## 2 Análise numérica

Considera-se o escoamento de um líquido de alta viscosidade entre duas placas planas contendo ranhuras que estão cheias de um líquido de baixa viscosidade. Os dois líquidos são considerados imiscíveis, newtonianos e o escoamento bi-dimensional e em regime permanente.

Como primeira aproximação considerou-se a interface entre os líquidos fixa e perfeitamente deslizante, isto é com tensão cisalhante nula. Estes resultados representam um limite superior da redução de arraste possível. Após o estudo deste problema simplificado, resolveu-se o problema completo, considerando a interface entre as duas fases como uma fronteira livre.

## 2.1 Equações de conservação

Os campos de velocidade  $\overrightarrow{v}$  e pressão p devem satisfazer as equações de conservação de massa e de quantidade de movimento.

$$\rho_i \vec{v_i} \cdot \nabla \vec{v_i} = \nabla \cdot \overline{\overline{T_i}} \quad , \tag{2-1}$$

$$\nabla \cdot \vec{v_i} = 0 \quad . \tag{2-2}$$

Onde i = 1 e 2 representam as duas fases.

Para um fluido Newtoniano, o tensor das tensões  $\overline{\overline{T_i}}$  é dado por:

$$\overline{\overline{T_i}} = -p\overline{\overline{I}} + \mu_i [\nabla \vec{v_i} + (\nabla \vec{v_i})^T]$$
(2-3)

 $\rho_i$ é a massa especifica de cada fase e  $\mu_i$  a viscosidade.

Os dois problemas analisados, com parede deslizante e com interface, foram resolvidos utilizando-se o código de elementos finitos desenvolvido na PUC-RIO para análise de escoamento laminar com superfícies livres.

#### 2.2

#### Solução do escoamento entre placas planas.

O escoamento laminar desenvolvido de um fluido entre placas paralelas planas lisas (sem ranhuras) possui solução analítica. A vazão Q em função da diferença de pressão  $\Delta P$  imposta é dada por:

$$\frac{Q}{W} = \frac{1}{12\mu} a^3 \frac{\Delta P}{L} \tag{2-4}$$

Onde L é o comprimento total da superfície, W é a largura da placa e a é a separação entre as placas paralelas Esta solução será usada como base para determinar a intensidade da redução de arraste obtido em cada caso analisado.

## 2.3 Solução do problema com parede deslizantes

A solução para este problema simplificado considera uma superfície completamente deslizante em parte da parede, como um modelo do escoamento nas proximidades da interface entre os líquidos. O domínio físico é dividido em sub-regiões. As condições de contorno utilizadas no programa são apresentadas na figura 2.1 e descritas a seguir.



Figura 2.1: Condição de contorno como uma parede deslizante

- 0. Condição artificial. Utilizada entre sub-regiões do domínio, não representando uma condição de contorno física do problema
- 1. Condição de velocidade nula. Esta condição é aplicado ao longo da porção da parede onde não ocorre o deslizamento. A velocidade é constante e igual a zero.

$$\vec{v} = 0 \tag{2-5}$$

 - 4. Condição de pressão e escoamento desenvolvido. Esta condição é usada na entrada e saída do escoamento

$$P = P^* \tag{2-6}$$

$$\vec{n} \cdot \nabla \vec{v} = 0 \tag{2-7}$$

- 8. Condição da parede deslizante. Impõe a condição de não penetração e também uma tensão de cisalhamento proporcional à diferença de velocidade entre o fluido e a parede. O coeficiente de escorregamento  $\beta$  determina o valor da tensão de cisalhamento.  $\beta = \infty$  representa o caso de tensão cisalhante igual a zero. Esta condição com  $\beta = \infty$  é usada ao longo da linha de simetria e nas porções da parede consideradas com perfeito deslizamento.

$$\frac{1}{\beta}\vec{t}\cdot(\vec{v}-\vec{V}_W) = \vec{t}\cdot(\vec{n}\cdot\overline{\overline{T}})$$
(2-8)

## 2.3.1 Resultados

Considerou-se inicialmente o escoamento entre duas placas planas com 10 cm de comprimento, formando um espaçamento entre elas de 20 mm. O comprimento da parede deslizante tem um valor de A e o comprimento total da geometria tem um valor igual a L. A viscosidade do líquido foi de  $\mu=1$ Pa.s. Os resultados obtidos são apresentados na tabela 2.1. O caso com A=0 corresponde à situação onde não existe parte deslizante na parede.



