

8

Redução de modelos

8.1

Introdução

Neste capítulo, baseado em Ritto (25) e Donaldson (8), será mostrado como usar a aproximação dos modos para se aproximar a solução do sistema:

$$M\ddot{a} + Ka = F$$

dadas as condições iniciais. Os autovetores encontrados serão utilizados para desacoplar as equações diferenciais. Ao final, será mostrado ainda como o sistema pode ser reduzido com o uso de um número limitado de autovetores.

Conforme comentado, o Método dos Elementos Finitos utiliza uma abordagem local para encontrar a aproximação dos modos de vibração. O uso destes para, conforme será visto, reduzir o sistema, constitui um retorno à abordagem global. A Fig. (8.1) ilustra esse fato.

Quando o problema de autovalor $(K - \omega^2 M)u = 0$ é calculado, a matriz que contém os autovetores, chamada de matriz modal, é encontrada:

$$[u] = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_N \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix} \quad (8.1.1)$$

Da Álgebra Linear sabe-se que as matrizes M e K podem ser diagonalizadas pela matriz de autovetores:

$$[u]^T [M] [u] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & m_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [u]^T [K] [u] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & k_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad (8.1.2)$$

Ao se normalizar a matriz u com relação à matriz M e K , a diagonalização dessas últimas pela nova matriz normalizada Φ leva a:

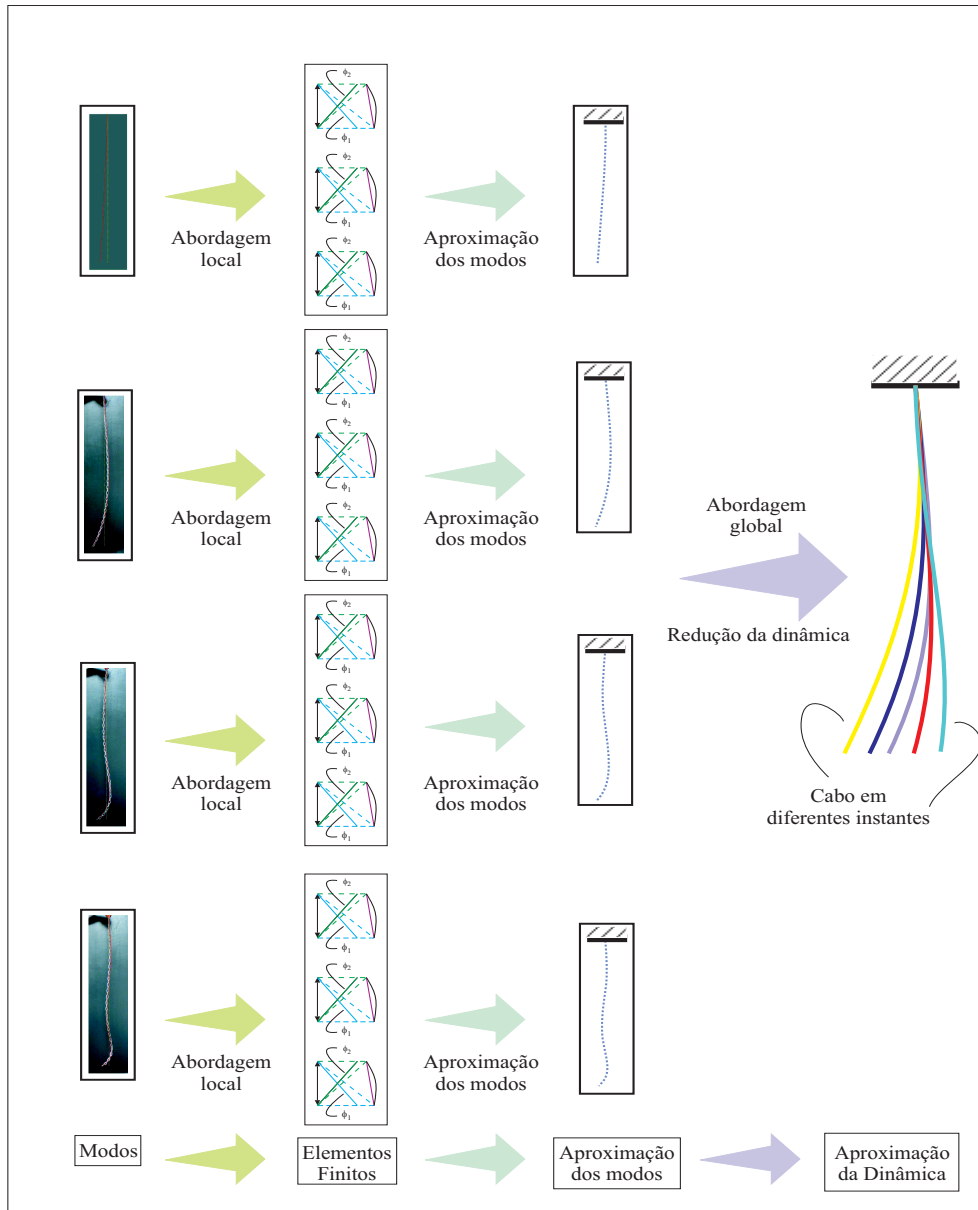


Figura 8.1: Etapas para a aproximação da dinâmica

$$[\Phi]^T[M][\Phi] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\Phi]^T[K][\Phi] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad (8.1.3)$$

