

### 3 Eletroníveis

#### 3.1. Introdução

De acordo com Rocha Filho & Price (2000), há mais de 60 anos os eletroníveis são utilizados como sensores para diversas finalidades, sendo o seu desenvolvimento inicial ligado a atividades da indústria aeronáutica. Os eletroníveis possuem uma larga faixa de aplicação que abrange o campo de instrumentação de obras civis, indústria aeronáutica, naval e automobilística.

Em todas essas diferentes aplicações, as medidas indicadas pelos eletroníveis são relacionadas ao fornecimento direto ou indireto de rotações e de distorções angulares que ocorrem na superfície ou no interior de um meio, devido a uma determinada solicitação.

Para se determinar a rotação de um corpo rígido, os eletroníveis são fixados na superfície isoladamente. No caso de se determinar as distorções angulares na superfície ou interior de um meio, vários eletroníveis são alinhados ao longo da superfície.

Na Figura 3.1 está ilustrada a rotação ( $\phi$ ) de um corpo rígido de comprimento  $L$  e o deslocamento ( $y$ ) na extremidade, que pode ser determinado através da simples relação trigonométrica:

$$y = L \cdot \tan \phi \quad (3.1)$$

Por outro lado, a obtenção de distorções angulares através desta série de eletroníveis alinhados possibilita a determinação da deformada de um meio solicitado através de duas maneiras: Incremental (somatório de deslocamentos de trechos considerados rígidos) e sequencial (integral de uma função matemática que represente a variação das rotações).

A função matemática ajustada aos pontos de rotação obtidos através dos eletroníveis também permite a determinação dos momentos fletores atuantes no meio através do produto entre a sua primeira derivada e a rigidez da estrutura, segundo a teoria de viga de Bernoulli-Euler.

No que se refere às utilizações em geotecnia, Burland & Symes (1982) descreveram o uso de eletroníveis

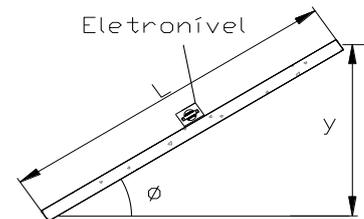


Figura 3.1 – Rotação de um corpo rígido

isoladamente a fim de determinar indiretamente o deslocamento entre dois pontos em amostras de laboratório. Desde então, diversos autores utilizaram esse princípio (Jardine, Symes & Burland, 1984; Marinho, 1986; Oliveira, 2000; Slongo, 2008).

Em obras geotécnicas, com relação à utilização de eletrônives em série, Cooke & Price (1974) pioneiramente instrumentaram estacas experimentais ao longo do fuste para determinação das deformações, enquanto Ramos (1988) analisou resultados experimentais obtidos de provas de carga em estacas verticais submetidas a carregamento horizontal no topo. Em barragens de enrocamento, Rocha Filho (1995) aplicou eletrônives para a determinação da deflexão da face de concreto durante o enchimento do reservatório da barragem de Xingó.

### 3.2. Descrição

#### 3.2.1. Princípio de Funcionamento

O eletrônível consiste em uma ampola de vidro parcialmente preenchida por um líquido eletrolítico, sendo que projetos mais recentes envolvem o uso de ampolas de plástico e de cerâmica. Três ou quatro eletrodos coplanares penetram a ampola e são parcialmente imersos nesse líquido, formando meia ponte de Wheatstone. A impedância entre os eletrodos varia em função da inclinação à qual é submetida a ampola, permitindo associar a sua variação com a rotação do conjunto. Os eletrônives são apresentados na Figura 3.2.



Figura 3.2 – Vista de eletrônives. a) eletrônível com quatro pinos (eletrodos) b) eletrônível com três pinos. ([www.frederickson.com](http://www.frederickson.com)).

A existência de três ou quatro eletrodos não altera o circuito dos eletrônives, já que os eletrodos centrais do eletrônível de quatro pinos possuem o mesmo potencial elétrico. Entretanto, essa diferença altera a sua sensibilidade, já que o eletrônível de quatro pinos, por sua menor distância entre eletrodos, acusa com maior precisão pequenas variações volumétricas.

Para evitar que processos de eletrólise alterem as características físicas dos eletrodos, o dispositivo não deve ser excitado por tensões contínuas. É usual, portanto, a utilização de sinais alternados (ondas quadradas ou senoidais) para sua excitação.

Na Figura 3.3 é mostrado o circuito de excitação e leitura de um eletrônível. Nela se nota que o eletrônível é utilizado como uma metade de uma ponte de Wheatstone, cuja outra metade é completada por duas resistências. A tensão de saída da ponte pode ser tratada por um circuito adicional que forneça a leitura (p.ex) em graus.

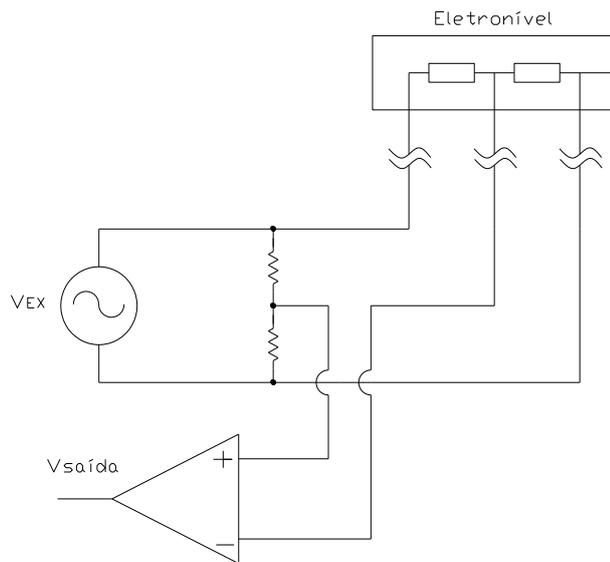


Figura 3.3 – Circuito elétrico de conexão dos eletrôníveis.

