3
Análise Estática

3.1.
Modelo de Augusti

A análise estática, apresentada a seguir, mostra a influência das diferentes variáveis que governam o comportamento do modelo, com ênfase na influência da rigidez relativa das molas e nos efeitos das imperfeições geométricas iniciais.

3.1.1.
Modelo Perfeito

Partindo da expressão (2.12) e assumindo que $\phi_1 = \phi_2 = 0$, tem-se a energia potencial total para o modelo perfeito:

$$V = \frac{1}{2}k_1\theta_1^{\,2} + \frac{1}{2}k_2\theta_2^{\,2} - Pl(1 - \sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\theta_1 - \mathrm{sen}^2\theta_2}) \tag{3.1}$$

Derivando-se em função das coordenadas generalizadas, θ_1 e θ_2, tem-se o sistema de equações não-lineares de equilíbrio:

$$k_1\theta_1 - Pl\frac{\cos\theta_1 \mathrm{sen}\,\theta_1}{\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\theta_1 - \mathrm{sen}^2\theta_2}} = 0 \tag{3.2a}$$

$$k_2\theta_2 - Pl\frac{\cos\theta_2 \mathrm{sen}\,\theta_2}{\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\theta_1 - \mathrm{sen}^2\theta_2}} = 0 \tag{3.2b}$$

O sistema homogêneo (3.2) admite sempre a solução trivial:

$$\theta_1 = \theta_2 = 0 \text{, para todo } P \tag{3.3}$$

que corresponde ao estado indeformado (solução fundamental de equilíbrio).

Existem também duas soluções desacopladas (caminhos secundários), dadas por:

$$\theta_2 = 0, \quad \theta_1 \neq 0 \Rightarrow k_1\theta_1 - Pl\,\mathrm{sen}\,\theta_1 = 0 \tag{3.4a}$$

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 \neq 0 \Rightarrow k_2\theta_2 - Pl\,\mathrm{sen}\,\theta_2 = 0 \tag{3.4b}$$

que descrevem os caminhos pós-críticos do sistema desacoplado.

Têm-se, ainda, as soluções não-lineares acopladas que são obtidas através das expressões (3.2) quando $\theta_1 \neq 0$ e $\theta_2 \neq 0$. A solução deste sistema de equações fornece dois caminhos pós-críticos adicionais, sendo estes simétricos e instáveis.

A partir das equações de equilíbrio linearizadas ($\mathrm{sen}\,\theta_i = \theta_i$ e $\cos\theta_i = 1$) e resolvendo o problema de autovalor resultante, têm-se as duas cargas críticas, que são:

$$Pcr_1 = \frac{k_1}{l} \tag{3.5a}$$

$$Pcr_2 = \frac{k_2}{l} \tag{3.5b}$$

Admitindo que $k_1 = k_2 = k$ tem-se que $Pcr_1 = Pcr_2 = Pcr = k/l$. Neste caso, as duas cargas críticas coincidem e todos os quatro caminhos pós-críticos emergem do mesmo ponto de bifurcação.

Por fim, dividindo as expressões (3.2) por k obtêm-se as equações de equilíbrio adimensionalizadas que serão utilizadas a seguir, a saber:

$$\theta_1 - \lambda \frac{\cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_1}{\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\theta_1 - \mathrm{sen}^2\theta_2}} = 0 \tag{3.6a}$$

$$\theta_2 - \lambda \frac{\cos\theta_2\,\mathrm{sen}\,\theta_2}{\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\theta_1 - \mathrm{sen}^2\theta_2}} = 0 \tag{3.6b}$$

onde $\lambda = P/Pcr$.

3.1.1.1. Caminhos Pós-Críticos

A Figura 3.1 mostra o caminho fundamental de equilíbrio ($\theta_1 = \theta_2 = 0$), que é estável até a carga crítica estática ($\lambda_{cr} = 1.0$) e os quatro caminhos pós-críticos possíveis: dois caminhos instáveis ascendentes, correspondentes às soluções desacopladas (expressões (3.4)), e dois caminhos instáveis descendentes, localizados a $\pm 45°$ do eixo θ_1, referentes às soluções acopladas (expressões (3.2)). Uma melhor compreensão das diversas soluções é dada pela Figura 3.2, que mostra os caminhos pós-críticos projetados em três planos ortogonais.

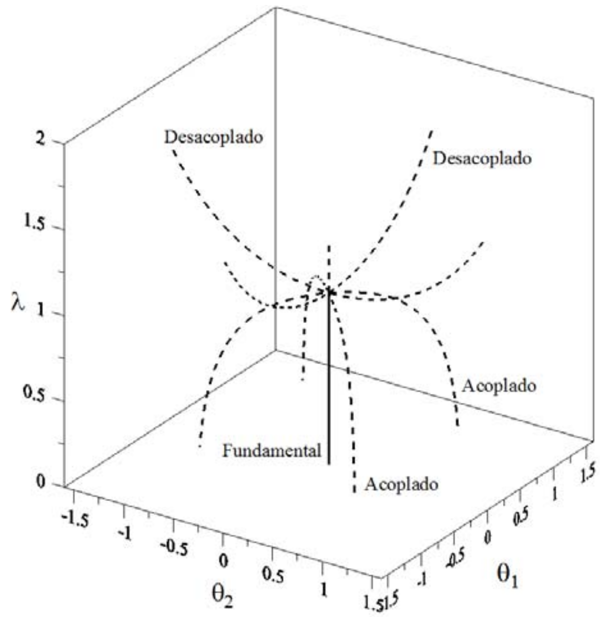
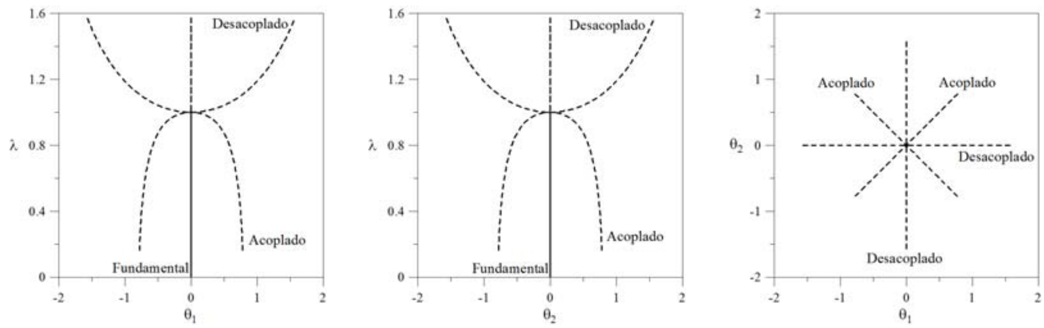


Figura 3.1: Caminhos pós-críticos. Modelo de Augusti perfeito.



(a) Plano $\theta_1 x \lambda$ (b) Plano $\theta_2 x \lambda$ (c) Plano $\theta_1 x \theta_2$

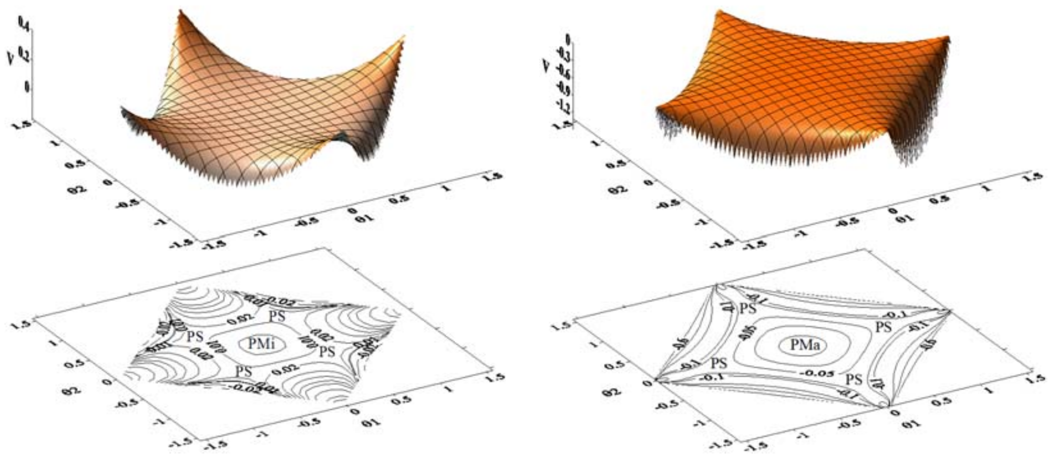
Figura 3.2: Projeções dos caminhos pós-críticos. Modelo de Augusti perfeito.

3.1.1.2.
Superfícies de Energia

Apresentam-se na Figura 3.3 as superfícies de energia potencial total, expressão (3.1), para $\lambda = 0.9$ e $\lambda = 1.25$. Verifica-se, na Figura 3.3(a), que, para níveis de carregamento inferiores a carga crítica estática ($\lambda_{cr} = 1.0$), a superfície de energia exibe um ponto de mínimo (PMi), correspondente à solução fundamental de equilíbrio, e quatro pontos de sela (PS), correspondentes às soluções acopladas instáveis. Em função do acoplamento modal, para cargas inferiores à carga crítica existe a possibilidade de perda de estabilidade desde que as perturbações excedam os limites da região em torno da configuração fundamental limitada pelos pontos de sela. Esta região, que constitui a bacia de atração da solução fundamental de equilíbrio, decresce à medida que o carregamento cresce e torna-se zero no ponto de bifurcação ($\lambda_{cr} = 1.0$). Se não houvesse o acoplamento modal, a solução fundamental seria estável para qualquer carregamento abaixo do crítico, independente do nível de perturbação, isto é, a bacia de atração seria todo espaço de condições iniciais. O acoplamento reduz substancialmente o conjunto de possíveis condições iniciais que levam a estrutura a retornar, após uma perturbação, à configuração fundamental de equilíbrio cuja estabilidade se deseja preservar. Para níveis de perturbações que ultrapassem a fronteira de estabilidade, tem-se que a estrutura diverge para o infinito, sendo este fenômeno denominado escape, o que caracteriza uma instabilidade dinâmica. Tem-se, portanto, que o acoplamento modal tem um efeito negativo sobre o grau de estabilidade da estrutura. Este exemplo ilustra de maneira clara a importância de se estudar a possibilidade do acoplamento modal e seus efeitos no comportamento estático e dinâmico de elementos estruturais suscetíveis a flambagem.

Observa-se para níveis de carga superiores à carga crítica estática, Figura 3.3(b), a existência de um ponto de máximo (PMa), que corresponde à solução fundamental de equilíbrio - que se tornou instável - e quatro pontos de sela (PS) relativos às soluções desacopladas. Constata-se, ainda, que, para estes níveis de carregamentos, não existe nenhuma configuração estável. É interessante observar que, ao considerar o presente modelo com apenas um grau de liberdade, perdendo a estabilidade em um plano que contém a coluna e uma das molas (Thompson &

Hunt, 1984; Del Prado, 1999), tem-se, como em na coluna de Euler, uma bifurcação simétrica estável, ou seja, o caminho desacoplado aqui obtido é estável. Entretanto, a existência do acoplamento torna-o instável. Isto mostra que o desconhecimento do acoplamento modal e sua não consideração na modelagem podem levar a resultados errôneos e perigosos.



(a) $\lambda = 0.9$ (b) $\lambda = 1.25$

Figura 3.3: Superfícies de energia potencial total. Modelo de Augusti perfeito.