Para a normalização de u , deve-se multiplicar cada uma de suas colunas por um fator $\gamma_i = 1/\sqrt{m_i}$:

$$\begin{bmatrix} | \\ \phi_i \\ | \end{bmatrix} = \gamma_i \begin{bmatrix} | \\ u_i \\ | \end{bmatrix} \quad (8.1.4)$$

para que, ao se multiplicar u_i por M , encontre-se a coluna i da matriz

identidade I , isto é:

$$\gamma_i^2 [u_i]^T [M] [u_i] = [I_i] \quad (8.1.5)$$

Ao se concluir o processo para todos os autovetores que compõem a matriz u , pode-se escrever a nova matriz Φ formada por todos os autovetores normalizados:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_N \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix} \quad (8.1.6)$$

8.2

Redução modal

O processo de redução modal inicia-se ao se fazer uma transformação de coordenadas, de a para as chamadas coordenadas modais q , na forma abaixo:

$$a(t) = [\Phi]q(t) \quad (8.2.1)$$

O sistema dinâmico é então reescrito, agora utilizando-se as novas coordenadas:

$$[M][\Phi]\ddot{q}(t) + [K][\Phi]q(t) = F \quad (8.2.2)$$

Em seguida projeta-se a equação no espaço gerado pela base modal, multiplicando toda a equação por Φ^T e, com isso, as equações são desacopladas:

$$\begin{aligned} [\Phi]^T [M] [\Phi] \ddot{q}(t) + [\Phi]^T [K] [\Phi] q(t) &= [\Phi]^T F \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \ddot{q}(t) + \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} q(t) &= [\Phi]^T F \end{aligned} \quad (8.2.3)$$

Cada modo de vibração caracteriza uma família de soluções periódicas:

$$a(t) = \sum_{i=1}^N q_i(t) \phi_i \quad (8.2.4)$$

Ao invés de se utilizar todos os modos calculados para o desacoplamento pode-se usar apenas alguns primeiros, sendo este número dependente da precisão requerida na resposta. Como resultado as matrizes do sistema serão reduzidas porém, ainda assim, obtém-se um sistema de equações desacopladas.

A esse processo dá-se o nome de redução modal que, em outras palavras, consiste na projeção da dinâmica em um subespaço gerado pela base de dimensão menor formada pelos m primeiros modos. Esse procedimento possui a

enorme vantagem da diminuição do esforço computacional. Problemas simples, cujas dimensões das matrizes do sistema podem facilmente superar mil, são reduzidos ao número de modos que se deseja utilizar como base de projeção. É importante não esquecer que a acurácia da aproximação dos modos utilizada na redução afetará a acurácia da resposta final.

8.3

Redução das condições iniciais no espaço gerado pela base modal

Não somente as matrizes de rigidez, massa e o vetor de carregamento devem ser projetados no espaço gerado pela base modal, mas também as condições iniciais. Em geral, dada uma matriz A , de dimensões $m \times n$, um vetor x de dimensão n , e b um vetor de dimensão m , se quer resolver $Ax = b$, em outras palavras, se quer encontrar a combinação linear das colunas de A , cujos coeficientes são os termos de x , que leva a b . Porém, sendo $m > n$ e, ainda que os termos da combinação linear sejam linearmente independentes, em geral não será possível chegar a b com a combinação das colunas de A . Nesses casos, deve-se procurar a combinação que chegue mais próximo de b , ou seja, a combinação Ax que minimize a distância de b . Essa minimização tem o mesmo significado de uma projeção de b no subespaço gerado pela base A . Quer se encontrar \bar{x} que minimiza o erro E entre a combinação Ax e o vetor b , isto é que minimize $E = \|Ax - b\|$, que é a distância entre b e um ponto $p = Ax$ no espaço gerado pelas colunas de A , o espaço coluna. Procurar a menor distância então é o mesmo que procurar o ponto p neste espaço que seja mais próximo de b .

