a impossibilidade de mudar resultados melhorando a estimação dos quantis, e a melhora relativa do resultado dos modelos mais elaborados quando aplicados a séries mais curtas fora da amostra decorrem daquela não estacionariedade.

Séries relativamente longas, como as que foram usadas neste trabalho, são comuns em aplicações com dados de mercados internacionais. Taylor (1986) , conforme citado em 2.3.1 , questiona a aplicabilidade de modelos estacionários em séries longas. Este problema parece ser mais forte no Brasil: os resultados obtidos neste trabalho mostram que a estimação de modelos de variância condicional e sua aplicação na previsão deve ser feita aqui, de preferência, em períodos mais curtos.

No entanto, o usual nos trabalhos recentes de autores brasileiros sobre modelos de volatilidade são aplicações a séries longas: Moraes e Portugal (1999), Issler (1999) , e Pereira e outros (1999), já citados no capítulo 2 , usam aproximadamente o mesmo período de dados deste trabalho. Issler, no mesmo artigo, usa também 8 anos de dados na série de preços do cacau. Ziegelman e Pereira (1997) usam 2400 retornos diários (de 1986 a 1995) do IBOVESPA na comparação de modelos de volatilidade estocástica.

Outro ponto que chama a atenção é a questão do VaR médio. Mesmo com as dificuldades decorrentes da não estacionariedade das séries, ficou claro que há um ganho financeiro quando se usa um bom modelo de volatilidade para calcular o VaR.

Conclui-se que não basta prever o VaR de maneira a ter um bom número de ultrapassagens num 'back test': é também necessário que o modelo de volatilidade faça boas previsões, de modo a diminuir o valor (absoluto) médio do VaR.

## 4.5 – APÊNDICE DO CAPÍTULO 4

### 4.5.1 – CONCEITUAÇÃO DO VaR

#### 4.5.1.1 – Cálculo do VaR

O valor em risco de uma aplicação financeira é definido como a maior perda que pode ocorrer, dentro de um período de tempo pré-definido, com uma dada probabilidade. No corpo do capítulo, o período de tempo será sempre de um dia (VaR diário) e a probabilidade será sempre igual a 95% <sup>10</sup>.

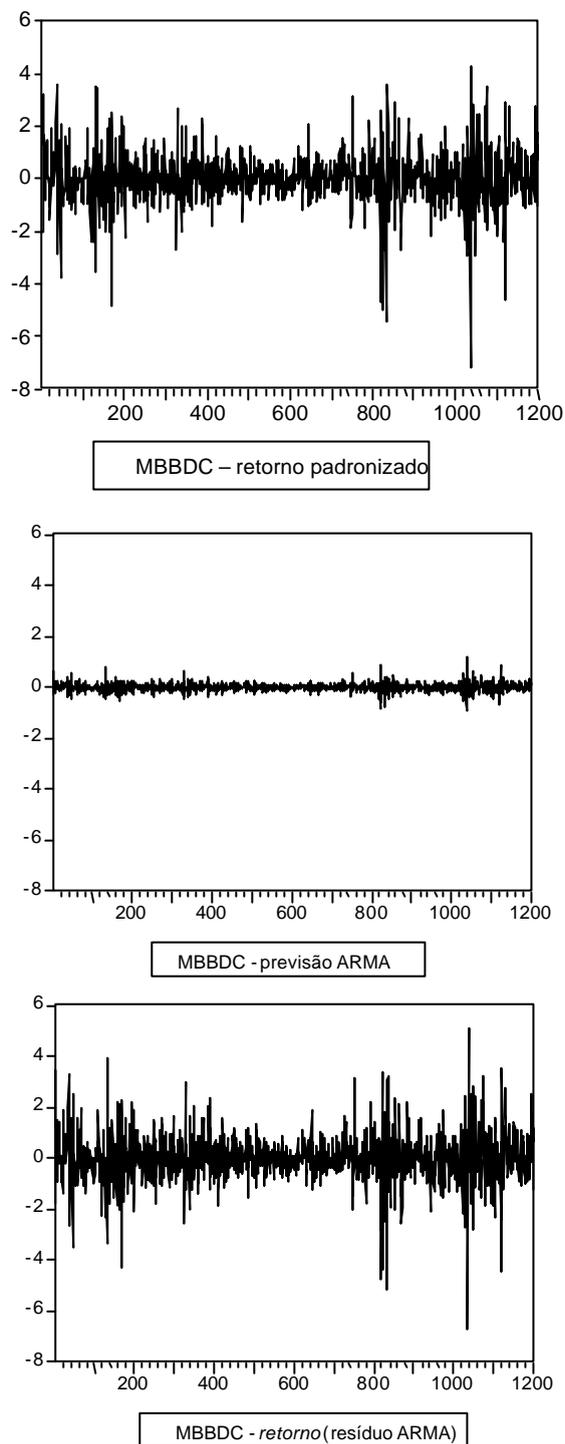
A quantificação desta perda será feita em termos de retorno e, assim, o VaR aqui será o menor retorno (o maior retorno negativo) pode ocorrer em um dia, com probabilidade de 95% . A aplicação financeira, no caso, é apenas na ação da série; não será montada carteira de ações pois o objetivo do trabalho é estudar modelos de volatilidade de ações.

Com as definições acima, o VaR para o dia  $t$  é o quantil de 5% da distribuição do retorno do dia  $t$  , condicional à informação disponível em  $(t-1)$  , e este retorno foi aqui modelado como  $y_t = \mathbf{m}_t + x_t$  onde  $y_t$  é retorno padronizado definido em 2.2 ,  $\mathbf{m}_t$  é a previsão do retorno feita pelo modelo ARMA ajustado aos retornos padronizados, e  $x_t$  é o resíduo deste modelo, que foi chamado de *retorno* no capítulo 3 .

Na figura 21 estão mostrados, para ilustração, os gráficos destas três variáveis, para a série MBBDC, e nela pode-se notar que os retornos padronizados e *retornos* (resíduos ARMA) são muito semelhantes, e são bem maiores que as previsões feitas pelo modelo ARMA.

---

<sup>10</sup> No anexo 4.5.2 estão os resultados para o VaR de 99% . Para simplicidade de exposição, neste apêndice é considerado apenas o VaR de 95% .



**FIGURA 21: Retorno padronizado,  $y_t$ , previsão do modelo ARMA,  $m_t$ , e retorno (resíduo do modelo ARMA),  $x_t$ , da série MBBDC**

Isto acontece em todas as séries e é um fato estilizado dos retornos diários: o desvio padrão é bem maior que a média e, por isto, na determinação do VaR, normalmente despreza-se o valor da média.

Este procedimento será adotado aqui, e corresponde a se usar as séries de *retornos* (resíduos ARMA) para cálculo do VaR. Ele pode ser visto como uma aproximação, mas ele é exato se o VaR for pensado como ‘a maior perda com relação ao valor esperado’ e, como é feito aqui, os *retornos* que vão ser comparados com o VaR também forem resíduos do modelo ARMA.

Estabelecido isto, o VaR para o dia  $t$  é o quantil de 5% da distribuição condicional do *retorno*  $x_t$  que compõe as séries modeladas no capítulo 3.

O modelo que vem sendo utilizado para representar os retornos é  $x_t = s_t e_t$ , onde  $s_t$  é a volatilidade, e  $e_t$  é IID (0,1); supondo que a volatilidade é dada pelo modelo de volatilidade e é igual a  $\hat{s}_t$ , o quantil de 5% de  $x_t$  será o quantil de 5% de  $e_t$  multiplicado por  $\hat{s}_t$ .

É necessário, portanto, conhecer a distribuição de  $e_t$  para chegar ao VaR.

Usualmente supõe-se que esta distribuição é normal e usa-se o valor -1,65 para o quantil de 5% de  $e_t$ ; assim, calcula-se o VaR de 95% multiplicando-se a previsão de volatilidade por -1,65.

Entretanto,  $e_t$  é o resíduo do modelo de volatilidade, e a hipótese de normalidade foi rejeitada dentro e fora da amostra, para as 120 séries de resíduos dos modelos. A determinação do VaR depende, portanto, da determinação da distribuição dos resíduos dos modelos de volatilidade ou, pelo menos, da determinação do quantil de 5% desta distribuição.

A primeira solução para a determinação do VaR, apresentada na seção 4.2, é considerar que o quantil de 5% da distribuição de  $e_t$  é igual ao mesmo quantil da distribuição empírica dos resíduos dos modelos. A segunda solução, que será descrita

na seção 4.3 , é usar a TVE para estimar a cauda da distribuição de  $e_t$  a partir dos valores extremos dos resíduos dos modelos, e então determinar o quantil de 5% desta distribuição.

#### 4.5.1.2 – Verificação das estimativas de VaR

Supondo conhecido o quantil de 5% da distribuição de  $e_t$  e, conseqüentemente, o VaR, é necessário definir um critério para verificação da qualidade da estimativa de VaR de cada um dos modelos. Este critério será baseado na contagem das vezes em que o retorno (resíduo do modelo ARMA) é menor (mais negativo) que o VaR.

O valor esperado do número de vezes em que o retorno observado é menor que o VaR de 95% , é igual 5% do número de observações. No entanto, dificilmente este número será exatamente igual a 5% do número de observações, mesmo que o modelo de VaR esteja correto.

