

**César Augusto Medina Sotomayor**

**Transmissão CDMA por Blocos em Canais  
SISO e MISO**

**Tese de Doutorado**

Tese de Doutorado apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Raimundo Sampaio Neto

Rio de Janeiro  
março de 2009

**César Augusto Medina Sotomayor**

**Transmissão CDMA por Blocos em Canais  
SISO e MISO**

Tese de Doutorado apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Raimundo Sampaio Neto**

Orientador

Centro de Estudos de Telecomunicações — PUC-Rio

**Prof. José Antonio Apolinário Jr.**

IME

**Prof. Marcello Luiz Rodrigues de Campos**

COPPE – UFRJ

**Prof. Marco Antonio Grivet Mattoso Maia**

Centro de Estudos de Telecomunicações — PUC-Rio

**Prof. José Mauro Pedro Fortes**

Centro de Estudos de Telecomunicações — PUC-Rio

**Prof. Sérgio Lima Netto**

COPPE – UFRJ

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 20 de março de 2009

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **César Augusto Medina Sotomayor**

Graduou-se em Engenharia Eletrônica com ênfase em Telecomunicações pela Escuela Politécnica del Ejército, Quito, Equador em 2000. Obteve o título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica pelo Instituto Militar de Engenharia em 2003 na área de Processamento Digital de Sinais.

#### Ficha Catalográfica

Medina Sotomayor, César Augusto

Transmissão CDMA por Blocos em Canais SISO e MISO / César Augusto Medina Sotomayor; orientador: Raimundo Sampaio Neto. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Engenharia Elétrica, 2009.

v., 134 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Elétrica.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Elétrica – Tese. 2. CDMA. 3. Sistemas de transmissão de portadora única. 4. Sistemas de transmissão multiportadora. 5. Receptores às cegas. 6. Detecção multiusuário. 7. Codificação espaço-temporal. 8. Filtragem adaptativa. 9. Processamento de sinais para comunicações. I. Sampaio Neto, Raimundo. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Elétrica. III. Título.

CDD: 621.3

A Luciana, César Isaac, Ana Clara, ...  
âncoras de minha vida.

## Agradecimentos

A Deus que, no seu filho Jesus Cristo, me dá a vida e instrui meu coração na verdadeira sabedoria.

Ao professor Raimundo Sampaio Neto, pelo apoio em todas as fases do doutorado, como professor, como orientador e como amigo.

Aos professores da graduação, mestrado e doutorado que souberam dar o melhor de si para servir de alicerce na minha formação acadêmica e aos amigos pela contribuição e incentivo ao longo do trabalho.

A minha amada esposa Luciana que, com sua dedicação à família, sua compreensão nos momentos difíceis, seu entusiasmo, sua alegria e sua forma de ver a vida, me deu forças para poder continuar com este projeto, ainda que no cansaço e no desânimo. Por cada momento desde que nos conhecemos.

Aos meus filhos, presentes de Deus. Seu sorriso é certamente o método mais eficaz para esquecer de tudo por alguns instantes.

*A mis amados padres. Una página es poco para expresarles mi agradecimiento por tantos sacrificios que han hecho a lo largo de su vida para que yo pueda realizar mis sueños e anhelos. Siempre me apoyaron en mis decisiones a veces precipitadas e difíciles. Sepan que su ejemplo siempre lo llevaré gravado en mi corazón. Muchas gracias por todo.*

*A mis hermanos, por el compañerismo, incentivo e amistad que me brindaron a cada momento. Los días de la infancia serán eternos gracias a ustedes.*

*A mis tios, primos y toda mi familia, pues siempre me incentivaron a ser lo que soy.*

Às comunidades do Caminho Neocatecumenal da paróquia Nossa Senhora de Copacabana e da paróquia María Auxiliadora, Quito. Seus ensinamentos me fortalecem a cada dia e me formam como ser humano.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

