2
CONCEITOS TEÓRICOS FUNDAMENTAIS

Este capítulo está dividido em três partes. A primeira é dedicada aos fundamentos da Teoria da Elasticidade, em particular da Elasticidade Linear. A segunda parte trata dos conceitos de concentração de tensões necessários para a aplicação da metodologia proposta em componentes contendo entalhes. E a terceira parte trata da aplicação do método de mínimos quadrados linear na solução de um sistema sobredeterminado.

2.1. Princípios da Teoria da Elasticidade

A teoria da elasticidade linear estuda as tensões, deformações e deslocamentos de um corpo, considerado elástico, causadas pela ação de forças externas (Timoshenko & Goodier, 1970).

O comportamento das estruturas é descrito por meio de hipóteses básicas da teoria clássica quanto à distribuição das tensões ou das deformações:

- a matéria de um corpo é distribuída continuamente, i.e., não se considera a micro estrutura do material com grãos de cristais, poros, vácuo, fissuras, etc; assim, as tensões, deformações e deslocamentos são contínuos; e
- a matéria é homogênea, i.e., o menor elemento extraído do corpo possui as mesmas propriedades físicas que o todo, e isotrópica, i.e., as propriedades elásticas são as mesmas em todas as direções.

2.1.1. Estado de Tensão

A resistência de um material está relacionada à sua capacidade de resistir às forças aplicadas evitando-se, desta maneira, fratura ou deformação acentuada. Quando uma força externa age sobre um corpo sólido, uma força interna deste corpo reagirá em igual magnitude e em direção contrária àquela força externa, esta força externa é chamada de carga ou carregamento. Do ponto de vista prático, tensão é a reação de um determinado material diante de um carregamento sendo diretamente proporcional à carga aplicada e inversamente proporcional à geometria (Meyers & Chawla, 1982).

As tensões podem ser definidas de acordo com sua direção e magnitude. Em relação à sua direção, as tensões podem ser classificadas em três tipos: de tração, de compressão, ou de cisalhamento, e suas distribuições podem ser observadas através das deformações ocorridas no corpo.

A tensão de tração é causada por uma carga que tende a distender ou alongar o corpo. A tensão de tração, ou trativa, é sempre acompanhada por uma deformação por tração. Se um corpo é submetido a uma força que tende a comprimi-lo ou encurtá-lo, a resistência interna a esta força ou carga é chamada de tensão de compressão que, por sua vez, é sempre acompanhada por uma deformação por compressão.

Convenciona-se em Engenharia Mecânica que a tensão normal será positiva quando produzir tração, e negativa no caso de compressão. A tensão de cisalhamento ou de torção é definida como a tensão que tende a resistir ao movimento de torção ou de deslizamento de uma porção do corpo sobre a outra.

Considere um elemento cúbico muito pequeno num ponto *P* (Figura 2.1), com as faces paralelas aos eixos coordenados.

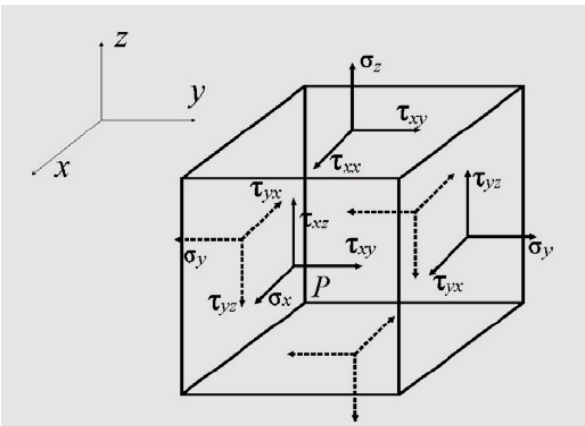

Figura 2.1 Elemento cúbico sujeito a tensões nas faces (Timoshenko & Goodier, 1970).

As letras σ e τ são utilizadas para representar a tensão normal e a tensão cisalhante sendo que, para identificar a direção do plano no qual a tensão está atuando, são usados índices subscritos a estas letras.

2.1.2. Estado de Deslocamento e Deformação

Considere-se uma estrutura sob efeito de uma solicitação genérica. Devido a esta mudança da configuração inicial, a estrutura altera a sua forma que, de maneira ilustrativa, é mostrada na Figura 2.2.