Kupiec (1995) desenvolveu um teste onde a hipótese nula é que a probabilidade de o retorno ser menor que o VaR é igual a  $p$  (aqui,  $p=5\%$ ). A estatística do teste é:

$$l = -2 \ln \left[ \frac{b}{p} \cdot g^N \cdot p^N \right] + 2 \ln \left\{ 1 - \frac{b}{T} g^{T-N} \cdot [N/T]^T \right\}$$

onde  $T$  é o número de observações e  $N$  é o número de vezes em que o VaR é ultrapassado (retorno menor que o VaR) nas  $T$  observações.

A estatística tem distribuição qui quadrado com um grau de liberdade, se a hipótese nula for válida. Considerando um nível de 5% para o teste (não confundir com a probabilidade  $p$ ), o valor crítico é 3,84 .

Neste trabalho, o teste vai ser aplicado dentro e fora da amostra. Dentro da amostra há 800 observações ( $T=800$ ) e a estatística do teste é menor que 3,84 se  $29 \leq N \leq 52$ ; fora da amostra,  $T=400$ , e não se pode rejeitar a hipótese nula se  $13 \leq N \leq 29$ .

Definidos estes limites e determinado o quantil de 5% da distribuição dos resíduos, resta fazer a comparação entre o retorno observado e o VaR, e contar o número de vezes em que o VaR é ultrapassado.

#### 4.5.2 – TVE: RESUMO TEÓRICO

Para que fique claro como foram estimados os quantis de 5% das distribuições dos resíduos dos diversos modelos, será feito a seguir um pequeno resumo da parte da Teoria de Valores Extremos (TVE) em que se baseia esta estimação.

A estimação do quantil de cada distribuição de resíduos será feita a partir da modelagem da sua cauda esquerda, e esta modelagem será baseada em um resultado da TVE que será apresentado a seguir.

Este resultado parte do teorema de Fisher e Tippett (1928): se  $X_1, X_2, \dots, X_N$  é uma série de variáveis aleatórias IID e  $M_{n,1}, M_{n,2}, \dots, M_{n,m}$  são os máximos dos valores de  $X_i$  dentro de  $m$  blocos de observações de  $X_i$ , cada bloco com  $n$  observações, a distribuição assintótica dos máximos padronizados é a distribuição ‘generalizada de valores extremos’ (GVE), que tem como casos particulares as distribuições de Gumbel, de Weibull e de Fréchet.

O resultado em que se baseia a estimação das caudas estabelece que, se uma distribuição pertence ao domínio de atração da distribuição GVE, seus excessos acima de um limiar elevado  $u$  têm distribuição ‘generalizada de Pareto’ (GP); a formulação desta distribuição será vista mais adiante. Mendes (2000), em quem se baseia grande parte deste anexo, usa a distribuição GP para modelar resíduos de modelos de volatilidade da família GARCH. Propriedades da TVE (vide Reiss e Thomas [1997]) asseguram que distribuições de caudas pesadas, como são as 120 séries de resíduos dos modelos aqui estudados, têm distribuição assintótica de Fréchet para seus máximos padronizados coletados em bloco, e GP com parâmetro de forma positivo, para seus excessos acima de um limiar elevado.

Estas propriedades podem também ser enunciadas de forma equivalente para mínimos coletados em bloco ou para picos abaixo de um limiar. Entretanto, para poder empregar as fórmulas mais usuais, os resíduos foram multiplicados por menos um, de modo que está-se buscando o quantil 95% dos negativos dos resíduos, que é na verdade o quantil de 5% dos resíduos, com o sinal trocado.

O que se deseja modelar é a cauda esquerda da distribuição dos resíduos  $e_1, e_2, \dots, e_N$  ou, o que é equivalente, a cauda direita dos negativos dos resíduos  $e_1, e_2, \dots, e_N$ ; para isto, serão usados os excessos dos negativos dos resíduos além de um limiar  $u$ .

Define-se, então,  $N_u$  como sendo o número de *excedentes*, ou seja, negativos dos resíduos  $e_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, N_u$ , que ultrapassam o limiar  $u$ .

Definem-se também os *excessos*,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{N_u}$  como sendo as diferenças entre os  $N_u$  excedentes e o limiar  $u$ . A função distribuição do excesso  $Y$  é:

$$F_u(y) = \Pr\{e \leq y \mid e > u\} = \Pr\{e - u \leq y \mid e > u\}$$

e também  $\bar{F}_u(y) = 1 - F_u(y) = \Pr\{e > y \mid e > u\} = \Pr\{e - u > y \mid e > u\}$

mas:

$$\Pr\{e - u > y \mid e > u\} = \frac{\Pr\{e - u > y, e > u\}}{\Pr\{e > u\}} = \frac{\Pr\{e > u + y, e > u\}}{\Pr\{e > u\}} = \frac{\Pr\{e > u + y\}}{\Pr\{e > u\}}$$

Definindo agora  $F_e(x) = \Pr\{e \leq x\}$ , ou seja, a função distribuição de  $e$ , e também

$\bar{F}_e(x) = 1 - F_e(x)$  vem, da expressão acima:

$$\bar{F}_u(y) = \frac{\bar{F}_e(u + y)}{\bar{F}_e(u)}$$

ou, finalmente:  $\bar{F}_e(u + y) = \bar{F}_e(u) \bar{F}_u(y)$

A expressão acima sugere um método para estimar a cauda da função distribuição dos negativos dos resíduos  $F_e(u) + y$ , estimando separadamente  $F_e(u)$  e  $F_u(u)$ .

$F_e(u)$  pode ser estimado pela relação empírica  $N_u/N$ , ou seja, o quociente entre o número de excedentes e o número total de observações.

Já a estimação de  $F_u(u)$  pode ser feita lembrando que a distribuição limite dos excessos acima de um limiar elevado, no caso dos negativos dos resíduos leptocúrticos, é GP com parâmetro de forma positivo, que é dada por:

$$F_u(y) = GP_{g,s}(y) = 1 - \left(1 + g \frac{y}{s}\right)^{-1/g}$$

onde  $g$  é o parâmetro de forma e  $s$  é o parâmetro de escala.

Substituindo  $F_e(u)$  e  $F_u(u)$  na expressão de  $F_e(u) + y$ , chega-se

$$F_e(u) + y = \frac{N_u}{N} \left(1 + g \frac{y}{s}\right)^{-1/g}$$

A expressão acima permite que se determine o quantil desejado para os resíduos,  $e_{5\%}$ .

Como os parâmetros da GP serão estimados para os negativos dos resíduos e seus excessos, e o quantil de 5% dos resíduos ( $e_{5\%}$ ) corresponde ao de 95% dos negativos dos resíduos ( $e_{95\%}$ ), com o sinal trocado, vem que  $F_e(u) + y = 0,05$ . Lembrando que, no caso,  $y = e_{95\%} - u$ , então pode-se resolver a equação para  $e_{95\%}$ :

$$e_{95\%} = u + \frac{s}{g} \left( \frac{N_u/N}{0,05} \right)^g - 1$$

Determinado  $e_{95\%}$ , o quantil da distribuição dos resíduos é determinado simplesmente usando a relação  $e_{5\%} = -e_{95\%}$ .

Na expressão para  $e_{95\%}$ , é conhecido o valor de  $N$ , que é igual ao número de observações dentro da amostra, e vale 800. Os dois parâmetros da GP são estimados

por máxima verossimilhança, e resta determinar  $u$  e  $N_u$ ; na verdade estes dois parâmetros estão relacionados e, determinado um deles, o outro sai por consequência. Por isto aqui será discutida a seguir a maneira de determinar  $N_u$ .

A TVE diz que os excessos têm distribuição limite GP se o limiar for elevado, ou seja, se  $N_u$  for pequeno. Porém, se  $N_u$  for pequeno demais, haverá poucos excessos para a estimação dos parâmetros da GP e a variância das estimativas será muito alta; por outro lado, se  $N_u$  for grande, o limiar não será alto, violando-se a premissa da TVE, e os estimadores serão tendenciosos.

Desta forma, a escolha de  $N_u$  é problemática, e Reiss e Thomas (1997) recomendam que ela seja feita a partir da análise dos gráficos dos valores dos parâmetros em função de  $N_u$ .

Reiss e Thomas (1997) propõem também um método automático para a escolha de  $N_u$ : seja  $g_k$  a estimativa do parâmetro de forma  $g$  quando  $N_u = k$  e seja  $med(g_1, g_2, \dots, g_k)$  a mediana de  $g_1, g_2, \dots, g_k$ . O método consiste em escolher  $k^*$  de maneira a minimizar

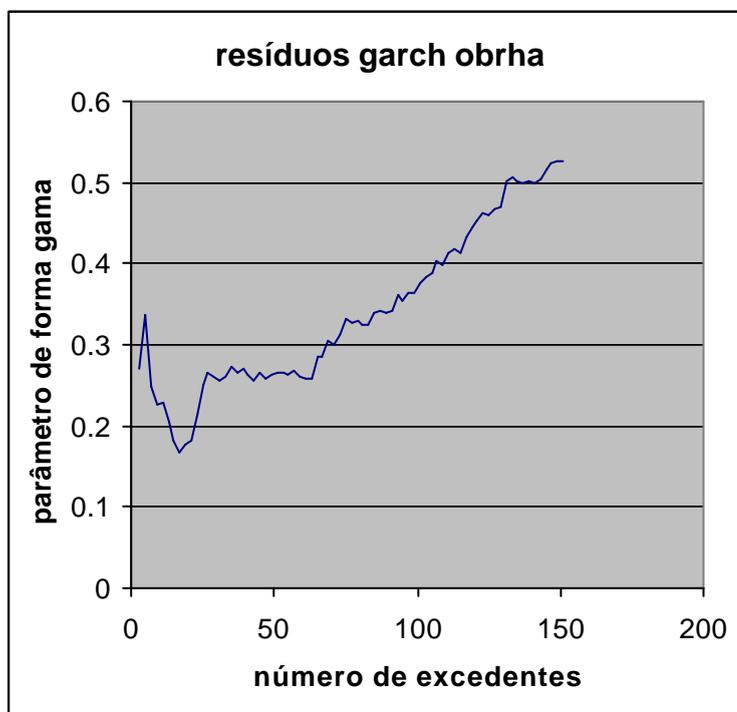
$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k i^b \cdot |g_k - med(g_1, g_2, \dots, g_k)|, \text{ com } 0 \leq b \leq 1/2.$$

Os autores não sugerem um critério para estabelecer o valor de  $b$ ; o programa de computador XTREMES, que acompanha o livro de Reiss e Thomas tem implementada a rotina para este método de escolha, mas não está documentado qual o valor de  $b$  empregado.