A faixa de valores de saída que os eletrôníveis apresentam varia em função do modelo e do fabricante do eletrônível. Essa faixa, no entanto, não apresenta linearidade, sendo necessário obter a informação técnica do eletrônível quanto à faixa de valores linear. Na Figura 3.4 são apresentadas curvas de dois diferentes modelos de eletrônível, mostrados na Figura 3.2, respectivamente. Nota-se a diferença entre as faixas de valores e os trechos de linearidade, que na Figura 3.4a é de  $\pm 3^\circ$ , enquanto na Figura 2.4b é de  $\pm 6^\circ$ .

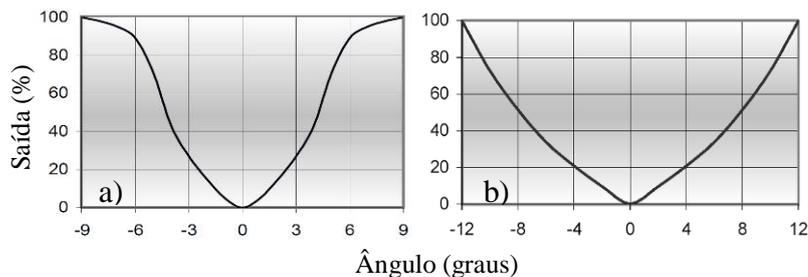


Figura 3.4 – Curvas de sensibilidade dos eletrôníveis (www.frederickscom.com).

### 3.2.2. Montagem

A ampola deve ser posicionada em um cilindro metálico (cápsula) que possua uma cavidade a ser preenchida por uma resina para promover a vedação e proteção mecânica, além da fixação da ampola. As cápsulas devem possuir no seu lado externo uma protuberância para encaixe nos perfis metálicos de fixação na superfície de um meio (ex. face de concreto de barragens de enrocamento) e apoio para a fixação na barra de calibração. A cápsula desenhada para aplicação na face de concreto da barragem de Mazar é apresentada na Figura 3.5.

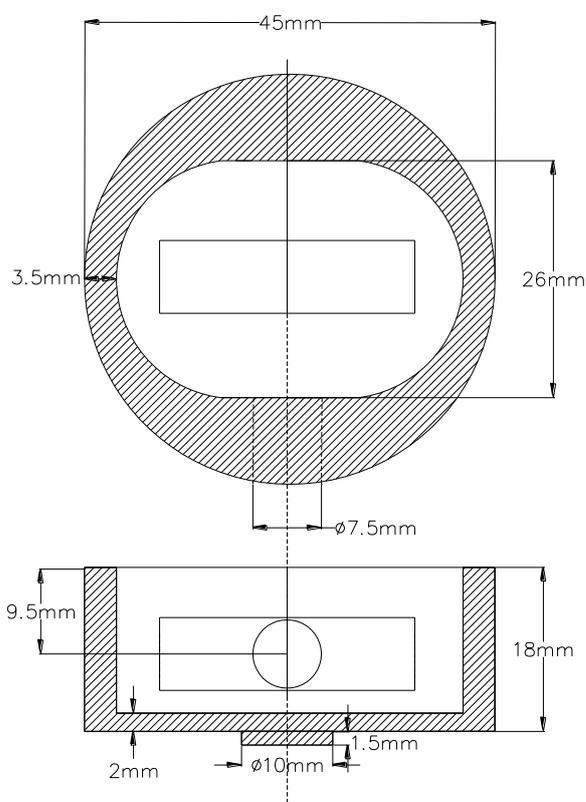


Figura 3.5 – Dimensões da cápsula dos eletrônives aplicados na face de concreto da barragem de Mazar.

### 3.2.3. Calibração

A calibração determina uma curva que fornece a variação das leituras dos eletrônives em função da variação angular. A inclinação dessa curva consiste no denominado fator de calibração (FC). Com isso é possível determinar um fator de calibração para cada eletrônível, o qual será utilizado na determinação das rotações.

A calibração é feita fixando os eletrônives em uma barra rígida de comprimento conhecido por meio de parafusos que não permitem que os mesmos se desloquem com relação à barra. Na Figura 3.6 é apresentada a barra de calibração dos eletrônives.

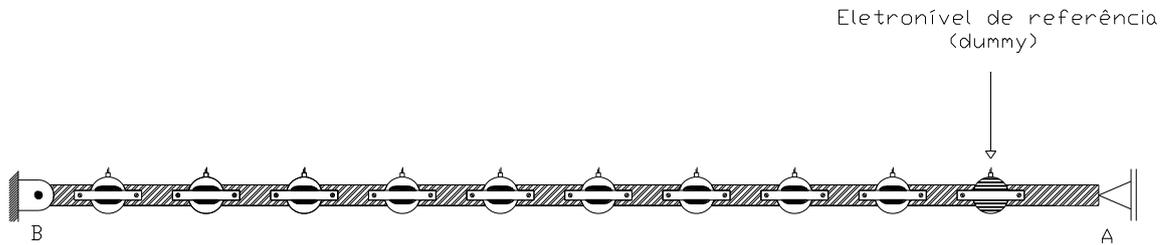


Figura 3.6 – Barra de calibração dos eletrônives.