A menor distância é dada quando se projeta b ortogonalmente no espaço coluna. Ao fazê-lo, o erro será ortogonal à cada coluna a de A , conforme ilustra a Fig (8.2), podendo-se escrever:

$$\begin{aligned} a_1^T(b - A\bar{x}) &= 0 \\ \vdots & \\ a_n^T(b - A\bar{x}) &= 0 \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (b - A\bar{x}) \end{bmatrix} \quad (8.3.1)$$

Que é o mesmo que:

$$A^T(b - A\bar{x}) = 0 \quad \text{ou} \quad A^T A \bar{x} = A^T b \quad (8.3.2)$$

Se as colunas de A forem linearmente independente $A^T A$ é inversível, podendo-se escrever:

$$\bar{x} = (A^T A)^{-1} A^T b \quad (8.3.3)$$

No contexto da redução modal, utiliza-se a teoria da projeção para encontrar o vetor das condições iniciais reduzidas a_{0red} que melhor combina

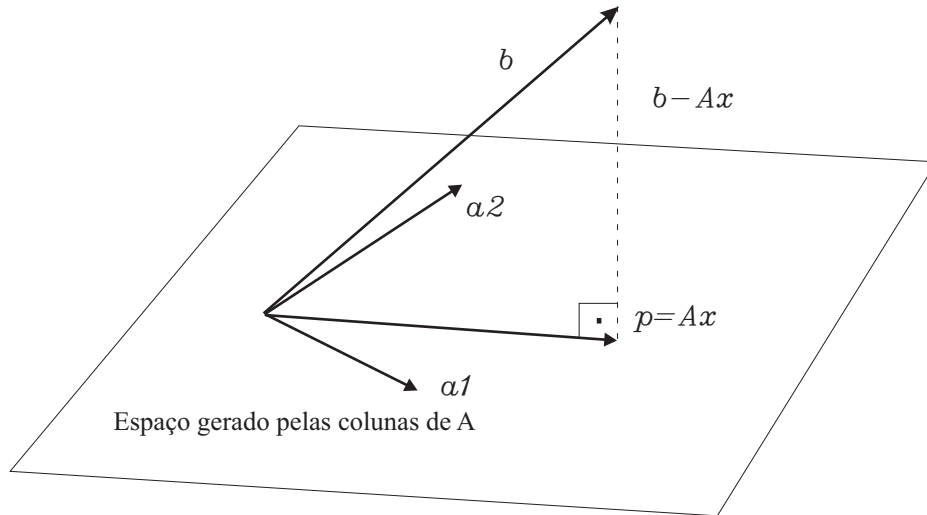


Figura 8.2: Erro ortogonal ao espaço coluna

os modos de vibração dados pela coluna de $[\Phi]$, minimizando a distância entre essa combinação e o vetor de condições iniciais a_0 , isto é:

$$a_{0red} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T w_0 \quad (8.3.4)$$

Da mesma forma, aumentando-se o número de modos, isto é, da base, mais próxima será a projeção do vetor. Como exemplo, toma-se um cabo fixo-livre com as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} L &= 10 \text{ m;} \\ A &= 0.01 \text{ m}^2; \\ \rho &= 100 \text{ kg/m.} \end{aligned}$$

onde L é o comprimento, A a área da seção transversal, e ρ a densidade linear do cabo.

Quer-se conhecer a dinâmica do cabo quando este é afastado de sua posição de repouso $d = 0.01m$ e logo então é solto, conforme ilustra a Fig. (8.3). $w_0 = \frac{d \cdot x}{L}$ expressa o deslocamento inicial do cabo.

Inicialmente deve-se obter o vetor w_0^N que representa w_0 , o que é tarefa fácil no MEF, onde cada entrada do vetor é igual ao valor do deslocamento inicial do nó associado. Por exemplo, se ao todo onze nós forem considerados então, $w_0^N = [0 \ 0,01 \ 0,02 \ 0,03 \ 0,04 \ 0,05 \ 0,06 \ 0,07 \ 0,08 \ 0,09 \ 0,1]$. A seguir este é reduzido no espaço gerado pela base modal, o que é feito através de:

$$a_{0red} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T w_0^N \quad (8.3.5)$$

8.4

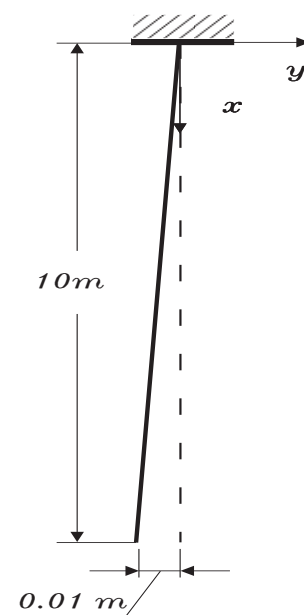


Figura 8.3: Condição inicial do cabo fixo-livre

Exemplos de aplicação

Com os estudos das seções anteriores, exemplos podem ser elaborados de forma a melhor ilustrar a teoria. Os programas desenvolvidos para este trabalho utilizam o até aqui descrito para o estudo da resposta dos sistemas propostos na seguinte ordem:

- Divisão do domínio em subdomínios;
- Cálculo das matrizes de rigidez e massa com o uso do MEF;
- Resolução do problema de autovalor para a aproximação dos modos de vibração;
- Geração do vetor carregamento para cada instante t ;
- Redução e desacoplamento do sistema com o uso da aproximação dos modos de vibração;
- Resolução das equações diferenciais ordinárias desacopladas;
- Impressão da resposta em cada instante t .