## 4.5.3 – TVE: CRITÉRIOS DE APLICAÇÃO DO MÉTODO

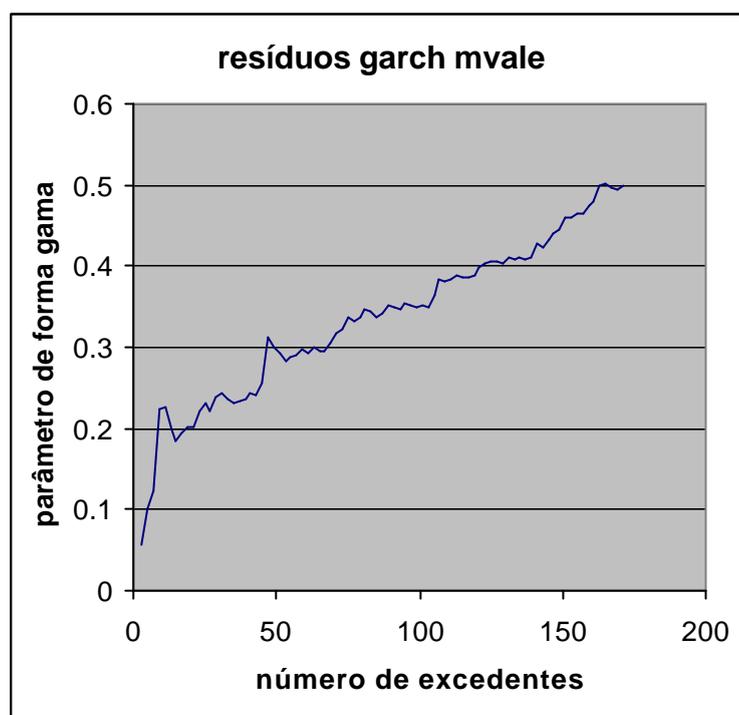
Como a escolha do número de excedentes,  $N_u$ , a serem usados na estimação da cauda da distribuição é problemática, e Reiss e Thomas (1997) recomendam que ela seja feita a partir da análise dos gráficos dos valores dos parâmetros em função de  $N_u$ .

A figura 22 mostra o gráfico do parâmetro de forma  $g$  da distribuição GP estimada para os resíduos do modelo GARCH aplicado à série OBRHA. Nota-se que para  $N_u$  entre 1 e 30 o valor de  $g$  oscila, mas que entre 30 e 60 há um patamar e que acima de 60 há uma tendência de crescimento do valor do parâmetro. Este é o comportamento previsto pela TVE: o parâmetro varia para amostras (número de excedentes) muito pequenas, se estabiliza e, depois de um certo tamanho de amostra, fica tendencioso: no exemplo deste gráfico fica claro que  $N_u$  deve ser escolhido na faixa estável de  $g$ , entre 30 e 60.



**FIGURA 22: Parâmetro  $g$  da distribuição GP em função do número de excedentes: modelo GARCH, série OBRHA**

Para a maior parte das 120 séries de resíduos, o comportamento dos parâmetros em função do número de excedentes foi como o da figura 22. Para algumas delas, entretanto, a região de estabilidade dos parâmetros não é bem definida. Na figura 23 pode-se observar um exemplo de série onde é difícil identificar a região de estabilidade.



**FIGURA 23: Parâmetro  $g$  da distribuição GP em função do número de excedentes: modelo GARCH, série MVALE**

Para determinação do número de excedentes foram utilizados os seguintes critérios:

Inicialmente, procurou-se identificar, visualmente, a região de estabilidade dos parâmetros, nos seus gráficos em função do número de excedentes.

Identificada esta região, foi usada a rotina do XTREMES para determinação automática de  $N_u$  mas, na maior parte das vezes, o valor ótimo de  $N_u$  caía fora da região de estabilidade e, nestes casos, escolheu-se um valor diferente do 'automático'; o valor 'automático' de  $N_u$  foi aproveitado em 24 das 120 séries, e as séries em que mais se usou este valor foram as de Telebrás.

Quando o método automático não era usado, escolhia-se o valor de  $N_u$  mais baixo que ainda correspondia a parâmetros estáveis; desta forma procurou-se empregar na estimação o maior limiar possível.

Nas situações como a da figura 23, procurou-se inicialmente limitar a escolha dentro da faixa de 30 a 60 excedentes, que foi a mais comum nas séries em que o patamar era bem definido. Como critério auxiliar, calculou-se o valor do quantil de 5% para vários valores de  $N_u$  dentro da faixa entre 30 e 60 e procurou-se definir uma região de estabilidade *para o quantil*, e escolher  $N_u$  no centro desta faixa.

A dificuldade na escolha de  $N_u$  é mais crítica justamente nos casos onde o patamar não é bem definido pois, quando há região de estabilidade dos parâmetros, o valor do quantil praticamente não varia com  $N_u$  (dentro do patamar), mas quando não há patamar,  $N_u$  influencia bastante o valor estimado para o quantil.

Como teste para a escolha de  $N_u$  os quantis obtidos foram usados para prever o VaR dentro da amostra. Com quantis empíricos, por definição são 40 as ultrapassagens do VaR dentro da amostra. Com quantis estimados por TVE, este número não é fixo; seu valor esperado é igual a 40 e, pelo teste de Kupiec, não se pode rejeitar a hipótese nula de que a probabilidade de o retorno ultrapassar o VaR está corretamente especificada, se o número de ultrapassagens estiver no intervalo [29,52] , para nível de significância de 5% . Os resultados estão na tabela 40.

Nota-se inicialmente que, na média, todos os modelos ficaram próximos do valor esperado do número de ultrapassagens, podendo-se concluir daí que, na média, a especificação dos quantis per TVE está correta.

Entretanto, há na tabela três valores (marcados com asterisco) que ultrapassam os limites do teste. Estas três séries de resíduos que não passaram no teste foram consideradas como tendo os quantis mal especificados (erro em  $N_u$ ) e não entraram na análise fora da amostra.

	janela	amort r.qdr	amort r.abs	GAR CH	EGA RCH	Hent.	Gray comp	Gray simp	Park	Taylor
otelb	39	40	43	50	42	39	43	42	31	38
mtelb	39	41	42	60(*)	42	39	42	42	37	39
opetr	38	40	40	37	37	36	40	40	36	40
mpetr	38	40	41	34	39	31	35	40	39	36
oelet	26(*)	41	38	37	44	42	43	44	40	45
melet	42	43	40	41	33	40	41	40	40	44
obbdc	42	40	40	33	43	38	34	40	41	40
mbbdc	39	40	37	47	29	61(*)	38	35	38	43
ovale	42	34	37	42	39	43		38	45	39
mvale	42	41	39	39	40	42		36	40	37
obrha	42	40	42	37	42	43	41	40	36	42
mbrha	42	38	42	43	42	39	40	39	35	42
<b>média</b>	39.3	39.8	40.1	41.7	39.3	41.1	39.7	39.7	38.2	40.4

**TABELA 40: Número de vezes em que o VaR foi ultrapassado dentro da amostra. Esperado 40 – mínimo 29 – máximo 52**

#### 4.5.4 – RESULTADOS DA ESTIMAÇÃO DOS QUANTIS POR TVE

Nas tabelas 41 a 50 a seguir estão os resultados da estimação do quantil de 5% , uma tabela para os resíduos de cada modelo. Na primeira coluna está o número de excedentes usado em cada estimação; na segunda e na terceira , os parâmetros de forma e escala da distribuição GP; na quarta coluna está o quantil estimado por TVE; nas duas últimas, para comparação, o quantil da distribuição empírica e o quociente entre as duas estimativas de quantil.

