

## 2 Fundamentos de Elasticidade e da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE)

### 2.1. Relações Tensão – Deformação

No século XVII, Hooke propôs as relações fundamentais para uma dimensão em materiais lineais elásticos.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2.1)$$

onde  $\sigma$  e  $\varepsilon$  são a tensão e deformação unidirecional, respectivamente, e  $E$  o módulo de elasticidade de Young. A lei generalizada de Hooke pode ser escrita na forma:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.2)$$

A propriedade simétrica tanto de  $\sigma$  quanto de  $\varepsilon$  reduz o número de constantes do tensor de quarto ordem,  $D_{ijkl}$ , de 81 componentes para somente 36 termos independentes. A lei de Hooke para materiais isotrópicos pode ser escrita como:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right) \quad (2.3)$$

e na forma de tensão-deformação:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (2.4)$$

onde  $\delta_{ij}$  é a função delta de Kronecker e  $\nu$  o coeficiente de Poisson. A forma expandida da Equação (2.4) para um material isotrópico pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

ou:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{xx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xx} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

onde  $\lambda$  e  $\mu$  são os módulos de Lamé e cisalhamento, definidos como:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.7)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.8)$$

As Equações (2.5) e (2.6) podem ser simplificadas para casos de estado plano de tensões, estado plano de deformações e de duas dimensões nos casos axi-simétricos. Para o estado plano de tensões, a dimensão em uma direção (espessura) é negligenciada comparada com as outras duas, admite-se a hipótese de que as estruturas possam ser consideradas como placas finas carregadas no plano  $(x, y)$  cujo carregamento é uniforme ao longo de  $z$  (espessura), assim:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

onde  $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$  é o componente da deformação por cisalhamento. A componente de deformação ao longo da direção da espessura,  $\varepsilon_{zz}$ , pode ser também encontrada da relação de Poisson:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\nu}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (2.10)$$

O caso de estado plano de deformações se assemelha a um corpo comprido submetido a nenhuma variação em carga ou geometria na direção longitudinal, supõe-se que a estrutura é alongada no eixo  $z$  e com carregamento uniforme ao longo do mesmo. Como resultado, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ \nu & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

O modulo de Young efetivo é:

$$E' = \begin{cases} E & \text{Estado plano de tensões} \\ \frac{E}{1-\nu^2} & \text{Estado plano de deformações} \end{cases} \quad (2.12)$$

Outro parâmetro usado freqüentemente é:

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{Estado plano de tensões} \\ 3-4\nu & \text{Estado plano de deformações} \end{cases} \quad (2.13)$$

Quando um corpo elástico é submetido a carregamento, o corpo experimenta deslocamentos os quais são linearmente relacionados ao carregamento aplicado. Como resultado certa quantidade de trabalho é armazenada dentro do corpo em forma de energia potencial de deformação. A densidade de energia de deformação pode ser definida:

$$U_s = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sigma^T \varepsilon \quad (2.14)$$

### 2.1.1. Função de Airy

Airy desenvolveu a idéia de uma função de tensões a qual podia satisfazer tanto a condição de equilíbrio quanto a condição de compatibilidade. Ele mostrou que na ausência de forças de corpo a função de tensões  $\Phi$  deve satisfazer a equação de Laplace:

$$\nabla^4 \Phi = \nabla^2 (\nabla^2 \Phi) = 0 \quad (2.15)$$

onde:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.16)$$

e

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (2.17)$$

As anteriores equações podem ser escritas como:

$$\nabla^4 \Phi = \nabla^2 (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2) = 0 \quad (2.18)$$

Ou em coordenadas polares:

$$\nabla^4 \Phi = \nabla^2 (\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2) = 0 \quad (2.19)$$

## 2.2. Fundamentos da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE)

### 2.2.1. Concentração de Tensões

A maioria das estruturas contém descontinuidades geométricas. A forma e tamanho destas descontinuidades afetam a resistência de um elemento estrutural. Convencionalmente a resistência dos componentes ou estruturas contendo defeitos é avaliada através da concentração de tensões naquela região causada pela descontinuidade. Contudo, tal enfoque convencional poderia dar uma resposta errônea se a característica da descontinuidade geométrica tem um raio muito afiado. Para ter uma melhor compreensão observemos os corpos de prova da Figura 2.1.

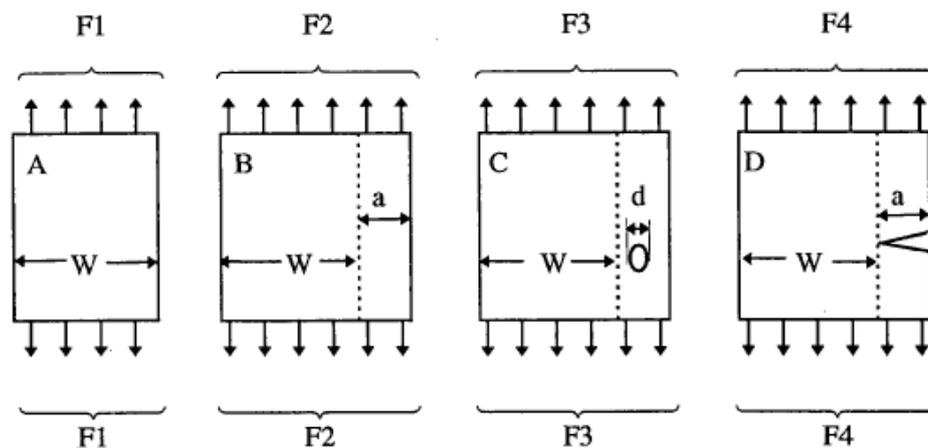


Figura 2.1 - Resistência em placas com e sem descontinuidades.  
(Wang, 1996)

Embora a espessura de cada placa seja a mesma, as forças necessárias para que o corpo de prova falhe são diferentes (C.H. Wang, 1996), pode-se seguir a seguinte ordem:

$$F4 < F3 < F1 < F2$$

Claramente, o tamanho dos defeitos nos corpos de prova 3 e 4 é crucial para a resistência da estrutura. Agora, consideremos duas placa infinitas submetida a tração: uma sem defeito e outra com um pequeno furo circular.

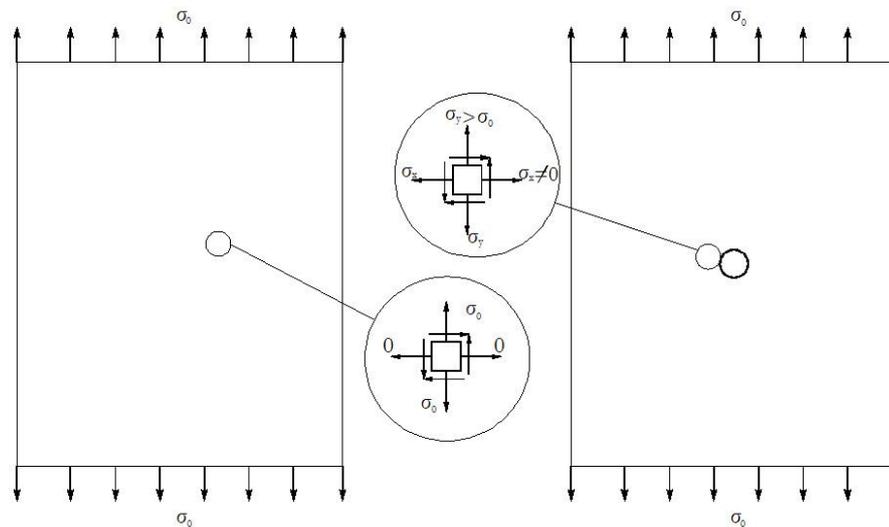


Figura 2.2- Uma placa infinita com e sem defeito, (Mohammadi, 2008)

Vemos que no centro da placa sem defeito o campo de tensões permanece igual em relação à tensão aplicada  $\sigma_0$ . Portanto, a máxima tração permissível pode ser determinada pela condição que as tensões no seu interior devem estar limitadas pela tensão de escoamento como uma medida da falha da resistência do material, isto é,  $\sigma_0 = \sigma_{yld}$ .