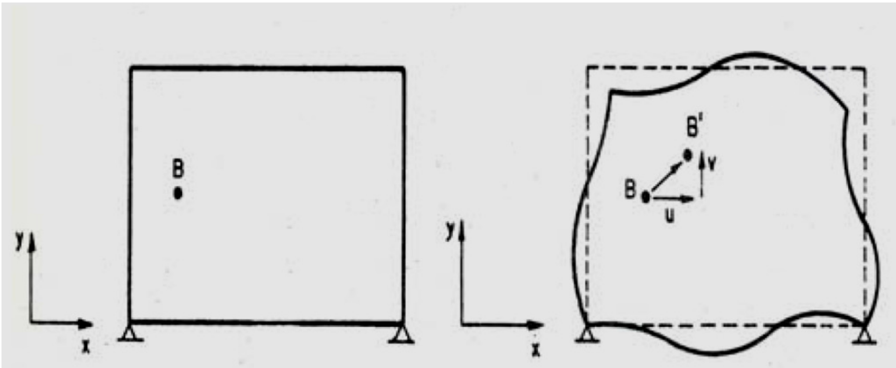

Figura 2.2 Estrutura original e deformada (Fonte: Laier e Barreiro, 1983).

A mudança inicial de um ponto *B* que possa representar a configuração geométrica de uma peça estrutural plana em relação a um sistema de referência fixo para uma nova posição *B'*, como mostra a Figura 2.2, é chamado de Estado de Deslocamento.

O deslocamento do ponto *B* para *B'* pode não apenas gerar uma translação de corpo rígido de toda a peça, mas também alterar a configuração geométrica natural da estrutura, fazendo com que a peça se deforme. Com isso, ocorre um novo estado denominado Estado de Deformação.

Entende-se por deformação a mudança da configuração espacial ao longo da variação do tempo de um corpo em relação a um referencial, mediante esforços e tensões externos aplicados a este objeto. Supondo-se haver continuidade antes e depois da deformação, pode-se afirmar que existem duas funções contínuas $u(x, y)$ e $v(x, y)$ que descrevem os movimentos dos pontos da estrutura no caso plano e, para um caso tridimensional, o vetor de deslocamento de cada partícula do corpo deformado apresenta as três componentes definidas como u, v, w paralelos aos eixos de coordenadas x, y, z, respectivamente. Portanto, um ponto que estiver inicialmente na posição *(x, y, z)* se moverá ao ponto *(x+u, y+v, z+w)*. Em geral *u*, *v*, *w* são funções de *x*, *y*, *z*.

O alongamento ou encurtamento de um corpo por unidade de comprimento é chamado de deformação linear (ϵ) ou alongamento unitário (Popov, 1978). Sendo *ln*, a função logarítmica em base *e*, a deformação real em um ponto é definida como a relação entre o incremento total e o comprimento inicial, i.e,

$$\varepsilon = \ln(1 + \frac{\Delta l}{l_o}) \tag{2.1}$$

onde: Δl , variação do comprimento do corpo; e l_o, valor inicial de comprimento do corpo.

Deformação é um valor adimensional, geralmente expresso *mm/mm* ou em *μm/μm*, mas também pode ser representada em porcentagem. As deformações podem ser tanto elásticas como plásticas (ou permanentes), ou uma combinação destas duas. As deformações elásticas são reversíveis e desaparecem quando a força é removida. Já as deformações plásticas são irreversíveis e relacionadas com o deslocamento dos átomos internos do material.

2.1.3. Componentes de Deformação em Coordenadas Cartesianas

Considere um corpo sólido e contínuo sujeito a uma deformação provocada por um conjunto de forças, que o faz passar de um estado inicial para um estado final. Assuma um sistema tridimensional em que o elemento original é um prisma retangular de dimensões *dx*, *dy* e *dz* (Fig. 2.3).

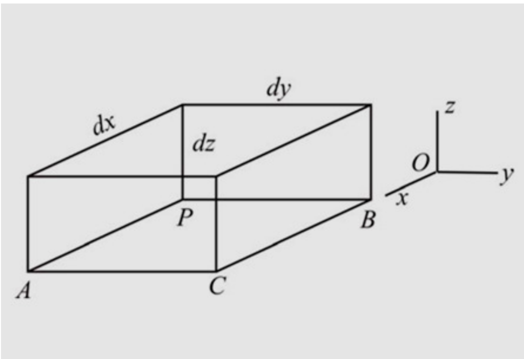

Figura 2.3 Elemento infinitesimal de um corpo elástico (Timoshenko & Goodier, 1970).