	$N_u$	$g$	$s$	quantil TVE	quantil emp.	TVE/ emp.
otelb	50	0.329	0.208	-1.688	-1.688	1.00
mtelb	50	0.329	0.206	-1.677	-1.672	1.00
opetr	30	0.252	0.197	-1.659	-1.623	1.02
mpetr	30	0.252	0.197	-1.651	-1.618	1.02
oelet	54	0.293	0.232	-1.901	-1.643	1.16
melet	60	0.303	0.195	-1.597	-1.632	0.98
obbdc	50	0.374	0.201	-1.649	-1.749	0.94
mbbdc	40	0.315	0.212	-1.729	-1.727	1.00
ovale	60	0.351	0.198	-1.614	-1.678	0.96
mvale	60	0.351	0.197	-1.607	-1.670	0.96
obrha	50	0.559	0.167	-1.594	-1.715	0.93
mbrha	50	0.558	0.167	-1.592	-1.712	0.93

**TABELA 41: Estimação do quantil de 5% por TVE: modelo de janela de tempo**

	$N_u$	$g$	$s$	quantil TVE	quantil emp.	TVE/ emp.
otelb	40	0.288	0.200	-1.640	-1.688	0.97
mtelb	50	0.304	0.203	-1.659	-1.672	0.99
opetr	40	0.250	0.207	-1.752	-1.623	1.08
mpetr	30	0.270	0.194	-1.609	-1.618	0.99
oelet	40	0.294	0.200	-1.640	-1.643	1.00
melet	55	0.290	0.195	-1.604	-1.632	0.98
obbdc	40	0.351	0.188	-1.526	-1.749	0.87
mbbdc	40	0.260	0.212	-1.772	-1.727	1.03
ovale	30	0.233	0.207	-1.784	-1.678	1.06
mvale	60	0.318	0.197	-1.602	-1.670	0.96
obrha	40	0.468	0.198	-1.721	-1.715	1.00
mbrha	37	0.434	0.236	-1.993	-1.712	1.16

**TABELA 42: Estimação do quantil de 5% por TVE: modelo de amortecimento exponencial do retorno quadrado**

	$N_u$	$g$	$s$	quantil TVE	quantil emp.	TVE/ emp.
otelb	60	0.316	0.806	0.254	-2.131	0.97
mtelb	50	0.317	0.792	0.251	-2.086	0.98
opetr	40	0.275	0.872	0.239	-1.975	1.00
mpetr	50	0.282	0.809	0.228	-1.911	0.98
oelet	50	0.266	0.941	0.25	-2.046	1.02
melet	50	0.265	0.925	0.246	-2.051	1.00
obbdc	40	0.291	0.957	0.279	-2.272	1.01
mbbdc	30	0.258	1.054	0.272	-2.138	1.07
ovale	32	0.264	0.980	0.259	-2.129	1.01
mvale	30	0.260	0.988	0.257	-2.110	1.02
obrha	50	0.534	0.433	0.231	-2.243	0.95
mbrha	50	0.539	0.431	0.232	-2.252	0.96

**TABELA 43: Estimação do quantil de 5% por TVE: modelo de amortecimento exponencial do retorno absoluto**

	$N_u$	$g$	$s$	quantil TVE	quantil emp.	TVE/ emp.
otelb	30	0.308	0.188	-1.534	-1.618	0.95
mtelb	60	0.460	0.169	-1.458	-1.623	0.90
opetr	30	0.231	0.182	-1.571	-1.562	1.01
mpetr	30	0.203	0.176	-1.623	-1.550	1.05
oelet	50	0.270	0.792	-1.595	-1.552	1.03
melet	50	0.283	0.183	-1.506	-1.560	0.97
obbdc	30	0.262	0.198	-1.658	-1.607	1.03
mbbdc	50	0.442	0.173	-1.471	-1.589	0.93
ovale	30	0.250	0.182	-1.539	-1.544	1.00
mvale	30	0.232	0.183	-1.581	-1.524	1.04
obrha	40	0.266	0.194	-1.620	-1.605	1.01
mbrha	40	0.271	0.186	-1.545	-1.558	0.99

**TABELA 44: Estimação do quantil de 5% por TVE: modelo GARCH**

	$N_u$	$g$	$s$	quantil TVE	quantil emp.	TVE/ emp.
otelb	50	0.247	0.189	-1.605	-1.608	1.00
mtelb	51	0.236	0.189	-1.624	-1.663	0.98
opetr	40	0.216	0.180	-1.587	-1.574	1.01
mpetr	50	0.253	0.182	-1.530	-1.530	1.00
oelet	50	0.254	0.181	-1.523	-1.543	0.99
melet	30	0.230	0.190	-1.645	-1.541	1.07
obbdc	50	0.315	0.191	-1.554	-1.545	1.01
mbbdc	40	0.266	0.207	-1.737	-1.581	1.10
ovale	34	0.256	0.186	-1.560	-1.525	1.02
mvale	40	0.262	0.183	-1.535	-1.516	1.01
obrha	60	0.442	0.174	-1.480	-1.583	0.93
mbrha	50	0.417	0.182	-1.526	-1.526	1.00

**TABELA 45: Estimação do quantil de 5% por TVE: modelo EGARCH**

	$N_u$	$g$	$s$	quantil TVE	quantil emp.	TVE/ emp.
otelb	57	0.234	0.189	-1.629	-1.641	0.99
mtelb	51	0.199	0.183	-1.667	-1.667	1.00
opetr	40	0.212	0.180	-1.602	-1.603	1.00
mpetr	30	0.178	0.175	-1.679	-1.568	1.07
oelet	60	0.258	0.182	-1.528	-1.544	0.99
melet	60	0.241	0.182	-1.552	-1.533	1.01
obbdc	30	0.245	0.197	-1.676	-1.590	1.05
mbbdc	40	0.262	0.193	-1.312	-1.599	0.82
ovale	40	0.262	0.193	-1.504	-1.510	1.00
mvale	42	0.258	0.186	-1.560	-1.574	0.99
obrha	30	0.370	0.195	-1.595	-1.619	0.98
mbrha	30	0.357	0.200	-1.633	-1.572	1.04

**TABELA 46: Estimação do quantil de 5% por TVE: modelo de Hentschel**

	$N_u$	$g$	$s$	quantil TVE	quantil emp.	TVE/ emp.
otelb	50	0.246	0.190	-1.611	-1.646	0.98
mtelb	48	0.256	0.191	-1.603	-1.627	0.99
opetr	40	0.263	0.183	-1.525	-1.522	1.00
mpetr	30	0.222	0.183	-1.600	-1.523	1.05
oelet	43	0.274	0.184	-1.514	-1.567	0.97
melet	43	0.274	0.184	-1.523	-1.570	0.97
obbdc	30	0.251	0.201	-1.694	-1.563	1.08
mbbdc	30	0.269	0.196	-1.627	-1.617	1.01
ovale						
mvale						
obrha	50	0.487	0.159	-1.399	-1.418	0.99
mbrha	40	0.466	0.164	-1.418	-1.412	1.00

**TABELA 47: Estimação do quantil de 5% por TVE: modelo de Gray completo**

	$N_u$	$g$	$s$	quantil TVE	quantil emp.	TVE/ emp.
otelb	55	0.258	0.191	-1.600	-1.620	0.99
mtelb	45	0.273	0.191	-1.587	-1.611	0.99
opetr	40	0.274	0.183	-1.513	-1.511	1.00
mpetr	40	0.267	0.183	-1.521	-1.516	1.00
oelet	51	0.29	0.184	-1.509	-1.565	0.96
melet	40	0.228	0.184	-1.593	-1.588	1.00
obbdc	40	0.317	0.191	-1.557	-1.564	1.00
mbbdc	30	0.26	0.200	-1.702	-1.617	1.05
ovale	30	0.257	0.187	-1.571	-1.551	1.01
mvale	30	0.243	0.189	-1.608	-1.538	1.05
obrha	40	0.478	0.161	-1.412	-1.409	1.00
mbrha	40	0.473	0.162	-1.410	-1.397	1.01

**TABELA 48: Estimação do quantil de 5% por TVE: modelo de Gray simplificado**

	$N_u$	$g$	$s$	quantil TVE	quantil emp.	TVE/ emp.
otelb	40	0.238	0.238	-2.035	-2.032	1.00
mtelb	50	0.238	0.243	-2.079	-2.097	0.99
opetr	49	0.239	0.238	-2.038	-2.058	0.99
mpetr	47	0.245	0.239	-2.029	-2.060	0.99
oelet	50	0.266	0.239	-1.993	-2.001	1.00
melet	50	0.270	0.243	-2.017	-2.034	0.99
obbdc	30	0.360	0.228	-1.858	-1.881	0.99
mbbdc	30	0.364	0.233	-1.903	-1.927	0.99
ovale	60	0.401	0.223	-1.843	-1.907	0.97
mvale	60	0.391	0.235	-1.933	-2.007	0.96
obrha	30	0.506	0.264	-2.369	-2.407	0.98
mbrha	60	0.524	0.256	-2.369	-2.435	0.97

**TABELA 49: Estimação do quantil de 5% por TVE: modelo de volatilidade de Parkinson**

	$N_u$	$g$	$s$	quantil TVE	quantil emp.	TVE/ emp.
otelb	40	0.299	0.241	-1.974	-1.975	1.00
mtelb	40	0.289	0.242	-1.988	-1.988	1.00
opetr	40	0.296	0.220	-1.806	-1.800	1.00
mpetr	30	0.223	0.221	-1.930	-1.900	1.02
oelet	49	0.300	0.227	-1.857	-1.892	0.98
melet	40	0.289	0.226	-1.854	-1.856	1.00
obbdc	40	0.307	0.228	-1.859	-1.857	1.00
mbbdc	30	0.339	0.225	-1.829	-1.871	0.98
ovale	32	0.229	0.228	-1.977	-1.910	1.03
mvale	33	0.223	0.227	-1.980	-1.864	1.06
obrha	40	0.498	0.205	-1.825	-1.810	1.01
mbrha	40	0.494	0.211	-1.876	-1.856	1.01

**TABELA 50: Estimação do quantil de 5% por TVE: modelo de Taylor**

## 4.5.5 – RESULTADOS DO VaR DE 99%

Os quantis são aqui obtidos ordenando-se os 800 resíduos (retornos re-escalados) dentro da amostra e fazendo-se interpolação linear entre o valor do oitavo e do nono retorno.

