

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA  
DO RIO DE JANEIRO



**Danny Hernán Zambrano Carrera**

**Movimento de Rotação Sem Restrição  
de um Corpo Rígido**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada como requisito parcial para  
obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia Mecânica da PUC - Rio.

Orientador: Prof. Hans Ingo Weber

Rio de Janeiro, Agosto de 2010



**Danny Hernán Zambrano Carrera**

## **Movimento de Rotação Sem Restrição de um Corpo Rígido**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da PUC - Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Hans Ingo Weber**

Orientador

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC-Rio

**Prof. Ilmar Ferreira Santos**

Technical University of Denmark, Department of Mechanical Engineering

**Prof. José Manoel Balthazar**

Departamento de Engenharia Mecânica - UNESP

**Prof. Luciano Luporini Menegaldo**

Departamento de Engenharia Mecânica - IME

**Prof. Marcelo Amorim Savi**

Departamento de Engenharia Mecânica - UFRJ

**Prof. Arthur Martins Barbosa Braga**

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC-Rio

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 13 de Agosto de 2010

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Danny Hernán Zambrano Carrera**

Graduou-se em Engenharia Mecânica na Universidad Nacional de Ingeniería, UNI (Lima, Perú). Kursou mestrado na PUC - Rio em 2006, especializando-se em dinâmica veicular. Apresentou vários trabalhos em congressos nacionais e internacionais (COBEM, CILAMCE, PACAM, etc.) junto com o seu orientador durante os estudos de Doutorado.

#### Ficha Catalográfica

Carrera, Danny Hernán Zambrano

Movimento de rotação sem restrição de um corpo rígido / Danny Hernán Zambrano Carrera ; orientador: Hans Ingo Weber. – Rio de Janeiro, 2010.

120 f. : il. (color.) ; 30 cm

Tese (Doutorado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica, 2010.

Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica – Teses. 2. Dinâmica não linear. 3. Ângulos de Cardan. 4. Quatérnios. 5. Orientação no espaço. 6. Limites de estabilidade. 7. Giroscópio. 8. Inércia. I. Weber, Hans Ingo. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. III. Título.

CDD: 621

Dedicado aos meus pais, Hernán e Sara,  
e a minha esposa,  
pelo apoio incondicional em toda  
minha caminhada.

## **Agradecimentos**

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que tornaram possível a elaboração deste trabalho, em especial:

Aos meus pais, meus irmãos e toda a minha família por terem me incentivado a realizar este curso de Doutorado.

Ao professor Hans Ingo Weber pela orientação e constante incentivo.

Aos Professores membros da banca, pelos comentários e sugestões feitas.

Aos professores do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio, pelos momentos compartilhados e conselhos a nível acadêmico.

Aos meus amigos e colegas do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio, em especial para Monica Toledo, Wagner Epifânio e Ricardo Morrot, pelos momentos gratos.

À CAPES, à CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

## Resumo

Zambrano Carrera, Danny Hernán; Weber, Hans I. **Movimento de Rotação Sem Restrição de um Corpo Rígido**. Rio de Janeiro, 2010. 120p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Um problema bem conhecido da Mecânica Clássica consiste no estudo do movimento de um corpo no espaço, especialmente quando o problema é conservativo e livre de forças. Este trabalho utiliza ferramentas modernas da Dinâmica para interpretar os movimentos com grande amplitude, ultrapassando os limites de estabilidade obtidos pelo conceito de Lyapunov. O problema da singularidade numérica que ocorre utilizando-se ângulos de Cardan pode ser eliminado com a descrição por quatérnios. A versatilidade dos quatérnios na Dinâmica é discutida, assim como a dificuldade do estudo do movimento próximo aos pontos de singularidade usando ângulos cardânicos. Enfatiza-se a influência dos momentos principais de inércia na estabilidade do movimento. Obtém-se um valor numérico da energia cinética mínima necessária para que o movimento atravesse o limite de estabilidade. O giroscópio Magnus é um instrumento educacional muito conveniente no estudo do movimento de um corpo livre no espaço. O rotor desse giroscópio representa um corpo em uma suspensão cardânica com anel externo e interno, o que dá ao corpo a liberdade de movimento necessária. Desenvolve-se nesta tese o modelo matemático de um corpo em suspensão cardânica, incluindo-se o atrito existente entre os componentes do sistema mecânico (além de considerar as inércias do rotor e dos anéis ou quadros). O problema da singularidade na descrição com rotações sequenciais, que existe no caso de um corpo no espaço, é eliminado quando se considera a inércia dos quadros. Estuda-se o comportamento do giroscópio ao longo do tempo, sem outras restrições, considerando a perda de energia cinética devido ao atrito. Avalia-se também como a mudança dos momentos de inércia influencia a estabilidade do movimento do sistema.