Nos programas onde a dinâmica é aproximada, deve-se especificar uma precisão para a aproximação. O programa compara a norma do vetor das variáveis de estado em um dado instante aproximado por N aproximações dos modos com a obtida com o uso de $N - 1$ aproximações dos modos. Se a diferença percentual for menor que o erro especificado, o programa considera que a precisão foi obtida, caso contrário, o programa reinicia a aproximação

com $N + 1$ aproximações de modos e assim em diante, até que se chegue no erro pretendido.

Nas seções a seguir, os dados de cada exemplo serão inseridos nos programas e as respostas serão mostradas.

8.4.1

Exemplo 1 - Abastecimento de uma plataforma

A Fig. (8.4) ilustra o exemplo proposto. A plataforma da figura deve ser continuamente abastecida de desde peças de manutenção a alimentação para sua tripulação. Em geral, os contêineres são trazidos por navios de suprimento e devem ser içados do navio à plataforma de forma segura, sem grande movimentação, para que se evite acidentes. Neste exemplo quer se simular uma típica operação de abastecimento para descobrir o máximo deslocamento de um desses contêineres. A lança do guindaste da plataforma se encontra a $40m$ de altura do navio de suprimento e o contêiner pesa $P = 50kN$. A um movimento de descida do navio o contêiner se desloca do navio e fica suspenso somente pelo cabo. No início da análise a distância entre a ponta da lança e o contêiner é de $1m$. Forçamentos externos excitam o cabo. A Tab. (8.1) mostra os dados de entrada do programa.

A solução do problema é aproximada com o uso do programa *MEF_cabo* (ver Apêndice C para o manual de uso). Os primeiros 2000 segundos logo após a descida do navio e consequente desprendimento do contêiner são analisados. São simulados alguns carregamentos de interesse:

- $f(t) = \sin(t)$

A Tab. (8.2) mostra os principais resultados para este carregamento.

A Fig. (8.5) mostra o deslocamento do cabo em 4 instantes.

- $f(t) = \sin(0.1610 * t)$

Sendo $\omega_1 = 0.1610rd/s$ a primeira frequência natural do cabo. A Fig (8.6) mostra o deslocamento do último nó, isto é, a extremidade onde o contêiner é preso, em função do tempo.

A Tab. (8.3) mostra os principais resultados para este carregamento.

- $f(t) = \sin(0.95 * \omega_1 * t)$

Desta vez excita-se o cabo em $0.95 * \omega_1$ esperando-se visualizar o fenômeno do batimento. A Fig. (8.7) mostra o fenômeno.

Dados de entrada			
	Nome	Descrição	Valor
1	L	Comprimento do cabo	40m
2	A	Área da seção do cabo	$0.01m^2$
3	N	Número de modos que se quer obter com a precisão especificada	10
4	rho	Densidade linear	100 kg/m
5	e	Precisão especificada da frequência	1,1 %
6	e_w	Precisão especificada da resposta dinâmica	1 %
7.3	cond	cabo fixo-massa	2
7.4	kk	constante elástica da mola	0 N/m
7.5	mm	massa na extremidade	5000 kg
8.2	analise	aproxima modos, frequência e dinâmica	2
8.4	carreg	carregamento dinâmico	2
8.5	ti	instante de início da análise	0 s
8.6	tf	instante de término da análise	2000 s
8.7	dt	passo no tempo da visualização	0.1 s
8.8	w0	função de deslocamento inicial	x/40
8.9	v0	função da velocidade inicial	[-]
9.1	fx	carregamento ao longo do cabo	1
9.2	ft	carregamento variável no tempo ao longo do cabo	diversos
9.3	fcx	carregamento concentrado	0 N
9.4	pax	ponto de aplicação do carregamento concentrado	0 m
9.5	fci	impacto	0 N
9.6	pai	ponto de aplicação do impacto	0 m
9.7	tai	instante de aplicação do impacto	0 s

Tabela 8.1: Entrada do Programa MEF_cabo

Resultado - Método Direto	
	MEF_cabo
Precisão especificada	1 %
Precisão obtida	0.0549 %
Número de elementos	50
Número de modos para precisão	10
Deslocamento máximo	1.0381m