## Resumo

Medina Sotomayor, César Augusto; Sampaio Neto, Raimundo(Orientador). **Transmissão CDMA por Blocos em Canais SISO e MISO**. Rio de Janeiro, 2009. 134p. Tese de Doutorado — Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Nesta tese é abordada a transmissão CDMA (*Code Division Multiple Access*) por blocos em canais SISO (*Single Input - Single Output*) seletivos em frequência. Considera-se a transmissão tanto em portadora única quanto multiportadora, com intervalo de guarda do tipo prefixo cíclico e do tipo preenchimento de zeros. São investigadas estruturas de detecção multiusuário às cegas, baseadas no critério de mínima variância com restrições lineares. Implementações adaptativas do tipo gradiente estocástico e do tipo mínimos quadrados são apresentadas e novos algoritmos de estimação de canal são propostos. É também discutida nesta tese a transmissão CDMA por blocos em canais MISO (*Multiple Input - Single Output*) seletivos em frequência. Considera-se, assim como no canal SISO, os casos de transmissão em portadora única e multiportadora, incorporando intervalos de guarda do tipo prefixo cíclico e do tipo preenchimento de zeros. Para este tipo de sistema, duas estruturas de transmissão são propostas e uma análise do ganho de diversidade para cada tipo de estrutura é conduzido, identificando as condições para atingir o máximo ganho de diversidade. Um detector baseado no critério de mínimo erro quadrático médio é implementado para cada estrutura e, no caso da primeira estrutura de transmissão, um detector às cegas baseado no critério de mínima variância é proposto. Uma implementação adaptativa do tipo mínimos quadrados é apresentada e novos algoritmos de estimação de canal são propostos.

## Palavras-chave

CDMA. Sistemas de transmissão de portadora única. Sistemas de transmissão multiportadora. Receptores às cegas. Detecção multiusuário. Codificação espaço-temporal. Filtragem adaptativa. Processamento de sinais para comunicações.

## Abstract

Medina Sotomayor, César Augusto; Sampaio Neto, Raimundo(Advisor). **CDMA Block Transmission in SISO and MISO Channels**. Rio de Janeiro, 2009. 134p. PhD Thesis — Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This thesis addresses block CDMA (Code Division Multiple Access) transmission in frequency selective SISO (Single Input - Single Output) channels. Both multicarrier and single carrier transmission are considered with cyclic prefix and zero padding as guard interval. Blind multiuser detection based on the linearly constrained minimum variance criterion is investigated. Stochastic gradient and recursive least squares implementations are presented and new channel estimation algorithms are proposed. It is also discussed in this thesis block CDMA transmission in frequency selective MISO (Multiple Input - Single Output) channels, including, as in the SISO channel, the case of multicarrier and single carrier transmission with cyclic prefix and zero padding as guard interval. Two structures are proposed for transmission in this scenario, an analysis of the diversity gain for each type of structure is conducted and conditions for achieving the maximum diversity gain are identified. A detector based on the minimum mean square error criterion is implemented for each structure. Recursive least squares implementations are presented and new blind channel estimation algorithms are proposed.

## Keywords

CDMA. Single carrier transmission systems. Multicarrier transmission systems. Blind detection. Multiuser detection. Space-Time coding. Adaptive filtering. Signal processing for communications.

# Sumário

Lista de abreviaturas	14
Notação matemática	16
1 Introdução	18
1.1 Evolução dos Sistemas de Comunicações Móveis	18
1.2 Transmissão por Blocos e OFDM	20
1.3 DS-CDMA e CDMA por Blocos	21
1.4 Tópicos Desenvolvidos Nesta Tese e Estado da Arte	22
1.5 Organização da Tese	25
2 Modelo do Sinal	27
2.1 Transmissão CDMA por Blocos	27
2.2 Propriedades e Modelo Unificado	31
2.3 Conclusões	33
3 Receptor Linear de Mínima Variância	34
3.1 Solução Ótima do Receptor de Mínima Variância com Restrições Lineares	35
3.2 Implementação Adaptativa do Tipo Gradiente Estocástico	41
3.3 Implementação Adaptativa do Tipo Mínimos Quadrados (RLS)	46
3.4 Conclusões	53
4 Transmissão em Canais MIMO	55
4.1 Canal não Seletivo em Frequência	55
4.2 Comentários	67
5 Transmissão CDMA por Blocos com Codificação Espaço-Temporal em Canais Seletivos em Frequência	68
5.1 Modelo do Sinal	68
5.2 Receptor <i>Zero Forcing</i> e Ganho de Diversidade	71
5.3 Receptor de Mínimo Erro Quadrático Médio (MMSE)	72
5.4 Receptor de Mínima Variância com Restrições Lineares	76
5.5 Conclusões	88
6 Transmissão CDMA por Blocos com Codificação Espaço-Temporal e Reversão Temporal em Canais Seletivos em Frequência	90
6.1 Modelo do Sinal	90
6.2 Definição de Matrizes e Projeto do Receptor	93
6.3 Análise do Ganho de Diversidade	96
6.4 Receptor de Mínimo Erro Quadrático Médio em Ausência do Conhecimento do Canal	102
6.5 Conclusões	108
7 Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros	115
7.1 Resumo dos Resultados e Discussão	115