3.1.2.
Influência da Rigidez Relativa das Molas

Para demonstrar a influência da rigidez relativa das molas no modelo, admite-se uma pequena diferença entre as constantes de rigidez das duas molas, ou seja, $k_1 \neq k_2$. Na análise estática o que muda em relação ao modelo perfeito é que o sistema passa a apresentar dois pontos de bifurcação distintos cujas cargas críticas são dadas em (3.5). Neste caso é necessária a introdução de um novo parâmetro, a saber: $\alpha = k_1/k_2$. Dividindo as expressões (3.2) do modelo perfeito por k_2, obtêm-se as equações de equilíbrio adimensionalizadas, a saber:

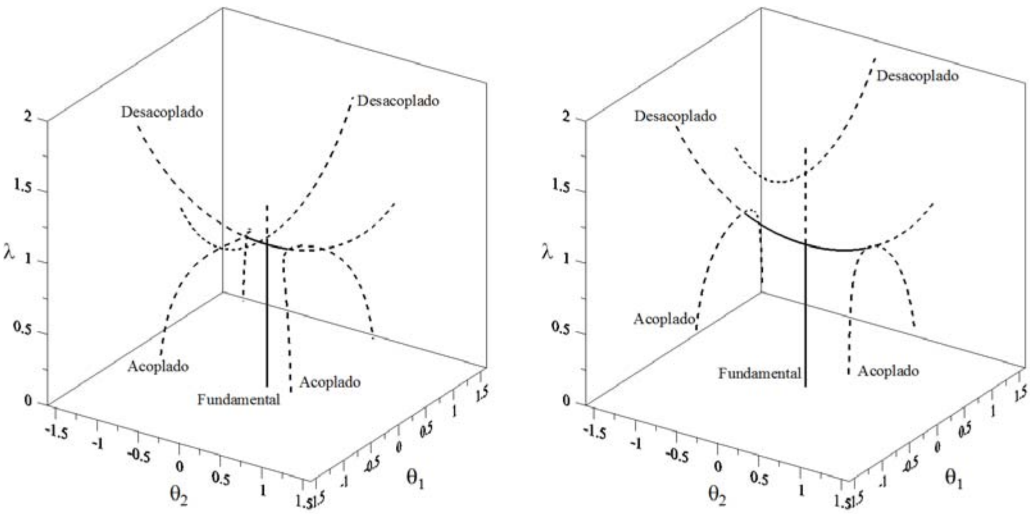
$$\alpha\theta_1 - \lambda \frac{\cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta_1 - \operatorname{sen}^2\theta_2}} = 0 \tag{3.7a}$$

$$\theta_2 - \lambda \frac{\cos\theta_2 \operatorname{sen}\theta_2}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta_1 - \operatorname{sen}^2\theta_2}} = 0 \tag{3.7b}$$

onde $\lambda = P/Pcr_2$.

3.1.2.1.
Caminhos Pós-Críticos

A Figura 3.4 mostra a solução fundamental e os caminhos pós-críticos para $\alpha = 1.05$ e $\alpha = 1.50$. O caminho fundamental de equilíbrio ($\theta_1 = \theta_2 = 0$) para $0 \le P \le Pcr_2$ e o trecho inicial do caminho pós-crítico desacoplado associado a k_2 são estáveis. Os demais caminhos pós-críticos são instáveis.



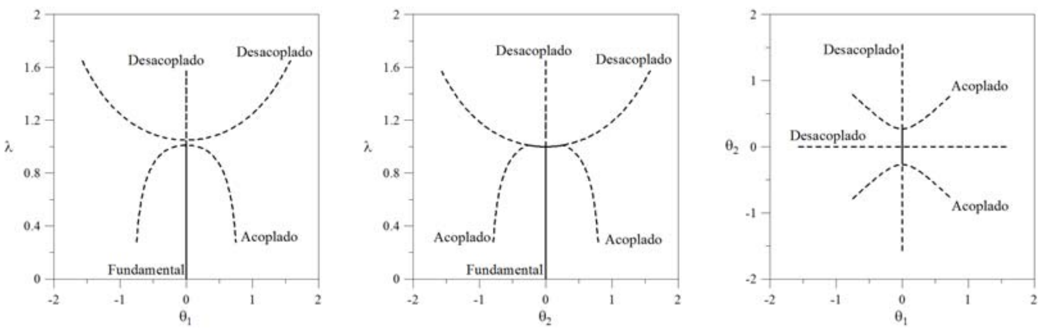
(a) $\alpha = 1.05$ (b) $\alpha = 1.50$

Figura 3.4: Caminhos pós-críticos. Modelo de Augusti considerando a influência da rigidez relativa das molas.

Observa-se, ainda, que os caminhos acoplados emergem de uma bifurcação secundária ao longo do caminho pós-crítico e que os mesmos se afastam da bifurcação primária à medida que α aumenta, tornando o trecho inicial do caminho pós-crítico desacoplado associado a k_2 estável até a interseção com tais caminhos. Essa interseção é uma bifurcação do tipo subcrítica e, por isso, o sistema apresenta ainda os quatro pontos de sela para carregamentos inferiores ao crítico, como no caso perfeito.

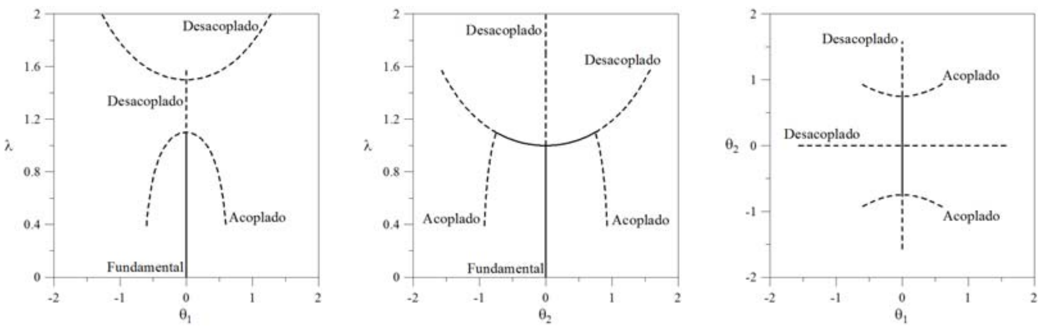
Mantendo k_2 constante e aumentando k_1, α cresce e a carga de bifurcação associada a k_1 aumenta, enquanto a carga crítica associada a k_2 mantém-se constante. Para um valor de α suficientemente grande, k_1 grande, o sistema comporta-se como um sistema de um grau de liberdade com bifurcação simétrica estável.

Mostram-se na Figura 3.5 as projeções em três planos ortogonais da solução fundamental e dos caminhos pós-críticos para os casos em estudo.



(a.1) Plano $\theta_1 x \lambda$ (a.2) Plano $\theta_2 x \lambda$ (a.3) Plano $\theta_1 x \theta_2$

(a) $\alpha = 1.05$



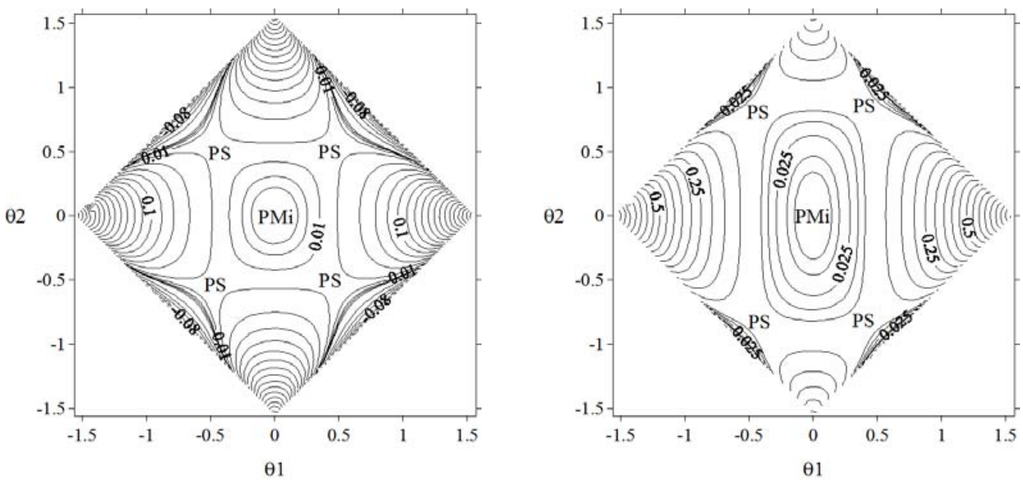
(b.1) Plano $\theta_1 x \lambda$ (b.2) Plano $\theta_2 x \lambda$ (b.3) Plano $\theta_1 x \theta_2$

(b) $\alpha = 1.50$

Figura 3.5: Projeções dos caminhos pós-críticos. Modelo de Augusti considerando a influência da rigidez relativa das molas.

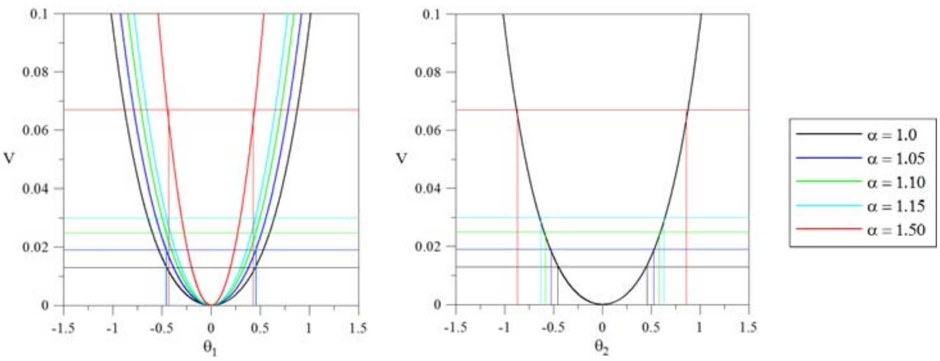
3.1.2.2. Superfícies de Energia

As curvas de nível das superfícies de energia potencial para $\alpha = 1.05$ e $\alpha = 1.50$, considerando $\lambda = 0.9$, são apresentadas na Figura 3.6. Verifica-se que o aumento de α faz a curvatura no plano θ_1 crescer, ou seja, quanto maior for à magnitude de α, menor é a amplitude de oscilação na direção θ_1. Porém, a magnitude de α não interfere no plano θ_2, como mostram as Figuras 3.7(a) e 3.7(b), onde são apresentadas diversas seções das superfícies de energia potencial.



(a) $\alpha = 1.05$ (b) $\alpha = 1.50$

Figura 3.6: Superfícies de energia potencial total para $\lambda = 0.9$. Modelo de Augusti considerando a influência da rigidez relativa das molas.



(a) Corte 1 - $\theta_2 = 0.0$ (b) Corte 2 - $\theta_1 = 0.0$

Figura 3.7: Cortes nas superfícies de energia potencial total para $\lambda = 0.9$. Modelo de Augusti considerando a influência da rigidez relativa das molas.

3.1.3. Modelo com Imperfeição Geométrica

Derivando a energia potencial total do modelo de Augusti com imperfeição geométrica inicial, expressão (2.12), em relação às coordenadas generalizadas θ_1 e θ_2, obtém-se o sistema de equações de equilíbrio:

$$k_1(\theta_1 - \phi_1) - Pl\frac{\cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta_1 - \operatorname{sen}^2\theta_2}} = 0 \tag{3.8a}$$

$$k_2(\theta_2 - \phi_2) - Pl\frac{\cos\theta_2 \operatorname{sen}\theta_2}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta_1 - \operatorname{sen}^2\theta_2}} = 0 \tag{3.8b}$$

Ao contrário do modelo perfeito, as equações (3.8) não admitem solução trivial, $\theta_1 = \theta_2 = 0$, pois a coluna descarregada já apresenta uma inclinação inicial. Com isso, os caminhos não-lineares de equilíbrio obtidos da solução de (3.8) são em geral soluções não-lineares acopladas. Têm-se somente dois casos particulares de soluções desacopladas, que são:

$$\theta_2 = \phi_2 = 0, \quad \theta_1 \neq \phi_1 \neq 0 \Rightarrow k_1(\theta_1 - \phi_1) - Pl\,\mathrm{sen}\,\theta_1 = 0 \tag{3.9a}$$

$$\theta_1 = \phi_1 = 0, \quad \theta_2 \neq \phi_2 \neq 0 \Rightarrow k_2(\theta_2 - \phi_2) - Pl\,\mathrm{sen}\,\theta_2 = 0 \tag{3.9b}$$

Admitindo que $k_1 = k_2 = k$ e dividindo as expressões (3.8) por k, obtêm-se as equações de equilíbrio adimensionalizadas, ou seja:

$$\theta_1 - \phi_1 - \lambda \frac{\cos\theta_1 \mathrm{sen}\,\theta_1}{\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\theta_1 - \mathrm{sen}^2\theta_2}} = 0 \tag{3.10a}$$

$$\theta_2 - \phi_2 - \lambda \frac{\cos\theta_2 \mathrm{sen}\,\theta_2}{\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\theta_1 - \mathrm{sen}^2\theta_2}} = 0 \tag{3.10b}$$

onde $\lambda = P/Pcr$, sendo Pcr a carga crítica do sistema perfeito.

