

### 3

## Cálculo Variacional

Este capítulo tem por objetivo fundamentar e fornecer ferramentas para a discussão dos capítulos que virão, onde os sistemas tratados serão formulados através de uma segunda forma, a chamada formulação variacional. Foram consultados Komzsik (15), Lemons (17) e Meirovitch (21).

### 3.1

#### Introdução ao Cálculo de Variações

Um funcional é uma associação entre um conjunto de funções ( $C[0, L]$ ) e um conjunto de números ( $\mathbb{R}$ ). Dado um funcional:

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x), y(x)') dx \quad (3.1.1)$$

e  $y$  que satisfaz as condições de contorno:

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y(x_1) = y_1 \quad (3.1.2)$$

Supõe-se que a função  $y$  extrema o funcional, toma-se uma família paramétrica  $Y$  e testa-se quais dentre as funções de  $Y$  levam  $I$  ao extremo.

À família paramétrica  $Y$  será formado da seguinte forma

$$Y = y + \epsilon \eta \quad (3.1.3)$$

onde à  $y$  é acrescida  $\epsilon \eta$ . A intenção é provar que somente  $y$  extrema o funcional.

Para que as funções da família  $Y$  atendam às condições de contorno, pois caso contrário não poderiam nem mesmo serem testadas como solução, se faz necessário que

$$\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0 \quad (3.1.4)$$

Sendo assim:

$$Y(x_0) = y(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad Y(x_1) = y(x_1) = y_1 \quad (3.1.5)$$

A substituição de  $Y$  no funcional leva a:

$$I(\epsilon) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, Y(x), Y(x)') dx \quad (3.1.6)$$

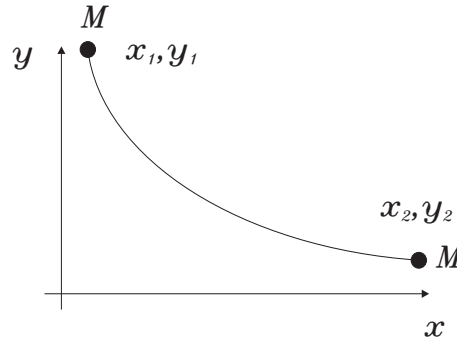


Figura 3.1: Problema da braquistócrona. Qual função extrema o tempo  $T$ ?

$I(\epsilon)$  é idêntico ao funcional original  $I(x)$  quando  $\epsilon$  é igual a zero e é extremado por:

$$\frac{\partial I(\epsilon)}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = 0 \quad (3.1.7)$$

Desenvolvendo-se as diferenciações e realizando-se as devidas substituições (ver Komzsik (15)) chega-se a

$$\frac{\partial I(\epsilon)}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta dx \quad (3.1.8)$$

O lema fundamental do cálculo das variações estabelece que para um  $\eta$  conforme descrito:

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta F dx = 0 \quad (3.1.9)$$

somente é verdade se:

$$F = 0 \quad (3.1.10)$$

Este é um importante resultado que será usado no desenvolvimento das equações variacionais. A aplicação do lema na equação (3.1.8), leva à Equação Diferencial de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \quad (3.1.11)$$

O termo  $\epsilon \eta = \delta y$  é também conhecido como variação da função.

A Equação de Euler-Lagrange mais as condições de contorno  $y(x_0) = y_0$  e  $y(x_1) = y_1$  fazem o funcional estacionário.

A primeira semente do cálculo variacional foi o problema da braquistócrona (ver Lemons (17)). Dada uma massa  $M$  que desliza por uma curva que liga os pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ , como mostrado na Fig. (3.1), levando em conta a gravidade, o tempo  $T$  que a massa leva para se deslocar de um ponto a outro varia de acordo com a trajetória e é extremado por uma determinada curva. Lançando mão do cálculo das variações, encontra-se a função  $y$  que extrema o funcional  $T$ .

Algumas observações podem ser feitas a respeito do cálculo variacional (Bathe (2)):

- O método variacional fornece uma maneira relativamente fácil de se construir as equações que governam um sistema, uma vez que uma formulação variacional considera grandezas escalares ao invés de vetoriais.
- Algumas variáveis que devem ser incluídas na formulação direta já não mais o devem na variacional, tal como são as forças internas que não realizam trabalho;
- Conforme será visto, ao se utilizar funções aproximantes na formulação forte estas devem atender a condições mais rigorosas do que quando utilizadas na formulação variacional.