Em contrapartida a solução elástica de tensões para uma placa com defeito circular apresenta um campo biaxial não uniforme com um fator de concentração de 3 na borda do furo. No caso limite de ter um defeito em forma de linha reta, como uma trinca, a solução de um furo elíptico degenerado mostra um estado de tensões que tende ao infinito na ponta da trinca. Nenhum material pode suportar tal estado de tensões. Portanto, em vez de comparar o campo de tensões do ponto de vista da resistência dos materiais, a mecânica da fratura adota um parâmetro chamado de fator de intensidade de tensões ou uma energia global de fratura.

## 2.2.2. Furo Circular

Em 1898, Kirsch analisou o problema de uma placa infinita com um furo circular sob esforços de tração uniforme, como mostra a Figura 2.3 .

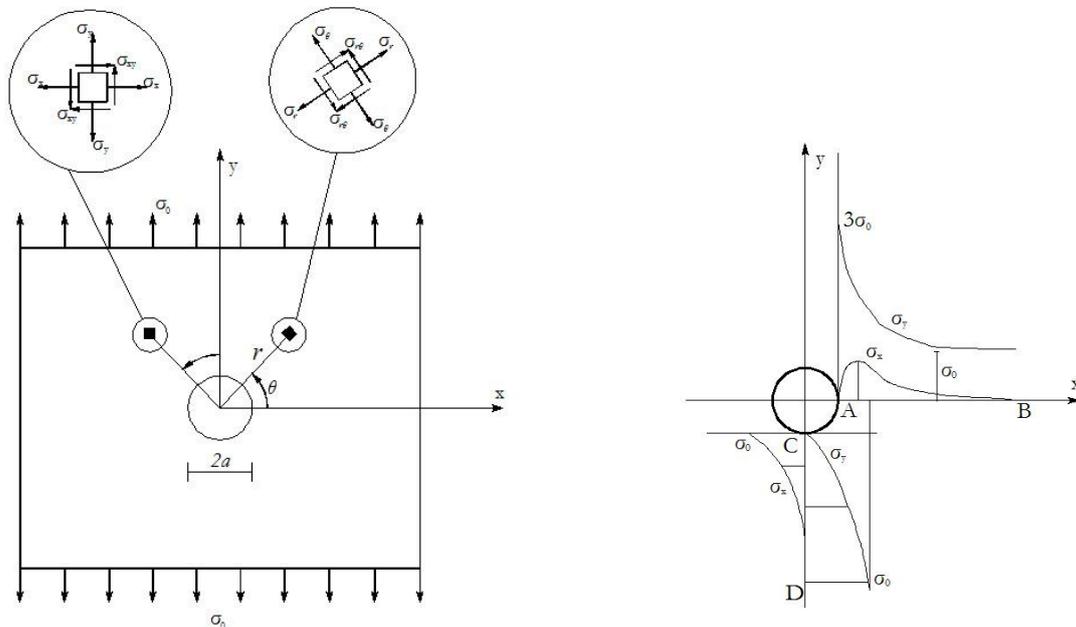


Figura 2.3- a) Furo circular numa placa infinita b) Distribuição de tensões ao redor do furo (Extended Finite Element Method, 2008)

As condições de contorno ao longo do furo circular são analisadas usando sistema de coordenadas polares. Se usamos a definição de tensão,  $\sigma_{yy}$ , em função da função de tensão de Airy  $\sigma_{yy} = \partial^2 \Phi / \partial y^2$  se poderia sugerir uma função de tensão do tipo  $\Phi = \sigma_0 x^2$  para representar as condições mais remotas da condição de campo de contorno  $\sigma_{yy} = \sigma_0$ . Também podemos escolher outra representação polar de  $\Phi$  com  $x = r \cos \theta$

$$\Phi = \sigma_0 r^2 \cos^2 \theta \quad (2.20)$$

ou

$$\Phi = \sigma_0 f(r) \cos 2\theta \quad (2.21)$$

Depois de algumas substituições Menguid (1989) verifica que:

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma_0}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left[ 1 - \left( 1 - 3 \frac{a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right] \quad (2.22)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_0}{2} \left[ \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \left( 1 + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right] \quad (2.23)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{\sigma_0}{2} \left[ \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left( 1 + 3 \frac{a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta \right] \quad (2.24)$$

Os valores de tensão no borde do furo quando  $r = a$ :

$$\sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_0(1 - 2 \cos \theta), \quad \sigma_{r\theta} = 0 \quad (2.25)$$

no qual mostra que apesar da aplicação de uma tração unidirecional uniforme, um estado de tensões biaxial não uniforme é gerado ao redor do furo. Ocorre também um estado de tensões de compressão em  $\theta = \pi/2, 3\pi/2$  ( $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{xx} = -\sigma_0$ ). O fator de concentração de tensões para  $\sigma_{\theta\theta}$  é 3 em  $\theta = 0$  ( $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{yy} = 3\sigma_0$ ). A Figura 2.3.b mostra a distribuição de tensões ao longo do eixo maior da placa.

### 2.2.3. Furo Elíptico

Inglis (1913) resolveu o problema da concentração de tensões ao redor de um furo elíptico numa placa infinita submetida a carregamento uniforme, Figura 2.4.

