



Ursula Silveira Monteiro de Lima

**Avaliação de Derivativos Complexos:
Aplicação do Método de Mínimos Quadrados de Monte
Carlo com Diversas Bases Polinomiais**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção do Departamento de Engenharia Industrial da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

Orientador: Prof. Carlos Patricio Samanez

Rio de Janeiro
Agosto de 2010



Ursula Silveira Monteiro de Lima

**Avaliação de Derivativos Complexos:
Aplicação do Método de Mínimos
Quadrados de Monte Carlo com Diversas
Bases Polinomiais**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção do Departamento de Engenharia Industrial da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Carlos Patricio Samanez

Orientador

Departamento de Engenharia Industrial - PUC-Rio

Prof. José Paulo Teixeira

Departamento de Engenharia Industrial - PUC-Rio

Prof. Paulo Henrique Soto Costa

Departamento de Engenharia Industrial - PUC-Rio

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador Setorial do Centro

Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 10 de agosto de 2010

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, da autora e do orientador.

Ursula Silveira Monteiro de Lima

Graduou-se em Economia pela Fundação Getulio Vargas em 2005. Tem experiência profissional nas áreas de Controle Financeiro e Análise de Risco de Crédito tendo participado de projetos de investimento produtivo financiados pela Agência de Fomento do Estado do Rio de Janeiro.

Ficha Catalográfica

Lima, Ursula Silveira Monteiro de

Avaliação de derivativos complexos : aplicação do método de mínimos quadrados de Monte Carlo com diversas bases polinomiais / Ursula Silveira Monteiro de Lima ; orientador: Carlos Patricio Samanez. – 2010.

89 f. : il. (color.) ; 30 cm

Dissertação (Mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Industrial, 2010.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Industrial – Teses. 2. Derivativos complexos. 3. Opções asiáticas americanas. 4. Método de mínimos quadrados de Monte Carlo. 5. Bases polinomiais. I. Samanez, Carlos Patricio. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Industrial. III. Título.

CDD: 658.5

*À Vida.
Non Mors Ominia Solvit.*

Agradecimentos

Ao CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Ao meu orientador Professor Carlos Patricio Samanez pelo estímulo e parceria para a realização deste trabalho.

Aos meus pais e irmão, pela educação, atenção e carinho de todas as horas.

Aos professores Samanez, Tara, José Paulo, Kátia, Marco Antônio, Frances, Nélío, Antônio Fernando, Diallo, Raupp e a todos os outros professores do Departamento por suas contribuições tanto em suas aulas, quanto em suas monitorias.

Aos meus caros colegas da PUC-Rio.

Aos professores que participaram da Comissão examinadora.

Aos funcionários do Departamento de Engenharia Industrial, especialmente: Cláudia, Isabel, Ana, Fernanda e Gilvan.

A todos os amigos e familiares que de uma forma ou de outra me estimularam e ajudaram ao longo de todo o caminho.

Resumo

Lima, Ursula Silveira Monteiro de; Samanez, Carlos Patricio. **Avaliação de Derivativos Complexos: Aplicação do Método de Mínimos Quadrados de Monte Carlo com Diversas Bases Polinomiais.** Rio de Janeiro, 2010. 89p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho tem por objetivo o estudo e a aplicação do Método de Mínimos Quadrados de Monte Carlo com diferentes bases polinomiais - Potência, Laguerre, Legendre e Hermite A - na precificação de Opções Asiáticas Americanas (*Amerasian*) tanto em sua modalidade de compra quanto em sua modalidade de venda. Os resultados encontrados ratificam a possibilidade de utilização alternativa de diversas bases polinomiais. Além disso, verifica-se a convergência em cada um dos experimentos, sem perder de vista a possibilidade de que haja, para cada tipo de *Amerasian* precificada, uma base polinomial específica que, marginalmente, mostra-se mais precisa.

Palavras-chave

Derivativos complexos; opções asiáticas americanas; método de mínimos quadrados de monte carlo; bases polinomiais.

Abstract

Lima, Ursula Silveira Monteiro de; Samanez, Carlos Patricio (Advisor). **Complex Derivatives Valuation: Applying the Least-Squares Monte Carlo Method with Several Polynomial Basis**. Rio de Janeiro, 2010. 89p. MSc. Dissertation - Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work aims at studying and applying the Least-Squares Monte Carlo Method by using different polynomial basis – Power, Laguerre, Legendre and Hermite A – in pricing American Asian Options, either call or put. The results found ratify the possibility of an alternated use of several polynomial bases. Besides, each of the experiments is checked for convergence, taking into account that there may be an optimal polynomial basis for each kind of Amerasian option which is marginally more accurate regarding its pricing.

Keywords

Complex derivatives; american asian options; least-squares monte carlo method; polynomial basis.

Sumário

1. Introdução	14
1.1. Opções Asiáticas	15
1.2. Relevância do Trabalho	16
1.2.1. Contribuição Acadêmica	16
1.2.2. Posicionamento da Dissertação	17
2. Simulação de Monte Carlo	20
2.1. Técnicas de Redução de Variância	21
2.1.1. Variáveis Antitéticas	21
2.1.2. Variável de Controle	21
2.1.3. <i>Stratified Sampling</i> (Amostragem Estratificada)	22
2.1.4. <i>Latin Hypercube</i> (Hiper cubo Latino)	22
2.1.5. <i>Importance Sampling</i> (Amostragem por Importância)	22
2.2. Seqüências de Baixa Discrepância ou Quase-Monte Carlo (QMC)	22
2.2.1. Seqüência de Halton	23
2.2.2. Seqüência de Faure	24
2.2.3. Seqüência de Sobol	24
3. Mínimos Quadrados de Monte Carlo	25
3.1. Introdução	25
3.2. Exemplo Numérico: Opção Asiática Americana <i>Fixed Strike</i> Aritmética	27
4. Precificando as Opções Asiáticas Americanas	34
4.1. Considerações Iniciais	34
4.2. Bases Polinomiais	36