## 3.2

### Dinâmica entre dois instantes

Segundo o Princípio de Hamilton, a dinâmica entre dois instantes em sistemas conservativos é dado pela extremação do funcional

$$\int_{t_0}^{t_1} L dt \quad (3.2.1)$$

onde  $L = E_c - E_p$  é o Lagrangeano,  $E_c$  é a energia cinética e  $E_p$  a energia potencial. Pela sua importância e aplicabilidade neste trabalho, esse princípio é abordado nesta seção, que possui como referência Banach (1) e Meirovitch (21). Conforme será visto, o Cálculo Variacional é utilizado na resolução do problema de extremação desse funcional.

#### 3.2.1

##### Deslocamentos virtuais

Toma-se um ponto material cujo deslocamento é restrito à superfície fixada de uma esfera. Ao se deslocar este ponto da posição A a uma posição B, diz-se que este é um deslocamento possível se este for na superfície fixada, ou seja, obedecendo às restrições de deslocamento impostas. Quando o contrário ocorre, este deslocamento é chamado de impossível. O mesmo conceito se aplica à velocidade deste mesmo ponto, esta é dita possível se o ponto puder possuí-la enquanto se move na superfície fixada e impossível quando não. No caso de uma superfície fixada, as velocidades possíveis de um ponto material restritos a esta são sempre vetores tangentes a ela.

Deslocamentos virtuais são aqueles proporcionais aos vetores de velocidades possíveis. Sendo assim, são tangentes à superfície e de sentido e magnitude qualquer. Não se deve confundir deslocamento virtual com deslocamento

possível. Dada uma superfície curva fixada, um deslocamento tangente a esta não é possível, porém é virtual dado que é proporcional a uma velocidade possível. Uma exceção é quando a superfície é plana, onde deslocamentos virtuais são de fato possíveis.

De uma forma geral, dada uma superfície fixada

$$F(x, y, z) = 0 \quad (3.2.2)$$

se um ponto material possui coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  que satisfaçam a equação da superfície, então este ponto está sobre a superfície. Supõe-se então que este ponto está se movendo pela superfície de forma arbitrária. Claramente se este movimento for na superfície então a equação será satisfeita a cada instante. Diferenciando-se a equação (3.2.2) em relação ao tempo  $t$ , obtém-se

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0 \quad (3.2.3)$$

Denominando-se  $\frac{dx}{dt}$  por  $v_x$  (e o mesmo para as demais variáveis), reescreve-se a equação:

$$\frac{\partial F}{\partial x} v_x + \frac{\partial F}{\partial y} v_y + \frac{\partial F}{\partial z} v_z = 0 \quad (3.2.4)$$

Velocidades possíveis satisfazem a equação. Dado um deslocamento  $\delta \bar{s}$ , cujas projeções nos eixos coordenados são  $\delta x$ ,  $\delta y$  e  $\delta z$ , se  $\delta \bar{s} = v$  então  $\delta \bar{s}$  é um deslocamento virtual. Substituindo na equação acima, pode-se dizer que um deslocamento virtual é um deslocamento que satisfaz a equação:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \delta z = 0 \quad (3.2.5)$$

O mesmo desenvolvimento pode ser feito para sistemas de pontos obtendo-se

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial F_j}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial F_j}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (3.2.6)$$

Se os deslocamentos  $\delta x_1, \dots, \delta z_n$  satisfazem a equação acima, então os deslocamentos  $-\delta x_1, \dots, -\delta z_n$  também o fazem, sendo chamados de reversíveis.