7.2	Direções Futuras	118
	Referências Bibliográficas	<b>119</b>
A	Implementação Adaptativa do Tipo Gradiente Estocástico para o Receptor LCMV Utilizando a Transformada de Householder	<b>129</b>
A.1	Estimativa de Canal Obtida por Meio de Maximização da Variância <i>A Posteriori</i> da Saída do Receptor	130
B	Cancelamento da Auto-Interferência no Receptor LCMV	<b>132</b>
B.1	Receptor de Mínima Variância	132
B.2	Estimação de Canal	132
B.3	Cancelamento de Auto-interferência	133

## Lista de figuras

2.1	Estrutura geral de um sistema de transmissão por blocos para canais SISO.	28
3.1	BER vs. $E_b/N_0$ (dB) do receptor de mínima variância para sistemas CDMA por blocos em canais SISO invariantes no tempo.	39
3.2	SINR vs. número de símbolos transmitidos do receptor de mínima variância para um sistema MC CDMA ZP em canais SISO invariantes no tempo.	40
3.3	SINR vs. $E_b/N_0$ (dB) do receptor de mínima variância para sistemas CDMA de transmissão por blocos em canais SISO invariantes no tempo em função do número de amostras utilizadas para estimar a matriz de correlação.	41
3.4	BER vs. ordem estimada do canal no receptor de mínima variância para sistemas CDMA de transmissão por blocos em canais SISO invariantes no tempo.	42
3.5	Complexidade computacional do algoritmo gradiente estocástico para receptores de mínima variância.	45
3.6	Erro quadrático médio da estimativa do canal em termos de $\mu_g$ , implementação do tipo gradiente estocástico do receptor de mínima variância para sistemas CDMA por blocos em canais SISO invariantes no tempo.	47
3.7	Erro quadrático médio da estimativa do filtro receptor em termos de $\mu_g$ , implementação do tipo gradiente estocástico do receptor de mínima variância para sistemas CDMA por blocos em canais SISO invariantes no tempo.	47
3.8	Taxa de erro de bit em termos de $\mu_g$ , implementação do tipo gradiente estocástico do receptor de mínima variância para sistemas CDMA por blocos em canais SISO invariantes no tempo.	48
3.9	Erro quadrático médio da estimativa do canal (dB), implementação do tipo RLS do receptor de mínima variância para sistemas CDMA por blocos.	53
3.10	Razão Sinal-Ruído mais Interferência (dB), implementação do tipo RLS do receptor de mínima variância para sistemas CDMA por blocos.	54
4.1	Histograma do autovalor da matriz $\mathbf{W}$ para um sistema SISO.	58
4.2	Histograma dos autovalores da matriz $\mathbf{W}$ para um sistema MIMO $4 \times 4$ .	58
4.3	Histograma dos autovalores da matriz do canal para um sistema MIMO $4 \times 2$ .	59
4.4	BER vs $E_b/N_0$ . Sistema SIMO com diferente número de antenas no receptor.	64
4.5	Desempenho em termos BER de um sistema BPSK para canal SISO, um canal SIMO e um canal MISO.	66
4.6	Estrutura geral de um sistema de codificação espaço-temporal.	67