Figura 2.2: Problema com superfícies deslizantes

$\Delta P(Pa)$	$Q/W(mm^2/s)$	L(mm)	A(mm)
10	133,34	100	0
10	148,4	100	10
10	218,72	100	25
10	$324,\!66$	100	35

Tabela 2.1: Resultados preliminares da simulação (Placas deslizantes)

Pode-se observar que para uma mesma diferença de pressão, a vazão do escoamento aumenta a medida que o comprimento da porção da parede com deslizamento aumenta. O aumento da vazão pode ser representado pela razão da vazão de uma parede com deslizamento e outra sem deslizamento. Quando 70% do comprimento da parede possui deslizamento perfeito, a vazão aumenta por um fator de aproximadamente 2,5, conforme apresentado na figura 2.3.



Figura 2.3: Relação de vazão com o comprimento da parede deslizante



Figura 2.4: Distribuição de pressão ao longo do comprimento



Figura 2.5: Queda de pressão ao longo do comprimento

A figura 2.4 apresenta o campo de pressão para o caso com 2A/L = 0.7. A pressão ao longo da linha de centro é mostrada na figura 2.5. Pode-se observar que na região onde a parede é considerada deslizante, o gradiente de pressão é

muito baixo.

Como a diferença de pressão total é constante, o gradiente de pressão nas regiões de parede não-deslizantes torna-se maior, explicando o aumento da vazão. As linhas de corrente, apresentadas na figura 2.6, mostram o rearranjo do escoamento devido a presença da parede deslizante.

Claramente a presença de um liquido de baixa viscosidade nas ranhuras não levara a um prefeito deslizamento nas paredes. Desta forma, estes resultados servem como um limite superior da eficiência da redução de arraste



Figura 2.6: Linhas de corrente ao longo do comprimento

#### 2.4

# Solução do problema com interface entre o líquido viscoso e o líquido lubrificante nas ranhuras.

A solução do problema considera uma interface entre o líquido lubrificante (líquido 2) de menor viscosidade que preenche a ranhura e um líquido de maior viscosidade (líquido 1) escoando entres as placas planas, conforme esquematizado na figura.2.7. O modelo não considera o efeito gravitacional.

#### 2.4.1

# Condições de contorno da equação de conservação de quantidade de movimento.

As diferentes condições de contorno da equação de conservação da quantidade de movimento usadas na solução do problema são apresentadas na figura 2.8

A única diferença em relação ao problema anterior é a condição de contorno ao longo da interface entre as duas fases. A condição utilizada é a condição #3 do código:

- 3. Condição de interface. Esta condição é aplicada ao longo da interface entre dois fluidos. Ela impõe um termo de tração ao longo dos elementos localizado na interface.



Figura 2.7: Problema com interface



Figura 2.8: Condições de momentum

$$\vec{n} \cdot (\overline{\overline{T_1}} - \overline{\overline{T_2}}) = (2H\sigma)\vec{n} \tag{2-9}$$

Onde  $\sigma$  é a tensão interfacial entre as fases e H é a curvatura da superfície livre.

### 2.4.2 Condições de contorno de malha

A configuração da interface entre as duas fases é desconhecida a priori e faz parte da solução do problema.