Tabela 8.2: Saída do Programa MEF_cabo - primeiro carregamento

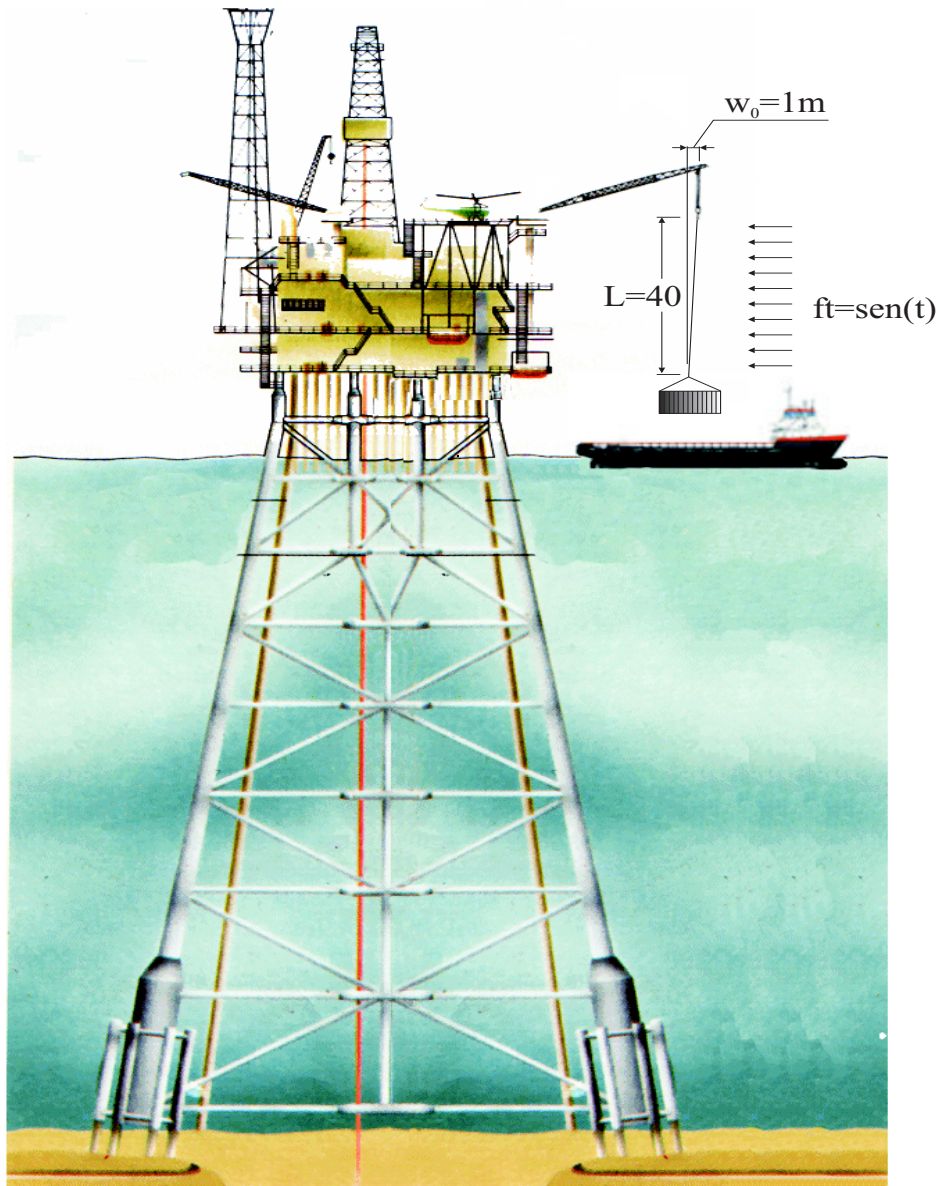


Figura 8.4: Cabo suspenso transportando uma carga

A Tab. (8.4) mostra os principais resultados para este carregamento.

$$\bullet f(t) = \sin(\omega_1 * t) + \sin(\omega_2 * t) + \sin(\omega_3 * t) + \sin(\omega_4 * t)$$

Onde $\omega_1 = 0.1610$, $\omega_2 = 5.6687$, $\omega_3 = 11.3417$ e $\omega_4 = 17.0377$ são a primeira, segunda, terceira e quarta frequências naturais. A Fig. (8.8(a)) mostra o deslocamento em $x=20$, enquanto que a Fig. (8.8(b)) mostra o deslocamento do contêiner.

A Tab. (8.5) mostra os principais resultados para este carregamento.