A barra é livre para se deslocar verticalmente em uma de suas extremidades (A), sendo rotulada na outra (B). Impondo-se um deslocamento  $\Delta$  na extremidade A da barra de comprimento  $L$ , ocorre uma rotação  $\theta$  em relação à posição inicial. Desse modo se pode calcular a rotação angular  $\theta$  em radianos correspondente a um incremento  $\Delta$  através da seguinte expressão:

$$\theta = \arctan\left(\frac{\Delta}{L}\right) \quad (3.2)$$

A partir daí se pode determinar o fator de calibração (FC) para os eletrônives através da inclinação da curva de ajuste linear aos pontos obtidos, como pode ser observado na Figura 3.7.

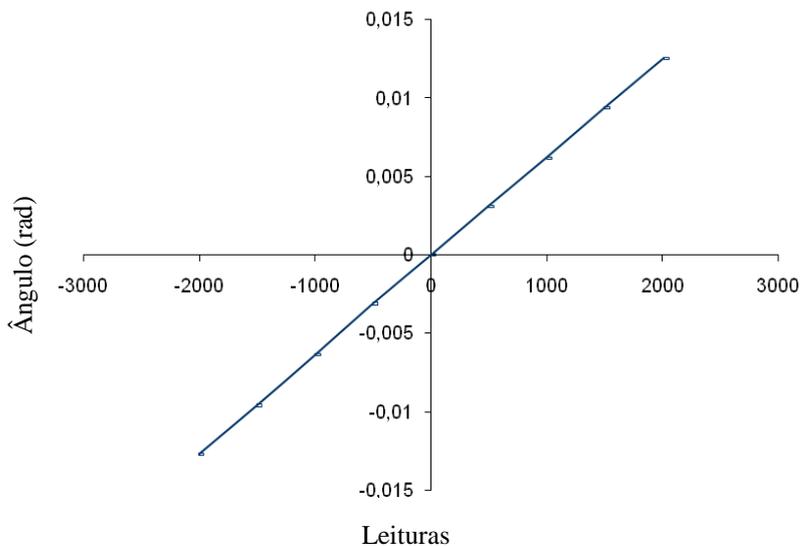


Figura 3.7 – Exemplo de curva usada na determinação do Fator de Calibração.

Na Figura 3.6 se nota que uma das posições na barra de calibração se destina ao eletrônível de referência (*dummy*). Esse eletrônível possui uma calibração padrão e serve para corrigir os valores dos ângulos obtidos pelo sistema de calibração. Sendo assim, as variações das leituras do *dummy* ( $\Delta L$ ) correspondem ao valor de ângulo de maior confiabilidade ( $\theta$ ), obtido da seguinte forma:

$$\theta = FC_{dummy} \cdot \Delta L \quad (3.3)$$

### 3.3. Interpretação dos dados

Conforme visto anteriormente, existem duas formas de interpretar de distorções angulares através de uma série de eletrôníveis:

- Análise Incremental (somatório de deslocamentos de trechos rígidos para obtenção das deflexões);
- Análise Sequencial (integral de uma função matemática que representa a variação das rotações para obtenção das deflexões e derivada para o cálculo dos momentos fletores).

A seguir serão discutidas as duas formas de análise citadas.

#### 3.3.1. Análise Incremental

A análise incremental consiste em determinar a deformada de um meio a partir da obtenção direta das deflexões nos pontos onde são posicionados os eletrôníveis. A hipótese dessa análise é que os trechos entre os eletrôníveis sejam rígidos.

Seja uma série de  $n$  eletrôníveis  $EN_i$  espaçados da distância  $s_i$ , onde  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Sabe-se que a deflexão ( $d_k$ ) na posição do eletrônível  $EN_k$  será causada pelas rotações ( $\phi_i$ ) dos eletrôníveis com índice  $i < k$  da seguinte forma:

$$d_k = \sum_{i=1}^{k-1} \tan \phi_i \cdot s_i, \quad \text{para } k > 1 \quad (3.4)$$

Na Figura 3.8 está representada a nuvem de pontos de rotação em função da distância longitudinal de uma seção da face de concreto de uma BEFC. Na Figura 3.9 está ilustrado um trecho hipotético de uma deformada obtida por análise

incremental na face de concreto de uma barragem de enrocamento. Vale observar que poderia haver inconsistência na determinação da deflexão do ponto inicial ( $d_I$ ) pela equação 3.4, mas no caso de BEFCs é possível assumir que a deflexão no contato da laje com o plinto seja nula ( $d_I=0$ ) ou adotar o valor determinado por algum processo de instrumentação, como a utilização do medidor triortogonal de junta ( $d_I$ =valor medido).

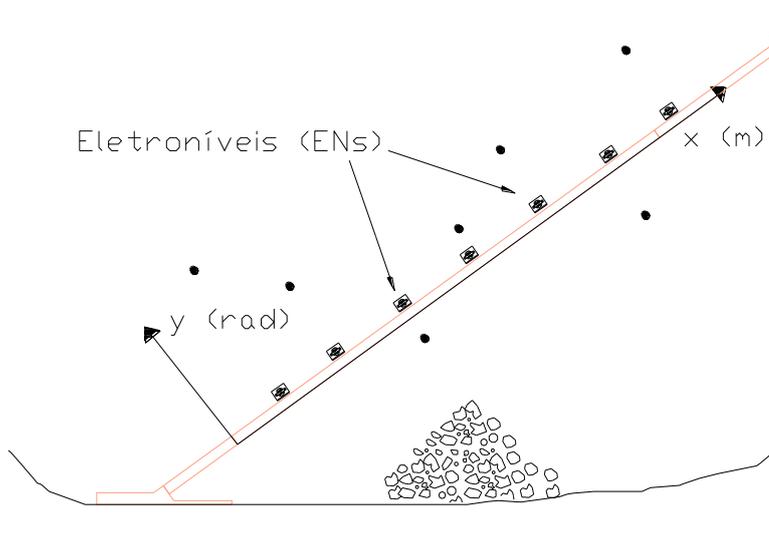


Figura 3.8 – Nuvem de pontos de rotação em função da distância longitudinal da face de concreto.