### 3.2.2

#### Princípio dos Trabalhos Virtuais

Dado um sistema holônomo-escleronômico <sup>1</sup> consistindo de  $n$  pontos materiais  $A_1, \dots, A_n$  no qual as forças  $P_1, \dots, P_n$  são aplicadas. Dando-se ao

<sup>1</sup>Sistemas holônomos são aqueles cujas restrições podem ser representadas como função das coordenadas dos pontos e do tempo. Caso essas não sejam função do tempo, então diz-se ainda que o sistema é escleronômico

sistema um deslocamento virtual arbitrário  $\overline{\delta s_1}, \dots, \overline{\delta s_n}$ , o trabalho das forças nesses deslocamentos é:

$$\delta W = P_1 \overline{\delta s_1} + \dots + P_n \overline{\delta s_n} = \sum_{i=1}^n P_i \overline{\delta s_i} \quad (3.2.7)$$

Que pode ser escrito em termos das projeções dos deslocamentos:

$$\delta W = \sum_{i=1}^n (P_{ix} \delta x_i + P_{iy} \delta y_i + P_{iz} \delta z_i) \quad (3.2.8)$$

O trabalho definido pela equação acima é chamado de trabalho virtual das forças  $P_1, \dots, P_n$ , nos deslocamentos virtuais  $\overline{\delta x_1}, \dots, \overline{\delta x_n}$ .

Para um sistema em equilíbrio, as forças atuantes em cada ponto são anuladas pelas reações. Denotando-se por  $P_1, \dots, P_n$ , as forças atuantes e por  $R_1, \dots, R_n$  as reações, escreve-se:

$$P_1 + R_1 = 0, \quad P_2 + R_2 = 0, \quad \dots, \quad P_n + R_n = 0 \quad (3.2.9)$$

O trabalho das forças e das reações em deslocamentos virtuais arbitrários é:

$$(P_1 \overline{\delta s_1} + \dots + P_n \overline{\delta s_n}) + (R_1 \overline{\delta s_1} + \dots + R_n \overline{\delta s_n}) = 0 \quad (3.2.10)$$

Mostra-se que o trabalho virtual das reações é sempre positivo (quando não há fricção), isto é:

$$R_1 \overline{\delta s_1} + \dots + R_n \overline{\delta s_n} \geq 0 \quad (3.2.11)$$

Pode-se reescrever (3.2.10) como:

$$(P_1 \overline{\delta s_1} + \dots + P_n \overline{\delta s_n}) = -(R_1 \overline{\delta s_1} + \dots + R_n \overline{\delta s_n}) \quad (3.2.12)$$

Com essa nova escrita chega-se à conclusão que:

$$P_1 \overline{\delta s_1} + \dots + P_n \overline{\delta s_n} \leq 0 \quad (3.2.13)$$

O que é o mesmo que afirmar que em um sistema em equilíbrio sem fricção o trabalho das forças atuantes para todo deslocamento virtual é zero ou negativo.

Se o deslocamento virtual for reversível então:

$$-P_1 \overline{\delta s_1} - \dots - P_n \overline{\delta s_n} \leq 0 \quad (3.2.14)$$

Comparando a equação acima com a equação (3.2.13), chega-se à conclusão:

$$P_1 \overline{\delta s_1} + \dots + P_n \overline{\delta s_n} = 0 \quad (3.2.15)$$

Estende-se a equação acima para um sistema de pontos materiais e conclui-se que um sistema holônomo-escleronômico de  $n$  pontos materiais sem fricção possui como condição necessária e suficiente para que ele esteja em equilíbrio que a soma dos trabalhos virtuais das forças atuantes nos deslocamentos virtuais seja menor ou igual a zero, ie:

$$\delta W = \sum_{i=1}^n (P_{ix} \delta x_i + P_{iy} \delta y_i + P_{iz} \delta z_i) \leq 0 \quad (3.2.16)$$

### 3.2.3

#### Movimento real

Considere as forças  $P_1, \dots, P_n$  agindo em um sistema de pontos materiais holônomo  $A_1(x_1, y_1, z_1), \dots, A_n(x_n, y_n, z_n)$  restringido bilateralmente<sup>1</sup> pela relação:

$$F_j(x_1, y_1, z_1, \dots, z_n, t) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (3.2.17)$$

Dado um sistema arbitrário de funções contínuas com suas primeiras e segundas derivadas no intervalo  $(t_0, t_1)$  que definem um determinado movimento do sistema:

$$x_i = x_i(t) \quad y_i = y_i(t) \quad z_i = z_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.2.18)$$

Se as funções forem substituídas nas equações de restrições e satisfizerem-na a cada instante  $t$ , então diz-se que o movimento por elas representado é um movimento compatível com as restrições ou um movimento possível.