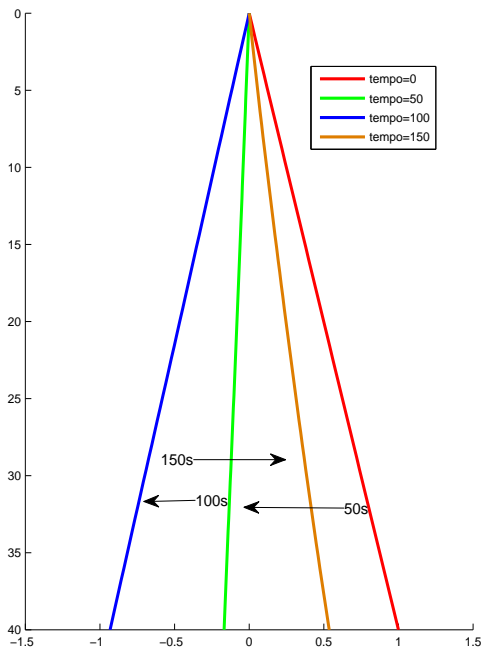


Figura 8.5: Posição do cabo em 4 instantes

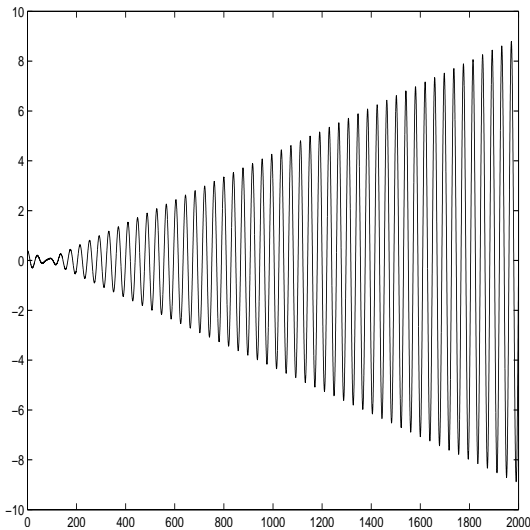


Figura 8.6: Deslocamento do contêiner nos primeiros 2000 segundos

Resultado - Método Direto	
	MEF_cabo
Precisão especificada	1 %
Precisão obtida	0.0726 %
Número de elementos	36
Número de modos para precisão	7
Deslocamento máximo	23.12m

Tabela 8.3: Saída do Programa MEF_cabo - segundo carregamento

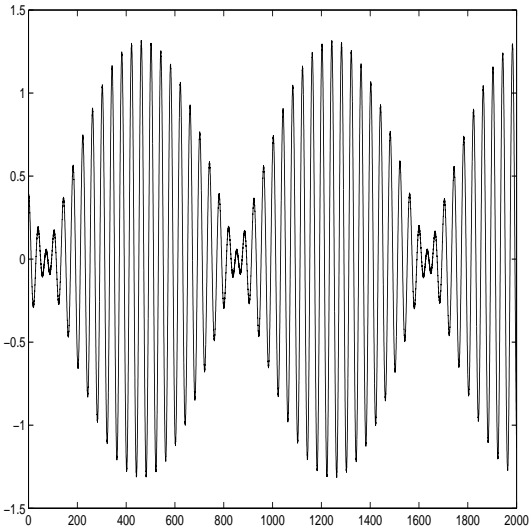


Figura 8.7: Deslocamento do contêiner nos primeiros 2000 segundos

Resultado - Método Direto	
	MEF_cabo
Precisão especificada	1 %
Precisão obtida	0.0726 %
Número de elementos	36
Número de modos para precisão	7
Deslocamento máximo	3.3464m