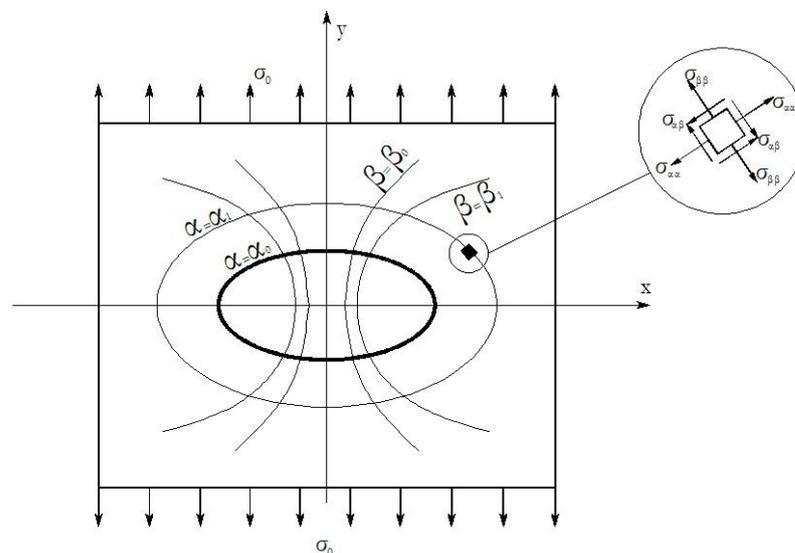


Figura 2.4- Furo elíptico (Extended Finite Element Method, 2008)

As seguintes funções complexas de tensão foram propostas por Inglis em um sistema de coordenadas curvilíneo  $\alpha$  e  $\beta$ ; equações que satisfazem as condições de contorno e são periódicas em  $\beta$ .

$$\psi(z) = \frac{1}{4} \sigma_0 c \left[ (1 + e^{2\alpha_0}) \sinh p - e^{2\alpha_0} \cosh p \right] \quad (2.26)$$

$$\chi(z) = -\frac{1}{4} \sigma_0 c^2 \left[ (\cosh 2\alpha_0 - \cosh \pi) p + \frac{1}{2} e^{2\alpha_0} - \cosh 2 \left( p - \alpha_0 - i \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (2.27)$$

onde  $p = \alpha + i\beta$ . A solução em  $\alpha = \alpha_0$  é

$$\left( \sigma_{\beta\beta} \right)_{\alpha=\alpha_0} = \sigma_0 e^{2\alpha_0} \left[ \frac{\sinh 2\alpha_0 (1 + e^{-2\alpha_0})}{\cosh 2\alpha_0 - \cos 2\beta} - 1 \right] \quad (2.28)$$

E para os pontos localizados ao final da elipse em termos de  $a$  e  $b$

$$\left( \sigma_{\beta\beta} \right)_{\alpha=\alpha_0, \beta=0, \pi} = \sigma_0 \left[ 1 + 2 \frac{a}{b} \right] \quad (2.29)$$

A Equação (2.29) indica que para um furo circular onde  $a = b$  o fator de concentração de tensões é igual a 3. Outro valor para ser analisado é quando a elipse é degenerada em uma trinca, quer dizer  $b = 0$ , gerando assim uma tensão infinita. A Equação (2.29) pode ser reescrita em termos de raio de curvatura da ponta da trinca como:

$$\left( \sigma_{\beta\beta} \right)_{\alpha=\alpha_0, \beta=0, \pi} = \sigma_0 \left[ 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right] \quad (2.30)$$

onde mostra que o fator de concentração de tensões é proporcional a curvatura  $\rho$ . O fator de intensidade de tensões,  $K_T$ , pode também representar uma aproximação prática para várias formas de entalhe com ajuda da Equação (2.30) para entalhes elípticos:

$$K_T = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{nom}} = 1 + 2 \sqrt{\frac{D}{\rho}} \quad (2.31)$$

onde  $D$  e  $\rho$  são a profundidade do entalhe e o raio da raiz do entalhe respectivamente, Figura 2.5.

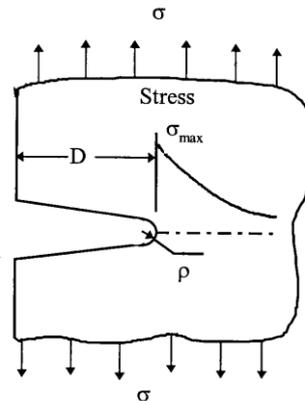


Figura 2.5- Concentração de tensão

### 2.3. Trincas e Fator de Intensidade de Tensões

Irwin em 1957 introduziu o conceito de fator de intensidade de tensões  $K$ , como uma medida da singularidade. Ele demonstrou que todos os campos de tensão elásticos ao redor da ponta da trinca são distribuídos similarmente, sendo que  $K$  é proporcional a  $\sigma\sqrt{\pi r}$ . Além disso,  $K$  controla a intensidade de tensão local.

Usando as soluções encontradas por Menguind (1989) para o problema gerado por Westergaard para trincas afiadas temos o campo de tensões em torno de uma trinca:

$$\sigma_{xx} = \sigma_0 \frac{a}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \dots \quad (2.32)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_0 \frac{a}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \dots \quad (2.33)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_0 \frac{a}{\sqrt{2r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \dots \quad (2.34)$$

Usando as equações anteriores, o campo elástico de tensões ao redor da trinca pode ser agora ser representado por:

$$\sigma_{xx} = \sigma_0 \frac{a}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \dots = \sigma_0 \sqrt{\frac{1}{r}} f(\theta) + \dots \quad (2.35)$$

ou na forma mais geral:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{r}} \{K_I f_{ij}^I(\theta) + K_{II} f_{ij}^{II}(\theta) + K_{III} f_{ij}^{III}(\theta)\} + \text{termos de maior ordem} \quad (2.36)$$

Onde  $\sigma_{ij}$  são as tensões perto da ponta da trinca e  $K_I, K_{II}, K_{III}$  são os fatores de intensidade de tensão associadas aos três diferentes modos de movimento respectivamente das superfícies trincadas:

$$K_I = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta = 0}} \sigma_{yy} \sqrt{2\pi r} \quad (2.37)$$

$$K_{II} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta = 0}} \sigma_{xy} \sqrt{2\pi r} \quad (2.38)$$

$$K_{III} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta = 0}} \sigma_{yz} \sqrt{2\pi r} \quad (2.39)$$

O primeiro modo do fator de intensidade de tensão, baseado na Equação (2.37), pode ser simplificado como:

$$K_I = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta = 0}} \sigma_{yy} \sqrt{2\pi r} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta = 0}} \sqrt{2\pi r} \sigma_0 \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) = \sigma_0 \sqrt{\pi a} \quad (2.40)$$

É importante definir os diferentes modos de tensão que o fator de intensidade de tensão pode ter em os corpos trincados. Um corpo trincado pode ser carregado em qualquer combinação de modos. Os três modos básicos, Figura 2.6, são modo I ou normal (ao plano da trinca), modo II ou corte (cisalhamento paralelo ao plano e perpendicular à ponta da trinca) e modo III ou torção (cisalhamento paralelo ao plano e à ponta da trinca). O Modo I corresponde a uma normal separação das faces da trinca sob ação de esforços de tração, o qual é o mais encontrado na prática da mecânica da fratura. Modos II e III se diferenciam devido à forma da ação do plano cisalhante.