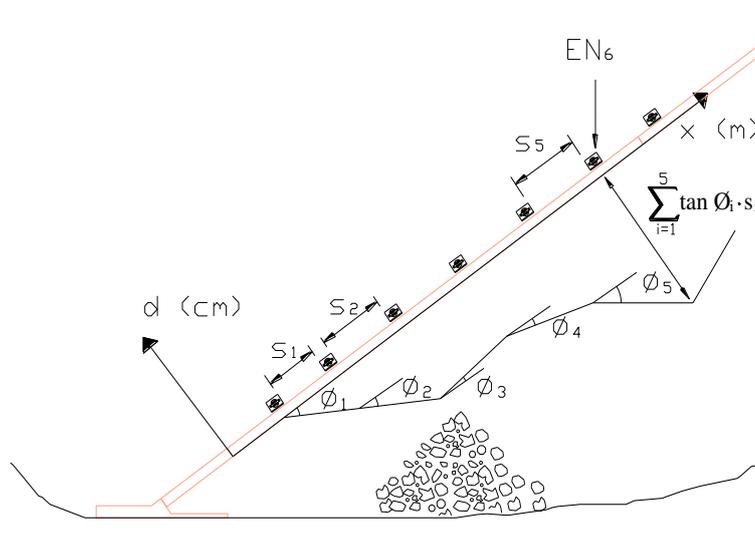


Figura 3.9 – Deformada de uma face de concreto de uma BEFC por análise incremental.

### 3.3.2. Análise Sequencial

Através da análise sequencial é possível determinar a deformada do meio onde está instalada a série dos eletrônives, bem como os momentos fletores atuantes.

Nesse tipo de análise, o primeiro procedimento é encontrar uma função que represente a nuvem de pontos de rotação obtidos em função da distância longitudinal da série de eletrônives instalados em um meio.

No caso de BEFCs, a variação dos ângulos de cada um dos eletrônives deve ser plotada com a distância ( $x$ ) ao longo do comprimento da face, como está ilustrado na Figura 2.8. Na Figura 3.10 está ilustrada uma função representativa da nuvem de pontos para o caso da face de concreto de BEFCs.

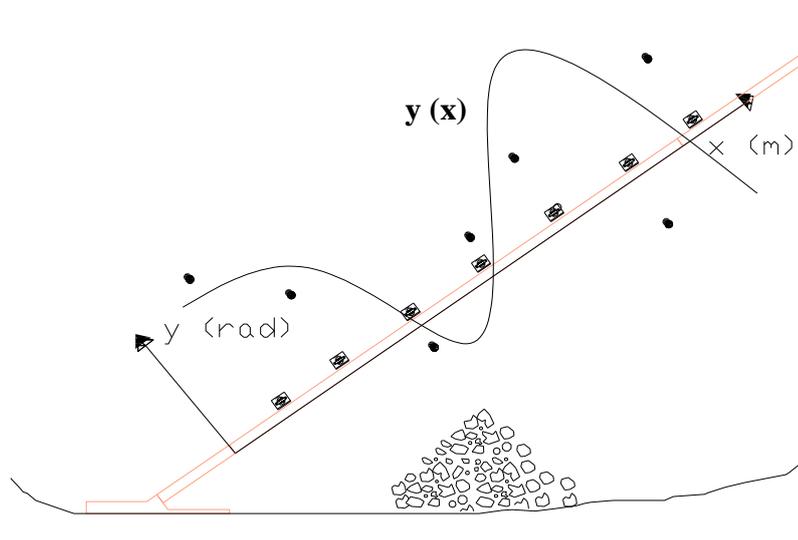


Figura 3.10 – Deformada de uma face de concreto de uma BEFC por análise incremental.

#### 3.3.2.1. Cálculo das Deflexões

Sendo  $y(x)$  a função que representa as rotações da face, a deformada ( $d(x)$ ) será resultado de sua integração (Figura 3.11):

$$\int y(x) + C = d(x) \quad (3.5)$$

A constante de integração pode ser determinada assumindo o deslocamento do plinto ( $d=0$  para  $x=0$ ) ou considerando valores de deflexão medidos por medidores triortogonais de junta ( $d=$  valor medido para  $x=0$ ) ou pelo deslocamento da crista ( $d=$  valor medido para  $x=L$ , onde  $L$  é o comprimento total da laje na seção instrumentada).

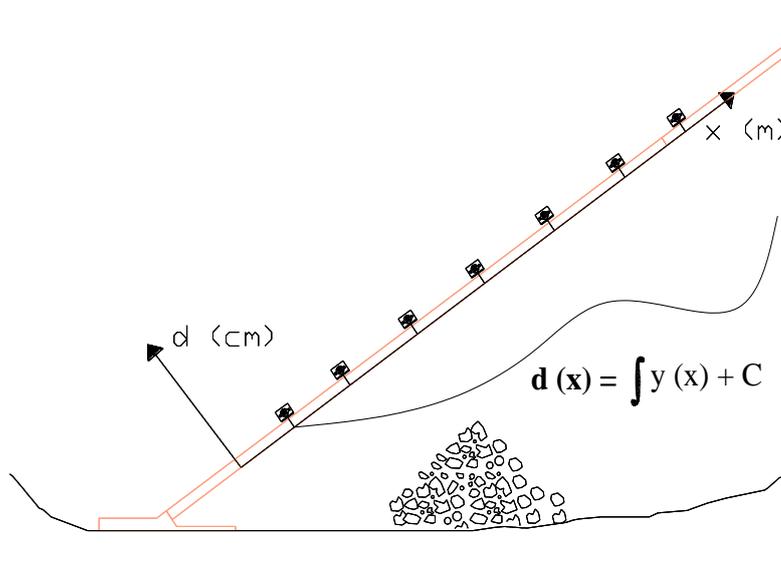


Figura 3.11 – Deformada de uma face de concreto de uma BEFC por análise sequencial.