3.1.3.1. Caminhos Não-Lineares de Equilíbrio

Inicialmente são apresentados nas Figuras 3.8 e 3.9 os caminhos não-lineares de equilíbrio para $\phi = 1°$ e $\psi = 0°$. Com esses parâmetros verifica-se que $\phi_1 = 1°$ e $\phi_2 = 0°$, expressões (2.2), ou seja, o sistema possui somente uma inclinação inicial na direção de θ_1. Para esse caso o sistema apresenta uma equação desacoplada no plano θ_1, expressão (3.9a), que fornece um caminho não-linear desacoplado. O trecho inicial desse caminho, que margeia a solução fundamental do sistema perfeito, é estável até a interseção com um dos caminhos não-lineares acoplado. Os demais caminhos surgem devido ao acoplamento modal e são todos instáveis.

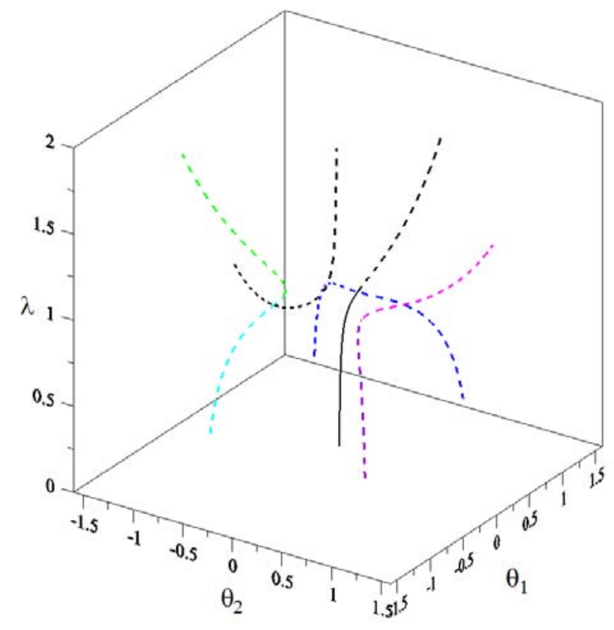
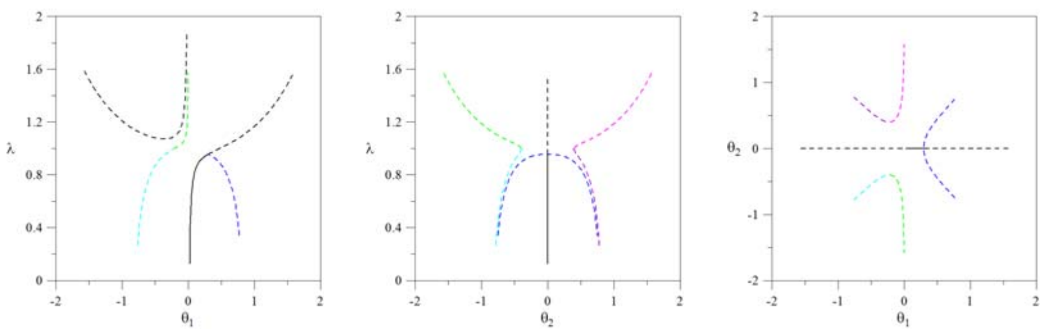


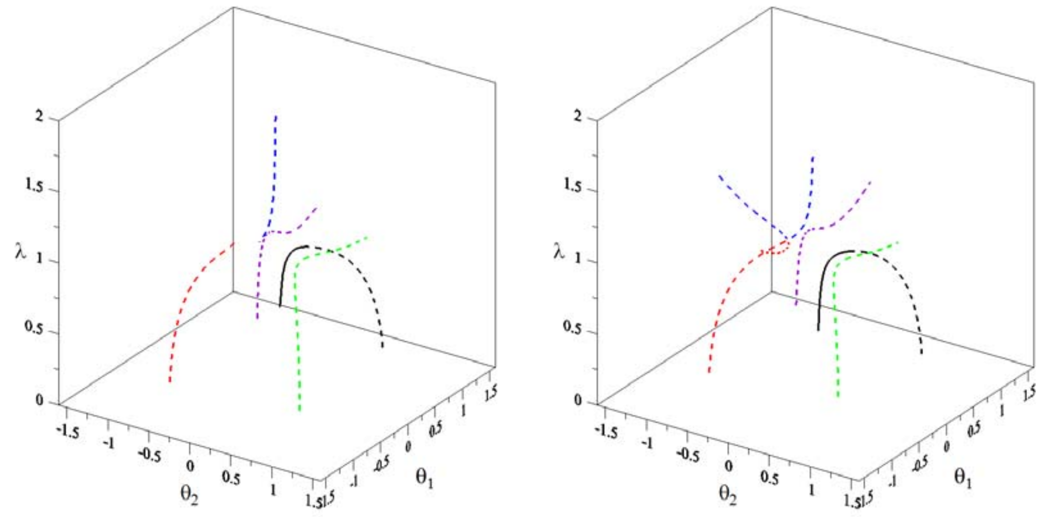
Figura 3.8: Caminhos não-lineares de equilíbrio para $\phi = 1°$ e $\psi = 0°$. Modelo de Augusti com imperfeição geométrica.



(a) Plano $\theta_1 x \lambda$ (b) Plano $\theta_2 x \lambda$ (c) Plano $\theta_1 x \theta_2$

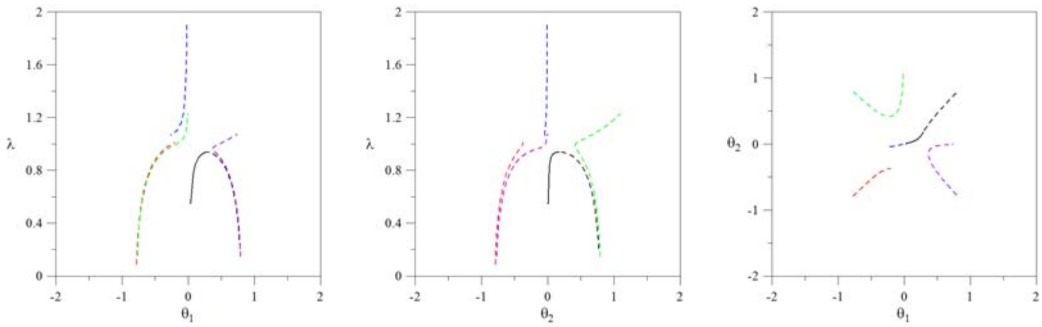
Figura 3.9: Projeções dos caminhos não-lineares de equilíbrio para $\phi = 1°$ e $\psi = 0°$. Modelo de Augusti com imperfeição geométrica.

Os caminhos não-lineares de equilíbrio para $\phi = 1°$ com valores de ψ diferentes de zero (com exceção de $\psi = 90°, 180°, 270°$ pela simetria com $\psi = 0°$), a saber: $\psi = 15°$ e $\psi = 45°$, são apresentados nas Figuras 3.10 e 3.11. Para valores não-nulos de ψ o sistema não apresenta caminhos desacoplados. O caminho que surge próximo ao ponto de equilíbrio estático do modelo perfeito corresponde à configuração inicial descarregada, que se situa próximo à solução fundamental do sistema perfeito, é estável até atingir um ponto de máximo correspondente à carga limite, $\lambda_{\lim}$, quando se torna instável. A carga limite, nesses casos, corresponde a uma bifurcação nó-sela.



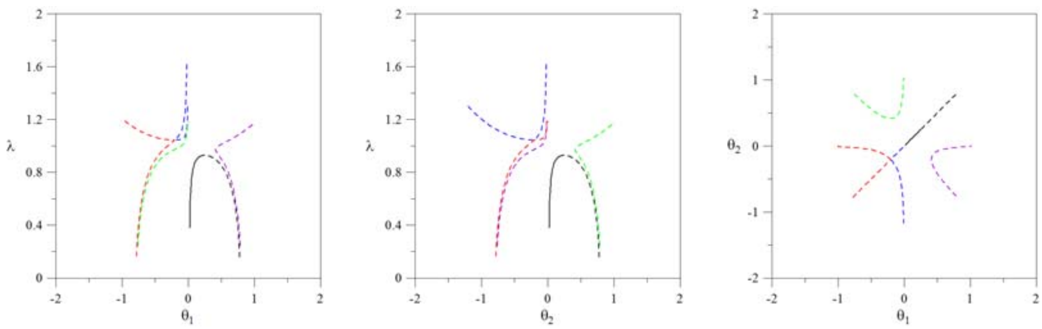
(a) $\psi = 15°$ (b) $\psi = 45°$

Figura 3.10: Caminhos não-lineares de equilíbrio para $\phi = 1°$. Modelo de Augusti com imperfeição geométrica.



(a.1) Plano $\theta_1 x \lambda$ (a.2) Plano $\theta_2 x \lambda$ (a.3) Plano $\theta_1 x \theta_2$

(a) $\psi = 15°$



(b.1) Plano $\theta_1 x \lambda$ (b.2) Plano $\theta_2 x \lambda$ (b.3) Plano $\theta_1 x \theta_2$

(b) $\psi = 45°$

Figura 3.11: Projeções dos caminhos não-lineares de equilíbrio para $\phi = 1°$. Modelo de Augusti com imperfeição geométrica.

Para todos esses casos, verifica-se que, se o sistema for carregado quase estaticamente a partir de zero, os caminhos não-lineares de equilíbrio do sistema imperfeito margeiam o caminho fundamental do sistema perfeito, apresentando inicialmente pequenas deflexões laterais. Porém, quando o valor da carga estática se aproxima do valor da carga crítica do sistema perfeito, passa-se a ter grandes deflexões laterais. Ao se considerar uma imperfeição negativa, tem-se que os resultados nada mais são que um espelhamento das respostas aqui apresentadas.

Na Figura 3.12 apresenta-se a variação da carga limite (ponto de bifurcação) com o aumento da magnitude da imperfeição geométrica, ϕ, para diferentes valores de ψ. Tomando-se como referência a magnitude da carga crítica do sistema perfeito, $\lambda_{cr} = 1.0$, verifica-se que o aumento da imperfeição diminui a capacidade de carga da estrutura e que esse efeito é maior quanto maior for ψ, sendo que a máxima sensibilidade a imperfeições ocorre para $\psi = 45°$, quando o acoplamento modal é máximo.