Na Fig. 2.4 observa-se o que acontece com este corpo após sofrer deformação no plano *xy*, onde:

$u+\dfrac{\partial u}{\partial x}dx$: é o deslocamento linear de *A* na direção *x* ;

$v+\dfrac{\partial v}{\partial y}dy$: é o deslocamento linear de *B* na direção *y*;

$u+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy$: é o deslocamento angular de *B* na direção *x*;

$v+\dfrac{\partial v}{\partial x}dx$: é o deslocamento angular de *A* na direção *y*;

u : é a componente do deslocamento de *P* na direção *x*;

v : é a componente do deslocamento de *P* na direção *y*;

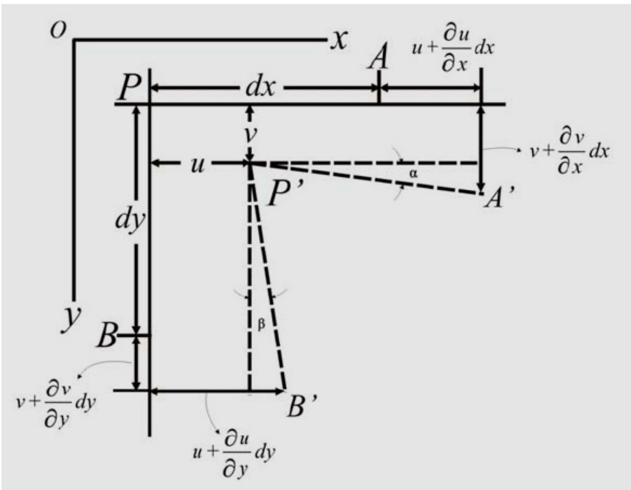

Figura 2.4 Deformações no plano *xy* (Timoshenko & Goodier, 1970).

Inicialmente, os pontos *P* e *A* estão separados por uma distância inicial de *dx*. Estes pontos, como resultado da força, são deslocados aos pontos *P'* e *A'*. O deslocamento de *A'* na direção **x** é

$$u+\frac{\partial u}{\partial x}dx \tag{2.2}$$

enquanto que o deslocamento do ponto *P* na direção x é o deslocamento *u* da origem. O aumento do comprimento do elemento *PA* devido à deformação é, portanto, a diferença entre os deslocamentos de *A'* e *P*,

$$(\partial u / \partial x) \cdot dx \tag{2.3}$$

Consequentemente, o alongamento unitário ou deformação linear unitária no ponto *P* na direção *x*, assumindo-se que *dx* é infinitesimal, vale

$$\varepsilon_x = \ln[1 + \frac{(\partial u / \partial x) \cdot dx}{\partial x}] = \ln(1 + \frac{\partial u}{\partial x}) \cong \frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.4}$$

do mesmo modo, os alongamentos unitários nas direções *y* e *z* podem ser deduzidos.

Verifica-se ainda que o ângulo inicialmente reto *APB* sofreu uma redução proporcional a

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.5}$$

esta grandeza representa a deformação angular entre os planos *xy* e *yz*, e chama-se também de deformação por cisalhamento ou distorção, e é representada pela letra grega γ. Da mesma maneira, podem-se obter as distorções entre os planos *xy* e *xz* e entre os planos *yx* e *yz*.

Portanto, um estado de deformação pode ser caracterizado pelas seis componentes do vetor deformação associadas às três direções no espaço. Estas componentes são definidas de acordo com o campo de deslocamentos (*u*, *v*, *w*):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.6}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.7}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{2.8}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.9}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.10}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \tag{2.11}$$

2.1.4. Componentes de Deformação em Coordenadas Polares

A fim de determinar os deslocamentos em coordenadas polares, útil em problemas axissimétricos, vamos definir u e v como os parâmetros dos deslocamentos nas direções radiais e tangenciais, respectivamente (Figura 2.5).