5.1	Sistema de transmissão CDMA por blocos com codificação espaço-temporal.	69
5.2	BER versus $E_b/N_0$ (dB), implementação do tipo RLS do receptor MMSE para sistemas CDMA por blocos em canais MISO multipercurso variantes no tempo, $f_dT = 0,001$ .	75
5.3	BER versus Número de usuários, implementação do tipo RLS do receptor MMSE para sistemas CDMA por blocos em canais MISO multipercurso variantes no tempo, $f_dT = 0,001$ .	75
5.4	BER versus $NFR$ (dB), implementação do tipo RLS do receptor MMSE para sistemas CDMA por blocos em canais MISO multipercurso variantes no tempo, $f_dT = 0,001$ .	76
5.5	$MSE(\bar{\mathbf{Q}}(i))$ e $MSE(\bar{\mathbf{\Psi}}_k^H \bar{\mathbf{\Gamma}}(i))$ , implementação do tipo RLS do receptor de mínima variância para o sistema MC CDMA CP canais MISO multipercurso invariantes no tempo.	86
5.6	Erro quadrático médio da estimativa do canal (dB), implementação do tipo RLS do receptor de mínima variância para o sistema MC CDMA CP. $\mathcal{M} = 1$ .	87
5.7	Erro quadrático médio da estimativa do canal (dB), implementação do tipo RLS do receptor de mínima variância para o sistema MC CDMA CP. $\mathcal{M} = 2$ .	88
5.8	BER vs. $E_b/N_0$ , implementação do tipo RLS do receptor de mínima variância para os sistemas CDMA por blocos com prefixo cíclico. Canal variante no tempo com frequência normalizada, $f_dT = 0,0001$ e uma antena no receptor, $\mathcal{M} = 1$ .	89
5.9	BER vs. $E_b/N_0$ , implementação do tipo RLS do receptor de mínima variância para os sistemas CDMA por blocos com preenchimento de zeros. Canal variante no tempo com frequência normalizada, $f_dT = 0,0001$ e uma antena no receptor, $\mathcal{M} = 1$ .	89
6.1	Sistema de transmissão CDMA por blocos com codificação espaço-temporal e reversão temporal.	91
6.2	BER vs. $E_b/N_0$ , implementação do tipo RLS do diferentes tipos de receptor MMSE para os sistemas CDMA por blocos com prefixo cíclico, codificação espaço-temporal e reversão temporal usando códigos de Vandermonde e $K = 4$ usuários. Canal variante no tempo com $L = 4$ percursos e $f_dT = 0,0001$ .	105
6.3	BER vs. $E_b/N_0$ , implementação do tipo RLS do diferentes tipos de receptor MMSE para os sistemas CDMA por blocos com preenchimento de zeros, codificação espaço-temporal e reversão temporal usando códigos de Vandermonde e $K = 4$ usuários. Canal variante no tempo com $L = 4$ percursos e $f_dT = 0,0001$ .	106
6.4	BER vs. $E_b/N_0$ , implementação do tipo RLS do receptor AC para os sistemas CDMA por blocos com prefixo cíclico, codificação espaço-temporal e reversão temporal usando códigos de Vandermonde e $K = 4$ usuários. Canal variante no tempo com $L = 4$ percursos e $f_dT = 0,0001$ .	107