## Palavras - chave

Dinâmica não Linear; Ângulos de Cardan; Quatérnios; Orientação no Espaço; Limites de estabilidade; Giroscópio; Inércia.

## Abstract

Zambrano Carrera, Danny Hernán; Weber, Hans I. (Advisor). **Libration and Tumbling of a Rigid Body**. Rio de Janeiro, 2010. 120p. Doctorate Thesis - Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A well known conservative problem in Classical Mechanics consists in the force free motion of a body in space. This work uses modern tools from Dynamics to interpret great amplitude movements crossing the limits of stability in the concept of Lyapunov. The numerical singularity that arises with the use of Cardan angles can be eliminated with quaternion representation. The versatility of quaternions in Dynamics is discussed, as well as the difficulty in investigating the motion near to singularity points when using cardanic angles. The influence of the principal moments of inertia on the stability of the motion is discussed. A numerical value for the minimal kinetic energy to cross the stability border is obtained. The Magnus Gyroscope is an educational instrument, very convenient in the study of the motion of a free body in outer space. The rotor of this gyroscope represents the body on a cardanic suspension with outer and inner ring, which gives the body the necessary freedom of motion. In this work a mathematical model of a body in cardanic suspension is generated, including friction between gimbals and rotor (besides considering the inertia of these components). The singularity problem in the free body solution is eliminated when the inertia of the gimbals is considered. Long term behavior of the unrestricted motion is investigated, considering the loss of kinetic energy due to friction. It is also shown how the change of moments of inertia due to the gimbals influences the stability of the motion of system.

## Keywords

Nonlinear Dynamics; Cardan Angles; Quaternions; Orientation in Space; Limits of Stability; Gyroscope; Inertia.

## Sumário

1. Introdução	16
1.1. Histórico	16
1.2. Revisão bibliográfica	20
1.3. Terminologia	22
1.3.1. Velocidade angular	22
1.3.2. Matriz de transformação de coordenadas	23
1.3.3. Matriz de rotação	24
1.3.4. Quatérnios	26
1.3.5. Solução do problema inverso	27
1.3.6. Estabilidade	29
1.4. Objetivo	29
1.5. Descrição da tese	30
2. Descrição do sistema	31
2.1. Visualização do movimento	35
3. Modelo Matemático com ângulos seqüenciais	37
3.1. Corpo no espaço	39
3.1.1. Condição inicial do corpo no espaço	43
3.2. Sistema conservativo	46
3.2.1. Condição inicial do sistema conservativo	50
3.3. Sistema com atrito	51
3.4. Trajetória do eixo do rotor	58
4. Modelo Matemático com Quatérnios	59
4.1. Corpo no espaço	59
4.1.1. Condição inicial do corpo no espaço	63
4.2. Trajetória do eixo do rotor	65



5. Resultados Numéricos e Discussão das Simulações	66
5.1. Corpo no espaço	66
5.1.1. Bacia de atração para o corpo no espaço	70
5.1.2. Singularidade no bordo de estabilidade	79
5.1.3. Estudo de caos no corpo no espaço	83
5.2. Sistema conservativo de três corpos	89
5.2.1. Caos no sistema conservativo	96
5.3. Sistema com atrito	98
6. Vídeo e simulações	104
7. Conclusões	111
8. Referências Bibliográficas	116
Anexo: Triângulo de Magnus e Instabilidade	119