Na Figura 3.12 estão ilustradas as deformadas obtidas pelos dois métodos citados, as quais devem representar o mesmo comportamento da face de concreto.

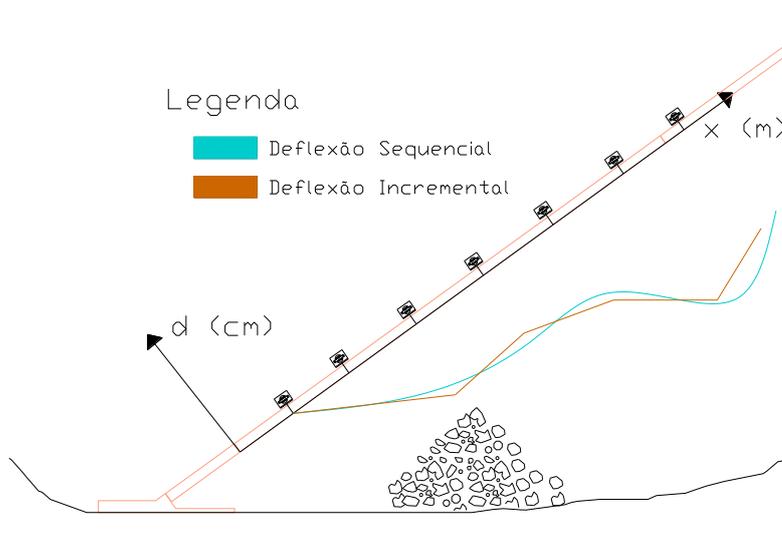


Figura 3.12 – Deformadas da face de concreto de BEFCs obtidas pelas análises incremental e sequencial.

### 3.3.2.2. Cálculo dos momentos fletores

Para o cálculo dos momentos fletores, a região do meio ao redor das linhas de instrumentação deve ser considerada como uma viga. No presente trabalho se consideraram vigas de largura unitária. Segundo a teoria de viga de Bernoulli-Euler, o momento é resultante do produto entre a primeira derivada da função de rotação ( $y(x)$ ) e a rigidez da estrutura

( $EI$ ), onde  $E$  é o módulo de elasticidade e  $I$  o momento de inércia:

$$\frac{M}{EI} = y''(x) \quad (3.6)$$

A derivação da equação de Bernoulli-Euler envolve as seguintes hipóteses físicas (Han, 1999):

1. O formato da viga é um prisma cujo comprimento é muito maior que as outras dimensões.
2. A viga é constituída de um material linearmente elástico.
3. O efeito de Poisson é negligenciável.
4. A seção transversal é simétrica em relação ao plano vertical, de forma que a linha neutra está contida nele.
5. Planos perpendiculares à linha neutra permanecem planos e perpendiculares depois da deformação.
6. O ângulo de rotação é muito pequeno.
7. O efeitos de momento de inércia de rotação é desprezado.
8. A energia envolvida no cisalhamento é desprezada.
9. A viga é constituída de material homogêneo.

A operação matemática de derivação pode aumentar os possíveis erros envolvidos no processo de obtenção experimental, sendo assim, a obtenção direta da rotação da seção transversal da face reduz uma operação de derivação, com relação à obtenção direta das deflexões, consequentemente indica valores mais exatos dos momentos fletores. Na Figura 3.13 é ilustrada a curva representativa dos momentos fletores obtida para a face de concreto de barragens de enrocamento.

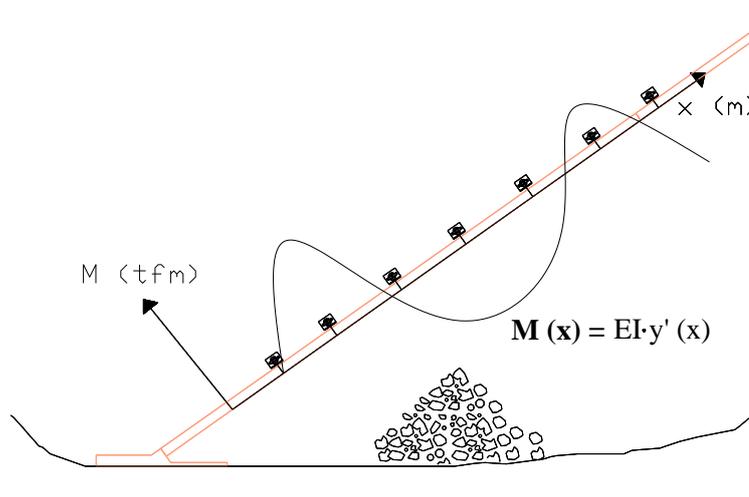


Figura 3.13 – Curva de momentos fletores (análise seqüencial).

- **Cálculo da rigidez da estrutura**

A Figura 3.14 mostra as respostas carga-deslocamento no meio do vão de uma viga. Para baixos valores da carga  $q$  aplicada (trechos O-A), as tensões de tração no concreto não são suficientes para provocar a fissuração. Nesta situação a viga se encontra no Estádio I, onde o comportamento é linear.