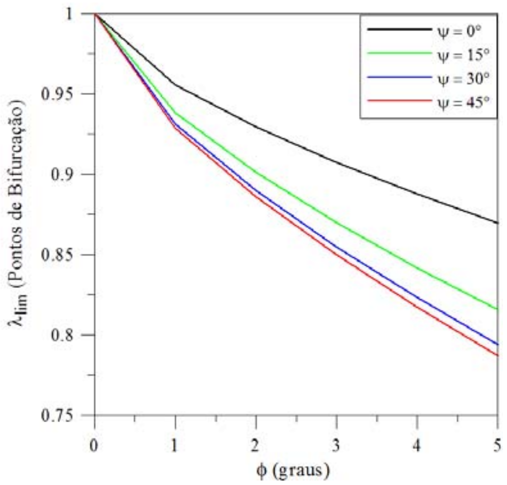
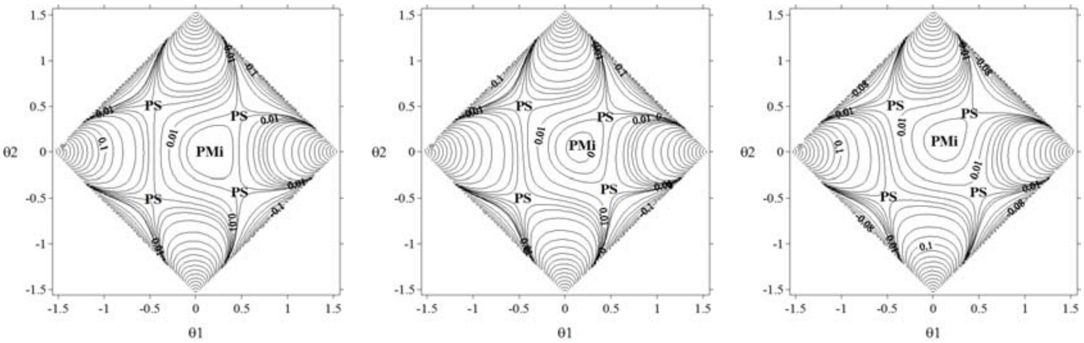


Figura 3.12: Variação da carga limite (ponto de bifurcação) com as grandezas que definem a imperfeição, ϕ e ψ. Modelo de Augusti com imperfeição geométrica.

3.1.3.2. Superfícies de Energia

Mostram-se na Figura 3.13 as curvas de nível das superfícies de energia potencial dos diferentes casos em estudo, para $\lambda = 0.9$. Constata-se que em todos os casos tem-se um ponto de mínimo e quatro pontos de sela.

Vale destacar que, na análise dinâmica, o sistema imperfeito não oscila em torno da posição de equilíbrio fundamental do modelo perfeito ($\theta_1 = \theta_2 = 0$) e sim dos pontos de mínimos, que correspondem às posições estáveis de equilíbrio estático.



(a) $\psi = 0°$ (b) $\psi = 15°$ (c) $\psi = 45°$

Figura 3.13: Superfícies de energia potencial total para $\lambda = 0.9$ e $\phi = 1°$. Modelo de Augusti com imperfeição geométrica.

3.2.
Modelo de Torre Estaiada

Na análise estática apresentada a seguir mostra-se a influência dos parâmetros do sistema e das imperfeições no comportamento da torre estaiada.

3.2.1.
Modelo Perfeito

Partindo da energia potencial total (2.22), considerando $u_{10} = u_{20} = 0$, tem-se a energia potencial total do modelo perfeito, a saber:

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2}k_1\left(l\sqrt{2} - l\sqrt{2-2u_2}\right)^2 \\
&+ \frac{1}{2}k_2\left(l\sqrt{2} - l\sqrt{(\mathrm{sen}\beta - u_1)^2 + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - u_1^{\,2} - u_2^{\,2}}\right)^2 \\
&+ \frac{1}{2}k_3\left(l\sqrt{2} - l\sqrt{(-\mathrm{sen}\beta - u_1)^2 + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - u_1^{\,2} - u_2^{\,2}}\right)^2 \\
&- Pl(1 - \sqrt{1 - u_1^{\,2} - u_2^{\,2}})
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Seguindo Thompson & Gaspar (1977), admite-se que a rigidez da segunda e terceira molas são iguais, ou seja, $k_2 = k_3 = \upsilon K$ onde υ é uma constante positiva, e que a rigidez da primeira mola é dada por $k_1 = (1-2\upsilon)K$. Assim, pode-se reescrever (3.11) como:

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2}k_1\left(l\sqrt{2} - l\sqrt{2-2u_2}\right)^2 \\
&+ \frac{1}{2}k_2\left\{\left(l\sqrt{2} - l\sqrt{(\text{sen}\beta - u_1)^2 + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - u_1{}^2 - u_2{}^2}\right)^2\right. \\
&\left.+\left(l\sqrt{2} - l\sqrt{(-\text{sen}\beta - u_1)^2 + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - u_1{}^2 - u_2{}^2}\right)^2\right\} \\
&- Pl\left(1 - \sqrt{1 - u_1{}^2 - u_2{}^2}\right)
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Derivando (3.12) em relação às coordenadas generalizadas u_1 e u_2, obtêm-se as equações de equilíbrio:

$$
\begin{aligned}
&k_2 l^2 \sin\beta\left\{\frac{\left(\sqrt{2} - \sqrt{(\text{sen}\beta - u_1)^2 + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - u_1{}^2 - u_2{}^2}\right)}{\sqrt{(\text{sen}\beta - u_1)^2 + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - u_1{}^2 - u_2{}^2}}\right. \\
&\left.- \frac{\left(\sqrt{2} - \sqrt{(-\text{sen}\beta - u_1)^2 + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - u_1{}^2 - u_2{}^2}\right)}{\sqrt{(-\text{sen}\beta - u_1)^2 + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - u_1{}^2 - u_2{}^2}}\right\} \\
&- Pl\frac{u_1}{\sqrt{1 - u_1{}^2 - u_2{}^2}} = 0
\end{aligned}
\tag{3.13a}
$$

$$
\begin{aligned}
&k_2 l^2 \cos\beta\left\{\frac{\left(\sqrt{2} - \sqrt{(\text{sen}\beta - u_1)^2 + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - u_1{}^2 - u_2{}^2}\right)}{\sqrt{(\text{sen}\beta - u_1)^2 + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - u_1{}^2 - u_2{}^2}}\right. \\
&\left.+ \frac{\left(\sqrt{2} - \sqrt{(-\text{sen}\beta - u_1)^2 + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - u_1{}^2 - u_2{}^2}\right)}{\sqrt{(-\text{sen}\beta - u_1)^2 + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - u_1{}^2 - u_2{}^2}}\right\} \\
&+ k_1 l^2\frac{\left(\sqrt{2} - \sqrt{2-2u_2}\right)}{\sqrt{2-2u_2}} - Pl\frac{u_2}{\sqrt{1 - u_1{}^2 - u_2{}^2}} = 0
\end{aligned}
\tag{3.13b}
$$

Essas equações de equilíbrio admitem a solução trivial:

$$u_1 = u_2 = 0, \text{ para todo } P \tag{3.14}$$

que corresponde ao estado indeformado (solução fundamental de equilíbrio).

Existe também a solução desacoplada (caminho secundário):

$$u_1 = 0, \quad u_2 \neq 0 \Rightarrow$$

$$2k_2 l^2 \cos\beta \left(\frac{\left(\sqrt{2} - \sqrt{2 - 2u_2 \cos\beta}\right)}{\sqrt{2 - 2u_2 \cos\beta}} \right) + k_1 l^2 \frac{\left(\sqrt{2} - \sqrt{2 - 2u_2}\right)}{\sqrt{2 - 2u_2}} - Pl \frac{u_2}{\sqrt{1 - u_2{}^2}} = 0 \tag{3.15}$$

que descreve o caminho pós-crítico do sistema desacoplado ao longo da coordenada generalizada u_2. O sistema não apresenta um caminho pós-crítico desacoplado ao longo da coordenada generalizada u_1. Há, ainda, as soluções não-lineares acopladas que são obtidas considerando-se $u_1 \neq u_2 \neq 0$ em (3.13).

Derivando a energia potencial total (3.12) pela segunda vez e usando a solução fundamental, $u_1 = u_2 = 0$, chega-se às expressões:

$$k_2 l \operatorname{sen}^2\beta - P = 0 \tag{3.16a}$$

$$\frac{1}{2} k_1 l + k_2 l \cos^2\beta - P = 0 \tag{3.16b}$$

onde (3.16a) é a expressão obtida derivando a energia potencial duas vezes em relação à coordenada generalizada u_1 e (3.16b) é a expressão obtida derivando a energia potencial duas vezes em relação à coordenada generalizada u_2. As outras derivadas segundas são nulas.

A partir das equações (3.16), tem-se que às cargas críticas são dadas por:

$$Pcr_1 = k_2 l \operatorname{sen}^2\beta \tag{3.17a}$$

$$Pcr_2 = \frac{1}{2}k_1 l + k_2 l \cos^2 \beta \tag{3.17b}$$

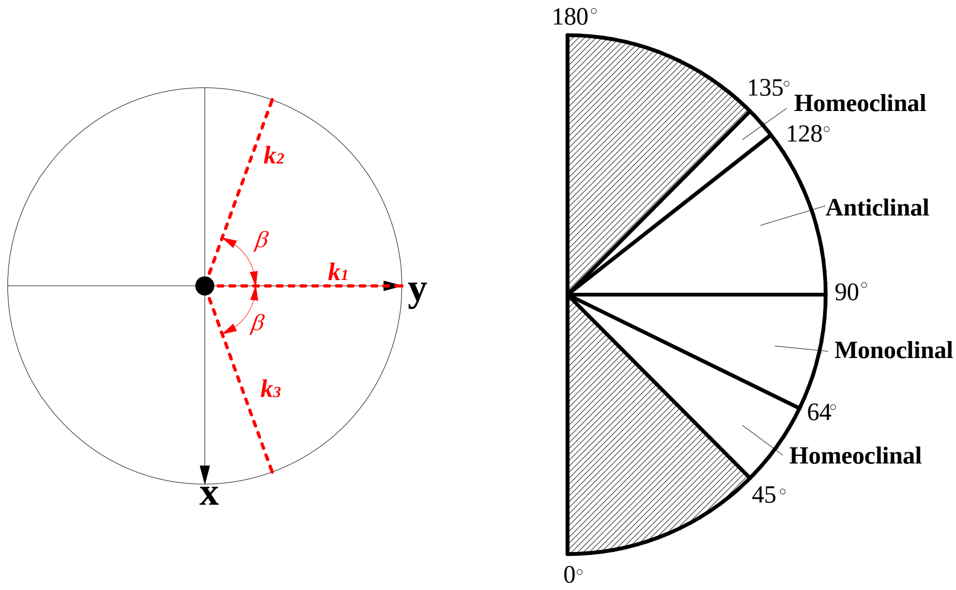
Para que $Pcr_1 = Pcr_2$, considera-se $k_2 = \upsilon K$ e $k_1 = (1-2\upsilon)K$, obtendo-se a partir de (3.17):

$$\upsilon = \frac{1}{4\text{sen}^2\beta} \tag{3.18a}$$

$$Pcr = \frac{Kl}{4} \tag{3.18b}$$

Como $(1-2\upsilon)$ não pode ser uma quantidade negativa, deve-se respeitar a seguinte restrição (Thompson & Gaspar, 1977):

$$45° \leq \beta \leq 135° \tag{3.19}$$



(a) Vista superior do modelo (b) Variação de β

Figura 3.14: Comportamento do modelo de torre estaiada em função do ângulo β (Thompson & Gaspar, 1977).

Segundo Thompson & Gaspar (1977) e Thompson & Hunt (1984), este sistema exibe diferentes tipos de comportamento em função do ângulo β. Nesse contexto, através dos estudos das terceiras e quartas derivadas da energia potencial total, apresentados naqueles trabalhos, pode-se concluir que o modelo possui três comportamentos distintos, como ilustra a Figura 3.14. Para $45° \le \beta < 64°$ e $128° < \beta \le 135°$, tem-se equações diferenciais parciais hiperbólicas (caso homeoclinal), para $64° < \beta < 90°$, tem-se equações diferenciais parciais hiperbólicas (caso monoclinal) e para $90° < \beta < 128°$, tem-se equações diferenciais parciais elípticas (caso anticlinal).