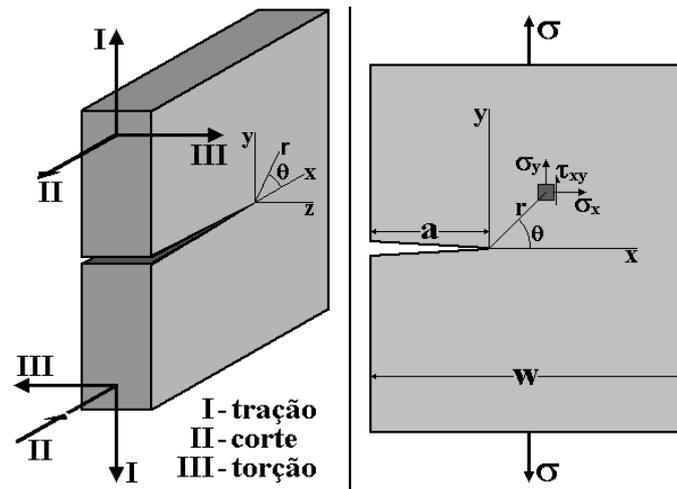


Figura 2.6 - Modos de carregamento das trincas  
(Fadiga sob Cargas Reais de Serviço, Castro & Meggiolaro, 2009)

O modo I é o mais importante, pois corresponde ao modo de fraturamento da maioria das peças trincadas. Para o modo de carregamento I, o campo de tensões linear elástico em torno das trincas é dado por:

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.41)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.42)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (2.43)$$

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\ 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Estado plano de deformações} \\ \text{Estado plano de tensões} \end{array} \quad (2.44)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (2.45)$$

O campo de deslocamentos é dado por

$$u_x = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( \kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.46)$$

$$u_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( \kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.47)$$

$$u_z = 0 \quad (2.48)$$

## 2.4. Propagação de Trincas por Fadiga

Fadiga é um dos mecanismos de falha nos componentes estruturais caracterizada pela geração e/ou propagação progressiva de uma trinca. A vida de fadiga de um componente pode ser expressa como o número de ciclos necessário para iniciar uma trinca por fadiga e para propagar a trinca até um tamanho crítico causando a fratura dos componentes da estrutura. A falha por fadiga ocorre em três etapas: iniciação de trinca, lento, a propagação e a fratura, rápidas. Parâmetros como geometria, solicitações, propriedades e ambiente externo afetam a resistência de um componente estrutural a fadiga. A geometria da estrutura influencia o gradiente de tensões e os fatores de intensidade de tensão.

### 2.4.1. Curva $da/dN$ versus $\Delta K$

Paris & Erdogan (1963) demonstraram que a propagação de trincas por fadiga  $da/dN$  não era controlada pela gama das tensões  $\Delta\sigma$  senão dependia da gama de fator de intensidade de tensões  $\Delta K$ , é  $\Delta K$  quem controla  $da/dN$ . A Figura 2.7 mostra a propagação de uma trinca por fadiga onde se pode apreciar o incremento do comprimento  $\Delta a$  para cada número de ciclos  $\Delta N$ .

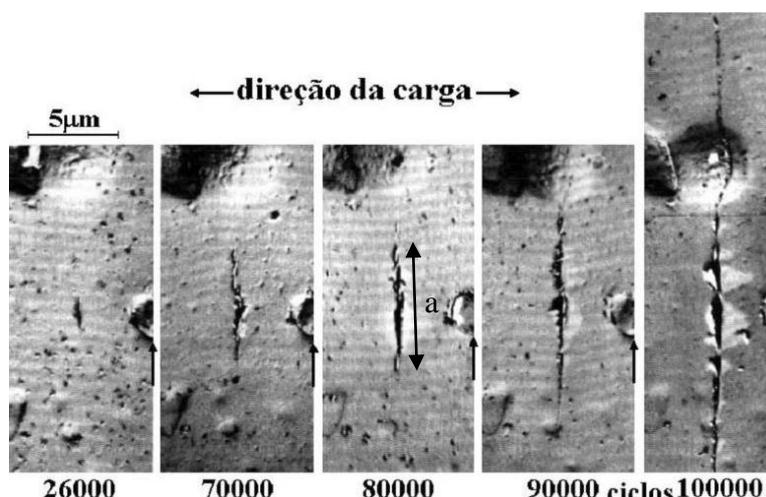


Figura 2.7 - Crescimento paulatino de uma pequena trinca por fadiga (Miranda, 2003)

O método  $da/dN$  de projeto à fadiga proposto por Paris é usado para prever a vida residual de peças trincadas a partir da integração da curva de propagação  $da/dN$  x  $\Delta K$  (Castro & Meggiolaro, 2009). Este método prevê uma relação parabólica entre  $da/dN$  e  $\Delta K$  do tipo:

$$da/dN = A \cdot \Delta K^m \quad (2.50)$$

também

$$\Delta K = (1-R) \cdot \sigma_{\max} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot f(w/a) = \Delta \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot f(w/a) \quad (2.51)$$

onde,

$$\Delta K = K_{\max} - K_{\min}, R > 0 \quad (2.52)$$

$$\Delta K = K_{\max}, R < 0 \quad (2.53)$$

$$R = K_{\min} / K_{\max} \quad (2.54)$$

$$K_{\max} = \Delta K / (1 - R) \quad (2.55)$$

onde a diferença entre  $K_{\max}$  e  $K_{\min}$  é a gama do fator de intensidade de tensões, R a razão entre os fatores de intensidade máximo e mínimo, Figura 2.8.

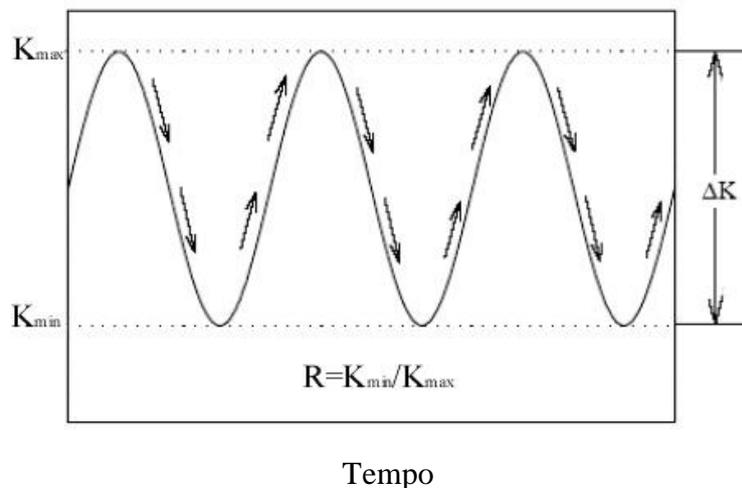


Figura 2.8 - Ciclos do Fator de Intensidade de Tensões

A Figura 2.9 mostra o comportamento do fator de intensidade de tensões  $\Delta K$  numa curva ajustada logaritmicamente devido as taxas  $da/dN$ . Esta curva sigmoidal

ajuda a entender a previsão da vida residual de estruturas trincadas. Diferenciam-se 3 fases principais: Fase I, que inicia num limiar de propagação  $\Delta K_{th}$  abaixo do qual a trinca não se propaga, onde a derivada da curva decresce a medida que  $\Delta K$  aumenta. A Fase II onde efetivamente a relação  $da/dN$  vs  $\Delta K$  é dada pela regra de Paris pois a derivada da curva é aproximadamente constante nesta fase. Finalmente a Fase III, onde a derivada da curva cresce a medida que  $\Delta K$  aumenta até que o fator de intensidade máximo de tensões,  $K_{max}$ , atinge o valor crítico de tenacidade do material  $K_{Ic}$ , provocando a falha da estrutura por fratura. A Fase I vai do limiar  $\Delta K_{th}$  ate taxas de  $10^{-10}$  a  $10^{-9}$  m/ciclo onde o crescimento é descontínuo gerado por micro-mecanismos intragranulares sensíveis à carga média, à microestrutura do material, ao meio ambiente e à carga da abertura da trinca. Na Fase II as taxas vão de  $10^{-10}$ ~ $10^{-9}$  até  $10^{-6}$ ~ $10^{-5}$  m/ciclo onde o crescimento da trinca é aproximadamente contínua ao longo da sua frente (estrias de fadiga, ver Capítulo 6). A Fase III a propagação é praticamente instável terminando no fraturamento da estrutura.

