PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812208/CA

4
Formulação Variacional - Aplicando o Princípio de Hamilton

Nesta seção o Princípio de Hamilton será aplicado para a obtenção da equação de dinâmica da formulação variacional de um cabo e de uma placa. Foram consultados Hagedorn (12), Liew (18), Meirovitch (21) e Soedel (27).

4.1
Formulação Variacional de um Cabo Fixo-livre

Quer se formular a dinâmica de um cabo, tal qual o do primeiro exemplo através da aplicação do Princípio de Hamilton. Começa-se escrevendo a energia cinética $E_c(t)$ que é dada por:

$$E_c(t) = \frac{1}{2}\int_0^L A(x)\rho(x)\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right]^2 dx \tag{4.1.1}$$

Já a energia potencial vem das forças restauradoras devido à tensão no cabo. O elemento diferencial dx do cabo tem em ds a sua posição deformada. A energia potencial é dada pela soma do trabalho que deve ser realizado pela tração no cabo para restaurar a sua posição original, que é dada por:

$$E_p(t) = \int_0^L T(x)(ds - dx) \tag{4.1.2}$$

A seguinte aproximação é tomada (lembrando que $\delta w/\delta x << 1$):

$$ds = \left[(dx)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}dx\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx \cong \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] dx \tag{4.1.3}$$

Que, substituindo na equação da energia potencial, leva a:

$$E_p(t) = \frac{1}{2}\int_0^L T(x)\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right]^2 dx \tag{4.1.4}$$

O termo do trabalho virtual das forças distribuídas não-conservativas é dado por:

$$\overline{\delta W}_{nc}(t) = \int_0^L f(x,t)\delta w(x,t)dx \tag{4.1.5}$$

Após escrito cada termo, o próximo passo é o cálculo da variação de cada um, começando pela energia cinética:

$$\delta E_c(t) = \int_0^L A(x)\rho(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\delta\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right]dx \tag{4.1.6}$$

Seguida pela energia potencial:

$$\delta E_p(t) = \int_0^L T(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\delta\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right]dx \tag{4.1.7}$$

A equação (4.1.6) contém a variação na velocidade. Deve-se transformá-la para que esta seja em termos do deslocamento virtual. Usa-se as regras do cálculo variacional e ainda integra-se por partes:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2}\delta E_c(t)dt &= \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L A(x)\rho(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\delta\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right]dxdt \\
&= \int_0^L\left[\int_{t_1}^{t_2} A(x)\rho(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \delta w(x,t)}{\partial t}dt\right]dx \\
&= \int_0^L\left[A(x)\rho(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\delta w(x,t)\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}\delta w(x,t)dt\right]dx \\
&= -\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L A(x)\rho(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}\delta w(x,t)dxdt \qquad (4.1.8)
\end{aligned}$$

já que $\delta w(x,t) = 0$ em $t = t_1, t_2$ (conforme descrito anteriormente na seção (3), $\eta(x) = 0$ em t_1 e t_2 e $\delta w(x,t) = \epsilon\eta(x)$).

Substituindo as variações na equação do Princípio de Hamilton, fazendo A e ρ constantes e lembrando que $T(x) = A\rho\, g(L-x)$, chega-se finalmente na equação variacional do cabo:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_0^L A\rho\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}\delta w(x,t)dx + \int_0^L A\rho\, g(L-x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\frac{\partial \delta w(x,t)}{\partial x}dx - \int_0^L f(x,t)\delta w(x,t)dx\right\}dt = 0 \tag{4.1.9}$$

com condição essencial [1]:

$$w(0,t) = 0 \tag{4.1.10}$$

Dois comentários se fazem de extrema importância:

– As condições de contorno naturais (de ordem 1, que neste caso estão relacionadas ao extremo livre) foram incorporadas pela formulação varia-

[1] Para uma classificação das condições de contorno, essenciais ou naturais, ver seção (5.3)

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812208/CA

cional. O espaço de funções agora somente deve atender às condições de contorno essenciais.