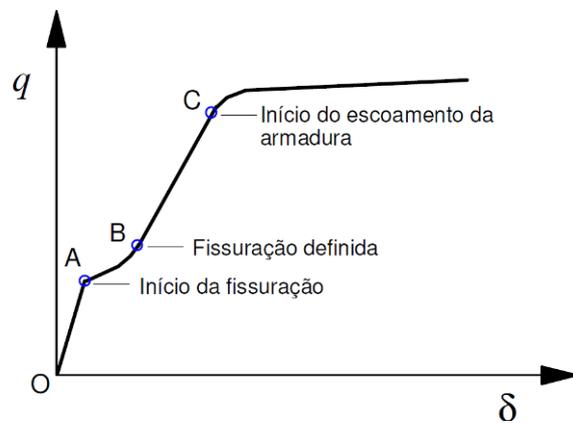


Figura 3.14 – Resposta carga-deslocamento em vigas de concreto armado.

Sob cargas de serviço, algumas regiões das vigas estarão trabalhando no estado não fissurado (Estádio I) e outras, onde os momentos fletores são mais elevados, no estado fissurado, denominado Estádio II. Além disso, numa seção situada entre duas fissuras, parte da força de tração que atua na armadura é transmitida para o concreto por causa da aderência entre as barras de aço e o concreto. Essa contribuição do concreto na zona tracionada é denominada enrijecimento à tração.

No presente trabalho serão avaliados os momentos considerando o estágio não fissurado (Estágio I). O motivo de tal consideração é que, para o caso da face de concreto de barragens de encoramento, a formação de fissuras é indesejável por esta ser um elemento de vedação, diferentemente de estruturas convencionais de engenharia, onde se trabalha constantemente com o Estágio II, por exemplo, onde existem fissuras que não comprometem o desempenho estrutural. No item subsequente que trata dos limites para abertura de fissuras este assunto será abordado com mais detalhes.

O que caracteriza o Estádio I é o fato da carga (P) ser de pequena intensidade e a viga apresentar pequena deformação, de modo que o concreto não se encontra ainda fissurado, significando que as tensões de tração no concreto ( $\sigma_{ct}$ ) são inferiores à sua resistência à tração  $f_{tk}$ . Nessa situação, supõe-se que haja linearidade entre tensão e deformação (Lei de Hooke) e as deformações específicas do aço e do concreto são iguais ( $\varepsilon_s = \varepsilon_c$ ) devido a aderência. Na Figura 3.15 é apresentada a seção da viga e os respectivos diagramas de deformação e tensão para o Estádio I.

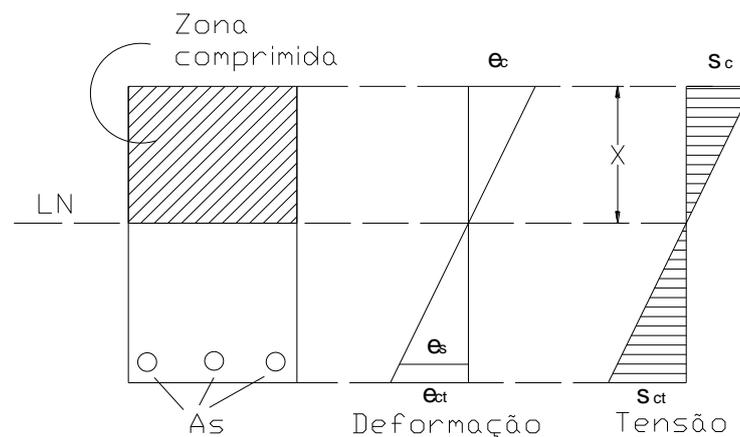


Figura 3.15 – Diagramas de deformação e tensão para uma viga no Estádio I.

Pode-se calcular a rigidez do elemento nesse estágio, considerando a seção homogeneizada e a contribuição do concreto na resistência à tração. Além disso, pode-se tomar o módulo de deformação do concreto tangente na origem. A homogeneização da seção consiste em considerar no lugar da área de aço existente ( $A_s$ ), uma área de concreto equivalente ( $A_{ceq}$ ), ou seja, uma área fictícia de concreto que suporte a mesma resultante ( $R_s$ ) que atua na área de aço ( $A_s$ ):

$$R_s = A_s \cdot \varepsilon_s \cdot E_s = A_{ceq} \cdot \varepsilon_c \cdot E_c \rightarrow A_{ceq} = \frac{E_s}{E_c} \cdot A_s = \alpha_e \cdot A_s \quad (3.7)$$

A NB-1 (1978) fornece a seguinte expressão para previsão do módulo de elasticidade tangente inicial ( $E_{ci}$ ):

$$E_c = 6600 \cdot \sqrt{f_{cj}} \text{ MPa} \quad (3.8)$$

$$f_{cj} = f_{ck} + 3,5 \text{ MPa} \quad (3.9)$$

Já o momento inércia, em face de concreto de BEFC's deve ser obtido para a seção retangular equivalente de 1 (um) metro de largura na seção dos instrumentos através da expressão (Figura 3.15):

$$I_h = \frac{b_w \cdot h^3}{12} + b_w h \cdot \left( X - \frac{h}{2} \right)^2 + \alpha_e \cdot A_s \cdot (d - X)^2 \quad (3.10)$$

$$X = \frac{\frac{b \cdot h^2}{2} + \alpha_e \cdot A_s \cdot d}{b \cdot h + \alpha_e \cdot A_s} \quad (3.11)$$

Onde:

$I_h$  – Momento de inércia da seção homogeneizada.