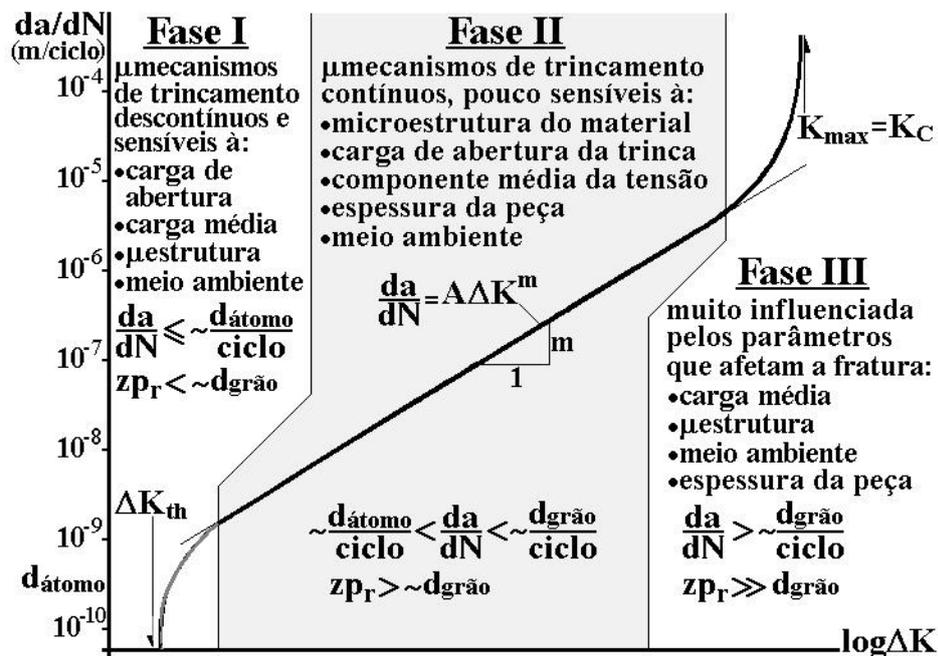


Figura 2.9- Curva típica de propagação de trincas por fadiga,  $da/dN \times \Delta K$  (Fadiga sob Cargas Reais de Serviço, Castro & Meggiolaro 2009)

Paris também afirmou que a vida residual de uma peça trincada à fadiga era previsível integrando a curva de propagação  $da/dN \times \Delta K$  do material. Com este conceito utiliza-se o fator de intensidade de tensões para descrever a propagação das trincas de fadiga.

A vida residual da peça pode ser dada como:

$$N = \int_{a_0}^{a_f} \frac{da}{A \cdot \Delta K^m} = \frac{1}{A \cdot (\Delta \sigma \cdot \pi)^m} \int_{a_0}^{a_f} \frac{da}{(\sqrt{a} \cdot f(w/a))^m} \quad (2.56)$$

onde  $A$  (coeficiente linear) e  $m$  (coeficiente angular) são constantes próprias do material os quais variam com a tensão média, a frequência, a temperatura, e o meio ambiente (Moura, 2005). Também  $R$  é razão de tensões mínima e máxima atuantes. Além disso a participação do fator de forma  $f(w/a)$  é muito importante já que é a função que descreve toda a influência das geometrias da peça e da trinca, da orientação da trinca, e a forma do carregamento no campo de tensões. Existem centenas de expressões na literatura que caracterizam as diferentes geometrias das peças através do fator de forma.

#### 2.4.2. Ciclos de Tensão de Fadiga

Num ciclo de tensões, define-se a amplitude da tensão como a diferença entre a tensão máxima,  $\sigma_{\max}$ , ou mínima,  $\sigma_{\min}$ , e a tensão média,  $\sigma_m$ . Por sua vez, a tensão média é a semizona entre a tensão máxima e a tensão mínima, sendo, portanto, dada pela equação:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \quad (2.57)$$

A Figura 2.10 mostra alguns casos de ciclos de tensão de fadiga, onde o tipo senoidal e mais usado em ensaios de laboratório.

A amplitude de tensão, ou tensão alternada do ciclo,  $\sigma_a$ , é dada pela equação

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \sigma_{\max} - \sigma_m \quad (2.58)$$

e a gama ou intervalo de tensões é o dobro da amplitude

$$\Delta \sigma = 2 \cdot \sigma_a = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} \quad (2.59)$$

O ciclo repetido, Figura 2.10.b, tem tensão média diferente de zero (Carregamento Tensão/Tensão), podendo esta ser de tração ou compressão. No caso particular em que a tensão mínima é nula, o ciclo diz-se pulsante.

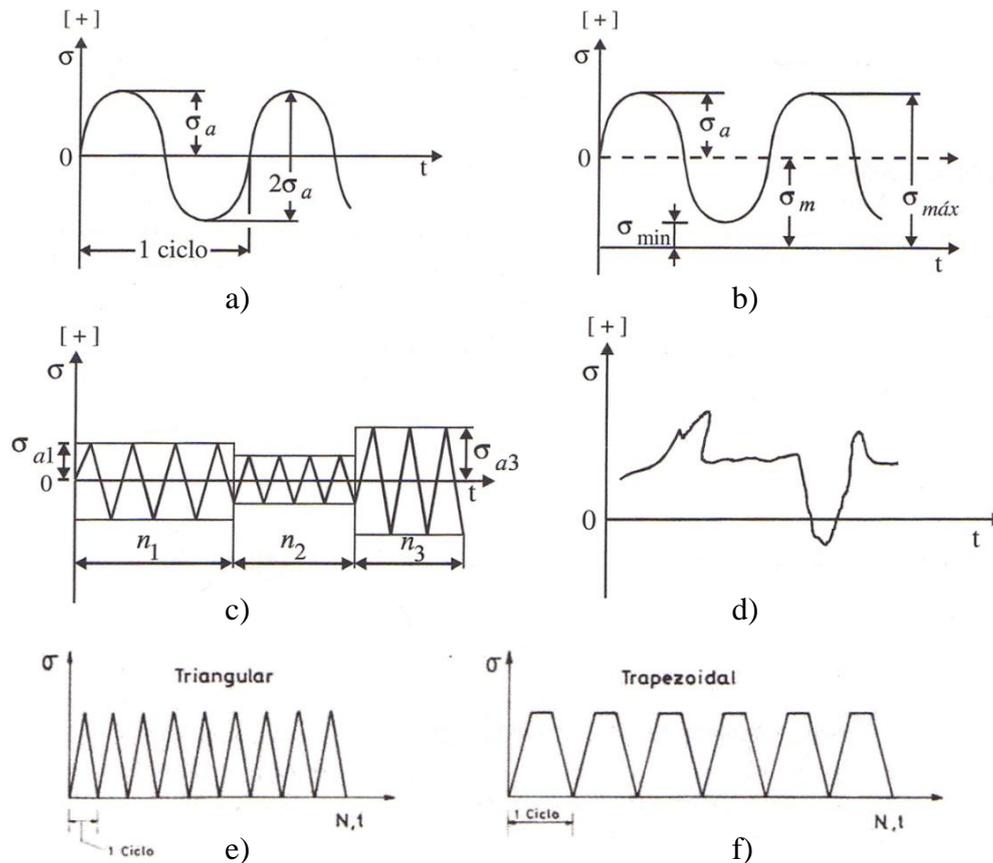


Figura 2.10 - Ciclos de Tensão de Fadiga a) Alternado (Carregamento Tensão/Compressão) b) Repetido (Carregamento Tensão/Tensão) c) Bloco d) Irregular ou aleatório (Espectro) e) e f) Ciclos com onda de tensão triangular e trapezoidal, (Projeto de órgãos de máquinas, 2005)