Os quantis de 1% dos resíduos para as diversas séries e modelos estão na tabela 51. Comparando as médias dos diferentes modelos com o valor deste quantil para a distribuição normal padronizada (-2,326) pode-se notar que, diferentemente dos quantis de 5% , todos os modelos têm quantis abaixo (mais negativos) deste valor.

	janela	amort r.qdr	amort r.abs	GAR CH	EGA RCH	Hent.	Gray comp	Gray simp	Park	Taylor
otelb	-3.067	-2.706	-3.533	-2.429	-2.225	-2.335	-2.214	-2.373	-2.958	-3.020
mtelb	-3.045	-2.792	-3.468	-2.355	-2.337	-2.365	-2.204	-2.338	-2.981	-3.118
opetr	-2.647	-2.659	-3.188	-2.362	-2.270	-2.274	-2.355	-2.344	-3.042	-2.873
mpetr	-2.638	-2.507	-2.982	-2.317	-2.286	-2.265	-2.373	-2.357	-3.068	-2.841
oelet	-2.492	-2.661	-3.413	-2.265	-2.258	-2.257	-2.426	-2.425	-3.272	-2.968
melet	-2.484	-2.647	-3.317	-2.277	-2.294	-2.292	-2.392	-2.403	-3.323	-2.885
obbdc	-3.189	-2.860	-3.605	-2.591	-2.669	-2.623	-2.652	-2.600	-3.321	-3.162
mmbdc	-3.177	-2.753	-3.566	-2.585	-2.569	-2.489	-2.471	-2.689	-3.428	-3.401
ovale	-2.653	-2.646	-3.372	-2.367	-2.313	-2.330		-2.454	-3.148	-2.811
mvale	-2.647	-2.623	-3.278	-2.366	-2.316	-2.308		-2.400	-3.286	-2.757
obrha	-3.608	-3.295	-4.399	-2.849	-2.750	-3.006	-3.038	-2.981	-5.387	-3.745
mbrha	-3.606	-3.780	-4.335	-2.874	-2.794	-2.996	-2.994	-2.965	-5.412	-3.815
<b>média</b>	<b>-2.938</b>	<b>-2.827</b>	<b>-3.538</b>	<b>-2.470</b>	<b>-2.423</b>	<b>-2.462</b>	<b>-2.512</b>	<b>-2.527</b>	<b>-3.552</b>	<b>-3.116</b>

**TABELA 51: Quantis de 1% das distribuições empíricas dos resíduos**

Na tabela 52 está o número de vezes em que o retorno esteve pior que o VaR (perda além do VaR), fora da amostra. Os valores críticos do teste de Kupiec, para um nível de 5% , correspondem a uma faixa de 1 a 8 ultrapassagens, incluídos os extremos, ou seja, não se pode rejeitar a hipótese nula de que a probabilidade de o VaR ser ultrapassado está correta, se o número de ultrapassagens estiver entre aqueles dois valores. Na tabela 52, há aproximadamente o mesmo número de valores dentro e fora do intervalo [1,8] , e preferiu-se marcar com asterisco os casos em que não há rejeição da hipótese nula, ou seja, o VaR do modelo/série tem probabilidade correta.

A concentração de asteriscos no canto superior esquerdo da tabela não é tão evidente como na tabela 34 (contagens para o VaR de 95%), mas continua havendo bons resultados para as séries de Telebrás e para os três modelos mais simples.

	janela	amort r.qdr	amort r.abs	GAR CH	EGA RCH	Hent.	Gray comp	Gray simp	Park	Taylor
otelb	6(*)	7(*)	7(*)	8(*)	8(*)	8(*)	8(*)	8(*)	11	8(*)
mtelb	6(*)	7(*)	7(*)	8(*)	7(*)	8(*)	11	9	11	8(*)
opetr	14	8(*)	9	11	11	12	10	10	15	12
mpetr	14	9	9	12	11	13	9	9	15	14
oelet	9	6(*)	5(*)	10	7(*)	7(*)	9	9	6(*)	10
melet	9	7(*)	5(*)	9	8(*)	7(*)	10	10	6(*)	11
obbdc	8(*)	9	8(*)	12	11	13	12	12	11	13
mbbdc	8(*)	9	9	11	11	11	14	12	10	11
ovale	6(*)	5(*)	4(*)	6(*)	8(*)	7(*)		9	6(*)	9
mvale	6(*)	5(*)	5(*)	7(*)	9	8(*)		10	6(*)	12
obrha	6(*)	8(*)	8(*)	8(*)	10	9	5(*)	7(*)	2(*)	10
mbrha	6(*)	7(*)	9	9	9	10	6(*)	17	2(*)	9
<b>média</b>	8.2	7.3	7.1	9.3	9.2	9.4	9.4	10.2	8.4	10.6

**TABELA 52: Número de vezes em que o VaR (quantis empíricos) foi ultrapassado fora da amostra. Esperado 4 – mínimo 1 – máximo 8**

Os resultados são menos homogêneos que os da tabela 34, e o número médio de ultrapassagens está bem mais longe do valor esperado (proporcionalmente).

Não se nota diferença sistemática, nesta tabela e em todas deste apêndice, entre os resultados para os modelos de séries originais e modificadas.

Na tabela 53 estão os quantis de 1% das distribuições dos resíduos obtidas por TVE; seus valores são semelhantes aos da tabela 51 e a média de cada modelo é muito próxima, nos dois métodos de estimação.

Tal como foi feito para o VaR de 95% , é necessário verificar se estes quantis levam a bons valores para o VaR dentro da amostra, antes de usá-los fora da amostra. Na tabela 54 estão as contagens de ultrapassagens do VaR dentro da amostra. Os limites do teste de Kupiec, num nível de 5%, são um mínimo de 4 e um máximo de 14 (inclusive)

	janela	amort r.qdr	amort r.abs	GAR CH	EGA RCH	Hent.	Gray comp	Gray simp	Park	Taylor
otelb	-2.857	-2.599	-3.425	-2.505	-2.375	-2.366	-2.386	-2.414	-2.974	-3.181
mtelb	-2.834	-2.694	-3.385	-3.029	-2.365	-2.287	-2.409	-2.453	-3.040	-3.153
opetr	-2.481	-2.606	-3.070	-2.272	-2.272	-2.214	-2.321	-2.343	-2.983	-2.895
mpetr	-2.472	-2.477	-2.949	-2.242	-2.292	-2.229	-2.281	-2.326	-3.001	-2.754
oelet	-3.035	-2.619	-3.184	-2.453	-2.284	-2.304	-2.387	-2.397	-3.043	-2.996
melet	-2.856	-2.545	-3.127	-2.366	-2.375	-2.280	-2.357	-2.293	-3.101	-2.940
obbdc	-2.987	-2.678	-3.639	-2.517	-2.570	-2.474	-2.529	-2.581	-3.297	-3.033
mbbdc	-2.856	-2.683	-3.446	-2.974	-2.611	-2.453	-2.499	-2.526	-3.397	-3.137
ovale	-2.822	-2.586	-3.291	-2.292	-2.348	-2.387		-2.367	-3.495	-2.847
mvale	-2.811	-2.659	-3.261	-2.288	-2.333	-2.351		-2.367	-3.603	-2.826
obrha	-3.866	-3.615	-5.006	-2.470	-2.991	-2.872	-3.040	-3.024	-5.303	-4.033
mbrha	-3.877	-3.980	-5.108	-2.387	-2.963	-2.887	-2.978	-3.025	-5.398	-4.121
<b>média</b>	-2.980	-2.812	-3.574	-2.483	-2.482	-2.425	-2.519	-2.510	-3.553	-3.160

**TABELA 53: Quantis de 1% das distribuições dos resíduos obtidas por TVE**

ultrapassagens. Seis séries apresentaram contagens (marcadas com asteriscos) fora destes limites, e foram excluídas da análise fora da amostra, por erro na determinação do quantil.

	janela	amort r.qdr	amort r.abs	GAR CH	EGA RCH	Hent.	Gray comp	Gray simp	Park	Taylor
otelb	9	9	9	5	7	9	6	8	7	6
mtelb	9	9	8	4	7	9	6	6	6	9
opetr	10	10	9	9	8	11	9	8	8	10
mpetr	10	9	8	10	8	9	9	8	8	9
oelet	3(*)	9	9	5	7	7	8	8	11	8
melet	3(*)	9	9	6	5	6	8	10	9	10
obbdc	9	9	5	9	10	10	9	8	8	12
mbbdc	9	11	9	7	8	10	7	8	8	13
ovale	2(*)	10	9	11	9	8		9	2(*)	11
mvale	3(*)	7	9	10	10	10		10	2(*)	11
obrha	6	4	4	13	5	9	8	6	7	6
mbrha	5	7	4	14	5	10	8	6	7	4
<b>média</b>	6.5	8.6	7.7	8.6	7.4	9.0	7.8	7.9	6.9	9.1

**TABELA 54: Número de vezes em que o VaR (quantis por TVE) foi ultrapassado dentro da amostra. Esperado 8 – mínimo 4 – máximo 14**

A tabela 55 apresenta as contagens de ultrapassagens do VaR de 99% fora da amostra; como na tabela 52, não se pode rejeitar a hipótese que o VaR está bem especificado, num nível de 5%, se a contagem estiver no intervalo [1,8] , e as séries que tiveram contagens dentro do intervalo estão marcadas com asterisco.