Problemas com estas características são conhecidos como problemas de superfícies livres. A solução desta classe de problemas é bastante complexa, já que o domínio onde as equações diferencias são integradas fazem parte da solução. O código de elementos finitos utilizado foi desenvolvido para resolver este tipo de problemas. A metodologia utilizada envolve a solução de equações elípticas para geração de malha, que são resolvidas de forma acoplada às equações de conservação. A solução das equações de geração de malha requer o uso de condições de contorno. As condições de contorno utilizadas no código são apresentadas na figura 2.9 e discutidas a seguir

- 0. Ortogonalidade. Esta condição faz que a malha seja ortogonal à superfície.
- 2. Nós fixos. Esta condição faz que a este nós fiquem numa posição fixada pelo usuário.
- 3. Distribuição nodal prescrita. Ela distribui os nós ao longo do comprimento através de uma função de distribuição, especificada pelo usuário.

$$\xi = f^{-1}(s), \eta = g^{-1}(s) \quad , \tag{2-10}$$

onde s é o comprimento de arco do longo da linha

- 5. Condição cinemática. Condição que localiza implicitamente a interface, ela prescreve que em regime permanente a interface é uma linha de corrente.

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \tag{2-11}$$

- 8. Elimina a equação de malha. Esta condição é utilizada para eliminar a contribuição de elementos localizados ao longo da interface.



Figura 2.9: Condição de contorno de malha

## 2.5 Solução computacional

A resolução do problema foi feita num programa desenvolvido por Carvalho (1994) e Romero (2003). Este código resolve problemas Newtonianos e não Newtoniano, em regimes permanente, transiente e com superfícies livres.

O código foi feito em Fortran. O programa consta de um pré-processador (PREPRO) onde é definida a geometria, malha e condições de contorno do problema. O preprocessador gera um arquivo que é lido pelo modulo de solução (SOLVER).

O modulo de resolução (SOLVER) resolve as equações diferenciais pelo método de elementos finitos. Este módulo gera arquivos que contém os resultados da solução do problema.

Os resultados são lidos pelo modulo pós-preprocessador. O POSTPRO tem a opção de gerar arquivos que são lidos pelo software TECPLOT.

## 2.5.1 Configuração da malha

A malha para resolver o problema foi feita com refinamento perto da interface.

Devido à periodicidade da geometria, o domínio físico considerado na análise inclui apenas uma ranhura. O número de elementos em cada região do domínio é mostrado na figura 2.10. Foram analisadas diferentes configurações geométricas e relações de viscosidade dos fluidos



Figura 2.10: Geometria da malha

Na primeira configuração geométrica analisada, o comprimento do domínio considerado foi constante e igual a L=3 mm e a altura do canal foi de 2H=10 mm. O comprimento da ranhura variou de  $L_0=0.5$  a 2.5 mm e a sua profundidade foi de h=1 mm. A diferença de pressão foi constante e igual a  $\Delta P=10$  Pa, a relação de viscosidade  $\mu 1/\mu 2$  dos líquidos foi de 1, 10 e 100. Os casos analisados são apresentados na tabela 2.2.

L(mm)	$L_0(mm)$	$L_0/L$	$\mu 1/\mu 2$	h(mm)	H(mm)	h/H
3	0,5	0,166	1	1	5	0,2
3	1	0,333	1	1	5	0,2
3	2	0,666	1	1	5	0,2
3	$^{2,5}$	0,833	1	1	5	$^{0,2}$
3	$0,\!5$	0,166	10	1	5	0,2
3	1	0,333	10	1	5	0,2
3	2	0,666	10	1	5	0,2
3	$^{2,5}$	0,833	10	1	5	0,2
3	$0,\!5$	0,166	100	1	5	0,2
3	1	0,333	100	1	5	0,2
3	2	0,666	100	1	5	0,2
3	$^{2,5}$	0,833	100	1	5	0,2

Tabela 2.2: Superfície corrugada de  $L_0$  variável, L=3 mm, h=1 mm,  $\Delta P=10$  Pa.