### 2.4.3. Equações Semi-Empíricas de Propagação por Fadiga

Além do modelo formulado por Paris (1960) para descrever a taxa de propagação  $da/dN = A \cdot (\Delta K)^m$  existem outros modelos semi-empíricos mais desenvolvidos. Os modelos estão baseados em resultados obtidos em testes experimentais que consideram outros coeficientes adicionais que descrevem mais

qualitativamente a forma da curva através da consideração dos efeitos de  $\Delta K_{th}$ ,  $\Delta K_{IC}$ ,  $R$ . A Tabela 2.2 mostra alguns de eles. Esses modelos descrevem em parte o comportamento da curva  $da/dN$  vs.  $\Delta K$ .

Regra	$da/dN$	Coefficientes Experimentais
Paris (1963)	$A \cdot (\Delta K)^m$	$A=7E-9, m=3$
Elber Adaptada (1970)	$A_e \cdot (\Delta K - \Delta K_{th})^{m_e}$	$A_e, m_e$
Elber Modificada (1970)	$A_e \cdot (\Delta K - \Delta K_0 \cdot (1-R))^{m_e}$	$A_e, m_e$
Forman (1967)	$A \cdot (\Delta K)^{m-1} / ((K_{IC} / K_{max}) - 1)$	$A=2E-6, m=2.9$
Walker (1970)	$A \cdot (\Delta K)^{m+p} / (1/(1-R))$	$A=7E-9, m=2, p=1$
Priddle (1976)	$A \cdot ((\Delta K - \Delta K_{th}) / (K_{IC} - K_{max}))^m$	$A=2E-6, m=2$

Tabela 2.1- Regras Semi-Empíricas para Propagação a Fadiga (Fadiga sob Cargas Reais de Serviço, Castro & Meggiolaro 2009)

## 2.5 Mecânica da Fratura Elastoplástica

Considerando as hipóteses da mecânica da fratura linear elástica, a tensão na ponta da trinca é teoricamente infinita. Porém, do ponto de vista físico, nenhum material pode suportar uma tensão infinita. Sendo assim, uma pequena zona plástica onde as tensões atuantes superam o valor crítico da resistência ao escoamento  $S_E$  é formada ao redor da ponta da trinca, Figura 2.10. Devido à geração desta zona uma fronteira elastoplástica é criada ao redor. No restante volume da zona, as tensões são menores do que  $S_E$  onde o comportamento é elástico. Um material ideal elastoplástico se comporta elasticamente quando as tensões são menores do que  $S_E$ , e no caso de atingir  $S_E$  o material escoar sem encruar. Como resultado destes conceitos outra ferramenta deve ser usada; a mecânica da fratura elastoplástica.

### 2.5.1 Zona Plástica na Ponta da Trinca

Sabe-se que as tensões atuantes na ponta são muito elevadas devido a que a trinca possuem um alto fator de concentração de tensões. Quando a peça é carregada, um campo de tensões com magnitudes diferentes surge e se localiza muito próxima à

ponta da trinca e provocando o seu cegamento através do escoamento do material adjacente. Para as equações da MFLE ter validade considera-se que a zona plástica é pequena em comparação as outras medidas como largura da peça, comprimento e ligamento residual ( $w-a$ ).

Esta pequena região de tensões é controlada pelo fator de intensidade de tensões  $K$ , Figura 2.11. O tamanho e forma da zona plástica dependem de  $K$  e da resistência ao escoamento do material  $S_E$ .

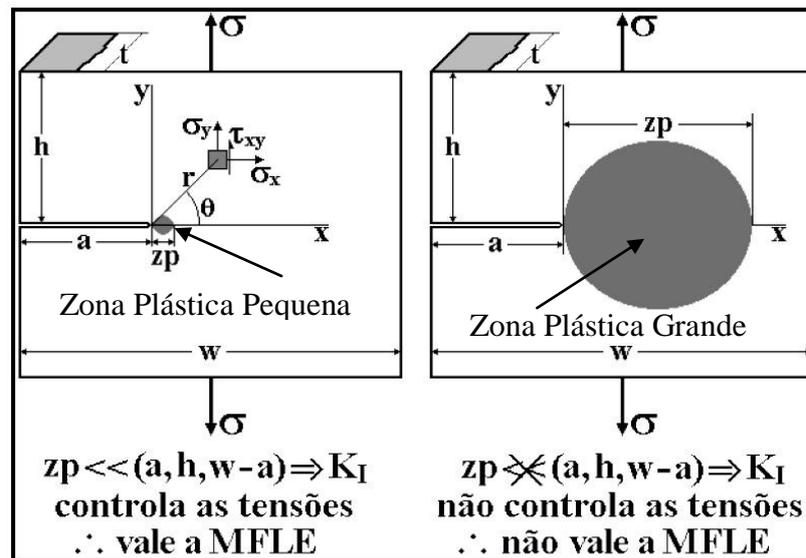


Figura 2.11 – Comparação de zonas plásticas versus elasto-plásticas (Fadiga sob Cargas Reais de Serviço, Castro & Meggiolaro 2009)

A Figura 2.12 mostra uma trinca unidimensional se propagando em policarbonato, a visibilidade do campo de tensões na ponta da trinca e possível devido ao uso de técnicas de fotoelasticidade (usando filtros polarizadores) que mostram diferentes intensidades dos campos de tensões ao redor da trinca.