## Lista de Figuras

Figura 1.1: Rotação em torno de um eixo	25
Figura 2.1: Giroscópio de Magnus	31
Figura 2.2: Corpos que compõem o Giroscópio	32
Figura 2.3: Giroscópio no laboratório	33
Figura 2.4: Corpo no espaço	34
Figura 2.5: Giroscópio desenhado no programa OpenGL	35
Figura 3.1: Quantidade de movimento angular durante o impacto	37
Figura 5.1: Gráfico da órbita $\alpha$ vs $\beta$ , e trajetória espacial. Caso 1	67
Figura 5.2: Ângulos cardânicos e as suas velocidades. Caso 1	67
Figura 5.3: Componentes do Quatérnio e suas derivadas. Caso 1	68
Figura 5.4: Velocidade angular do corpo, escrito no SR(F). Caso 1	68
Figura 5.5: Gráfico da órbita $\alpha$ vs $\beta$ , e trajetória espacial. Caso 2	69
Figura 5.6: Ângulos cardânicos e as suas velocidades. Caso 2	69
Figura 5.7: Componentes do quatérnio e suas derivadas. Caso 2	69
Figura 5.8: Velocidade Angular do corpo, escrito no SR(F). Caso 2	70
Figura 5.9: Bacia de atração segundo os ângulos cardânicos	71
Figura 5.10: Movimento cruzando o borde de estabilidade	72
Figura 5.11: Bacia de atração em quatérnios	73
Figura 5.12: Bacia de atração em quatérnios no plano $\varphi - \theta$	74
Figura 5.13: Energia normalizada em função de $\alpha$ e $\gamma$ , achatado	75
Figura 5.14: Energia cinética e normalizada, corpo achatado	76
Figura 5.15: Energia cinética e normalizada, corpo alongado	77
Figura 5.16: Triângulo de Magnus para um corpo no espaço	78
Figura 5.17: Órbita $\alpha$ vs $\beta$ , bacia de atração em quatérnios. Caso 3	79
Figura 5.18: Ângulos cardânicos e quatérnios. Caso 3	80
Figura 5.19: Trajetória espacial, comparação. Caso 3	80
Figura 5.20: Órbita $\alpha$ vs $\beta$ , bacia de atração em quatérnios. Caso 4	81
Figura 5.21: Ângulos cardânicos e quatérnios. Caso 4	81
Figura 5.22: Trajetória espacial, comparação. Caso 4	81
Figura 5.23: Velocidade Angular do corpo, escrito no SR(F). Caso 4	82

Figura 5.24: Função de $\gamma'_{(\alpha, \beta)}$ para $\gamma = 0$	83
Figura 5.25: Função de $EE_{(\alpha, \beta)}$ para $\gamma = \pi/2$	83
Figura 5.26: Plano-fase dos ângulos cardânicos	84
Figura 5.27: Mapa de Poincaré dos ângulos reduzidos: $-\pi/2$ até $\pi/2$	85
Figura 5.28: Diagramas de bifurcação dos ângulos	85
Figura 5.29: Expoente de Lyapunov da coordenada $z$ e ângulo $\alpha$	86
Figura 5.30: Plano-fase das componentes dos quaternio: $v_x$ e $l$	86
Figura 5.31: Mapa de Poincaré do quatérnio, para $z=0$	87
Figura 5.32: Mapa de Poincaré do quaternio, para $v_z, l=0$	87
Figura 5.33: Diagramas de bifurcação dos quatérnios	88
Figura 5.34: Expoente de Lyapunov da coordenada $z$ e $v_x$	88
Figura 5.35: Órbita $\alpha$ - $\beta$ , e trajetória espacial. Caso 5	89
Figura 5.36: Ângulos cardânicos e as suas velocidades. Caso 5	90
Figura 5.37: Energia e Quantidade de movimento angular. Caso 5	90
Figura 5.38: Bacia de atração para o sistema conservativo	91
Figura 5.39: Energia cinética e normalizada, para tipos de corpos	91
Figura 5.40: Triângulo de Magnus do Sistema conservativo ( $y$ )	92
Figura 5.41: Triângulo de Magnus do Sistema conservativo ( $x$ )	93
Figura 5.42: Diagrama de Bifurcação para o quadro externo	93
Figura 5.43: Diagrama de Bifurcação para o quadro interno	93
Figura 5.44: Áreas de instabilidade em inércia dos quadros	95
Figura 5.45: Energia do sistema para inércia dos quadros ( $y$ e $x$ )	95
Figura 5.46: Diagrama plano-fase dos ângulos cardânicos	96
Figura 5.47: Diagrama de Poincaré no $\alpha$ - $\beta$ , para velocidades nulas	97
Figura 5.48: Expoente de Lyapunov do Sistema conservativo	97
Figura 5.49: Diagramas de Bifurcação para $k$	98
Figura 5.50: Diagramas de Bifurcação para $k$	98
Figura 5.51: Órbita $\alpha$ - $\beta$ eliminando o atrito nas juntas	99
Figura 5.52: Órbita $\alpha$ - $\beta$ , e trajetória espacial. Caso 6	100
Figura 5.53: Ângulos cardânicos e as suas velocidades. Caso 6	101
Figura 5.54: Energia e Quantidade de movimento angular. Caso 6	101
Figura 5.55: Diagrama Plano-fase do ângulo $\alpha$ . Caso 6	102
Figura 5.56: Bacias de atração do sistema com atrito	102
Figura 6.1: Órbita do rotor achatado ( $\Delta H_x/H_G = 0.15$ )	105