Figura 2.11: Malha com uma superfície corrugada de 1mm

Na segunda configuração o comprimento do domínio continua igual a L=3 mm e a altura do canal foi de 2H=20 mm. O comprimento de ranhura variou de Lo=0,5 mm até Lo=2,5 mm. Os valores da diferença de pressão  $\Delta P$  e a relação de viscosidades  $\mu 1/\mu 2$  se mantiveram iguais ao do caso anterior. A tabela 2.3 apresenta todos os casos analisados.

L(mm)	$L_0(mm)$	$L_0/L$	$\mu 1/\mu 2$	h(mm)	H(mm)	h/H
3	0,5	0,166	1	1	10	0,1
3	1	0,333	1	1	10	$^{0,1}$
3	2	0,666	1	1	10	$^{0,1}$
3	$^{2,5}$	0,833	1	1	10	$^{0,1}$
3	0,5	0,166	10	1	10	$^{0,1}$
3	1	0,333	10	1	10	$^{0,1}$
3	2	0,666	10	1	10	$^{0,1}$
3	$^{2,5}$	0,833	10	1	10	$^{0,1}$
3	$0,\!5$	0,166	100	1	10	$^{0,1}$
3	1	0,333	100	1	10	$^{0,1}$
3	2	$0,\!666$	100	1	10	$^{0,1}$
3	2,5	0,833	100	1	10	$^{0,1}$

Tabela 2.3: Superfície corrugada de  $L_0$  variável, L=3 mm, h = 1mm,  $\Delta P=10$  Pa.



Figura 2.12: Malha com uma superfície corrugada de H=10mm

Na terceira configuração geométrica, variou-se a altura do canal e a profundidade da ranhura, de forma a manter a razão constante entre elas constante, como é mostrado na tabela 2.4 e figura 2.13. Os comprimentos do domínio e da ranhura foram de L=3 mm e Lo=1 mm, respectivamente. A diferença de pressão e à relação de viscosidade dos líquidos ficou igual aos dois casos anteriores ( $\Delta P=10$  Pa e  $\mu 1/\mu 2=1,10$  e 100).

Tabela 2.4: Superfície corrugada de  $L_0=1$ mm, L=3 mm, h= variável,  $\Delta P=10$  Pa, H= variável.

L(mm)	$L_0(mm)$	$L_0/L$	$\mu 1/\mu 2$	h(mm)	H(mm)	h/H
3	1	0,333	1	5	5	1
3	1	0,333	10	5	5	1
3	1	0,333	100	5	5	1
3	1	0,333	1	10	10	1
3	1	0,333	10	10	10	1
3	1	0,333	100	10	10	1



Figura 2.13: Malha com uma superfície corrugada de H e h variável

## 2.5.2 Resultados da simulação

Os resultados para a primeira configuração são apresentados na tabela 2.5. Pode-se observar que para uma mesma diferença de pressão, a vazão do

escoamento aumenta a medida que o comprimento da ranhura cresce. O valor de comprimento H e a metade da distancia entre as placas. Os valores de vazão nas tabelas seguintes foram calculados tendo em consideração o valor do comprimento total entre as duas placas, ou seja, 2H.

L(mm)	$L_0(mm)$	$\mu 1/\mu 2$	h(mm)	H(mm)	$Q_0/W(mm^2/s)$	$Q/W(mm^2/s)$
3	0,5	1	1	5	$2,77 \times 10^{2}$	$2,78 \times 10^{2}$
3	1	1	1	5	$2,77{\times}10^{2}$	$2,\!81\! imes\!10^2$
3	2	1	1	5	$2,77{\times}10^{2}$	$2,94 \times 10^{2}$
3	2,5	1	1	5	$2,77 \times 10^{2}$	$2,\!99\! imes\!10^2$
3	0,5	10	1	5	$2,77{ imes}10^2$	$2,79 \times 10^{2}$
3	1	10	1	5	$2,77{\times}10^{2}$	$2,\!86\! imes\!10^2$
3	2	10	1	5	$2,77{\times}10^{2}$	$3,\!13 \times 10^2$
3	2,5	10	1	5	$2,77{\times}10^{2}$	$3,\!33\! imes\!10^2$
3	0,5	100	1	5	$2,77 \times 10^{2}$	$2,\!80\! imes\!10^2$
3	1	100	1	5	$2,77{\times}10^{2}$	$2,\!88\! imes\!10^2$
3	2	100	1	5	$2,77 \times 10^{2}$	$3,\!28\! imes\!10^2$
3	2,5	100	1	5	$2,77 \times 10^{2}$	$3,72 \times 10^{2}$