– A derivada de maior ordem, que na formulação forte é $2p$ ($2p = 2$), na formulação variacional é p ($p = 1$).

Essas mudanças no espaço de funções no problema variacional incorrem em maior liberdade para se trabalhar com funções que antes não eram permitidas na formulação forte anterior. Ao espaço de funções que atende às condições impostas pelo problema variacional dá se o nome de espaço de funções admissíveis.

Demonstra-se neste caso que ambas as formulações, a forte e a variacional, são equivalentes. Para essa demonstração realiza-se uma integração por partes da variação de E_p:

$$\begin{aligned}
\delta E_p(t)dt &= \int_0^L T(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\delta\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right]dx = \int_0^L T(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\frac{\partial \delta w(x,t)}{\partial x}dx \\
&= T(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\delta w(x,t)\bigg|_0^L - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right]\delta w(x,t)dx \\
&= -\int_0^L \frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right]\delta w(x,t)dx + T(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=L} \\
&\quad -T(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\delta w(x,t)\bigg|_{x=0}
\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

e em seguida substituindo esse termo na equação do Princípio de Hamilton:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2}\left\{-\int_0^L\left\{A\rho\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[A\rho\, g(L-x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right] - f(x,t)\right\}\delta w(x,t)dx\right. \\
&\left. -A\rho\, g(L-x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\delta w(x,t)\bigg|_{x=L} + A\,\rho\, g(L-x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\delta w(x,t)\bigg|_{x=0}\right\}dt = 0
\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

A equação diferencial da dinâmica pode ser obtida do primeiro termo da equação acima, dado que os deslocamentos virtuais são arbitrários, pelo lema fundamental do cálculo variacional:

$$A\rho\,\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[A\rho\, g(L-x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right] = f(x,t) \tag{4.1.13}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812208/CA

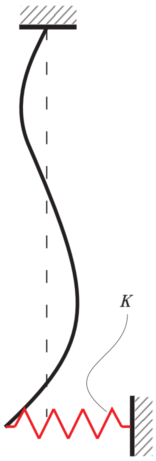

Figura 4.1: Cabo fixo com mola na extremidade

A condição de contorno essencial ($w(0,t) = 0$), não permite que haja variação do deslocamento em 0 ($\delta w(0,t) = 0$). Logo o terceiro termo da Eq. (4.1.12) é anulado.

A condição de contorno natural é obtida dado que em $x = L$ não há qualquer restrição sobre as variações do deslocamento, logo estes podem ser arbitrários. O somatório de todos os termos da Eq. (4.1.12) será 0 somente quando:

$$A\rho\, g(L-x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = 0 \qquad x = L \tag{4.1.14}$$

4.1.1 Cabo fixo-mola

Altera-se a condição de contorno da extremidade livre do cabo colocando-se uma mola neste ponto, conforme a Fig. (4.1). A adição desta mola implica na mudança do termo da energia potencial que passa a ser:

$$E_p(t) = \frac{1}{2}\int_0^L A\rho\, g(L-x)\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right]^2 dx + \frac{1}{2}Kw^2(x,t), \tag{4.1.15}$$

onde K é a constante da mola. A variação de $E_p(t)$ é em seguida dada por:

$$\delta E_p(t) = \int_0^L A\rho\, g(L-x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\delta\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right] dx + Kw(L,t)\delta w(L,t) \tag{4.1.16}$$

Substituindo o resultado na equação do Princípio de Hamilton junto com a energia cinética, que não foi alterada, obtém-se

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812208/CA

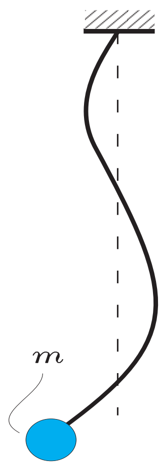

Figura 4.2: Cabo fixo com massa na extremidade

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L A\rho \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \delta w(x,t) dx + \int_0^L A\rho\, g(L-x) \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \frac{\partial \delta w(x,t)}{\partial x} dx \right.$$
$$\left. + Kw(L,t)\delta w(L,t) - \int_0^L f(x,t)\delta w(x,t) dx \right\} dt = 0 \quad (4.1.17)$$

e condição essencial $w(0,t) = 0$. Na formulação forte do mesmo problema a condição natural seria dada por

$$T(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + Kw(x,t) = 0, \qquad x = L \quad (4.1.18)$$

Novamente, observa-se que a condição natural de ordem $2n-1$ foi incluída na própria formulação variacional.