4.3. Resultados	38
5. Considerações Finais	47
Referências Bibliográficas	48
Apêndice A - Detalhando Categorias de Classificação Básica	51
Apêndice B - Derivando a Equação Diferencial Parcial de uma Opção Asiática	56
Apêndice C - Procedimento Operacional do MQMC	60
C.1 - Discretização do preço do ativo básico	60
C.2 - Regressão de Mínimos Quadrados (procedimento operacional)	61
Apêndice D - Desenvolvimento dos Formatos dos Polinômios Usados nas Simulações	64
Apêndice E - Rotinas Implementadas em MATLAB 6.5	65
E.1 - Regressão Base de Potência	65
E.2 - <i>Amerasian Fixed Strike</i> Aritmética - Base de Potência	65
E.3 - <i>Amerasian Floating Strike</i> Aritmética – Base de Potência	67
E.4 - <i>Amerasian Fixed Strike</i> Geométrica – Base de Potência	68
E.5 - <i>Amerasian Floating Strike</i> Geométrica – Base de Potência	69
E.6 - Regressão Base de Hermite A	70
E.7 - <i>Amerasian Fixed Strike</i> Aritmética - Base de Hermite A	71
E.8 - <i>Amerasian Floating Strike</i> Aritmética – Base de Hermite A	73
E.9 - <i>Amerasian Fixed Strike</i> Geométrica – Base de Hermite A	74
E.10 - <i>Amerasian Floating Strike</i> Geométrica – Base de Hermite A	75
E.11 - Regressão Base de Legendre	76

E.12 - <i>Amerasian Fixed Strike</i> Aritmética - Base de Legendre	77
E.13 - <i>Amerasian Floating Strike</i> Aritmética – Base de Legendre	79
E.14 - <i>Amerasian Fixed Strike</i> Geométrica – Base de Legendre	80
E.15 - <i>Amerasian Floating Strike</i> Geométrica – Base de Legendre	81
E.16 - Regressão Base de Laguerre	82
E.17 - <i>Amerasian Fixed Strike</i> Aritmética - Base de Laguerre	83
E.18 - <i>Amerasian Floating Strike</i> Aritmética – Base de Laguerre	85
E.19 - <i>Amerasian Fixed Strike</i> Geométrica – Base de Laguerre	86
E.20 - <i>Amerasian Floating Strike</i> Geométrica – Base de Laguerre	87
Anexo I - Esquema Básico de Classificação de uma Opção Asiática	89

Lista de tabelas

Tabela 1 - Preços do ativo ao longo de cada trajetória considerada	28
Tabela 2 - Média dos preços do ativo básico ao longo de cada path	29
Tabela 3 - Tabela de sinalização: mostra se a opção está in the money ("in") ou out the money("out")	29
Tabela 4 - Fluxo de caixa da opção no vencimento da mesma	30
Tabela 5 - Conjunto de dados em $t = 3$ a serem usados na regressão. Fator de desconto = 0,941765	30
Tabela 6 - Valor auferido com o exercício imediato vs valor de continuidade em $t = 3$	31
Tabela 7 - Fluxo de caixa da opção nos períodos $t = 3$ e $t = 4$ dada a regra ótima de decisão utilizada, condicional ao fato de que não houve exercício em uma data anterior a $t = 3$	31
Tabela 8 - Determinação dos dados a serem usados na regressão em $t = 2$	32
Tabela 9 - Valor auferido com o exercício imediato vs valor de continuidade em $t = 2$	32
Tabela 10 - Fluxo de caixa da opção ao longo dos períodos em que há a possibilidade de exercício dada a regra ótima de decisão	33
Tabela 11 - Sinalização da regra de parada ótima: será igual a 1 quando há exercício e zero, caso contrário	33
Tabela 12 – Coeficientes e funções da fórmula de Rodrigues para os polinômios considerados	36
Tabela 13 – Coeficientes e funções da forma explícita	37
Tabela 14 – Termos da lei de recorrência para os polinômios considerados	37
Tabela 15 - Estimativa dos preços da Amerasian Floating Strike Aritmética ao longo de diversos conjuntos de trajetórias simuladas ($NumSim$ = número de	

trajetórias simuladas)	38
Tabela 16 - Estimativa dos preços da Amerasian Floating Strike Geométrica	38
Tabela 17 - Estimativa dos preços da Amerasian Fixed Strike Aritmética	39
Tabela 18 - Estimativa dos preços da <i>Amerasian Fixed Strike</i> Geométrica	39
Tabela 19 – Desvio-padrão da estimativa com 50.000 paths simulados para todas as bases polinomiais e todos os tipos de <i>Amerasian</i>	45

Lista de figuras

Figura 1 - Desvio-padrão da opção de venda (put) e da opção de compra (call) em função do número de paths simulados para o Caso 1	41
Figura 2 – Desvio-padrão da opção de venda (put) e da opção de compra (call) em função do número de paths simulados para o Caso 2	42
Figura 3 – Desvio-padrão da opção de venda (put) e da opção de compra (call) em função do número de paths simulados para o Caso 3	43
Figura 4 - Desvio-padrão da opção de venda (put) e da opção de compra (call) em função do número de paths simulados para o Caso 4	44
Figura 5 – Estrutura Esquemática de Classificação Básica	89