Tabela 2.5: Geometria para uma superfície Corrugada de  $L_0$  variável, L=3 mm, h=1 mm,  $\Delta P=10$  Pa, H=5 mm.

A figura 2.14 apresenta o campo de pressão para uma configuração de L=3 mm, Lo=1 mm, H=5 mm e h=1 mm. Pode-se observar que na região onde fica a ranhura a queda de pressão é muito baixa. As linhas de corrente apresentadas nas figuras 2.14 e 2.15 mostram o rearranjo do escoamento devido à presença da ranhura.



Figura 2.14: Contornos de pressão e linhas de corrente numa superfície corrugada de 1mm e uma relação de viscosiades  $\mu 1/\mu 2=1$ 



Figura 2.15: Contornos de pressão e linhas de corrente numa superfície corrugada de 2mm e uma relação de viscosidades  $\mu 1/\mu 2=1$ 

Os efeitos de recirculação do fluido lubrificante são mais pronunciados a medida que o comprimento de ranhura aumenta, como mostrado na figura 2.15. A linha de interface entre os dois fluidos tem uma tendência a invadir a zona da ranhura para valores de comprimento de ranhura maior. Para valores de Lo=0,5 mm a linha de interface fica quase reta, mas para valores de Lo=2,5mm, a linha de interface tende a ficar na parte interna da ranhura. A linha de interface para dois diferentes casos são apresentadas nas figuras 2.14 e 2.15.



Figura 2.16: Relação da vazão com a razão da viscosidade para uma superfície corrugada de  $L_0=1$  mm, L=3 mm, h=1 mm,  $\Delta P=10$  Pa, H=5 mm.

Os ganhos de vazão para uma configuração de L=3 mm, Lo=1 mm, H=5 mm e h=1 mm variam desde valores de  $2,81\times10^2 mm^2/s$  para uma relação de viscosidad de  $\mu 1/\mu 2=1$  até  $2,88\times10^2 mm^2/s$  para uma relação de viscosidad de  $\mu 1/\mu 2=100$ , como mostrado na figura 2.16.

Os ganhos de vazão para uma configuração de L=3 mm, Lo=2,5 mm, H=5 mm e h=1 mm variam desde valores de  $2,99\times10^2$   $mm^2/s$  para uma relação de viscosidad de  $\mu 1/\mu 2=1$  até  $3,72\times10^2$   $mm^2/s$  para uma relação de viscosidad de  $\mu 1/\mu 2=100$ .



Figura 2.17: Relação de vazão  $Q/Q_0$  com o comprimento da parede  $L_0/L$  para uma superfície corrugada de H=5 mm, com diversas razões de viscosidades

O aumento de vazão pode ser representado pela razão de vazão obtida de uma superfície com ranhura Q/W e uma superfície sem ranhura  $Q_0/W$ . Quando o valor de comprimento de ranhura Lo é igual a 83 % do comprimento total L, com uma relação de viscosidades de  $\mu 1/\mu 2 = 100$ , o ganho na vazão pode atingir um valor de 33%, como apresentado na figura 2.17.

Claramente pode-se observar que a presença de um líquido lubrificante de baixa viscosidade na ranhura aumenta a tendência do ganho. Os dados obtidos nas simulações mostram o efeito de deslizamento que são traduzidos em valores de aumento na vazão.

Os resultados para a segunda configuração são apresentados na tabela 2.6. Como o caso anterior pode-se observar que para uma mesma diferença de pressão, a vazão de escoamento tende a aumentar.