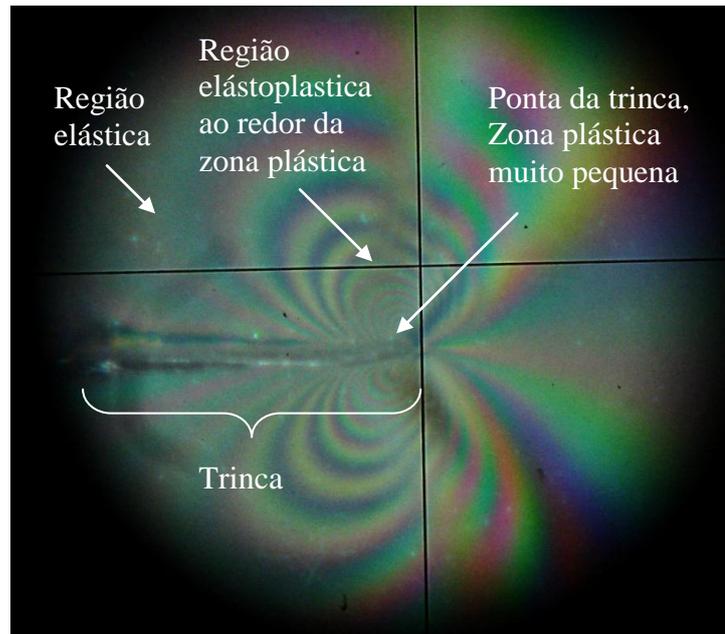


Figura 2.12- Campo de tensões atuantes na ponta da trinca. Corpo de prova ESE(T) (w,h,t) = (67mm, 297mm, 10mm), Policarbonato,  $P_{\max} = 748.7$  N, N= 6002 ciclos (Lab. Fadiga PUC-Rio, 2010)

## 2.6. Fenômeno de Coalescimento das Trincas

A geração de múltiplas trincas foi detectada em alguns corpos de prova em ensaios de pré-trinca de fadiga. No desenvolvimento destas trincas ocorre um fenômeno chamado de coalescimento, distinguindo três estágios: pré-coalescimento, coalescimento e pós-coalescimento.

Pré-coalescimento representa o período durante o qual duas ou mais trincas adjacentes (não necessariamente iguais) já geradas se propagam dentro um corpo tendo um comportamento independente uma da outra. Tanto mais elas se aproximarem quanto, mais cresce a interação de efeitos dos fatores de intensidade de tensões. Seguido ao processo anterior surge o coalescimento. Esse é o período durante o qual as trincas adjacentes se aproximam muito uma das outras até unir-se e formar uma trinca maior. O processo é definido desde o primeiro momento que elas se tocam até o momento final onde o formato das trincas simples não é mais côncavo. A região localizada onde a interseção das elipses tem efeito não é um ponto bem definido, porém ocorre sob uma suave transição. Harrington (1995) determinou experimentalmente que a região de coalescimento tinha forma parabólica. O estágio de pós-coalescimento ocorre posteriormente quando a trinca total gerada perde o

formato côncavo continuando assim um crescimento convexo. Como resultado, uma trinca com formato semi-elíptico maior começa a se propagar como uma trinca única, Figura 2.13.

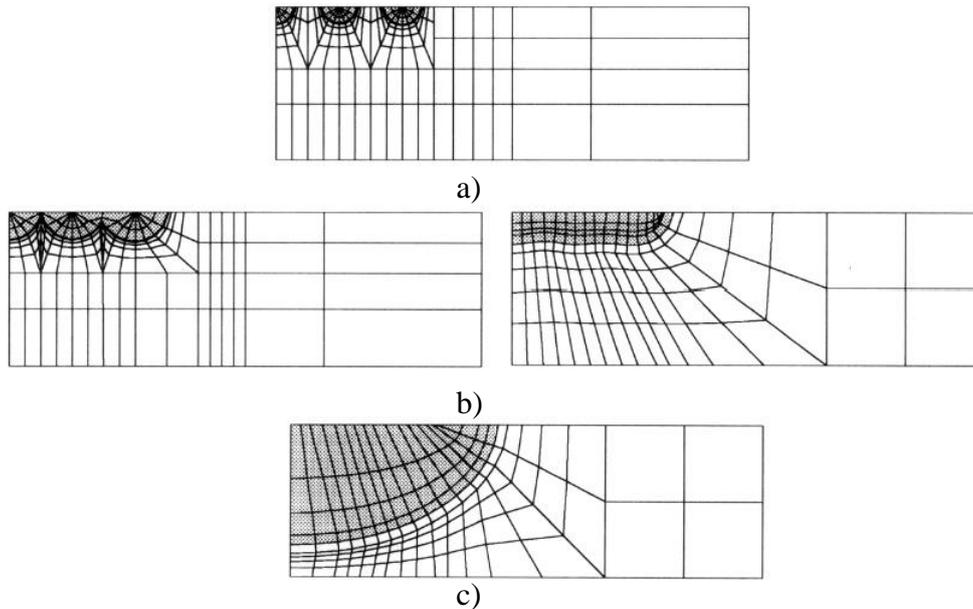


Figura 2.13- Típica configuração usando FEM para coalescimento coplanar de trincas por fadiga a) Pré-Coalescimento b) Coalescimento c) Pós-Coalescimento (Lin&Smith, 1994)

Lin & Smith (1994), estudaram o comportamento de vários entalhes semi-elípticos adjacentes separados coplanarmente num corpo de prova, Figura 2.14. Demonstrando que a modelagem feita pode prever com sucesso os estágios de pré-coalescimento, coalescimento e pós-coalescimento.

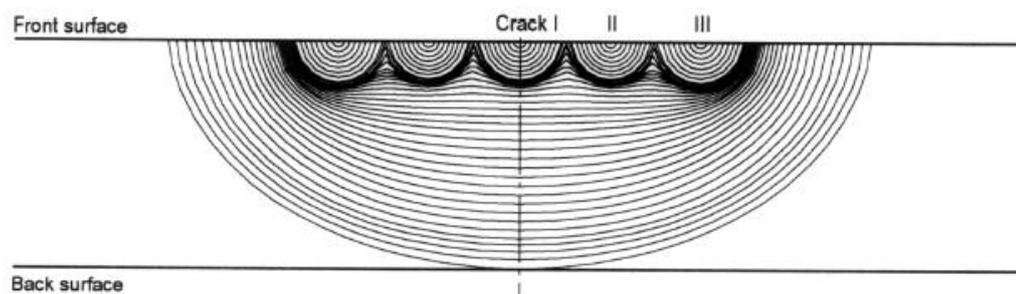


Figura 2.14- Simulação da propagação de uma fila de entalhes coplanares inicialmente semicirculares onde se verifica os diferentes estágios de coalescimento (Lin&Smith, 1994)

Soboyejo (1989) estudou experimentalmente a interação de dois entalhes coplanares sob flexão pura como mostra a Figura 2.15.