Já o movimento que será realizado ao atuarem as forças  $P_1, \dots, P_n$  no sistema é chamado de movimento real.

Um movimento real é sempre possível, pois satisfaz as equações de restrição, porém um movimento possível nem sempre é real quando este não condiz com as forças aplicadas.

Do Princípio de D'Alembert segue que os movimentos compatíveis com as restrições somente são reais quando satisfazem a todo instante a relação abaixo:

$$\sum_{i=1}^n [(P_{ix} - m_i \frac{d^2 x}{dt^2}) \delta x_i + (P_{iy} - m_i \frac{d^2 y}{dt^2}) \delta y_i + (P_{iz} - m_i \frac{d^2 z}{dt^2}) \delta z_i] = 0 \quad (3.2.19)$$

onde  $\delta x_i, \delta y_i$  e  $\delta z_i$  são deslocamentos virtuais.

<sup>1</sup>Restrições bilaterais em um sistema holonômico são da forma  $F_j(x_1, \dots, z_n, t) = 0$ . Já as restrições unilaterais são da forma  $F_j(x_1, \dots, z_n, t) \leq 0$ .

## 3.2.4

**Movimento comparativo**

Considere um movimento arbitrário de um sistema compatível com as restrições a ele impostas, definido pelas mesmas funções (3.2.18) assim como o movimento comparativo abaixo:

$$x_i + \delta x_i, y_i + \delta y_i, z_i + \delta z_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.2.20)$$

Escolhe-se as variações  $\delta x_i$ ,  $\delta y_i$  e  $\delta z_i$  de forma que as variações da equação (3.2.17) para um dado movimento (3.2.18) seja igual a zero:

$$\delta F_j = \frac{\delta F_j}{\delta x_1} \delta x_1 + \dots + \frac{\delta F_j}{\delta z_n} \delta z_n = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.2.21)$$

Da definição de deslocamento virtual as variações da equação acima são então deslocamentos virtuais. Se  $\delta x_i$ ,  $\delta y_i$  e  $\delta z_i$  forem muito pequenos então pode-se dizer que aproximadamente:

$$F_j(x_1 + \delta x_1, \dots, z_n + \delta z_n, t) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.2.22)$$

Isso significa que o movimento comparativo é aproximadamente um movimento compatível com as restrições quando as variações são infinitesimais e os deslocamentos virtuais.

## 3.2.5

**Princípio de Hamilton**

Dado um sistema de  $n$  pontos materiais  $A_1(x_1, y_1, z_1), \dots, A_n(x_n, y_n, z_n)$  de massas  $m_1, \dots, m_n$  e forças  $P_1, \dots, P_n$  neles atuantes que dependem das variáveis  $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t$ .

Supõe-se que o sistema é holônomo-escleronômico (sem fricção) e que as restrições são bilaterais. As funções abaixo definem o movimento deste

$$x_i = x_i(t), \quad y_i = y_i(t), \quad z_i = z_i(t) \quad (t_0 \leq t \leq t_1) \quad (3.2.23)$$

Sabe-se que a energia cinética de movimento é:

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[ \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right] \quad (3.2.24)$$

Por conseguinte, a variação da energia cinética é dada por:

$$\delta E_c = \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{dx}{dt} \frac{\delta x_i}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{\delta y_i}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{\delta z_i}{dt} \right) \quad (3.2.25)$$

Como  $\frac{dx_i}{dt} \frac{\delta x_i}{dt} = \frac{dx_i}{dt} \frac{d(\delta x_i)}{dt} - \frac{dx_i}{dt} \delta x_i$ , o mesmo aplicando-se para  $y_i$  e  $z_i$ , pode-se reescrever a equação acima como:

$$\delta E_c = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{dx_i}{dt} \delta x_i + \frac{dy_i}{dt} \delta y_i + \frac{dz_i}{dt} \delta z_i \right) - \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \delta y_i + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \delta z_i \right) \quad (3.2.26)$$

A soma do trabalho virtual das forças aplicadas no sistema é dado por:

$$\delta W = \sum_{i=1}^n (P_{i_x} \delta x_i + P_{i_y} \delta y_i + P_{i_z} \delta z_i) \quad (3.2.27)$$