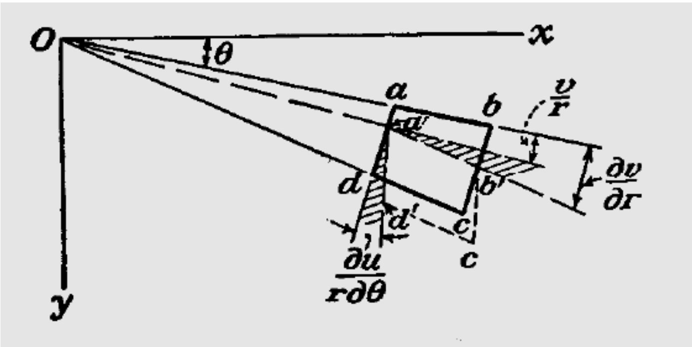

Figura 2.5 Deslocamentos em coordenadas polares *xy* (Timoshenko & Goodier, 1970).

Se u é o deslocamento radial do lado *ad* do elemento *abcd* (Figura 2.5), o deslocamento radial do lado *bc* é $u + (\partial u / \partial r)\, dr$. Então, o alongamento unitário do elemento *abcd* na direção radial é definido por:

$$\varepsilon_r = \ln[1 + \frac{(\partial u / \partial r) \cdot dr}{\partial r}] = \ln(1 + \frac{\partial u}{\partial r}) \cong \frac{\partial u}{\partial r} \tag{2.12}$$

A deformação na direção tangencial depende não só do deslocamento v, mas também do deslocamento radial u. Assumindo, por exemplo, que os pontos a e d do elemento *abcd* têm apenas o elemento u do deslocamento radial, o novo comprimento do arco *ad* é $(r + u)\, d\theta$ e a deformação tangencial é, portanto,

$$\frac{(r+u)d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \frac{u}{r} \tag{2.13}$$

A diferença no deslocamento tangencial dos lados *ab* e *cd* do elemento *abcd* é $(\partial v / \partial\theta)\, d\theta$, e a deformação tangencial, devido ao deslocamento *v* é, nesse sentido, $(\partial v / r\partial\theta)$. A deformação tangencial total é, portanto,

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r\partial\theta} \tag{2.14}$$

Agora, considerando a tensão cisalhante, vamos denotar como *a'b'c'd'* a posição do elemento *abcd* após deformação. O ângulo entre a direção *ad* e *a'b'* é devido ao deslocamento radial *u* e é igual a $\partial u / r\partial\theta$. Da mesma forma, o ângulo entre *a'b'* e *ab* é igual a $\partial v / \partial r$. Deve-se notar que apenas uma parte deste ângulo (sombreada na figura) representa o deslocamento angular devido à rotação do elemento *abcd* como um corpo rígido em torno do eixo através de *O*. Portanto, a mudança total no ângulo *dab*, representando a tensão cisalhante, é

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \tag{2.15}$$

Analogamente, as tensões também podem ser representadas em coordenadas polares, resultando nas componentes normais σ_r e σ_θ e cisalhante $\tau_{r\theta}$ (Timoshenko & Goodier, 1970).

2.2. Concentração de Tensões

As fórmulas clássicas da análise tradicional de tensões (ou da resistência dos materiais) só servem para se calcular as chamadas tensões nominais σ_n, as quais desprezam os efeitos localizados nas transições geométricas bruscas. Estas equações só são válidas nas regiões da peça que fiquem longe das transições bruscas de geometria e dos pontos de aplicação das cargas concentradas, pelo princípio de Saint Vénant (Castro & Meggiolaro, 2009).

E.g., as tensões nas proximidades do ponto de aplicação de cargas concentradas são muito maiores que a tensão média ao longo da peça. Este fato também ocorre em descontinuidades na geometria, como furos, entalhes, ou qualquer variação brusca de seção.

A concentração de tensões é um efeito extremamente localizado. Para efeito de dimensionamento, faz-se necessário conhecer a tensão máxima atuante na peça, e esta tensão deve ser inferior à tensão admissível do material. Para a determinação desta tensão máxima, utiliza-se a tensão nominal e um coeficiente K_t, chamado de fator de concentração de tensões, definido como a razão entre a tensão máxima e a tensão nominal, determinado experimentalmente para diversos casos. O K_t é definido por (Castro & Meggiolaro, 2009)

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n} \tag{2.16}$$

2.2.1. Distribuição de Tensões da Placa infinita com Furo Circular

Se uma placa com um pequeno furo circular em seu centro for tracionada, esta irá apresentar uma concentração de tensões próxima ao furo. A sua distribuição de tensões na vizinhança do furo será alterada, o que poderá ser quantificado quando o campo de tensões for calculado (Castro & Meggiolaro, 2009).