4.1.2
Cabo fixo-massa

Agora a mola será substituída por uma massa m na extremidade do cabo, conforme a Fig.(4.2). Nesse caso o termo da energia cinética fica:

$$E_c(t) = \frac{1}{2}\int_0^L A\rho \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right]^2 dx + \frac{1}{2} m \left[\frac{\partial w(L,t)}{\partial t}\right]^2 \quad (4.1.19)$$

A variação de E_c após as integrações por partes em t é dada por:

$$\delta E_c = -\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L A\rho \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \delta w(x,t) dx + m\frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial t^2}\delta w(L,t)\right] dt \quad (4.1.20)$$

Substituindo o resultado na equação do Princípio de Hamilton junto com a energia potencial da formulação do cabo fixo-livre, obtém-se:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812208/CA

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L A\rho \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \delta w(x,t) dx + m \frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial t^2} \delta w(L,t) + \int_0^L A\rho\, g(L-x) \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \frac{\partial \delta w(x,t)}{\partial x} dx - \int_0^L f(x,t) \delta w(x,t) dx \right\} dt = 0 \tag{4.1.21}$$

4.2
Formulação Variacional de uma placa

Assim como foi feito com um cabo, inicia-se a formulação variacional de uma placa escrevendo-se a energia potencial (E_p) e cinética (E_c):

$$E_p = \frac{1}{2} \int_D D_E \left\{ (\nabla^2 w(x,y,t))^2 + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial y^2} \right] \right\} dD \tag{4.2.1}$$

e

$$E_c = \frac{1}{2} \int_D \rho h \left(\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial t} \right)^2 dD \tag{4.2.2}$$

onde,

$$D_E = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \tag{4.2.3}$$

Continuando com o procedimento, calcula-se a variação da energia potencial:

$$\delta E_p = \int_D D_E \left\{ \nabla^2 w \delta \nabla^2 w + (1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \right\} dD \tag{4.2.4}$$

e a da energia cinética que é mostrada abaixo já substituída na equação do Princípio de Hamilton para que a integração por parte em t possa ser realizada:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812208/CA

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \delta E_c dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_D \rho h \frac{\partial w}{\partial t} \delta \frac{\partial w}{\partial t} dD dt = \int_D \int_{t_1}^{t_2} \rho h \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \delta w dt dD \\
&= \int_D \left[\rho h \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho h \frac{\partial w}{\partial t} \right) \delta w dt \right] dD \\
&= -\int_{t_1}^{t_2} \int_D \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \, dD \, dt \qquad (4.2.5)
\end{aligned}$$

Sem esquecer do trabalho virtual das forças não-conservativas que é dado por:

$$\delta W = \int_D f(x, y, t) \delta w dD \qquad (4.2.6)$$

Por fim, é feita a substituição dos termos encontrados na equação do Princípio de Hamilton para a obtenção da equação variacional da placa, podendo-se apresentar a formulação variacional do problema:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_D \left\{ \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w - D_E \left[\nabla^2 w \delta \nabla^2 w + (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left. \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] - f(x,y,t) \delta w \right\} dD \right\} dt = 0 \qquad (4.2.7)$$

As condições de contorno essenciais para o caso de uma placa apoiada são iguais às dadas pela Eq. (2.2.23):

$$w|_{x=0,a} = 0 \quad w|_{y=0,b} = 0 \qquad (4.2.8)$$

e as condições iniciais:

$$w(x,0) = w_0(x) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = v_0(x) \qquad (4.2.9)$$

Para as condições de contorno do caso engastada e livre ver Eq. (2.2.25) e Eq. (2.2.26)

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0812208/CA