$X$  – Profundidade da linha neutra no Estádio I.

$b_w$  – Largura da viga

$h$  – Altura da viga

$d$  – Altura da viga sem cobrimento nominal

- **Cálculo dos momentos limites de fissuração da face de concreto**

No que se refere ao momento de fissuração ( $M_f$ ), este pode ser, portanto definido como sendo o momento fletor capaz de provocar o surgimento da primeira fissura na peça de concreto. Esse momento representa o nível de sollicitação que corresponde à passagem do Estádio I para o Estádio II. Com base nas hipóteses anteriores (NBR-6118/80), o valor desse momento pode ser determinado da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0.75 \cdot f_{tk} \cdot b \cdot (h - X) = \frac{\sigma_c}{2} \cdot b \cdot X \end{array} \right. \quad (3.12a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_c}{2} \cdot b \cdot X \cdot \left( \frac{h - X}{2} + \frac{2}{3} X \right) = M_f \end{array} \right. \quad (3.12b)$$

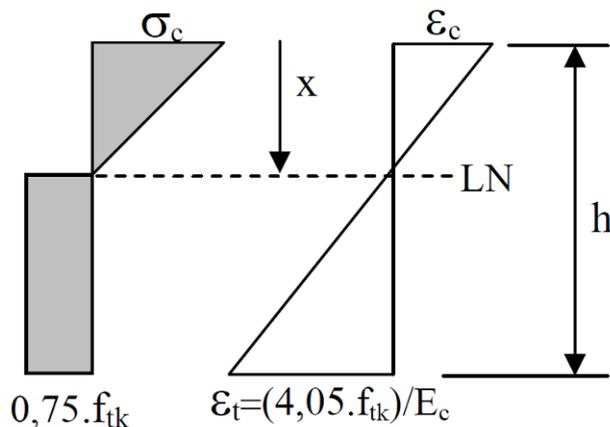


Figura 3.16 – Diagrama de deformação da seção retangular.

Compatibilidade de deformações:

$$\frac{\varepsilon_t}{h-X} = \frac{\varepsilon_c}{X} \rightarrow \varepsilon_c = \varepsilon_t \cdot \frac{X}{h-X} \quad (3.13)$$

O concreto na região comprimida está no regime elástico:

$$\sigma_c = E_c \cdot \varepsilon_c = \frac{4,05 \cdot f_{tk}}{E_c} \cdot \frac{X}{h-X} \quad (3.14)$$

Com a Equação (4.9) na Equação (4.8a):

$$X = 0,378h \quad (3.15)$$

Levando este valor em (4.9), resulta:

$$\sigma_c = 2,43 \cdot f_{tk} \quad (3.16)$$

Que substituídos em (4.8b) resulta:

$$Mf = 0,2586 \cdot b \cdot h^2 \cdot f_{tk} \quad (3.17)$$

Onde:

$$f_{tk} = 0,06f_{ck} + 0,7MPa, \text{ para } f_{ck} > 18MPa \quad (3.18)$$

### 3.3.2.3.

#### Ajuste dos pontos experimentais (rotações)

Existem diversas formas de se ajustar um conjunto de pontos experimentais. As teorias de aproximação podem ser realizadas utilizando polinômios, funções exponenciais,

funções de Fourier (polinômios trigonométricos), séries de Taylor, Tchebyshev, etc. Há ainda métodos de interpolação dos pontos, que também pode ser através de polinômios, utilizando curvas denominadas *splines*, entre diversas outras possíveis formas, como a utilização de séries. O método de aproximação se caracteriza pela suavização da curva, enquanto a interpolação não leva em consideração a presença de erros experimentais.

#### 3.3.2.4.

#### **Considerações sobre o método de ajuste (Interpolação ou aproximação)**

A princípio o critério mais óbvio para determinar os coeficientes do polinômio  $p_n(x)$ , dados os pares de valores  $(x_i, f(x_i))$ ,  $i=0, 1, 2, 3, \dots, n$ , é estabelecido por:

$$p_n(x_i) = f(x_i) \quad i=0, 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.19)$$

O polinômio de grau  $n$  utilizado na interpolação deve reproduzir a função  $f(x)$  exatamente para os  $n+1$  argumentos  $x = x_i$ . No entanto, não é garantida a precisão para valores de  $f(x)$  para  $x \neq x_i$ .

Quando os dados experimentais contêm erros que não podem ser previstos com algum grau de certeza, a interpolação por esses pontos poderá conduzir a erros substanciais. Sendo assim, para a análise global das rotações, é mais representativo, ao invés de utilizar o procedimento de interpolação, tentar passar por esses pontos uma função que se aproxime suavemente, minimizando os erros.

#### 3.3.2.5.

#### **Regressão Polinomial pelo método dos Mínimos Quadrados**

A aproximação de funções por polinômios é uma das idéias mais antigas da análise numérica, e ainda uma das mais usadas. A razão dessa larga utilização está ligada ao fato de serem facilmente computáveis, de suas derivadas e integrais serem novamente polinômios, suas raízes poderem ser encontradas com relativa facilidade, etc.

A aproximação polinomial pode ocorrer de vários modos, entre os quais: Interpolação, Método dos Mínimos Quadrados, Mini-Max, entre outros. Sendo assim, é vantajoso substituir uma função complicada por um polinômio que a represente. Além disso, o Teorema de Weirstrass afirma que toda função contínua pode ser arbitrariamente aproximada por um polinômio.