- 6.5 BER vs.  $E_b/N_0$ , implementação do tipo RLS do receptor AC para os sistemas CDMA por blocos com preenchimento de zeros, codificação espaço-temporal e reversão temporal usando códigos de Vandermonde e  $K = 4$  usuários. Canal variante no tempo com  $L = 4$  percursos e  $f_d T = 0,0001$ . 108
- 6.6 BER vs.  $E_b/N_0$ , implementação do tipo RLS do receptor AC para os sistemas CDMA por blocos com prefixo cíclico, codificação espaço-temporal e reversão temporal usando códigos de Vandermonde e  $K = 4$  usuários. Canal variante no tempo variando o número de percursos,  $f_d T = 0,001$ . 109
- 6.7 BER vs.  $E_b/N_0$ , implementação do tipo RLS do receptor AC para os sistemas CDMA por blocos com preenchimento de zeros, codificação espaço-temporal e reversão temporal usando códigos de Vandermonde e  $K = 4$  usuários. Canal variante no tempo variando o número de percursos,  $f_d T = 0,001$ . 110
- 6.8 BER vs.  $E_b/N_0$ , implementação do tipo RLS do receptor AC para os sistemas CDMA por blocos com prefixo cíclico, codificação espaço-temporal e reversão temporal usando códigos de Walsh-Hadamard e  $K = 4$  usuários. Canal variante no tempo variando o número de percursos,  $f_d T = 0,001$ . 111
- 6.9 BER vs.  $E_b/N_0$ , implementação do tipo RLS do receptor AC para os sistemas CDMA por blocos com preenchimento de zeros, codificação espaço-temporal e reversão temporal usando códigos de Walsh-Hadamard e  $K = 4$  usuários. Canal variante no tempo variando o número de percursos,  $f_d T = 0,001$ . 112
- 6.10 BER vs.  $E_b/N_0$ , implementação do tipo RLS do receptor AC para os sistemas CDMA por blocos com prefixo cíclico, codificação espaço-temporal e reversão temporal usando códigos de Zadoff-Chu e  $K = 4$  usuários. Canal variante no tempo variando o número de percursos,  $f_d T = 0,001$ . 113
- 6.11 BER vs.  $E_b/N_0$ , implementação do tipo RLS do receptor AC para os sistemas CDMA por blocos com preenchimento de zeros, codificação espaço-temporal e reversão temporal usando códigos de Zadoff-Chu e  $K = 4$  usuários. Canal variante no tempo variando o número de percursos,  $f_d T = 0,001$ . 114
- A.1 Receptor de mínima variância baseado na transformada de Householder. 131

## Lista de tabelas

2.1	Escolha de matrizes para os diferentes sistemas CDMA de transmissão por blocos.	31
2.2	Escolha de matrizes para os diferentes sistemas CDMA de transmissão por blocos no modelo simplificado.	32
3.1	Implementação adaptativa do tipo gradiente estocástico para receptores de mínima variância nos sistemas CDMA por blocos.	43
3.2	Complexidade computacional das equações de atualização da implementação gradiente estocástico para receptores de mínima variância.	45
3.3	Implementação adaptativa do tipo RLS para receptores de mínima variância nos sistemas CDMA por blocos. Estimação de canal usando o algoritmo PASTd.	51
3.4	Complexidade computacional associada aos métodos para obtenção do receptor de mínima variância.	52
5.1	Implementação adaptativa do tipo RLS para receptores de mínima variância nos sistemas CDMA por blocos com codificação espaço-temporal. Estimação de canal usando o método natural das potências.	84
5.2	Implementação adaptativa do tipo RLS para receptores de mínima variância nos sistemas CDMA por blocos com codificação espaço-temporal. Estimação de canal usando o algoritmo PASTd.	85

## Lista de abreviaturas

<b>1G</b>	Primeira Geração de telefonia celular
<b>2G</b>	Segunda Geração de telefonia celular
<b>3G</b>	Terceira Geração de telefonia celular
<b>4G</b>	Quarta Geração de telefonia celular
<b>BER</b>	<i>Bit Error Rate</i>
<b>CDMA</b>	<i>Code Division Multiple Access</i>
<b>CP</b>	<i>Cyclic Prefix</i> , prefixo cíclico
<b>FDMA</b>	<i>Frequency Division Multiple Access</i>
<b>f.d.p.</b>	Função densidade de probabilidade
<b>FIR</b>	<i>Finite Impulse Response</i>
<b>GSM</b>	<i>Global Systems for Mobile Telecommunications</i>
<b>IBI</b>	<i>Interblock Interference</i>
<b>ICI</b>	<i>Interchannel Interference</i>
<b>IMT-2000</b>	<i>International Mobile Telecommunications-2000</i>
<b>ISI</b>	<i>Inter Symbol Interference</i>
<b>LCMV</b>	<i>Linearly Constrained Minimum Variance</i>
<b>LTE</b>	<i>Long Term Evolution</i>
<b>MC</b>	<i>Multicarrier</i>
<b>MC CDMA CP</b>	CDMA multiportadora com prefixo cíclico
<b>MC CDMA ZP</b>	CDMA multiportadora com pré-enchimento de zeros
<b>MIMO</b>	<i>Multiple Input - Multiple Output</i>
<b>MISO</b>	<i>Multiple Input - Single Output</i>
<b>ML</b>	<i>Maximum likelihood</i>
<b>MMSE</b>	<i>Minimum Mean Squared Error</i>
<b>MOE</b>	<i>Minimum Output Energy</i>
<b>MSE</b>	<i>Mean Squared Error</i>
<b>NFR</b>	<i>Near-far Ratio</i>
<b>OFDM</b>	<i>Orthogonal Frequency-Division Multiplexing</i>
<b>OFDMA</b>	<i>Orthogonal Frequency-Division Multiple Access</i>
<b>PAPR</b>	<i>Peak-to-Average Power Ratio</i>
<b>PDC</b>	<i>Personal Digital Cellular</i>
<b>PEP</b>	<i>Pairwise Error Probability</i>
<b>RLS</b>	<i>Recursive Least Squares</i>
<b>SC</b>	<i>Single Carrier</i>

