

5

Conclusão

Nosso trabalho parte da premissa de que Frege escrevera um livro em 1882 na conceitografia no qual ele tinha provado as leis básicas da aritmética. Além disso, foi suposto que **GLA** foi escrito para ser uma espécie de prolegômenos ao livro mencionado na missiva a Marty. Em nossa visão, o sistema lógico subjacente ao livro de 1882 é o sistema de **BS**.

Analisamos o sistema de **BS** e argumentamos que **IV*** e **BB**, que desempenhariam um papel importante na teoria Fregeana das extensões, não eram prováveis neste livro. Ademais, discutimos que a introdução destas fórmulas como axiomas acarretaria problemas substanciais ao sistema lógico de **BS**.

Mencionamos que provavelmente Frege não dispunha de **IV*** e **BB** em 1884, fato este que produziria, com a introdução das extensões de conceitos e o **Axioma V** no sistema, uma teoria extremamente complicada. De fato, como mencionamos, somos céticos se Frege dispunha deste axioma quando publicou **GLA**. Além disso, ele não poderia obter **PH** a partir da sua definição explícita do operador cardinalidade.

Argumentamos que, como um livro de introdução, **GLA** não cumpre seu papel. Não há uma discussão minuciosa sobre que tipo de objetos são as extensões de conceitos e qual é a sua natureza. Grande parte deste livro parece sugerir que números são entidades intimamente ligadas a conceitos, dos quais poderíamos obter conhecimento por meio da relação lógica de equinumerosidade.

Segundo o nosso entendimento, as extensões de conceitos foram introduzidas tardiamente com o intuito de evitar o Problema de Júlio César. Como tentamos mostrar, este problema é ocultado quando introduzimos apenas o **PH** ao sistema de **BS**, uma vez que os únicos termos singulares do sistema são nomes da forma $\#_x \dots x \dots$. Sugerimos que este problema tenha ocorrido a Frege quando ele começou as suas investigações sobre os demais números. Ele seria obrigado a introduzir novos operadores abstração e, com isso, o Problema de Júlio César se estabeleceria dentro do sistema formal.

Mostramos que não é evidente que tipo de extensões de conceitos os números são. Eles parecem ser identificados às extensões de conceitos de segunda ordem. Neste caso, o operador-extensionalidade seria uma função de terceira

ordem regido por um Axioma V de ordem superior. Mas, sendo isto o caso, Frege teria novamente problemas com a identidade, uma vez que nos parece plausível supor a existência de conceitos de primeira ordem regidos pelo Axioma V habitual.

Alguns autores defendem que a definição de **GLA** é a mesma que a de **GGA**, isto é, números são extensões de conceitos de primeira-ordem. Isto exige “reduzir” o conceito de equinumerosidade, que é de segunda ordem, a um conceito de primeira ordem. Mostramos que a defesa desta interpretação baseia-se em uma questão linguística, mas que, formalmente, esta redução não é possível no sistema lógico subjacente de **GGA**. Apontamos que sem **IV*** ou **BB** no sistema de **GLA**, Frege não poderia obter algo análogo ao teorema 1 de **GGA**, sem o qual não é possível obter algo análogo ao teorema 2 de **GGA**. Neste caso, Frege teria de introduzir um Axioma V para obter extensões de relações binárias e definir uma relação de pertinência para estes objetos. Discutimos ainda uma possível teoria sugerida por Landini, mas igualmente problemática.

Por outro lado, indicamos que a adição de **PH** ao sistema de **BS** produz os axiomas de Peano e o sistema é relativamente simples, salvo, é claro, a questão de **PH** ser uma definição. Além disso, afirmamos que a demora na publicação de **GGA** é um sintoma de que havia problemas com a introdução das extensões de conceitos a **GLA**.

Afirmamos que a distinção entre sentido e referência e a introdução dos valores de verdades tinham o objetivo formal de justificar a introdução do Axioma IV no sistema de **GGA**. Este axioma implica o teorema IVa, que desempenha um papel essencial na prova do teorema 1 de **GGA**, a partir do qual é obtido o teorema 2 de **GGA**. Estes teoremas justificam as reduções Fregeanas dos conceitos matemáticos de segunda ordem expressos em **BS** e **GLA** aos conceitos de primeira ordem de **GGA**. Isto também possibilitou o descarte dos axiomas Iib para relações enéarias.

Muitos problemas tratados aqui foram obliterados na literatura secundária por causa da tradução notacional, na qual o papel desempenhado pelo traço de conteúdo se perde. Ademais, a definição de pertinência na tradução não faz jus à definição desta relação em **GGA**. Na linguagem lógica contemporânea, a tripla

barra e a identidade, quando ocorrem entre sentenças, são traduzidas pela bi-implicação. Acreditamos que esta tese é uma pequena contribuição para dissipar estes mal-entendidos.