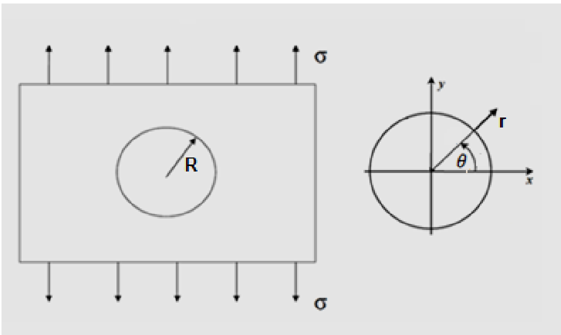

Figura 2.6 Geometria de uma placa infinita com um furo circular cilíndrico submetido a uma tensão remotamente uniforme.

Uma placa com um furo de raio R e uma tensão normal uniforme σ aplicada tem um campo de tensões não uniforme nas proximidades furo, que pode ser representado em coordenadas polares em função de r e θ.

Note que, as relações entre coordenadas polares e retangulares estão dadas por:

$$(x, y) \rightarrow (r, \theta) \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = \arctan \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

$$(r,\theta) \rightarrow (x,y) \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = rsen\theta \end{cases}$$

No caso da placa infinita com furo central (que na prática descreve bem o campo de tensões ao redor de um furo muito pequeno em relação às dimensões da placa), as tensões em um ponto (r, θ) dependem exclusivamente da tensão nominal e de parâmetros geométricos, em particular do ângulo θ e da razão r/R, e independem do material. Pode-se concluir também que, pelo princípio de Saint-Vénant, as tensões devem tender aos valores nominais em distâncias que são grandes em comparação com o raio do furo (R), isto é, em pontos com distâncias e.g. maiores que 5 vezes o raio (i.e., as tensões se aproximam muito ao valor nominal para $r/R > 5$), vide Fig. 2.7 (Castro & Meggiolaro, 2009).

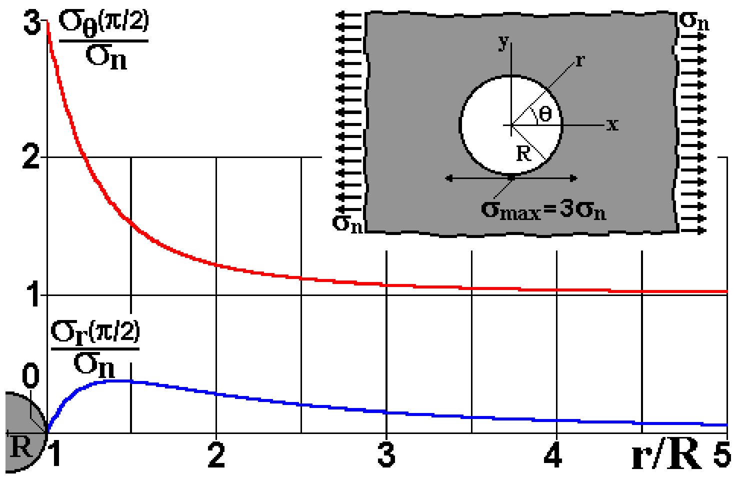

Figura 2.7 Distribuição de $\sigma_r(r,\pi/2)$ e de $\sigma_\theta(r,\pi/2)$ (Castro & Meggiolaro, 2009).

O campo de tensões em coordenadas polares para a placa infinita com furo é representado por

$$\sigma_r = \frac{\sigma_n}{2}\left[\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)+\left(1-\frac{4R^2}{r^2}+\frac{3R^4}{r^4}\right)\cos\theta\right] \tag{2.17}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_n}{2}\left[\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)-\left(1-\frac{3R^2}{r^2}\right)\cos\theta\right] \tag{2.18}$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_n}{2}\left(1+\frac{2R^2}{r^2}-\frac{3R^4}{r^4}\right)\cos\theta \tag{2.19}$$