Tabela 8.4: Saída do Programa MEF_cabo - terceiro carregamento

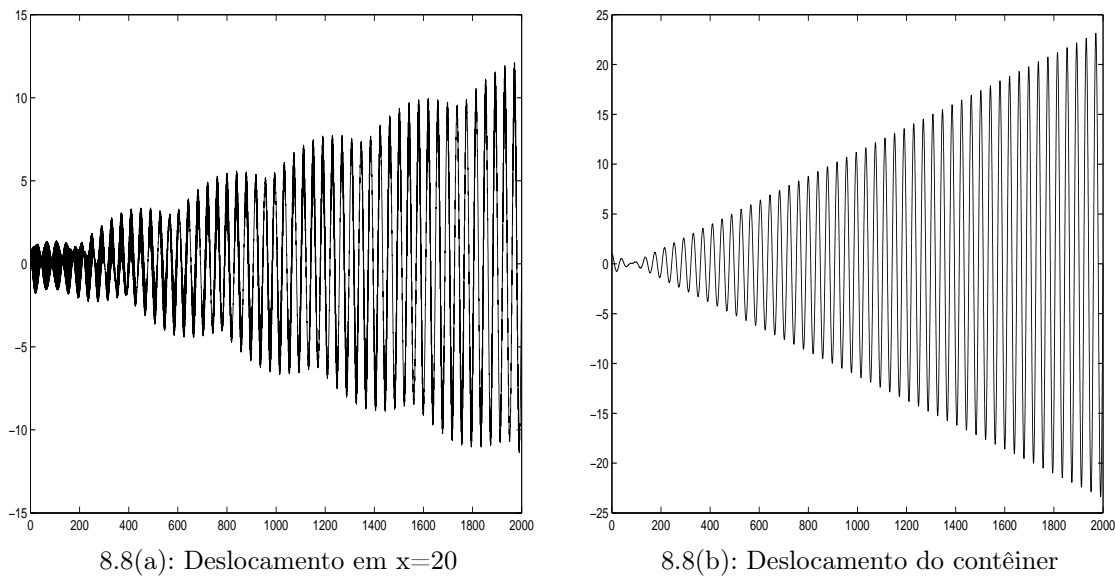


Figura 8.8: Deslocamento de dois pontos do cabo

Resultado - Método Direto	
	MEF_cabo
Precisão especificada	1 %
Precisão obtida	0.0726 %
Número de elementos	36
Número de modos para precisão	7
Deslocamento máximo	23.1237m

Tabela 8.5: Saída do Programa MEF_cabo - quarto carregamento

8.4.2
Exemplo 2 - Jateamento de uma placa

A operação de jateamento é utilizada na indústria para a limpeza e preparação de superfícies e, dependendo da aplicação, aumento de resistência à fadiga. O tipo de material, o tamanho, a forma, as condições da superfície a ser limpa e a especificação do acabamento superficial, tem influência direta quanto a seleção do sistema de jateamento, do abrasivo e a definição do procedimento. Existem casos que podem ser necessários outros métodos de limpeza, antes e depois do jateamento para a obtenção de melhores resultados. Neste exemplo, a dinâmica de uma placa enquanto é submetida a uma operação deste tipo será analisada.

A cada milissegundo uma nova partícula atinge a placa em um ponto de coordenada (x,y), conforme ilustra a Fig (8.9). A distribuição de probabilidade dos pontos atingidos é dada por uma distribuição normal de probabilidade¹.

¹ Aqui a distribuição normal serve apenas para ilustrar o exemplo, não sendo necessaria-

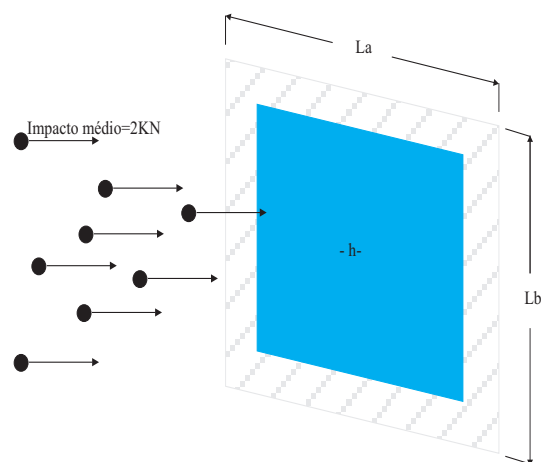


Figura 8.9: Placa na operação de jateamento

Os parâmetros mais importantes de uma distribuição normal são a média μ e o desvio padrão σ . A média indica a posição central da distribuição enquanto o desvio padrão indica a dispersão da distribuição. No caso da distribuição normal, a moda, que é o valor de maior frequência, coincide com a média e com a mediana (medida que em um conjunto de dados ordenados separa a metade inferior da superior). A curva normal possui uma área em torno da média onde se concentram os valores de maior frequência. À medida que os valores se afastam dessa região, menos frequentes são, e menor é a área da curva. Foram usadas duas curvas normais, uma para x e outra para y .

Em geral o MEF não é o método mais apropriado para a aproximação de problemas onde o carregamento é de impacto. Neste trabalho, o método é utilizado nesse tipo de problema apenas para exemplificação.

Durante o jateamento, o operador, na média μ , atinge a placa no meio e o desvio padrão é de $\sigma = \mu 0,4$. A intensidade da força que cada partícula impõe sobre a placa no instante do impacto, também é dada por uma distribuição normal, cuja média μ_{carreg} depende do ajuste da pistola de jateamento, que aqui será igual a $\mu_{carreg} = 2kN$ com um desvio padrão de $\sigma_{carreg} = \mu_{carreg} 0,1$.

Os dados de entrada no programa são dados pela Tab. (8.6).

Para a situação descrita quer se conhecer a dinâmica da placa. Com o uso do programa *MEF_placa* a solução do problema nos primeiros cinco segundos é aproximada. A Tab.(8.7) mostra os resultados obtidos pelo programa.