Dividindo as equações (3.13) por Pcr e utilizando as expressões (3.18a), $k_2 = \upsilon K$ e $k_1 = (1-2\upsilon)K$, obtêm-se as equações de equilíbrio adimensionais:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mathrm{sen}\beta}\left\{\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{(\mathrm{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1{}^2-u_2{}^2}\right)}{\sqrt{(\mathrm{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1{}^2-u_2{}^2}}\right.\\
&\left.-\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{(-\mathrm{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1{}^2-u_2{}^2}\right)}{\sqrt{(-\mathrm{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1{}^2-u_2{}^2}}\right\}\\
&-\lambda\frac{u_1}{\sqrt{1-u_1{}^2-u_2{}^2}}=0
\end{aligned}\tag{3.20a}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos\beta}{\mathrm{sen}^2\beta}\left\{\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{(\mathrm{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1{}^2-u_2{}^2}\right)}{\sqrt{(\mathrm{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1{}^2-u_2{}^2}}\right.\\
&\left.+\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{(-\mathrm{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1{}^2-u_2{}^2}\right)}{\sqrt{(-\mathrm{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1{}^2-u_2{}^2}}\right\}\\
&+\frac{4\left(\sqrt{2}-\sqrt{2-2u_2}\right)}{\sqrt{2-2u_2}}-\frac{2}{\mathrm{sen}^2\beta}\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{2-2u_2}\right)}{\sqrt{2-2u_2}}-\lambda\frac{u_2}{\sqrt{1-u_1{}^2-u_2{}^2}}=0
\end{aligned}\tag{3.20b}$$

onde $\lambda = P/Pcr$.

3.2.1.1.
Caminhos Pós-Críticos

Com base na formulação anterior, obtém-se a solução fundamental e os caminhos pós-críticos do segundo modelo para os três casos destacados (monoclinal, homeoclinal e anticlinal).

3.2.1.1.1. Comportamento Monoclinal

O comportamento monoclinal é ilustrado nas Figuras 3.15 e 3.16 considerando $\beta = 75°$. Verifica-se que a solução fundamental de equilíbrio é estável até a carga crítica estática ($\lambda_{cr} = 1.0$), e que o caminho pós-crítico desacoplado ao longo da coordenada generalizada u_2 é instável. Neste caso o sistema não apresenta as soluções pós-críticas acopladas.

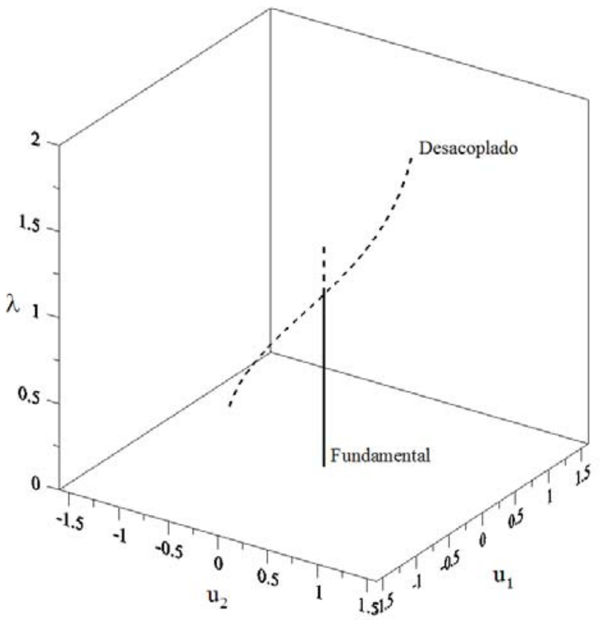
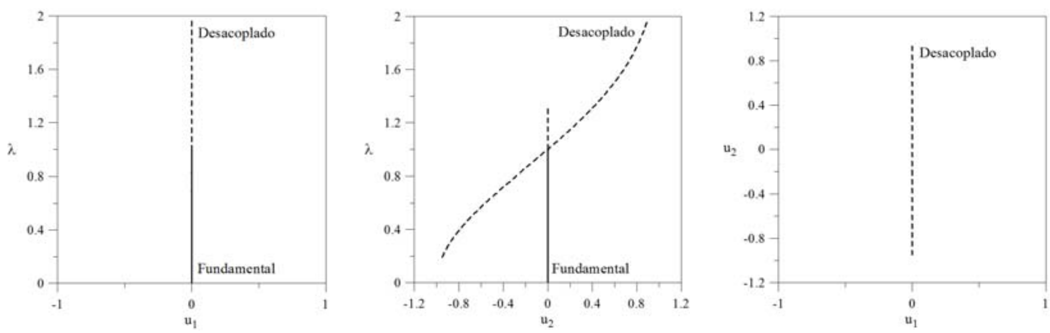


Figura 3.15: Caminhos pós-críticos para $\beta = 75°$ - caso monoclinal. Modelo de torre estaiada perfeito.



(a) Plano $u_1 x \lambda$ (b) Plano $u_2 x \lambda$ (c) Plano $u_1 x u_2$

Figura 3.16: Projeções dos caminhos pós-críticos para $\beta = 75°$ - caso monoclinal. Modelo de torre estaiada perfeito.

3.2.1.1.2. Comportamento Homeoclinal

As Figuras 3.17 e 3.18 mostram o comportamento do sistema considerando o caso homeoclinal ($\beta = 50°$). Para essa configuração, o sistema apresenta a solução fundamental estável no trecho $0 \le P \le Pcr$. A solução pós-crítica desacoplada é estável entre o ponto de bifurcação correspondente à carga crítica e a bifurcação nó-sela que corresponde a um ponto limite de carregamento, sendo os outros trechos instáveis. As duas soluções pós-críticas acopladas são simétricas e instáveis.

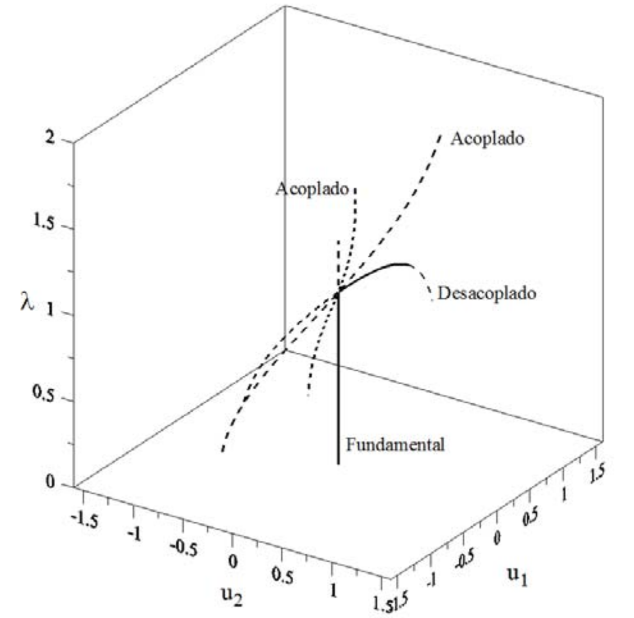
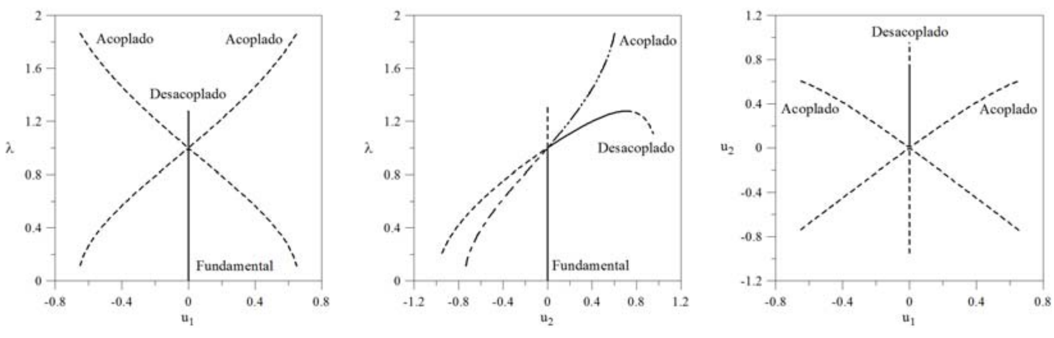


Figura 3.17: Caminhos pós-críticos para $\beta = 50°$ - caso homeoclinal. Modelo de torre estaiada perfeito.



(a) Plano $u_1 x \lambda$ (b) Plano $u_2 x \lambda$ (c) Plano $u_1 x u_2$

Figura 3.18: Projeções dos caminhos pós-críticos para $\beta = 50°$ - caso homeoclinal. Modelo de torre estaiada perfeito.

3.2.1.1.3. Comportamento Anticlinal

Na Figura 3.19 apresentam-se os caminhos pós-críticos para o caso anticlinal, adota-se $\beta = 120°$. O caminho fundamental de equilíbrio é estável no trecho $0 \le P \le Pcr$ e, devido ao acoplamento modal, todos os caminhos pós-críticos são instáveis. A Figura 3.20 mostra os caminhos pós-críticos projetados em três planos ortogonais.

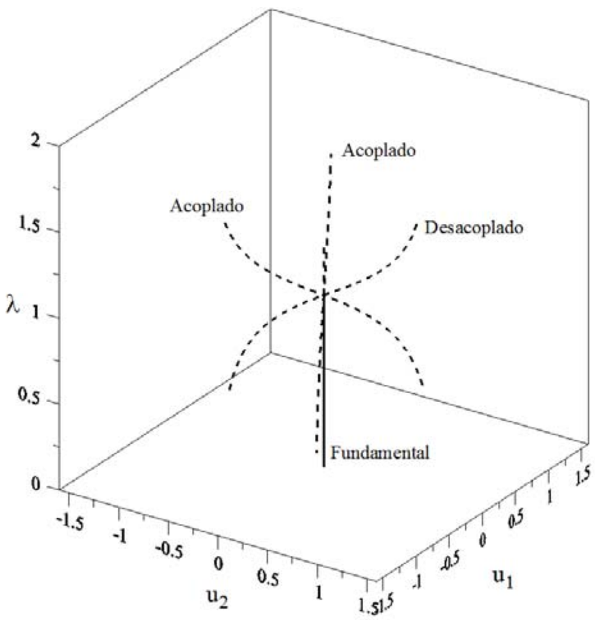
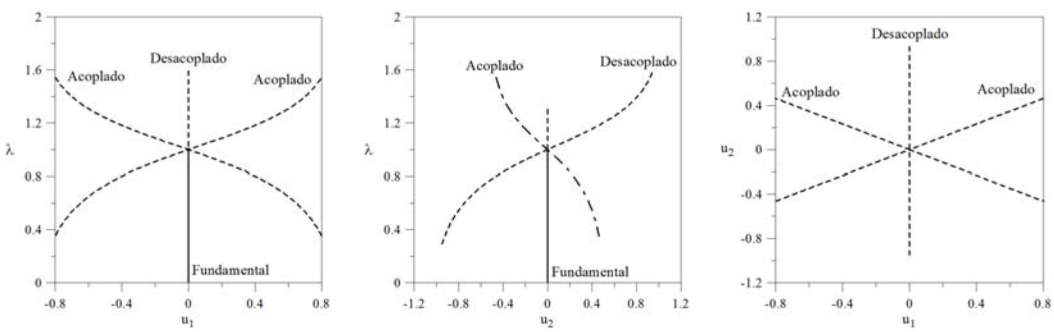


Figura 3.19: Caminhos pós-críticos para $\beta = 120°$ - caso anticlinal. Modelo de torre estaiada perfeito.