	janela	amort r.qdr	amort r.abs	GAR CH	EGA RCH	Hent.	Gray comp	Gray simp	Park	Taylor
otelb	7(*)	7(*)	7(*)	8(*)	7(*)	8(*)	8(*)	8(*)	11	7(*)
mtelb	7(*)	7(*)	7(*)	6(*)	7(*)	9	8(*)	8(*)	11	8(*)
opetr	16	9	10	11	11	13	10	10	15	12
mpetr	16	9	9	13	10	14	11	9	15	15
oelet		7(*)	6(*)	8(*)	7(*)	7(*)	10	10	8(*)	9
melet		7(*)	7(*)	8(*)	7(*)	8(*)	10	11	8(*)	10
obbdc	8(*)	9	8(*)	12	12	13	12	12	11	13
mbbdc	8(*)	10	9	11	11	12	14	12	10	12
ovale		5(*)	4(*)	10	6(*)	7(*)		9		8(*)
mvale		4(*)	5(*)	9	9	8(*)		10		10
obrha	5(*)	7(*)	3(*)	14	9	10	5(*)	6(*)	3(*)	9
mbrha	5(*)	6(*)	3(*)	14	9	10	6(*)	16	2(*)	8(*)
<b>média</b>	9.0	7.3	6.5	10.3	8.8	9.9	9.4	10.1	9.4	10.1

**TABELA 55: Número de vezes em que o VaR (quantis por TVE) foi ultrapassado fora da amostra. Esperado 4 – mínimo 1 – máximo 8**

Como na tabela 52 (contagens para o VaR de 99% , quantis empíricos), continua havendo bons resultados para as séries de Telebrás e para os modelos mais simples. O número médio de ultrapassagens continua longe do valor esperado

A tabela 55 tem 52 asteriscos e a tabela 52 tem 56; como quatro das seis séries retiradas da análise tinham asterisco, há empate na contagem. Diferentemente do VaR de 95% , aqui não houve melhora de resultados para as séries de Petrobrás quando se usou TVE, e pode-se considerar que os dois métodos de estimar os quantis tiveram resultados equivalentes.

Finalmente, a tabela 56 mostra as contagens de ultrapassagens do VaR de 1% , com quantis por TVE, nos primeiros 100 dias fora da amostra. Aqui o valor esperado do número de ultrapassagens é 1 , e o teste de Kupiec não rejeita a hipótese de o modelo estar bem especificado se o número de contagens estiver no intervalo [1,3] . Estes

valores são consequência de se estar trabalhando com o VaR de 1% , o que prejudica as análises baseadas em contagens de ultrapassagens.

As séries que tiveram contagens dentro do intervalo estão marcadas com asterisco.

	janela	amort r.qdr	amort r.abs	GAR CH	EGA RCH	Hent.	Gray comp	Gray simp	Park	Taylor
otelb	2(*)	2(*)	2(*)	2(*)	2(*)	2(*)	2(*)	2(*)	4	2(*)
mtelb	2(*)	2(*)	2(*)	2(*)	2(*)	2(*)	2(*)	2(*)	4	2(*)
opetr	3(*)	2(*)	2(*)	2(*)	3(*)	4	3(*)	3(*)	5	3(*)
mpetr	3(*)	2(*)	2(*)	3(*)	3(*)	4	3(*)	2(*)	5	4
oelet		3(*)	3(*)	3(*)	3(*)	3(*)	3(*)	3(*)	3(*)	3(*)
melet		3(*)	3(*)	3(*)	3(*)	3(*)	3(*)	3(*)	3(*)	3(*)
obbdc	3(*)	4	4	4	5	5	4	4	6	5
mbbdc	3(*)	3(*)	3(*)	4	4	4	6	5	5	5
ovale		2(*)	2(*)	4	3(*)	3(*)		4		4
mvale		2(*)	2(*)	3(*)	4	2(*)		5		4
obrha	2(*)	2(*)	2(*)	5	2(*)	2(*)	2(*)	2(*)	2(*)	2(*)
mbrha	2(*)	1(*)	1(*)	5	2(*)	2(*)	2(*)	3(*)	1(*)	2(*)
<b>média</b>	2.5	2.3	2.3	3.3	3.0	3.0	3.0	3.2	3.8	3.3

**TABELA 56: Número de vezes em que o VaR (quantis por TVE) foi ultrapassado nos primeiros 100 dias fora da amostra. Esperado 1 – mínimo 1 – máximo 3**

Pelo número de séries com asterisco, nota-se que as previsões de VaR nos primeiros 100 dias são melhores que em todo o período fora da amostra. No entanto, as médias dos modelos mais simples continuam melhores que as dos outros.

Pelos resultados deste apêndice, pode-se concluir que não há ganho em usar TVE na estimação dos quantis de 1% das distribuições dos resíduos. Novamente, vê-se que a não estacionariedade das séries impede um bom desempenho dos modelos de volatilidade, prejudicando a determinação do VaR, e a maior sofisticação na determinação dos quantis não resulta em melhora dos resultados de VaR.

## CAPÍTULO 5 - CONCLUSÃO

### 5.1 – INTRODUÇÃO

Este trabalho analisou a modelagem da volatilidade das séries de retornos de ações brasileiras, iniciando-se com o estudo das propriedades estatísticas das séries, passando à descrição, estimação e avaliação dos modelos e, finalmente, à aplicação dos modelos na determinação de valor em risco.

Este capítulo de conclusão segue a mesma ordem do texto: nas próximas três seções serão abordados os resultados dos três tópicos citados acima. Antes disto, ainda nesta seção 5.1, serão tecidos comentários de natureza geral, sobre os resultados obtidos. Na seção 5.5, no fim do capítulo, estão as sugestões de possíveis continuações para esta pesquisa.

Ao lado de seu objetivo principal estudar a aplicabilidade de diferentes modelos de volatilidade às condições brasileiras, foram desenvolvidos alguns outros temas, que permitiram também algumas conclusões:

- A criação das séries modificadas, com menos observações extremas, permitiu que se verificasse que estas observações influenciam fortemente a forma da distribuição incondicional, e seus momentos de ordem dois ou mais. No entanto, propriedades como estacionariedade e dependência não parecem ser muito diferentes nas séries originais e modificadas. A estimação dos modelos mostrou que os parâmetros podem se alterar um pouco mas, em termos gerais, as propriedades dos resíduos e os erros de previsão de modelos de séries originais não são melhores nem piores que de modelos de séries modificadas, e também não se altera a qualidade dos resultados do VaR, em termos de número de ultrapassagens. Conclui-se que o problema de retirar ou não as observações aberrantes, talvez em função da maior volatilidade das séries brasileiras, não é tão importante aqui como é nos trabalhos com séries de retornos de ações nos países desenvolvidos.

- No estudo da estacionariedade, no capítulo dois, tentou-se modelar a média condicional das séries através da regressão localmente ponderada (RLP). Este é um método poderoso, que consegue capturar dependência (linear ou não) na média. Os resultados indicam que a previsão de retorno um período adiante, feita por este método não foi melhor que a previsão ingênua (retorno zero) com exceção apenas das séries de Bradesco, onde houve alguma redução de erro de previsão quando se usou a RLP. Isto significa que, pelo menos nas séries mais líquidas, não foi possível usar retornos para prever retornos, implicando em eficiência (fraca) no mercado.
- A relativa homogeneidade das propriedades estatísticas das séries, que foi comentada nas conclusões do capítulo 2, não se mantém nos dois capítulos seguintes: as séries das três ações mais líquidas são em geral mais ‘bem comportadas’ que as das outras três, tendendo a apresentar maior facilidade de estimação, melhores resíduos, menores erros de previsão e melhores contagens de ultrapassagens do VaR. Considerando que as séries de ações aqui estudadas foram escolhidas por serem as mais líquidas (em setores diferentes) do mercado, pode-se esperar maior dificuldade para a modelagem da volatilidade de ações fora deste grupo de seis, ou seja, da maioria das ações brasileiras.

## 5.2 – PROPRIEDADES ESTATÍSTICAS

Como foi feito no capítulo dois, as propriedades estão aqui divididas em estacionariedade, distribuição e independência.

- **Estacionariedade**: ela foi estudada somente para os dois primeiros momentos e em situações particulares. Inicialmente, através do teste ADF: como mais adiante ficou claro que existe dependência não linear entre retornos, as conclusões deste teste não são válidas. Depois, supondo que o modelo GARCH (1,1) representa o processo gerador das séries de retornos, pode-se concluir que todas as séries são estacionárias na média, mas não se pode concluir que todas são estacionárias na variância, pois há séries de persistência muito elevada. As análises da média condicional indicam

que as séries são estacionárias na média, independentemente de modelo para os retornos.

Assim, a única indicação de estacionariedade na variância é dentro da suposição de modelo GARCH (1,1), porque a soma dos coeficientes alfa e beta é menor que um em todas as séries. Entretanto, nas séries das ações mais líquidas, o valor desta soma varia entre 0,975 e 0,992 e não foi verificado se estes valores são significativamente diferentes de um.

Desta forma, há pouca evidencia de que as séries realmente sejam estacionárias na variância e, pelo contrário, o fato de a variância (incondicional) de todas as séries ser maior no período fora da amostra, os resultados obtidos na avaliação dos modelos, no capítulo 3, e também o fato de as previsões de VaR feitas a partir dos modelos de variância não estacionária terem sido melhores que as dos outros modelos, no capítulo 4, faz leva à conclusão que as séries não são estacionárias na variância.