As relações lineares entre as componentes de tensão e as componentes de deformação deste problema podem ser obtidas pela Lei de Hooke. No caso de um estado plano de tensão em coordenadas polares, ou seja, quando atuam no corpo somente as componentes de tensão σ_r, σ_θ e $\tau_{r\theta}$, é possível obter as componentes de deformação ε_r, ε_θ e $\gamma_{r\theta}$ por

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \tag{2.20}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) \tag{2.21}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G} = \frac{2(1+\nu)\tau_{r\theta}}{E} \tag{2.22}$$

onde:

ν é o coeficiente de Poisson;

E é o módulo de elasticidade ou módulo de Young; e

G é o módulo de elasticidade transversal ou ao cisalhamento, ou módulo de corte, com $G = E / (2 + 2\nu)$.

2.3. Solução de Mínimos Quadrados de Sistemas Lineares

Considere o sistema $Ax = b$ de m equações independentes em n variáveis. Se $m > n$, o sistema é definido como sobredeterminado. É possível encontrar uma solução aproximada através do método de mínimos quadrados (Anton & Rorres, 2001).

Seja $r = (Ax - b)$ o vetor-erro ou resíduo das aproximações. Se as m equações foram obtidas a partir de m medições associadas a um vetor $r = (r_1, r_2, r_3 \ldots r_m)$, então uma solução $x = x_{mq}$ no sentido de mínimos quadrados é aquela que minimiza

$$\|r\| = \|Ax - b\| \tag{2.23}$$

Portanto, pretende-se estimar os parâmetros de x que minimizem a soma dos erros quadráticos dada por

$$\|r\|^2 = \|r_1^2 + r_2^2 ... + r_m^2\| \tag{2.24}$$

O vetor solução x_{mq} é chamado de solução aproximada de mínimos quadrados.

2.3.1. Interpretação Geométrica

A minimização por mínimos quadrados tem por objetivo achar o ponto imagem $A \cdot x_{mq} \in Im(A)$ mais próximo do vetor b. Assim, o ajuste ótimo é alcançado quando $A \cdot x_{mq}$ for a projeção ortogonal de b sobre o subespaço $Im(A)$.

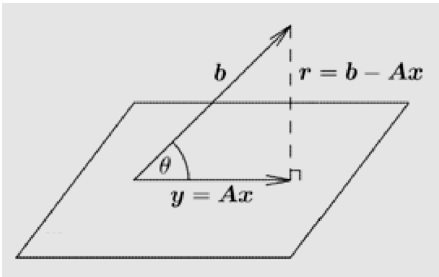

Figura 2.8 Interpretação geométrica da solução por mínimos quadrados (Anton & Rorres, 2001).

2.3.2. Cálculo da Solução por Mínimos Quadrados

Como visto acima, a solução deste sistema de equações no sentido de mínimos quadrados é aquela que minimiza a norma Euclidiana ||r|| do erro. Para encontrar x_{mq}, resolvemos o problema minimizando a função

$$\|r\|^2 = x^t A^t A x - 2b^t A x + b^t b \tag{2.25}$$

onde A^t represente a matriz transposta de A. A minimização é obtida igualando-se a zero o gradiente em relação a x:

$$\nabla_x \|r\|^2 = 2A^t A x - 2A^t b = 0 \tag{2.26}$$

e obtendo assim

$$A^t A x = A^t b \tag{2.27}$$

Este sistema é chamado sistema normal associado a $Ax = b$, e as equações que o compõem são chamadas equações normais associadas a $Ax = b$. Assim, o problema de encontrar uma solução de mínimos quadrados foi reduzido a encontrar uma solução exata do sistema normal associado.

Se A é uma matriz mxn com vetores-coluna linearmente independentes então, para cada matriz b de tamanho $nx1$, o sistema linear $Ax = b$ tem uma única solução de mínimos quadrados. Esta solução é dada por

$$x_{mq} = (A^t A)^{-1} A^t b \tag{2.28}$$

Note que:

- a solução depende linearmente de b;
- a matriz $(A^t A)^{-1} A^t b$, que fornece a solução ao problema aproximado, chama-se pseudo-inversa de A; e
- se por acaso $b = Ax$, ou seja, se $b \in Im(A)$, então $x_{mq} = (A^t A)^{-1} A^t b = x$ é a solução exata.

No próximo capítulo são apresentados os fundamentos de visão computacional relevantes à dissertação.