(a) Plano $u_1 x \lambda$ (b) Plano $u_2 x \lambda$ (c) Plano $u_1 x u_2$

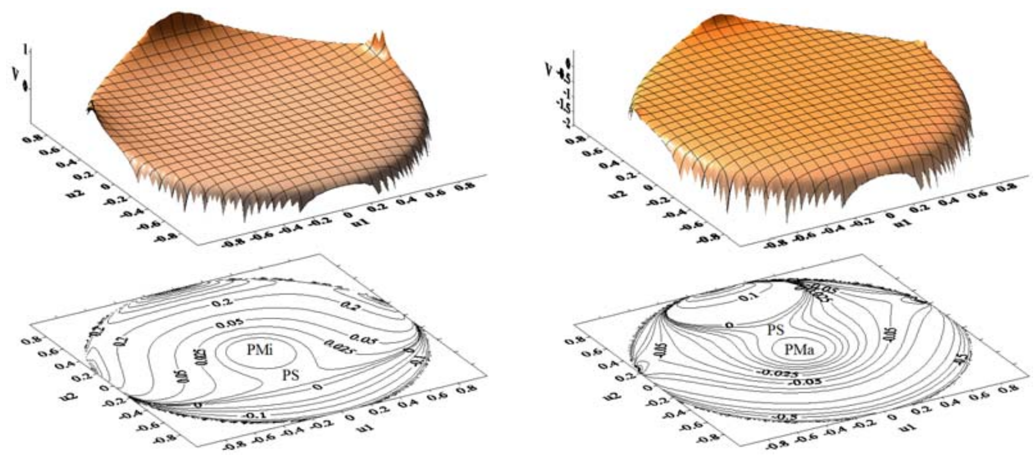
Figura 3.20: Projeções dos caminhos pós-críticos para $\beta = 120°$ - caso anticlinal. Modelo de torre estaiada perfeito.

3.2.1.2.
Superfícies de Energia

As superfícies de energia apresentadas a seguir são obtidas diretamente do funcional de energia potencial total do modelo, equação (3.11) e estão de acordo com aquelas apresentadas por El Naschie (1990) para estas superfícies de catástrofe.

3.2.1.2.1.
Comportamento Monoclinal

Apresentam-se na Figuras 3.21 as superfícies de energia potencial para o caso monoclinal com $\beta = 75°$, considerando $\lambda = 0.7$ e $\lambda = 1.25$.



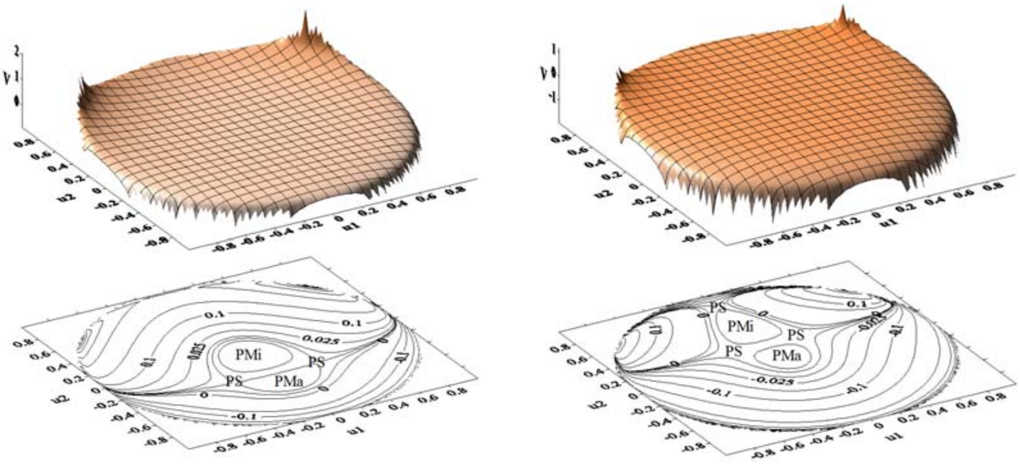
(a) $\lambda = 0.7$ (b) $\lambda = 1.25$

Figura 3.21: Superfícies de energia potencial total para $\beta = 75°$ - caso monoclinal. Modelo de torre estaiada perfeito.

Observa-se na Figura 3.21(a) que, para níveis de carregamento inferiores à carga crítica estática, a superfície de energia apresenta um ponto de mínimo, que é correspondente a solução fundamental (PMi), e um ponto de sela correspondente à solução desacoplada (PS). Verifica-se, como no primeiro modelo, que, em virtude das soluções pós-críticas instáveis para $\lambda < \lambda_{cr}$, existe a possibilidade de perda de estabilidade para cargas inferiores à carga crítica quando as perturbações excedem os limites do vale potencial pré-crítico. Para cargas estáticas superiores à carga crítica, Figura 3.21(b), nota-se a existência de um ponto de máximo, dado pela solução fundamental de equilíbrio (PMa) e um ponto de sela (PS).

3.2.1.2.2.
Comportamento Homeoclinal

As superfícies de energia potencial total para o caso homeoclinal, $\beta = 50°$, considerando $\lambda = 0.7$ e $\lambda = 1.25$, são apresentadas na Figura 3.22.



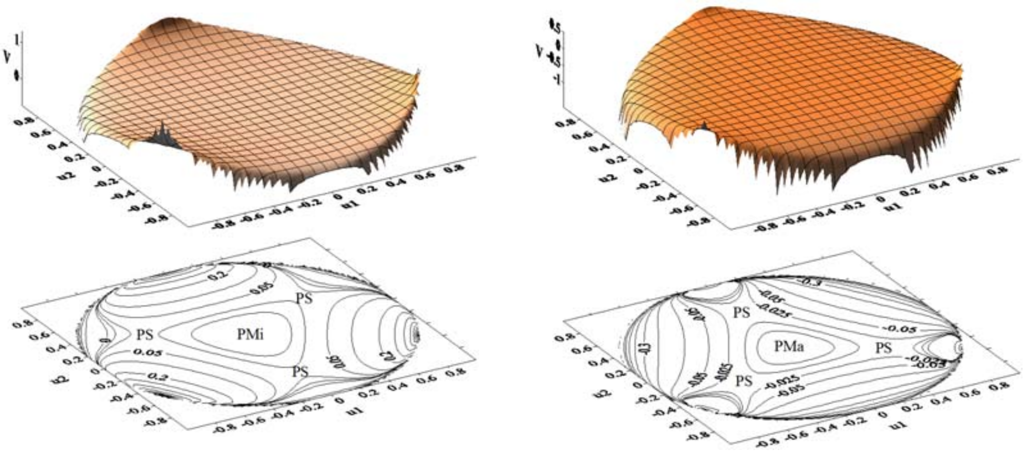
(a) $\lambda = 0.7$ (b) $\lambda = 1.25$

Figura 3.22: Superfícies de energia potencial total para $\beta = 50°$ - caso homeoclinal. Modelo de torre estaiada perfeito.

Verifica-se que, para carga inferiores à carga crítica, a superfície de energia exibe um ponto de mínimo correspondente à solução fundamental de equilíbrio (PMi), um ponto de máximo referente a solução desacoplada (PMa) e dois pontos de sela correspondentes às soluções acopladas (PS). Para cargas inferiores à carga crítica existe a possibilidade de perda de estabilidade desde que as perturbações excedam os limites do vale potencial pré-crítico, cuja fronteira é limitada pelos dois pontos de sela. Para carregamentos superiores à carga crítica o sistema apresenta um ponto de máximo, correspondente à solução fundamental de equilíbrio (PMa), um ponto de mínimo referente à solução desacoplada (PMi) e três pontos de sela, um relativo à solução desacoplada e dois relativos às soluções acopladas (PS).

3.2.1.2.3.
Comportamento Anticlinal

A Figura 3.23 mostra as superfícies de energia potencial para o caso anticlinal com $\beta = 120°$, considerando $\lambda = 0.7$ e $\lambda = 1.25$.



(a) $\lambda = 0.7$ (b) $\lambda = 1.25$

Figura 3.23: Superfícies de energia potencial total para $\beta = 120°$ - caso anticlinal. Modelo de torre estaiada perfeito.

Constata-se na Figura 3.23(a) que, para níveis de carregamentos inferiores ao crítico, a superfície de energia exibe um ponto de mínimo correspondente à solução fundamental de equilíbrio (PMi) e três pontos de sela, um corresponde a solução desacoplada e dois relativos às soluções acopladas (PS). Nota-se que, novamente, para as cargas inferiores à carga crítica existe a possibilidade de perda de estabilidade desde que as perturbações excedam os limites da região em torno da configuração fundamental limitada pelos três pontos de sela. A Figura 3.23(b) mostra a superfície da energia potencial total considerando $\lambda = 1.25$, portanto para uma carga superior à carga crítica. Nota-se neste caso a existência de um ponto de máximo (PMa), correspondente à solução fundamental de equilíbrio - que se tornou instável - e três pontos de sela (PS).

3.2.2.
Influência da Rigidez Relativa das Molas

Admite-se neste caso uma pequena diferença entre as constantes de rigidez k_1 e k_2, ou seja, $k_1 \neq k_2$ ($Pcr_1 \neq Pcr_2$), para demonstrar a influência da rigidez relativa das molas. Na análise estática o que muda em relação ao modelo perfeito é que o sistema passa a apresentar dois pontos de bifurcação. Essa situação somente é valida para $\beta = 120°$. Assim é necessária a introdução de um novo parâmetro, α, para expressar a diferença entre as constantes das molas, k_1 e k_2 (considera-se $k_2 = k_3$). Esse parâmetro é introduzido no sistema através da grandeza:

$$\upsilon = \frac{\alpha}{4\mathrm{sen}^2\beta} \tag{3.21}$$

Assim, pode-se obter as cargas críticas associadas ao sistema com $\beta = 120°$, a saber:

$$Pcr_1 = \alpha \frac{Kl}{4} \tag{3.22a}$$

$$Pcr_2 = (2-\alpha)\frac{Kl}{4} \tag{3.22b}$$

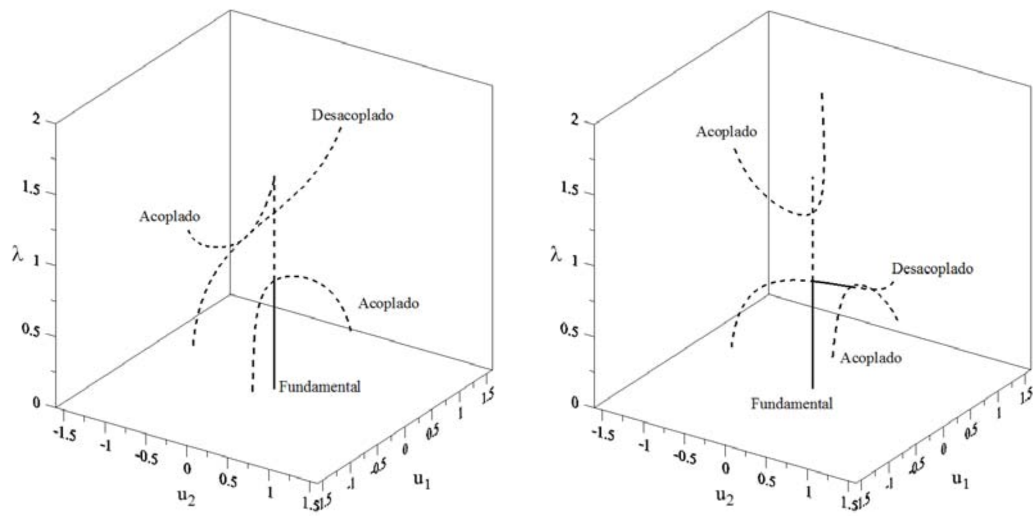
Por fim, tem-se que as equações de equilíbrio adimensionalizadas em função da carga crítica do modelo perfeito tomam a forma:

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{\mathrm{sen}\beta}\left\{\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{(\mathrm{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1^2-u_2^2}\right)}{\sqrt{(\mathrm{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1^2-u_2^2}}\right.\\
&\left.-\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{(-\mathrm{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1^2-u_2^2}\right)}{\sqrt{(-\mathrm{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1^2-u_2^2}}\right\}\\
&-\lambda\frac{u_1}{\sqrt{1-u_1^2-u_2^2}}=0
\end{aligned} \tag{3.23a}$$

$$\frac{\alpha\cos\beta}{\mathrm{sen}^2\beta}\left\{\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{(\mathrm{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1{}^2-u_2{}^2}\right)}{\sqrt{(\mathrm{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1{}^2-u_2{}^2}}\right.$$
$$\left.+\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{(-\mathrm{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1{}^2-u_2{}^2}\right)}{\sqrt{(-\mathrm{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1{}^2-u_2{}^2}}\right\} \tag{3.23b}$$
$$+\frac{4\left(\sqrt{2}-\sqrt{2-2u_2}\right)}{\sqrt{2-2u_2}}-\frac{2\alpha}{\mathrm{sen}^2\beta}\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{2-2u_2}\right)}{\sqrt{2-2u_2}}-\lambda\frac{u_2}{\sqrt{1-u_1{}^2-u_2{}^2}}=0$$

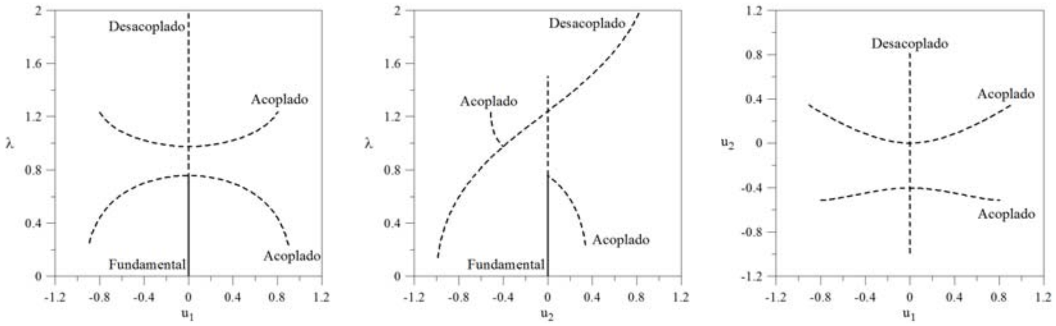
3.2.2.1.
Caminhos Pós-Críticos

As Figuras 3.24 e 3.25 mostram o caminho fundamental e os caminhos pós-críticos para $\alpha = 0.76$ e $\alpha = 1.24$, considerando $\beta = 120°$. Para $\alpha < 1$, tem-se que o caminho fundamental é estável para $0 \le P \le Pcr_1$ e que os caminhos pós-críticos são todos instáveis, Figura 3.24(a). Para $\alpha > 1$, verifica-se que a solução fundamental no trecho $0 \le P \le Pcr_2$ e o caminho pós-crítico associado a k_1 (solução desacoplada), até a interseção com um dos caminhos acoplados, são estáveis, Figura 3.24(b). Sendo que as soluções pós-críticas acopladas são instáveis.



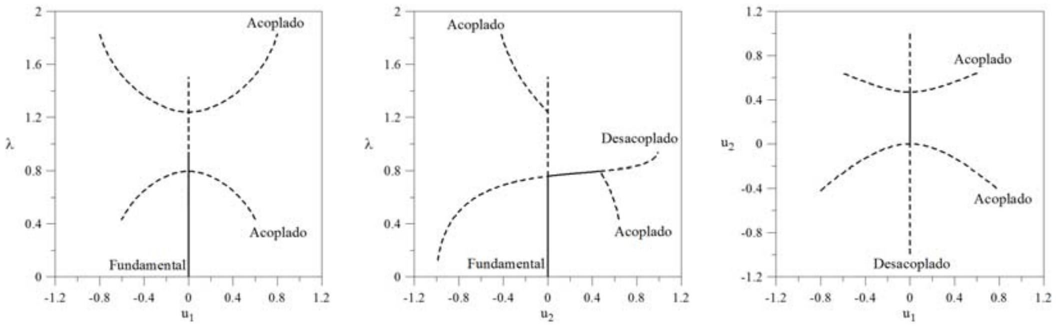
(a) $\alpha = 0.76$ (b) $\alpha = 1.24$

Figura 3.24: Caminhos pós-críticos para $\beta = 120°$ - caso anticlinal. Modelo de torre estaiada considerando a influência da rigidez relativa das molas.



(a.1) Plano $u_1 x \lambda$ (a.2) Plano $u_2 x \lambda$ (a.3) Plano $u_1 x u_2$

(a) $\alpha = 0.76$



(b.1) Plano $u_1 x \lambda$ (b.2) Plano $u_2 x \lambda$ (b.3) Plano $u_1 x u_2$

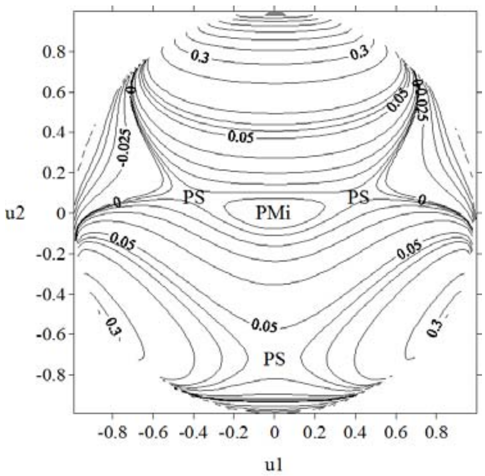
(b) $\alpha = 1.24$

Figura 3.25: Projeções dos caminhos pós-críticos para $\beta = 120°$ - caso anticlinal. Modelo de torre estaiada considerando a influência da rigidez relativa das molas.

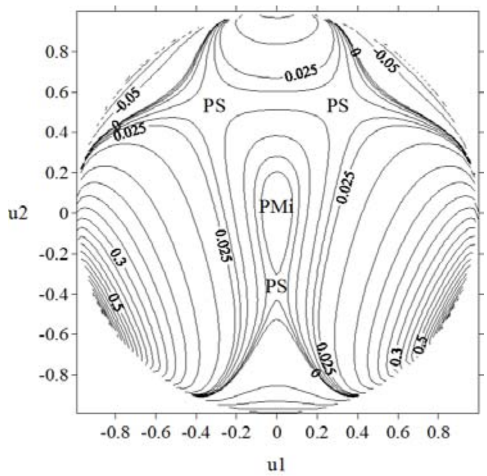
3.2.2.2. Superfícies de Energia

Apresentam-se na Figura 3.26 as curvas de nível das superfícies de energia potencial para $\alpha = 0.76$ e $\alpha = 1.24$, considera-se $\lambda = 0.7$ e $\beta = 120°$. Observa-se que em ambos os casos o sistema apresenta, como no modelo perfeito, um ponto de mínimo, referente à solução fundamental, e três pontos de sela, referentes à solução desacoplada e às soluções acopladas.

Quando a rigidez relativa das molas, α, diminui gradativamente, as oscilações vão se restringindo à direção de eixo u_1 (plano $u_1 \times du_1 / dt$), pois a rigidez da mola k_1 que está localizada no eixo u_2 (plano $u_2 \times du_2 / dt$) aumenta. Verifica-se exatamente o contrário quando a rigidez relativa das molas aumenta, ou seja, as oscilações se restringem ao eixo u_2, pois k_1 diminui, e k_2 e k_3 aumentam.



(a) $\alpha = 0.76$



(b) $\alpha = 1.24$

Figura 3.26: Superfícies de energia potencial total para $\lambda = 0.7$ e $\beta = 120°$ - caso anticlinal. Modelo de torre estaiada considerando a influência da rigidez relativa das molas.

3.2.3. Modelo com Imperfeição Geométrica

Partindo da expressão (2.22), que representa a energia potencial total da torre estaiada com imperfeição geométrica, e derivando em função das coordenadas generalizadas, u_1 e u_2, obtém-se o seguinte sistema de equações de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
&k_2 l^2 \mathrm{sen}\beta \Bigg[\Bigg\{ \Bigg(\sqrt{(\mathrm{sen}\beta - u_{10})^2 + (\cos\beta - u_{20})^2 + 1 - {u_{10}}^2 - {u_{20}}^2} \\
&- \sqrt{(\mathrm{sen}\beta - u_1)^2 + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - {u_1}^2 - {u_2}^2} \Bigg) \Bigg/ \\
&\sqrt{(\mathrm{sen}\beta - u_1)^2 + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - {u_1}^2 - {u_2}^2} \Bigg\} \\
&- \Bigg\{ \Bigg(\sqrt{(-\mathrm{sen}\beta - u_{10})^2 + (\cos\beta - u_{20})^2 + 1 - {u_{10}}^2 - {u_{20}}^2} \\
&- \sqrt{(-\mathrm{sen}\beta - u_1)^2 + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - {u_1}^2 - {u_2}^2} \Bigg) \Bigg/ \\
&\sqrt{(-\mathrm{sen}\beta - u_1)^2 + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - {u_1}^2 - {u_2}^2} \Bigg\} \Bigg] \\
&- Pl \frac{u_1}{\sqrt{1 - {u_1}^2 - {u_2}^2}} = 0
\end{aligned} \tag{3.24a}$$

$$
\begin{aligned}
& k_2 l^2 \cos\beta \left[\left\{ \left(\sqrt{(\mathrm{sen}\beta - u_{10})^2 + (\cos\beta - u_{20})^2 + 1 - u_{10}{}^2 - u_{20}{}^2} \right.\right.\right. \\
& \left. - \sqrt{(\mathrm{sen}\beta - u_1)^2 + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - u_1{}^2 - u_2{}^2} \right) \Big/ \\
& \left. \sqrt{(\mathrm{sen}\beta - u_1)^2 + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - u_1{}^2 - u_2{}^2} \right\} \\
& + \left\{ \left(\sqrt{(-\mathrm{sen}\beta - u_{10})^2 + (\cos\beta - u_{20})^2 + 1 - u_{10}{}^2 - u_{20}{}^2} \right.\right. \\
& \left. - \sqrt{(-\mathrm{sen}\beta - u_1)^2 + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - u_1{}^2 - u_2{}^2} \right) \Big/ \\
& \left.\left. \sqrt{(-\mathrm{sen}\beta - u_1)^2 + (\cos\beta - u_2)^2 + 1 - u_1{}^2 - u_2{}^2} \right\} \right] \\
& + k_1 l^2 \frac{\left(\sqrt{2 - 2u_{20}} - \sqrt{2 - 2u_2} \right)}{\sqrt{2 - 2u_2}} - Pl \frac{u_2}{\sqrt{1 - u_1{}^2 - u_2{}^2}} = 0
\end{aligned}
\tag{3.24b}
$$

As equações (3.24) não mais admitem solução trivial ($u_1 = u_2 = 0$). As soluções não-lineares são usualmente acopladas, com exceção do seguinte caso particular:

$$
\begin{aligned}
& u_1 = u_{10} = 0\,, \quad u_2 \neq u_{20} \neq 0 \Rightarrow \\
& 2k_2 l^2 \cos\beta \left(\frac{\left(\sqrt{2 - 2u_{20}\cos\beta} - \sqrt{2 - 2u_2\cos\beta} \right)}{\sqrt{2 - 2u_2\cos\beta}} \right) \\
& + k_1 l^2 \frac{\left(\sqrt{2 - 2u_{20}} - \sqrt{2 - 2u_2} \right)}{\sqrt{2 - 2u_2}} - Pl \frac{u_2}{\sqrt{1 - u_2{}^2}} = 0
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

Por fim, podem-se obter as equações de equilíbrio adimensionais, que são utilizadas no decorrer da análise estática. Lembrando que $k_2 = \upsilon K$ e $k_1 = (1 - 2\upsilon)K$, tem-se:

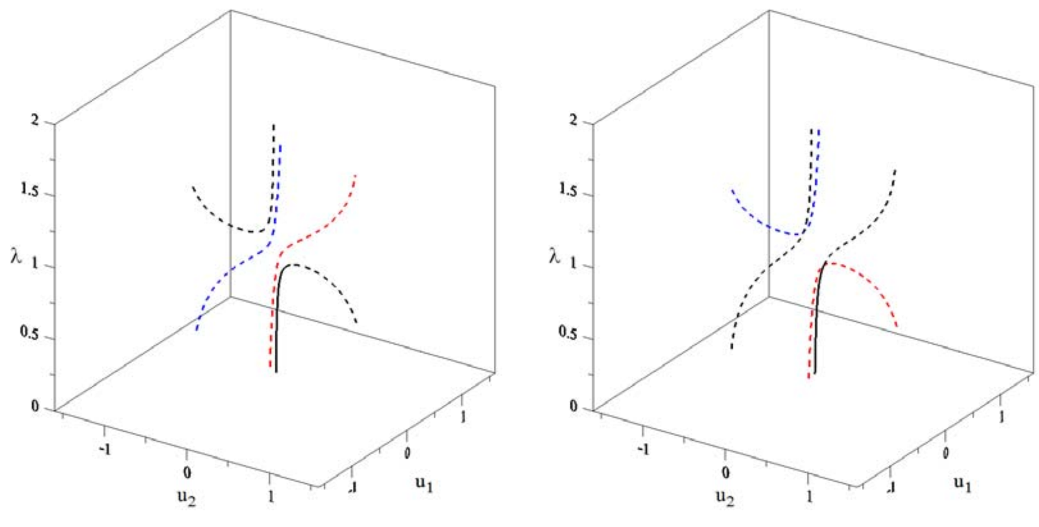
$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\text{sen}\beta}\Bigg[\Bigg\{\Bigg(\sqrt{(\text{sen}\beta-u_{10})^2+(\cos\beta-u_{20})^2+1-u_{10}^{\;2}-u_{20}^{\;2}}\\
&-\sqrt{(\text{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1^{\;2}-u_2^{\;2}}\Bigg)\Bigg/\\
&\sqrt{(\text{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1^{\;2}-u_2^{\;2}}\Bigg\}\\
&-\Bigg\{\Bigg(\sqrt{(-\text{sen}\beta-u_{10})^2+(\cos\beta-u_{20})^2+1-u_{10}^{\;2}-u_{20}^{\;2}}\\
&-\sqrt{(-\text{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1^{\;2}-u_2^{\;2}}\Bigg)\Bigg/\\
&\sqrt{(-\text{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1^{\;2}-u_2^{\;2}}\Bigg\}\Bigg]\\
&-\lambda\frac{u_1}{\sqrt{1-u_1^{\;2}-u_2^{\;2}}}=0
\end{aligned}
\tag{3.26a}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\cos\beta}{\text{sen}^2\beta}\Bigg[\Bigg\{\Bigg(\sqrt{(\text{sen}\beta-u_{10})^2+(\cos\beta-u_{20})^2+1-u_{10}^{\;2}-u_{20}^{\;2}}\\
&-\sqrt{(\text{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1^{\;2}-u_2^{\;2}}\Bigg)\Bigg/\\
&\sqrt{(\text{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1^{\;2}-u_2^{\;2}}\Bigg\}\\
&+\Bigg\{\Bigg(\sqrt{(-\text{sen}\beta-u_{10})^2+(\cos\beta-u_{20})^2+1-u_{10}^{\;2}-u_{20}^{\;2}}\\
&-\sqrt{(-\text{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1^{\;2}-u_2^{\;2}}\Bigg)\Bigg/\\
&\sqrt{(-\text{sen}\beta-u_1)^2+(\cos\beta-u_2)^2+1-u_1^{\;2}-u_2^{\;2}}\Bigg\}\Bigg]\\
&+\frac{4\left(\sqrt{2-2u_{20}}-\sqrt{2-2u_2}\right)}{\sqrt{2-2u_2}}-\frac{2}{\text{sen}^2\beta}\frac{\left(\sqrt{2-2u_{20}}-\sqrt{2-2u_2}\right)}{\sqrt{2-2u_2}}\\
&-\lambda\frac{u_2}{\sqrt{1-u_1^{\;2}-u_2^{\;2}}}=0
\end{aligned}
\tag{3.26b}
$$

onde $\lambda = P/Pcr$ e Pcr representa a carga crítica do sistema perfeito.

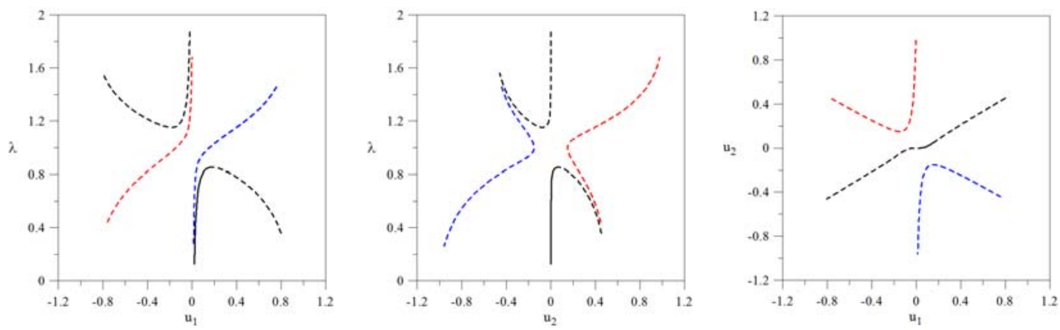
3.2.3.1. Caminhos Não-Lineares de Equilíbrio

São apresentados nas Figuras 3.27 e 3.28 os caminhos não-lineares de equilíbrio considerando $\phi = 1°$ com $\psi = 0°$ e $\psi = 90°$ ($\beta = 120°$).



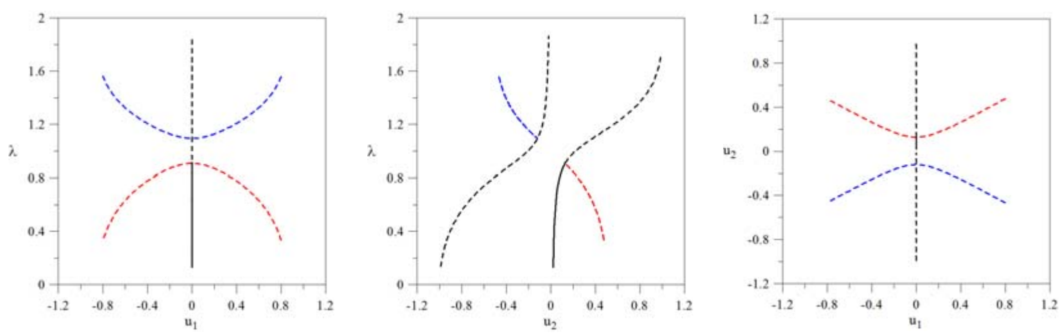
(a) $\psi = 0°$ (b) $\psi = 90°$

Figura 3.27: Caminhos não-lineares de equilíbrio para $\phi = 1°$ e $\beta = 120°$ - caso anticlinal. Modelo de torre estaiada com imperfeição geométrica.



(a.1) Plano $u_1 x\lambda$ (a.2) Plano $u_2 x\lambda$ (a.3) Plano $u_1 x u_2$

(a) $\psi = 0°$



(b.1) Plano $u_1 x\lambda$ (b.2) Plano $u_2 x\lambda$ (b.3) Plano $u_1 x u_2$

(b) $\psi = 90°$

Figura 3.28: Projeções dos caminhos não-lineares de equilíbrio para $\phi = 1°$ e $\beta = 120°$ - caso anticlinal. Modelo de torre estaiada com imperfeição geométrica.

Nos caminhos não-lineares para $\psi = 0°$ observa-se que o trecho inicial do caminho não-linear acoplado mais próximo a solução fundamental do sistema perfeito é estável até atingir uma carga limite, $\lambda_{\lim}$ (ponto de máximo correspondente à carga limite - bifurcação nó-sela). Os demais caminhos não-lineares acoplados são todos instáveis. Situação similar é encontrada para todos os valores ψ, com exceção de dois casos, a saber: $\psi = 90°$ e $\psi = 180°$.

Para $\psi = 90°$, o sistema apresenta uma equação desacoplada ao longo do eixo u_2, expressão (3.25), que fornece um caminho não-linear desacoplado. O trecho inicial desse caminho, que margeia a solução fundamental do sistema perfeito, é estável até a interseção com um dos caminhos acoplados (bifurcação subcrítica). Os caminhos acoplados são todos instáveis.

Na Figura 3.29 apresenta-se a variação da carga limite ($\lambda_{\lim}$) com o aumento da magnitude da imperfeição geométrica, para diferentes valores de ψ. Tomando-se como referência a carga crítica do sistema perfeito, $\lambda_{cr} = 1.0$, verifica-se que o aumento da imperfeição leva a uma perda da capacidade de carga e que a maior sensibilidade a imperfeições ocorre para $\psi = 45°$.

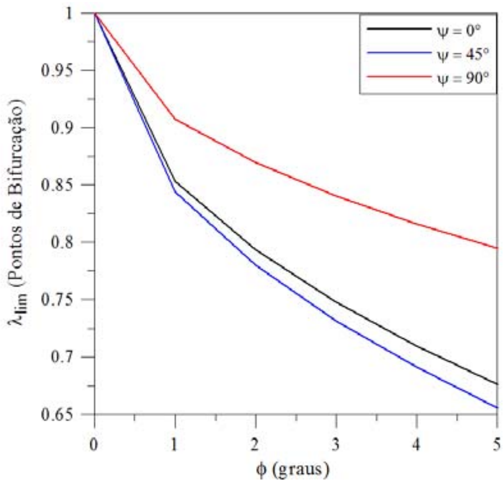
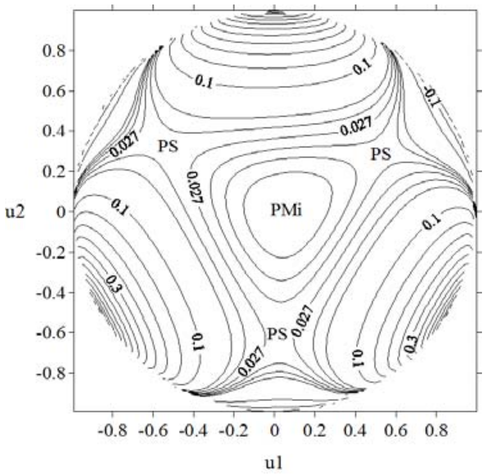


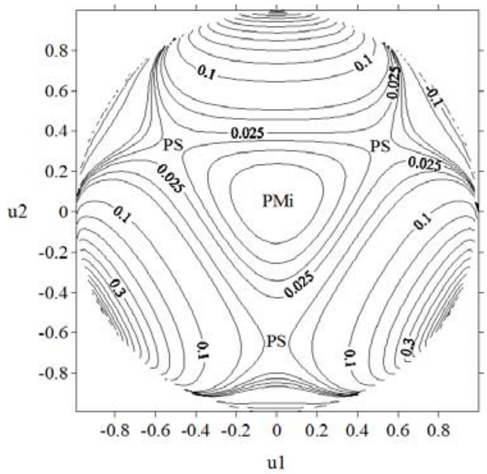
Figura 3.29: Variação da carga limite (ponto de bifurcação) com as grandezas que definem a imperfeição, ϕ e ψ, para $\beta = 120°$ - caso anticlinal. Modelo de torre estaiada com imperfeição geométrica.

3.2.3.2.
Superfícies de Energia

A Figura 3.30 mostra as curvas de nível das superfícies de energia potencial para $\phi = 1°$ com $\psi = 0°$ e $\psi = 90°$, considerando $\lambda = 0.7$ e $\beta = 120°$. Verifica-se que em todos os casos tem-se um ponto de mínimo e três pontos de sela.



(a) $\psi = 0°$



(b) $\psi = 90°$

Figura 3.30: Superfícies de energia potencial total para $\phi = 1°$, $\lambda = 0.7$ e $\beta = 120°$ - caso anticlinal. Modelo de torre estaiada com imperfeição geométrica.