L(mm)	$L_0(mm)$	$\mu 1/\mu 2$	h(mm)	H(mm)	$Q_0/W(mm^2/s)$	$Q/W(mm^2/s)$		
3	0,5	1	1	10	$2,222 \times 10^{3}$	$2,225 \times 10^{3}$		
3	1	1	1	10	$2,222 \times 10^{3}$	$2,236 \times 10^{3}$		
3	2	1	1	10	$2,222 \times 10^{3}$	$2,285 \times 10^{3}$		
3	$^{2,5}$	1	1	10	$2,222 \times 10^{3}$	$2,327 \times 10^{3}$		
3	0,5	10	1	10	$2,222 \times 10^{3}$	$2,229 \times 10^{3}$		
3	1	10	1	10	$2,222 \times 10^{3}$	$2,255 \times 10^{3}$		
3	2	10	1	10	$2,222 \times 10^{3}$	$2,367{ imes}10^{3}$		
3	$^{2,5}$	10	1	10	$2,222 \times 10^{3}$	$2,\!454\! imes\!10^3$		
3	0,5	100	1	10	$2,222 \times 10^{3}$	$2,231 \times 10^{3}$		
3	1	100	1	10	$2,222 \times 10^{3}$	$2,264 \times 10^{3}$		
3	2	100	1	10	$2,222 \times 10^{3}$	$2,\!428\! imes\!10^3$		
3	$^{2,5}$	100	1	10	$2,222 \times 10^{3}$	$2,\!608\! imes\!10^3$		

Tabela 2.6: Geometria para uma superfície corrugada de  $L_0$  variável, L=3 mm, h=1 mm,  $\Delta P=10$  Pa, H=10 mm.

Os ganhos de vazão para uma configuração de L=3 mm, Lo=1 mm, H=10 mm e h=1 mm variam desde valores de  $2,236\times10^3 mm^2/s$  para uma relação de viscosidades  $\mu 1/\mu 2=1$  ate  $2,264\times10^3 mm^2/s$  para uma relação de viscosidades de  $\mu 1/\mu 2=100$ . Estes valores representam o 0,65% e o 2 % de ganho respectivamente, figura 2.18.



Figura 2.18: Relação de vazão com razão de viscosidades para uma superfície corrugada de  $L_0=1$  mm, L=3 mm, h=1 mm,  $\Delta P=10$  Pa, H=10 mm e uma relação de viscosidades  $\mu 1/\mu 2=1$ 

Assim também como no caso anterior a vazão pode ser representada pela

razão de vazão obtida de uma superfície com ranhura Q/W e uma superfície sem ranhura  $Q_0/W$ . O ganho para uma configuração deL=3 mm, Lo=2,5 mm, H=10 mm e h=1 mm pode atingir um valor de quase 18% para uma relação de viscosidades de 100. A figura 2.20 apresenta um gráfico onde se pode observar um aumento na vazão com um maior comprimento de ranhura Lo.



Figura 2.19: Relação de vazão  $Q/Q_0$  com o comprimento da parede  $L_0/L$  para uma superfície corrugada de H=10 mm

Nesta segunda configuração pode-se notar que o efeito da altura do canal H fez que o ganho seja menor que o caso anterior. Esta queda de ganho foi principalmente pela maior vazão  $Q_0/W$  que é consequência de um valor maior valor de H.

Os resultados da última configuração são apresentados na tabela 2.7

Tabela 2.7: Geometria para uma superfície corrugada de  $L_0 = 1$ mm, L=3 mm, h=variável,  $\Delta P=10$  Pa, H=variável.