· **Distribuição:** a não normalidade é um fato estilizado da distribuição dos retornos e foi aqui mais uma vez verificada, mesmo nas séries modificadas, que têm menos valores extremos. Não foi possível verificar, entretanto, se esta não normalidade é fruto de serem os retornos misturas de distribuições (condicionalmente) normais: os resíduos de todos os modelos de volatilidade também não foram normais, talvez por serem eles mesmos ainda misturas de distribuições normais, porque os modelos não representaram adequadamente o processo gerador dos dados.

A outra possibilidade para a não normalidade dos resíduos é que, ao contrário do que é geralmente aceito, não seja válida a hipótese de normalidade condicional dos retornos.

· **Independência:** mais importante que a constatação simples da dependência temporal entre os retornos, foi a constatação que esta dependência é principalmente não linear multiplicativa, indicando estrutura na variância que pode, em princípio, vir a ser representada por um dos modelos de variância condicional em estudo.

### 5.3 – MODELOS DE VOLATILIDADE

Os comentários aqui estão divididos em dois grupos: quanto à formulação e estimação dos modelos, e quanto à sua avaliação.

- **Formulação e estimação:** os modelos de janela de tempo e de amortecimento exponencial do retorno quadrado tem a formulação mais simples, pois em ambos apenas é calculada a variância amostral dos últimos  $k$  retornos. No primeiro dá-se peso (probabilidade) igual às  $k$  observações, enquanto que no segundo o peso cai geometricamente com a idade da observação. Não há teoria por trás destes modelos, como há por trás dos demais. Mesmo o modelo de amortecimento exponencial dos retornos absolutos, muito parecido com o outro de amortecimento exponencial, tem base teórica, pois supõe que o retorno seja gerado por um processo produto de volatilidade e inovação.

Os três modelos citados acima não são estacionários, e isto foi decisivo para seu bom desempenho na previsão do VaR. Os outros sete modelos têm formulação teórica com diferentes graus de complexidade e, como foi visto nos outros capítulos a complexidade não necessariamente melhora o desempenho do modelo; entretanto, como é natural, o crescimento do número de parâmetros dificultou a estimação.

- **Avaliação:** todos os modelos produziram resíduos não normais, e ainda com alguma estrutura, dentro e/ou fora da amostra, levando à conclusão que nenhum deles consegue representar adequadamente o processo gerador dos dados.

Apesar das dificuldades já bastante comentadas, devidas ao fato de não ser a volatilidade observável, conseguiu-se avaliar com alguma consistência as previsões dos diversos modelos (especialmente quando se usou o retorno absoluto como representante da volatilidade).

No conjunto das avaliações (resíduos e erros de previsão, dentro e fora da amostra), ficou claro o desempenho ruim do modelo de janela de tempo, e o modelo de Taylor e o EGARCH mostraram o melhor desempenho. Note-se, no entanto, que o

destaque negativo do modelo de janela de tempo é mais notável que o destaque positivo do modelo de Taylor e do EGARCH.

Se for levada em conta também a consistência da formulação teórica, além da avaliação dos resultados, conclui-se que o EGARCH é o melhor modelo para representar as séries analisadas.

#### 5.4 – VALOR EM RISCO

A determinação do VaR foi mais afetada pela não estacionariedade das séries que a avaliação dos modelos: no capítulo 3, os resultados da avaliação de resíduos e previsões de volatilidade ficaram pouco nítidos, com uma tendência ao nivelamento (por baixo) dos resultados; apenas o modelo de janela de tempo se destacou, negativamente.

No capítulo 4 o efeito da não estacionariedade sobre as previsões de volatilidade e sobre os resíduos (que são usados para determinar os quantis), aparentemente, se acumulou e o VaR ( $= \text{volatilidade} \times \text{quantil}$ ) dos modelos não estacionários resultou melhor estimado que o dos outros modelos.

Outras conclusões podem ser tiradas deste capítulo:

- A sofisticação do processo de estimação do quantil da distribuição dos resíduos não resolve o problema de desempenho dos modelos sofisticados: o uso da TVE, para determinação destes quantis não resultou em melhoras importantes no VaR, de 95% ou de 99%. Isto ocorre porque a causa do problema não está no *método* de estimação dos quantis, e sim nos *dados* usados para esta estimação.
- O encurtamento do período de previsão fora da amostra melhora os resultados de VaR.
- É fácil especificar um modelo de VaR que *passe* no teste de Kupiec, ou seja cuja contagem de ultrapassagens do VaR esteja dentro dos limites de não rejeição da

hipótese de que o modelo está bem especificado. Pode-se constatar isto pelo bom desempenho do modelo de janela de tempo, por exemplo.

Um bom modelo de VaR precisa também gerar uma curva de VaR aderente aos mínimos dos retornos e, conseqüentemente, com valor absoluto médio diário pequeno para o VaR, o que implica num menor custo financeiro para uma instituição financeira que mantenha reservas proporcionais ao VaR.

- A habilidade de permitir previsões de VaR com número de ultrapassagens perto do valor esperado e aderente aos mínimos dos retornos é uma propriedade importante para um modelo de volatilidade e é um bom critério de avaliação do seu desempenho, para se somar aos outros usados no capítulo três.

## 5.5 – POSSÍVEIS EXTENSÕES

Muitas são as possibilidades de complementação e continuação deste trabalho, dado a abrangência do assunto. A seguir, são citadas algumas delas:

- **Diminuir os períodos dentro e fora da amostra / re-estimar os modelos com frequência:** esta é talvez a continuação mais óbvia, pois permitiria a verificação empírica da explicação de mau desempenho, no VaR, dos modelos sofisticados, através da não estacionariedade dos retornos. Entretanto, este é um trabalho de grande carga computacional, pois consistiria em repetir quase todo o processamento feito nesta tese, tantas vezes quantas fossem as re-estimações dos modelos.
- **Incluir séries estrangeiras:** esta também é uma continuação importante pois permitiria, com uma carga computacional relativamente baixa, a verificação empírica das explicações de mau desempenho, em geral, através do ‘mau comportamento’ das séries. Uma série como por exemplo a do índice S&P 500, do mercado de ações norte americano, serviria como paradigma da série ‘bem comportada’, e suas avaliações, em termos de facilidade de estimação, resíduos,

erros de previsão e VaR poderiam ser uma espécie de *benchmark* para comparação com as séries brasileiras.

- **Incluir volatilidades implícitas:** mesmo reconhecendo a pouca liquidez da maioria das opções sobre ações brasileiras, algumas volatilidades implícitas poderiam ser determinadas e consideradas como as *observadas*, e assim permitir alguma espécie de *calibragem* dos erros de previsão, dando maior confiabilidade àquela análise. A forma exata de fazer isto seria definida em função da quantidade e qualidade dos dados disponíveis.
- **Estimar modelos com resíduos não normais:** a normalidade condicional dos retornos, embora tenha um atrativo teórico, não tem uma clara comprovação empírica. A estimação dos modelos por máxima verossimilhança supondo, por exemplo, erros com distribuição  $t$  poderia levar a modelos com melhores propriedades, em termos de resíduos, erros de previsão e VaR. Se isto ocorresse, além do ganho por se conseguir uma melhor modelagem, ter-se-ia evidência empírica contra a hipótese de normalidade condicional dos retornos brasileiros.

## **BIBLIOGRAFIA**

- Alexander, S S. , “Price movements in speculative markets: trends or random walks?” , *Industrial Management Review*, 2, 7-26 (1961).
- Almeida, N. M. C. G. e Pereira, P. L. V. , “Mudança de regime em volatilidade: os modelos SWGARCH” , *Anais do XXI Encontro Brasileiro de Econometria*, 39-58 (1999)
- Bachelier, L. , “Theory of speculation” (1900), reprinted in Cootner, P., “The random character of stock market prices”, 17-78, *MIT Press*, Cambridge, USA (1964)
- Bekaert, G. e Harvey, C. R. , “Emerging markets volatility”, *Journal of Financial Economics* (1997)
- Berndt, E. K. , Hall, B. H. , Hall, R. E. e Hausman, J. A. , “Estimation and inference in nonlinear structural models”, *Annals of Economic and Social Measurement*, 4, 653-665 (1974)
- Bollerslev, T. , “Generalized conditional heteroskedasticity”, *Journal of Econometrics*, 31, 307-328 (1986).
- Bollerslev T., Ray Y. C. e Kenneth F. K.. , “ARCH Modeling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence,” *Journal of Econometrics* 52, 5–59 (1992).
- Box, G. E. P. e Cox, D. R. , “An analysis of transformations”, *Journal of the Royal Statistical Society*, B 26, 211-243 (1964)
- Brock, W. , Dechert, W. e Scheinkman, J. , “A test for independence based on the correlation dimension”, working paper, Univ. of Wisconsin, Univ. of Houston and Univ. of Chicago (1987)
- Cai, J. , “A Markov model of unconditional variance in ARCH”, *Journal of Business and Economic Statistics*, 12, 309-316 (1994)
- Campbell, H. , “Predictable risk and returns in emerging markets”, *Review of Financial Studies*, (1995)
- Chu, S. e Freund, S. , “Volatility estimation for stock index options: a GARCH approach”, *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 36(4), 431-450 (1996)
- Clark, P. K. , “A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices”, *Econometrica*, 41, 135-155 (1973)
- Cleveland, W. S. e Devlin, S. J. , “Locally weighted regression: an approach to regression analysis by local fitting”, *Journal of the American Statistical Association*, 83, 596-610 (1988)
- Cooper, J. C. B. , “World stock markets: some random walk tests” , *Applied Economics*, 14, 515-531 (1982)