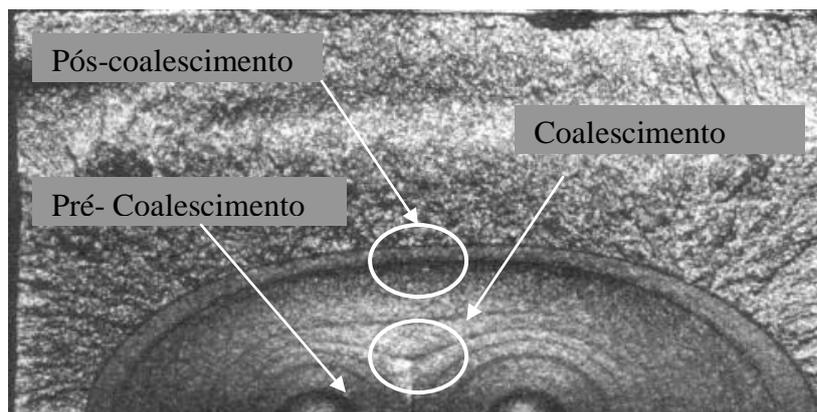


Figura 2.15- Interação de duas trincas coplanares, fenômeno de coalescimento (Soboyejo, 1994)

### 2.6.1. Coalescimento das Trincas Bidimensionais no Policarbonato

O coalescimento das trincas por fadiga foi um fenômeno que foi observado em alguns dos nossos ensaios. Por exemplo, o citado fenômeno foi observado em corpos de prova tipo ESE(T) os quais foram fabricados para determinar as propriedades de fadiga do material policarbonato. A Figura 2.16 mostra a geração de duas trincas não coplanares e adjacentes, elas apresentam diferentes comprimentos formando um ângulo com a horizontal da ponta do entalhe, ao mesmo tempo uma terceira trinca de menor comprimento nasce opostamente com um ângulo negativo na região inferior. No processo de pré-coalescimento as trincas crescem independentes uma da outras. A superfície da trinca 1 (superior) tem um tamanho intermédio e esta relativamente deslocada angularmente da trinca 2 (central) de maior tamanho e quase oposta à trinca 3 (inferior) de menor tamanho. Cada trinca tem fatores de intensidade de tensões próprios e individualizados tanto na direção  $a$  quanto na  $c$ .

Depois de alguns ciclos tanto a profundidade  $c$  quanto a largura  $a$  da trinca 1 crescem até quase atingir a comprimento da profundidade da trinca 2, iniciando a etapa de coalescimento.

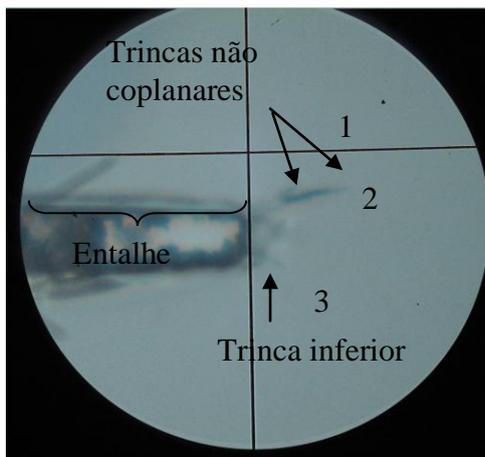


Figura 2.16 – Pré-Coalescimento, crescimento semi- elíptico de múltiplas trincas bidimensionais localizadas no meio de um entalhe, corpo de prova ESE(T) (w,h,t) = (65mm, 2970mm, 10mm), policarbonato (Lab. Fadiga PUC-Rio, 2010)

A trinca 3 cresce alguns milímetros a mais tanto em largura quanto em profundidade, Figura 2.17.

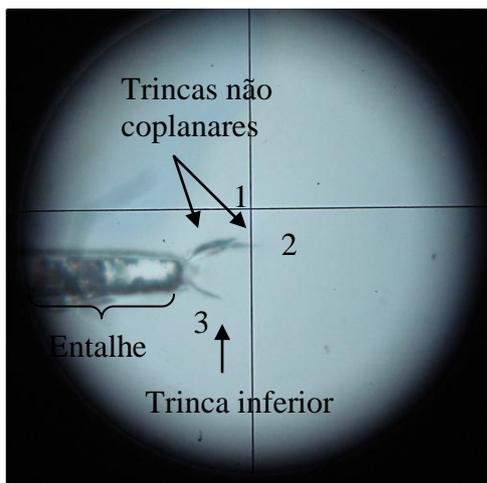


Figura 2.17 – Pré-Coalescimento, crescimento semi- elíptico de múltiplas trincas bidimensionais localizadas no meio de um entalhe, corpo de prova ESE(T) (w,h,t) = (65mm, 2970mm, 10mm), policarbonato (Lab. Fadiga PUC-Rio, 2010)

Após alguns ciclos, as trincas 1 e 2 começam o estágio de coalescimento, Figura 2.18. A trinca 1 se deforma até conseguir se sobrepor a trinca 2 localizada inferiormente. Devido o fator de intensidade de tensões ser maior na trinca 2, ela admite que trincas adjacentes com menor fator de intensidade de tensões sejam

absorvidas para se unificar. Porém devido a trinca 3 ter nascido bem afastada, ela não pode se coalescer com o resto das trincas parando totalmente a propagação.

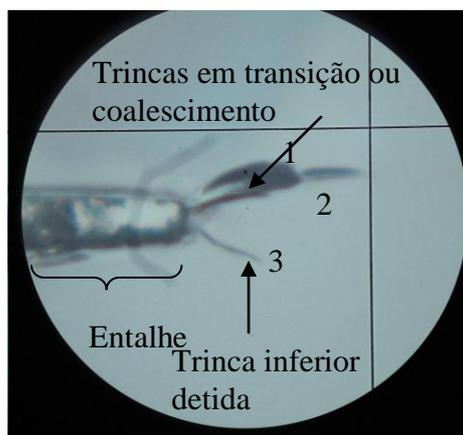


Figura 2.18 – Coalescimento, crescimento semi-elíptico de múltiplas trincas bidimensionais localizadas no meio de um entalhe, corpo de prova ESE(T) (w,h,t) = (65mm, 2970mm, 10mm), policarbonato (Lab. Fadiga PUC-Rio, 2010)

O efeito de coalescimento permite a uniformização das duas superfícies gerando uma trinca principal predominante e com um fator de intensidade de tensões unificado, assim os posteriores ciclos de pós-coalescimento a trinca se comporta como uma trinca bidimensional normal até se converter em passante, como indicado na Figura 2.19.

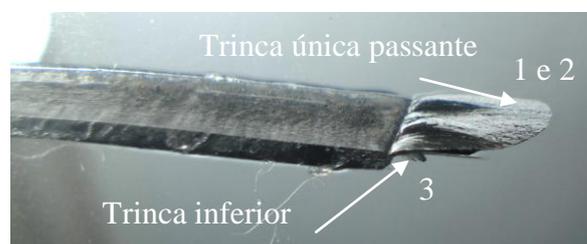
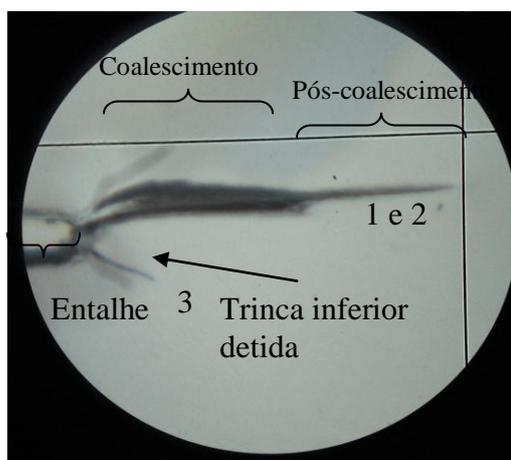


Figura 2.19 – Pós-Coalescimento, crescimento semi-elíptico de múltiplas trincas bidimensionais localizadas no meio de um entalhe, corpo de prova ESE(T) (w,h,t) = (65mm, 2970mm, 10mm), policarbonato (Lab. Fadiga PUC-Rio, 2010)