L(mm)	$L_0(mm)$	$\mu 1/\mu 2$	h(mm)	H(mm)	$Q_0/W(mm^2/s)$	$Q/W(mm^2/s)$
3	1	1	5	5	$2,77{\times}10^2$	$2,812 \times 10^2$
3	1	10	5	5	$2,77 \times 10^{2}$	$2,\!86\! imes\!10^2$
3	1	100	5	5	$2,77 \times 10^{2}$	$2,\!88\! imes\!10^2$
3	1	1	10	10	$2,222 \times 10^{3}$	$2,\!237{ imes}10^3$
3	1	10	10	10	$2,222 \times 10^{3}$	$2,\!256\!  imes\! 10^3$
3	1	100	10	10	$2,222 \times 10^{3}$	$2,265 \times 10^{3}$

Os resultados apresentados indicam que a variação da altura da ranhura não tem uma influência grande no ganho de vazão. Uma comparação de uma configuração de h=1 mm e h=10 mm mostram vazões de  $2,264\times10^3 mm^2/s$ 

e de  $2,265 \times 10^3 \ mm^2$ /s respectivamente. Estes valores representam um ganho de cerca de 2% para uma relação de viscosidad de  $\mu 1/\mu 2 = 100$ .



Figura 2.20: Ganho na vazão numa superfície corrugada de  $L_0=1$  mm, L=3 mm, h=variável,  $\Delta P=10$  Pa, H=variável, em função da razão de viscosidades

## 2.5.3 Fator de atrito para placas planas lisas e com ranhuras

A queda de pressão em um escoamento interno pode ser apresentada de forma adimensional pelo fator de atrito definido como:

$$\frac{\Delta P}{\rho} = f \frac{L}{D_h} \frac{v^2}{2} \tag{2-12}$$

Para um escoamento desenvolvido entre placas planas paralelas, o produto entre o número de Reynolds e o fator de atrito é constante, tal que:

$$f = \frac{96}{R_e} \tag{2-13}$$

Fazendo um analise similar para o escoamento entre placas planas com ranhuras, pode-se obter o valor do produto  $f \times Re$ .

$$f \times Re = 2 \frac{\Delta P}{L} \frac{D_h^2}{\bar{\nu}\mu} \quad , \tag{2-14}$$

$$D_h = 2H \quad , \tag{2-15}$$

$$\bar{v} = \frac{Q}{2H} \quad . \tag{2-16}$$

Nas equações 2-15 e 2-16, H é a metade da distância entre as placas e  $\bar{v}$  é a velocidade média, que é função da vazão Q e altura entre as placas 2H.

O produto  $f \times Re$  em função da razão de viscosidade e da razão entre o comprimento das ranhuras e o comprimento de canal para 2H=10 mm é apresentado na figura 2.21



Figura 2.21: Fator de atrito modulado pelo número de Reynolds para uma superfície corrugada de  $L_0$ = variável, L=3 mm, h=1 mm,  $\Delta P$ =10 Pa, H=5 mm e  $\mu 1/\mu 2$  de 1,10 e 100

Como pode-se observar no gráfico 2.21, o fator de atrito é reduzido com o aumento do comprimento da ranhura e com uma maior relação de viscosidades entre os dois líquidos. Os valores podem atingir um mínimo de  $f \times Re=70$  com uma relação de comprimentos de ranhura de  $L_0/L=0.83$  e uma relação de viscosidades  $\mu 1/\mu 2= 100$ .

Uma comparação de  $f \times Re$  entre placas planas e placas com ranhuras mostram uma redução de até perto de 30%.

Os resultados para uma altura de canal de 2H=20 mm são apresentados na figura 2.22. O fator de atrito é reduzido com o aumento do comprimento do canal. Os valores de fxRe podem atingir um valor de 81 para uma relação de viscosidades de  $\mu 1/\mu 2=100$  e uma relação de Lo/L=0.83. A razão para isto é que o efeito de deslizamento é muito baixo para ser percebido, para um valor de vazão grande, isto como conseqüencia da alta vazão imposta para uma configuração de 2H=20 mm.



Figura 2.22: Fator de atrito modulado pelo número de Reynolds para uma superfície corrugada de  $L_0$ = variável, L=3 mm, h =1 mm,  $\Delta$ P=10 Pa, H=10 mm e  $\mu 1/\mu 2$  de 1,10 e 100