- Costa, P. H. S. e Baidya, T. K. N. , “Modelagem de séries financeiras brasileiras: previsão de preços de alguns ativos”, *Pesquisa Operacional*, 19, 51-72, (1999)
- Cunningham, S. W. , “The predictability of British stock market prices”, *Applied Statistics*, 22, 315-331 (1973)
- Davidian, M. e Carroll, R. J. , “Variance function estimation”, *Journal of the American Statistical Association*, 82, 1079-1091 (1987)
- Diebold, F. e Nason, J., “Nonparametric exchange rate prediction”, *Journal of International Economics*, 28, 315-332 (1990)
- Ding, Z. , Granjer, C. W. J. e Engle, R. F. , “A long memory property of stock market returns and a new model”, *Journal of Empirical Finance*, 1, 83-106 (1993)
- Duarte Jr. , A. M. , Heil, T. B. B. ,Pinheiro, M. A. , “Previsão de volatilidade de ativos e índices brasileiros”, *Resenha da BMF*, 112, 15-27 (1996)
- Duarte Jr. , A. M. e Mendes, B. V. M. M. , “Robust estimation of systematic risk in emerging stock markets”, *Emerging Markets Quarterly*, 1(4), 85-95 (1997)
- Embrechts, P. , Resnick, S. e Samorodnitsky, G. , “Extreme value theory as a risk management tool”, *North American Actuarial Journal* (1998)
- Engle, R. F. , “Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation” , *Econometrica*, 50, 987-1007 (1982)
- Engle, R. F. e Ng, V. K. , ‘Measuring and testing the impact of news on volatility’ , *Journal of Finance*, 48, 1749-1778 (1993)
- Fama, E. F., “The behaviour of stock market prices”, *Journal of Business*, 38, 34-105 (1965)
- Fernandes, M. e Preumont, P. Y. , “The size of the BDS test on GARCH standardized residuals”, working paper, Univ. Libre de Bruxelles (1996)
- Fisher, R. A. , e Tippett, L. H. C. , “Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample”, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 24, 180-190 (1928)
- Friedman, B. M. e Laibson, D. I. , “Economic implications of extraordinary movements in stock prices”, *Brooking Papers on Economic Activity*, 2, 137-189 (1989)
- Glosten, L. R. , Jagannathan, R. e Runkle, D. E. , “On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks”, *Journal of Finance*, 48, 1779-1801 (1993)
- Granger, C. e Morgenstern, O , “Predictability of stock market prices”, *Heath Lexington*, Massachusetts, USA (1970)
- Granger, C. W. J. , e Newbold, P. , “Forecasting Economic Time Series”, *Academic Press*, New York (1977)
- Gray, S. F. , “Modeling the conditional distribution of interest rates as a regime-switching process”, *Journal of Financial Economics*, 42, 27-62 (1996)

- Hamilton, J. D. e Susmel, R. , “Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime”, *Journal of Econometrics*, 64, 307-333 (1994)
- Harvey, D. , Leybourne, S. e Newbold, P. , “Testing the equality of mean squared errors”, *International Journal of Forecasting*, 13, 281-291 (1977)
- Hentschel, L. , “All in the family: Nesting symmetric and asymmetric GARCH models”, *Journal of Financial Economics*, 39, 71-104 (1995)
- Herencia, M. Z. , Hotta, L. K. , e Pereira, P. L. V. , “Filragem e previsão com modelos de volatilidade estocástica versus GARCH”, *Revista Brasileira de Economia*, 52(2), 241-278 (1998)
- Higgins, M. L. e Bera, A. K. , “A class of nonlinear ARCH models”, *International Economic Review*, 33, 137-158 (1992)
- Hsieh, D. , “Testing for nonlinearity in daily foreign exchange rates”, *Journal of Business*, 62, 339-368 (1989)
- Hsieh, D. , “Chaos and nonlinear dynamics: application to financial markets”, *Journal of Finance*, 46, 1839-1877 (1991)
- Hsieh, D. , “Implications of nonlinear dynamics for financial risk management”, *Journal of Financial and quantitative Analysis*, 28.1, 41-64 (1993)
- Issler, J. V. , “Estimating and forecasting the volatility of Brazilian finance series using ARCH models”, *Revista de Econometria*, 19(1), 5-56 (1999)
- J. P. Morgan Bank, “RiskMetrics technical manual”, New York: J. P. Morgan Bank (1995)
- Jarque, C. e Bera, A. , “A test for normality of observations and regression residuals”, *International Statistical Review*, 55, 163-172 (1987)
- Jorion, P. “Value at risk: The new benchmark for controlling market risk”, *McGraw-Hill*, New York (1997)
- Kendall, M., “The analysis of economic time series, Part I: Price”, *Journal of the Royal Statistical Society*, 96A, 11-25 (1953)
- Kim, S. , Shephard, N. e Chib, S. , “Stochastic volatility: likelihood inference and comparison with ARCH models”, *Review of Economic Studies*, 65, 361-393 (1998)
- Koopmans, L. H. , “The spectral analysis of time series”, *Academic Press Inc.* , New York (1974)
- Kupiec, P. , “Futures margins and stock price volatility: is there any link?”, *Board of Governors of the Federal Reserve System*, Finance and Economics Discussion Paper No. 104 (1990)
- Kupiec, P. , “Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models”, *Journal of Derivatives*, 2, 73-84 (1995)
- Li, W. K. e Mark, T. K. , “On the squared residual autocorrelation in non-linear time series with conditional heteroskedasticity”, *Journal of Time Series Analysis* , 15, 627-636 (1994)

- McNeil, A. J. , “Calculating quantile risk measures for financial return series using extreme value theory”, Department Mathematic, EHT Zentrum, Zurich (1998)
- Meese, R. e Rose, A. , “Nonlinear, nonparametric, nonessential exchange rate estimation”, *American Economic Review*, 80, 192-196 (1991)
- Mendes, B. V. M. , “Computing robust risk measures in emerging equity markets using extreme value theory”, *Emerging Markets Quarterly*, 4, 25-41 (2000)
- Mendes, B. V. M. e Duarte Jr. , A. M. , “Robust estimation of ARCH models”, *Revista de Econometria*, 19(1), 139-180 (1999)
- Morais, I. A. C. e Portugal, M. S. , “Modelagem e previsão de volatilidade determinística e estocástica para a série de IBOVESPA”, *Estudos Econômicos – IPE/USP*, 29, 303-341 (1999)
- Morgan, W. A. , “A test for significance of the difference between two variances in a sample from a normal bivariate population”, *Biometrika*, 31, 13-19 (1939)
- Nelson, D. B. , “Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach”, *Econometrica*, 59, 347-370 (1991)
- Nelson, D. B. e Foster, D. B. , “Asymptotic filtering theory for univariate ARCH models”, *Econometrica*, 62, 1-41 (1994)
- Osborne, M. M. , “Brownian motion in the stock market”, *Operations Research*, 7, 145-173 (1959)
- Pagan, A. R. , e Schwert, G. W. , “Alternative models for conditional stock volatility”, *Journal of Econometrics*, 45, 267-290 (1990)
- Parkinson, M., “The extreme value method of estimating the variance of the rate of return”, *Journal of Business*, 53, 61-65 (1980)
- Pemberton, J. e Tong, H. , “A note on the distribution of non-linear autoregressive stochastic models” (1981)
- Pereira, P. L. V. , Hotta, L. K. ,Souza, L. A. R. e Almeida, N. M. C. G. , “Alternative models to extract asset volatility: a comparative study”, *Revista de Econometria*, 19(1), 57-109 (1999)
- Praetz, P. D. , “The distribution of share price changes”, *Journal of Business*, 45, 49-55 (1972)
- Reiss, R. D. e Thomas, M. , ‘Statistical analysis of extreme values’, *Birkhauser, Verlag* (1997)
- Schwert, G. W. , “Why does stock market volatility change over time?”, *Journal of Finance*, 45, 1115-1153 (1989)
- Schwert, G. W. , “Indexes of United States stock prices from 1802 to 1987”, *Journal of Business*, 63, 399-426 (1990)
- Stone, C. J. , “Consistent nonparametric regressions”, *Annals of Statistics*, 5, 595-620 (1977).

- Susmel, R. , “Switching volatility in Latin America equity markets”, *Emerging Markets Quarterly*, 2(1), 44-56 (1998)
- Tauchen, G. E. e Pitts, M. , “The price variability-volume relationship on speculative markets”, *Econometrica*, 51, 485-505 (1983)
- Taylor, S. J., “Modelling Financial; Time Series”, *John Wiley & Sons*, USA (1986)
- Ventura, A. M. , “Alguns testes de linearidade para séries temporais nos domínios do tempo e da frequência”, tese de mestrado, IME-USP, (2000)
- Working, H., “A random difference series for use in the analysis of time series”, *Journal of the American Statistical Association*, 29, 11-24 (1934).
- Zakoian, J. M. , “Threshold heteroskedastic models”, unpublished paper, Institut de la Statistique et des Études Économiques, Paris, (1991)
- Ziegelman, F. A. e Pereira, P. L. V. , “Modelos de volatilidade estocástica com deformação temporal: um estudo empírico para o IBOVESPA”, *Pesquisa e Planejamento Econômico (IPEA)*, 27, 353-373 (1997)