<b>SC CDMA CP</b>	CDMA de portadora única com prefixo cíclico
<b>SC CDMA ZP</b>	CDMA de portadora única com preenchimento de zeros
<b>SG</b>	<i>Stochastic Gradient</i>
<b>SIMO</b>	<i>Single Input - Multiple Output</i>
<b>SINR</b>	<i>Signal-to-noise plus interference Ratio</i>
<b>SISO</b>	<i>Single Input - Single Output</i>
<b>SVD</b>	<i>Singular Value Decomposition</i>
<b>TDMA</b>	<i>Time Division Multiple Access</i>
<b>UMTS</b>	<i>Universal Mobile Telecommunications System</i>
<b>ZF</b>	<i>Zero Forcing</i>
<b>ZP</b>	<i>Zero Padding</i>

## Notação matemática

$x$	Escalar
$\mathbf{x}$	Vetor
$\mathbf{X}$	Matriz
$(\cdot)^T$	Transposto
$(\cdot)^H$	Hermitiano
$(\cdot)^*$	Complexo conjugado
$(\cdot)^\dagger$	Pseudo-inversa Moore-Penrose de uma matriz
$\ \mathbf{x}\ $	norma euclidiana de $\mathbf{x}$
$\ \mathbf{X}\ _F$	norma de Frobenius de $\mathbf{X}$
$\mathbf{I}_N$	Matriz identidade de tamanho $N$
$\mathbf{0}_{M \times L}$	Matriz de tamanho $M \times L$ com todos os elementos igual a zero
$\mathbb{H}$	Matriz circulante
$\text{diag}(\mathbf{x})$	Matriz diagonal cujos elementos não nulos são iguais aos elementos de $\mathbf{x}$
$\text{vec}[\cdot]$	operador que empilha as colunas de uma matriz para formar um vetor
$\text{tr}[\cdot]$	Traço de uma matriz
$\det[\cdot]$	Determinante
$\text{rank}[\cdot]$	Posto
$\otimes$	Produto Kronecker
$\nabla_{\mathbf{x}} J$	Gradiente de $J$ com relação a $\mathbf{x}$
$\mathbb{E}[\cdot]$	Valor esperado
$\mathbb{E}_x[y]$	Valor esperado de $y$ com relação a $x$
$\text{disc}\{x\}$	símbolo da constelação mais próximo de $x$
$\text{disc}\{\mathbf{x}\}$	vetor dos símbolos da constelação mais próximos dos símbolos de $\mathbf{x}$
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$\Re(\cdot)$	Parte real de um número complexo
$\Im(\cdot)$	Parte imaginária de um número complexo
$\arg \max_x(y)$	argumento do máximo valor de $y$ em relação a $x$
$\arg \min_x(y)$	argumento do mínimo valor de $y$ em relação a $x$



*“O temor do Senhor é o princípio da sabedoria.”*

*“Feliz o homem que encontrou a sabedoria e adquiriu a inteligência, porque a sua conquista vale mais que a prata, e o seu lucro é melhor que o ouro fino. Ela é mais preciosa do que as pérolas e nada do que possas desejar lhe será igual. Na mão direita sustenta uma longa vida, e na esquerda, riquezas e glória. Os seus caminhos são deliciosos e são tranquilas todas as suas veredas. É árvore da Vida para aqueles que a alcançam; felizes daqueles que a possuem.”*

**Rei Salomão, Provérbios 1,7;3,13-18.**