A Fig. (8.10) mostra o deslocamento da placa em 4 instantes.

mente a distribuição que melhor caracteriza o problema.

Dados de entrada			
	Nome	Descrição	Unidade
1	La	Comprimento da placa	1m
2	Lb	Largura da placa	1m
3	h	Espessura da placa	0,01[m]
4	E	Módulo de Elasticidade	2.1e11 Pa
5	rho	Densidade	7850kg/m ³
6	N	Número de modos que se quer obter com a precisão especificada	5
7	e	Precisão especificada da frequência	1%
8	e_w	Precisão especificada da resposta dinâmica	1%
9.2	cc	placa engastada	2
10.2	analise	aproxima modos, frequência e deslocamento	2
10.4	carreg	carregamento dinâmico	2
10.5	ti	instante de início da análise	0
10.6	tf	instante de término da análise	5
10.7	dt	passo no tempo da visualização	0.01
10.8	w0	função de deslocamento inicial	0
10.9	v0	função da velocidade inicial	0
11.2	op_carreg	jateamento (para aproximação do problema de jateamento de uma placa)	2
11.3	fx	função de carregamento	0
11.4	ft	função de carregamento variável no tempo	0
11.5	fcx	carregamento concentrado constante no tempo	0
11.6	pax	ponto de aplicação do carregamento concentrado	0
11.7	fci	impacto	2000 N
11.8	pai	ponto de aplicação do impacto	0m, 0m
11.9	tai	instante de aplicação do impacto	0 [s]
11.10	NE_ini	número de elementos iniciais (número par)	10
11.11	NE_ini	passo do número de elementos (número par)	10

Tabela 8.6: Entrada do Programa MEF_placa

Resultado - Método Direto	
	MEF_placa
Precisão especificada	1%
Precisão obtida	0,3825%
Número de elementos	1024
Número de modos para precisão	5
Deslocamento máximo	8,0835E-4m

Tabela 8.7: Saída do Programa MEF_placa

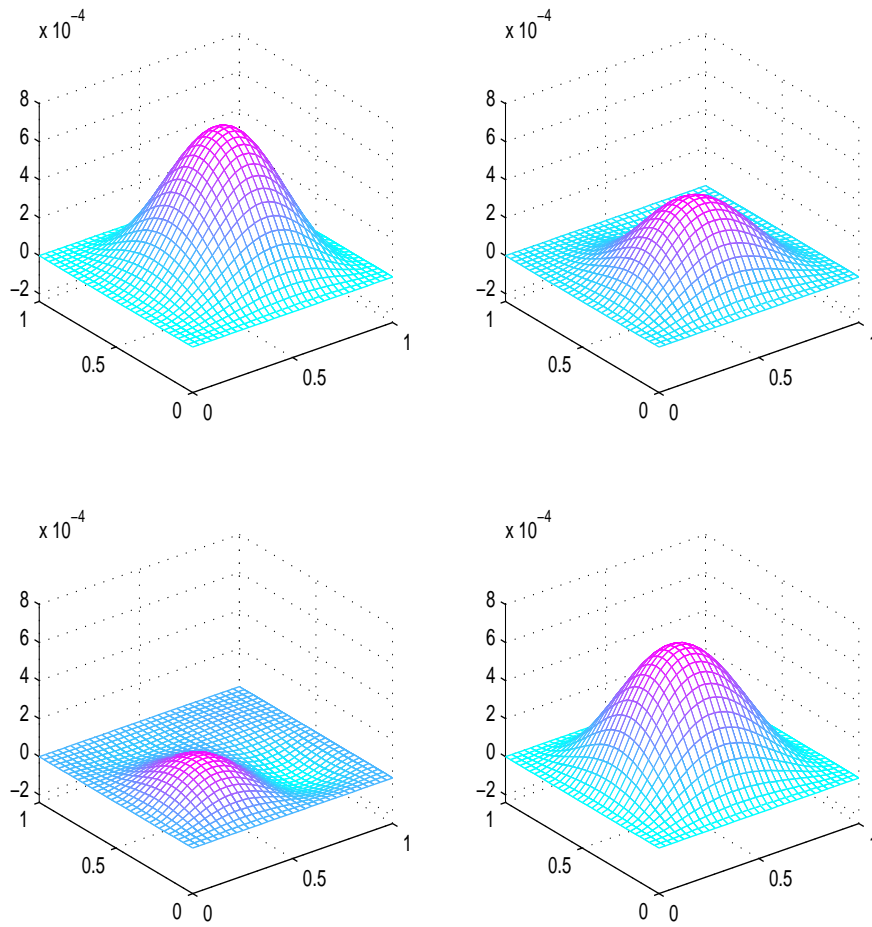


Figura 8.10: Posição da placa em 4 instantes (em sentido horário $t=0.1, 20, 35$ e 42)