A fim de determinar os coeficientes do polinômio com uma maior precisão, foi realizado o cálculo diretamente a

partir das equações normais. Na teoria da regressão por mínimos quadrados, vemos que se obtêm os parâmetros  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  na equação  $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ , onde  $n$  é o grau do polinômio a ser ajustado.

$$\begin{aligned}
 a_0n + a_1 \sum x + a_2 \sum x^2 + \dots + a_n \sum x^n &= \sum y \\
 a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 + a_2 \sum x^3 + \dots + a_n \sum x^{n+1} &= \sum xy \\
 a_0 \sum x^2 + a_1 \sum x^3 + a_2 \sum x^4 + \dots + a_n \sum x^{n+2} &= \sum x^2y \\
 \vdots & \\
 a_0 \sum x^n + a_1 \sum x^{n+1} + a_2 \sum x^{n+2} + \dots + a_n \sum x^{2n} &= \sum x^ny
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

A solução deste sistema, denominado equações normais, é fácil, pois podemos escrever (3.20) em forma matricial  $M \cdot A = B$  com a solução  $A = M^{-1} \cdot B$ , onde  $M^{-1}$  é a matriz inversa da matriz  $M$ .  $A$  é o vetor dos coeficientes e  $B$  o vetor dos valores contendo as ordenadas dos pontos experimentais, ou seja:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \\ \sum x^2y \\ \vdots \\ \sum x^ny \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} Sy \\ Sxy \\ Sx^2y \\ \vdots \\ Sx^ny \end{bmatrix}$$

$M$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$ :

$$M = \begin{bmatrix} n & Sx & Sx^2 & \dots & Sx^n \\ Sx & Sx^2 & Sx^3 & \dots & Sx^{n+1} \\ Sx^2 & Sx^3 & Sx^4 & \dots & Sx^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ Sx^n & Sx^{n+1} & Sx^{n+2} & \dots & Sx^{2n} \end{bmatrix}$$

### 3.3.3.

#### Ajuste polinomial pelo método dos mínimos quadrados com restrições devido às condições de contorno de BEFCs

Seja  $y(x)$  um polinômio de  $n$ -ésimo grau para as rotações,  $d(x)$  sua integral, que representa as deflexões e  $y'(x)$  sua derivada, que é utilizada para a determinação do momento fletor, temos que:

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \tag{3.21}$$

$$\int y(x) + C = d(x) = a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \frac{a_2x^3}{3} + \dots + \frac{a_nx^{n+1}}{n+1} + C \quad (3.22)$$

$$\frac{M}{EI} = y'(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} \quad (3.23)$$

No caso de BEFCs, a hipótese considerada é de que a face de concreto se encontra simplesmente apoiada no plinto, ou seja, é considerado um apoio de segundo gênero no contato da laje com o plinto ( $x=0$ ), onde ocorre a rotação (momento nulo) e o deslocamento é nulo. Na Figura 3.8 é apresentada a posição dos eixos onde são plotados os pontos de rotação. Sendo assim, tem-se:

$$d(0) = C = 0 \quad (3.24)$$

$$\frac{M}{EI} = y'(0) = a_1 = 0 \quad (3.25)$$

Portanto, neste trabalho optou-se por adaptar a regressão pelo método dos mínimos quadrados para que as condições de contorno fossem respeitadas, sendo necessário que o polinômio das rotações seja:

$$y(x) = a_0 + a_2x^2 + a_3x^3 \dots + a_nx^n \quad (3.26)$$

Por consequência, os polinômios representativos das deflexões ( $d(x)$ ) e dos momentos ( $y'(x)$ ) assumem a seguinte forma:

$$d(x) = a_0x + \frac{a_2x^3}{3} + \frac{a_3x^4}{4} + \dots + \frac{a_nx^{n+1}}{n+1} \quad (3.27)$$

$$\frac{M}{EI} = y'(x) = a_2x + a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} \quad (3.28)$$

Sendo assim, para obter uma regressão utilizando o método dos mínimos quadrados, os termos que multiplicam o coeficiente  $a_1$  devem ser retirados do sistema de equações normais, além da equação que possui como resultado o coeficiente  $a_1$ . Para tanto, devem ser eliminadas da matriz M as segundas linha e coluna, bem como a segunda linha da matriz B.

$$M' = \begin{bmatrix} n & Sx & Sx^2 & \dots & Sx^n \\ Sx & Sx^2 & Sx^3 & \dots & Sx^{n+1} \\ Sx^2 & Sx^3 & Sx^4 & \dots & Sx^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ Sx^n & Sx^{n+1} & Sx^{n+2} & \dots & Sx^{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & Sx^2 & Sx^3 & \dots & Sx^n \\ Sx^2 & Sx^4 & Sx^5 & \dots & Sx^{n+2} \\ Sx^3 & Sx^5 & Sx^6 & \dots & Sx^{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ Sx^n & Sx^{n+1} & Sx^{n+2} & \dots & Sx^{2n} \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} Sy \\ Sxy \\ Sx^2y \\ \vdots \\ Sx^ny \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sy \\ Sx^2y \\ \vdots \\ Sx^ny \end{bmatrix}$$

A eliminação da segunda coluna da matriz  $M$  retira do sistema das equações normais (3.20) todos os termos que contêm o coeficiente  $a_1$ , enquanto a eliminação da segunda linha das matrizes  $M$  e  $B$  retiram a equação que tem como resultado o coeficiente  $a_1$ . Dessa forma a matriz  $M'$  continua sendo quadrada e, portanto possui inversa. O vetor  $A'$  dos coeficientes será dado com a solução  $A' = M'^{-1} \cdot B'$ , onde  $M'^{-1}$  é a matriz inversa da matriz  $M'$ .

$$A' = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$