Somando-se a equação acima com a variação da energia cinética, obtém-se:

$$\begin{aligned} \delta W + \delta E_c = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{dx_i}{dt} \delta x_i + \frac{dy_i}{dt} \delta y_i + \frac{dz_i}{dt} \delta z_i \right) + \\ \sum_{i=1}^n \left[ \left( P_{i_x} - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) \delta x_i + \left( P_{i_y} - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) \delta y_i + \right. \\ \left. \left( P_{i_z} - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) \delta z_i \right] \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

Integrando-se ambos os lados no intervalo de  $t_0$  a  $t_1$ :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} (\delta W + \delta E_c) dt = \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{dx_i}{dt} \delta x_i + \frac{dy_i}{dt} \delta y_i + \frac{dz_i}{dt} \delta z_i \right) \Big|_{t_0}^{t_1} + \\ \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left[ \left( P_{i_x} - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) \delta x_i + \left( P_{i_y} - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) \delta y_i + \right. \\ \left. \left( P_{i_z} - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) \delta z_i \right] dt \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

Se for suposto que o movimento definido pelas funções são movimentos reais e que as variações  $\delta x_i$ ,  $\delta y_i$  e  $\delta z_i$  são movimentos virtuais a cada instante  $t$ , então, pelo princípio de D'Alembert:

$$\sum_{i=1}^n \left[ \left( P_{i_x} - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) \delta x_i + \left( P_{i_y} - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) \delta y_i + \left( P_{i_z} - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) \delta z_i \right] = 0 \quad (3.2.30)$$

A equação (3.2.29) fica:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta W + \delta E_c) dt = \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{dx_i}{dt} \delta x_i + \frac{dy_i}{dt} \delta y_i + \frac{dz_i}{dt} \delta z_i \right) \Big|_{t_0}^{t_1} \quad (3.2.31)$$

Sendo o ponto inicial e final da trajetória fixados, o que significa dizer que  $\delta x_i$ ,  $\delta y_i$  e  $\delta z_i$  são zero em  $t = t_0$  e  $t = t_1$ , chega-se ao resultado que é

conhecido como o Princípio de Hamilton:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta W + \delta E_c) dt = 0 \quad (3.2.32)$$

Em geral o trabalho virtual pode ser decomposto no que se deve às forças conservativas  $\delta W_c$ , e no que se deve às forças não-conservativas  $\delta W_{nc}$ :

$$\delta W = \delta W_c + \delta W_{nc} \quad (3.2.33)$$

Porém,  $\delta W_c = -\delta E_p$ , onde  $E_p$  é a energia potencial e introduz-se o Lagrangeano:

$$L = E_c - E_p \quad (3.2.34)$$

Reescrevendo o Princípio de Hamilton em função do Lagrangeano obtém-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L + \delta W_{nc} dt = 0 \quad (3.2.35)$$

Em casos especiais onde não ocorrem forças não-conservativas o Princípio é simplesmente escrito por:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0 \quad (3.2.36)$$

Todo este procedimento é extensível ao caso contínuo chegando-se às equações que traduzem a mesma ideia do caso discreto.

### 3.2.6 Equações de Lagrange

Através do Princípio de Hamilton pode-se chegar a um outro importante resultado que são as equações de Lagrange.

A variação na energia cinética de um conjunto de partículas  $E_c = E_c(q_1, q_2, \dots, q_n)$ , em termos das coordenadas generalizadas é dada por:

$$\delta E_c = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial E_c}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) \quad (3.2.37)$$

E o trabalho virtual das forças aplicadas por:

$$\delta W = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k \quad (3.2.38)$$

A substituição de ambas as expressões na Eq. (3.2.32), a realização das devidas substituições e integrações por partes e a aplicação do lema fundamental do cálculo variacional leva à Equação de Lagrange na sua forma mais geral:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} = Q_k \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.2.39)$$

Caso haja a distinção entre as forças conservativas e as não-conservativas a Equação de Lagrange toma a seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} + \frac{\partial E_p}{\partial q_k} = Q_{knc} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.2.40)$$

onde  $E_p$  é a energia potencial e  $Q_{knc}$  as forças não-conservativas. Este resultado será posteriormente usado quando for abordado o Método de Ritz de aproximação no Capítulo 6.