Figura 6.2: Órbita do rotor achatado ( $\Delta H_x/H_G = 0.7$ )	106
Figura 6.3: Órbita do rotor alongado ( $\Delta H_x/H_G = 0.3$ )	106
Figura 6.4: Precessão retrograda no giroscópio com rotor achatado	107
Figura 6.5: Precessão direta no giroscópio com rotor alongado	108
Figura 6.6: Órbitas do rotor não axissimétrico achatado	109
Figura 6.7: Mudanças de hemisfério, sistema com atrito	110
Figura A: Principais características do triângulo de Magnus	119
Figura B: Região instável ou estável segundo a configuração inercial	120

## Lista de Tabelas

Tabela 2.1. Propriedades físicas dos corpos, Giroscópio	33
Tabela 6.1. Momentos de inércia do giroscópio do laboratório	104

## Lista de Símbolos

### Símbolos Romanos

<b>RS</b>	Sistema referencial
<b><math>\tilde{\mathbf{r}}</math></b>	Matriz til associada ao vetor <b>r</b>
<b><i>F</i></b>	Sistema referencial fixo no espaço
<b><i>Q R S</i></b>	Sistemas referenciais móveis
<b><sup>F</sup><i>T</i><sup>S</sup></b>	Matriz transformação de coordenadas entre os SR: (S) e (F)
<b><i>e<sub>s</sub></i></b>	Eixo de simetria do rotor, ou eixo de simetria
<b><i>e<sub>r</sub></i></b>	Eixo de rotação, paralelo ao vetor velocidade angular
<b><i>p</i></b>	Vetor de rotação
<b><i>v l</i></b>	Vetor e escalar, componentes do quatérnio
<b><i>v<sub>x</sub> v<sub>y</sub> v<sub>z</sub></i></b>	Componentes do vetor <b>v</b>
<b><i>q</i></b>	Quatérnio, vetor 4x1
<b><i>q</i><sup>*</sup></b>	Conjugado do quatérnio <b>q</b>
<b><i>q̂</i></b>	Matriz 4x4 associada ao quatérnio <b>q</b>
<b><i>H<sub>G</sub></i></b>	Quantidade de movimento angular antes do impacto
<b><i>h<sub>G<sub>0</sub></sub></i></b>	Quantidade de movimento angular depois do impacto
<b><i>ΔH<sub>y</sub></i></b>	Variação da quantidade de movimento angular em <i>y<sub>0</sub></i>
<b><i>ΔH<sub>x</sub></i></b>	Variação da quantidade de movimento angular em <i>x<sub>0</sub></i>
<b><i>x y z</i></b>	Coordenadas do sistema referencial fixo
<b><i>M</i></b>	Momento ou torque
<b><i>t</i></b>	Tempo
<b><i>I</i></b>	Matriz inércia
<b><i>Ec</i></b>	Energia cinética
<b><i>EE</i></b>	Energia cinética normalizada
<b><i>μ<sub>1</sub> μ<sub>2</sub></i></b>	Momentos de inércia do rotor, normalizados
<b><i>μ<sub>x</sub> μ<sub>p</sub></i></b>	Momentos de inércia dos quadros cardânicos, normalizados
<b><i>A B C D</i></b>	Parâmetros adimensionais

### Símbolos Gregos

$\theta$	Ângulo de giro em torno do vetor de rotação
$\varphi$	Ângulo do cone, entre o vetor de rotação e eixo de simetria
$\phi$	Ângulo usado na definição do Quatérnio
$\alpha \quad \beta \quad \gamma$	Ângulos de Cardan
$\dot{\alpha} \quad \dot{\beta} \quad \dot{\gamma}$	Derivadas temporais dos ângulos de Cardan
$\alpha' \quad \beta' \quad \gamma'$	Derivadas adimensionais dos ângulos de Cardan
$\alpha'' \quad \beta'' \quad \gamma''$	Segunda derivada adimensional dos ângulos de Cardan
$\Omega$	Velocidade angular do corpo antes do impacto
$\nu$	Velocidade angular equivalente do corpo depois do impacto
$\tau$	Parâmetro adimensional
${}^F\boldsymbol{\omega}_S$	Velocidade angular do corpo, escrito no sistema referencial (F)
$\kappa_{FQ} \quad \kappa_{QR} \quad \kappa_{RS}$	Coefficientes normalizados de atrito viscoso