4
Provas a partir do Princípio de Hume sem usar IVa

Nosso objetivo aqui é mostrar que é totalmente possível provar os teoremas mencionados por Frege em **GLA**, inclusive o teorema referido na § 83 que é primordial para a prova do teorema de que todo número natural tem um sucessor, a partir da teoria obtida com a introdução do **Princípio de Hume** (mais definições dos conceitos aritméticos) ao sistema lógico de BS sem usar o Teorema IVa de **GGA**. Seguimos as provas dadas em **GGA**, tomando-se, obviamente, o cuidado de excluir qualquer menção às extensões de conceitos e todo uso do Teorema IVa[418].

Este capítulo está dividido em três partes. Na primeira, apresentamos os axiomas de **BS**, as regras de inferência e os teoremas lógicos que usamos nas provas formais das proposições mencionadas em **GLA**. Em relação às regras de inferência, seguimos o procedimento de Frege em **GGA**, permitindo mais regras de inferência que em **BS**. Em particular, poderíamos excluir o Axioma 28 de **BS**, uma vez que adicionamos uma regra de inferência correspondente, a Regra de Contraposição.

Na segunda parte, introduzimos as definições dos conceitos aritméticos fundamentais. Aqui, preferimos seguir as definições de **GLA** ao invés de **GGA**. As principais diferenças são que não definimos a inversa de uma relação S – como é feito em **GGA** – e definimos quando uma relação S é Um-para-Muitos. Além disso, diferente de **GGA**, onde é definido o mapeamento de um conceito *P* em um conceito *Q* por meio de uma relação *S*, preferimos definir o conceito de correlação entre dois conceitos *P* e *Q* via uma relação *S*[419].

Na terceira parte, provamos os teoremas mencionados nas §§ 75-83 de **GLA**. Observamos que, em **GGA**, as provas de alguns destes teoremas fazem uso do Teorema IVa. O que mostramos é que muitos usos deste teorema em **GGA** são

418 Certamente, há diferenças entre as nossas provas e as de **GGA**. Em parte, porque usamos as definições de **GLA** que são ligeiramente diferentes de **GGA**, em parte porque, sem o **Teorema IVa**, não podemos usar alguns expedientes de Frege, em particular, usar o **Teorema 96** de **GGA**: $\forall x(F(x) \equiv G(x)) \supset \sharp_x F(x) = \sharp_x Gx$, onde '$\sharp_x ... x ...$' é o operador-abstração 'o número de...'. O teorema 96 diz que se dois conceitos são coextensivos, então eles têm o mesmo número. O teorema 96 é provável na teoria proposta aqui, mas isto não tem qualquer serventia, uma vez que não é provável na presente teoria o antecedente do **Teorema 96**, porque não temos o **Teorema IVa**.

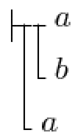
419 Uma relação S mapeia um conceito *P* em um conceito *Q* justamente quando *S* é funcional e todo objeto que cai sob *P* encontra-se na relação *S* com algum objeto que cai sob *Q*.

totalmente dispensáveis, embora ele seja essencial à prova do **Princípio de Hume** a partir da definição explícita em termos de extensões de conceitos[420]. Uma vez que IVa não é provável em **BS** e que Frege já tinha provado as leis básicas da aritmética em 1882, tudo nos leva a crer que estas leis foram provadas a partir do **Princípio de Hume**, adicionado-o como uma espécie de definição (ou como um axioma) a **BS**.

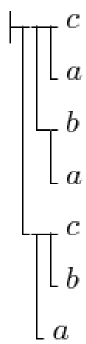
4.1. Axiomas de Begriffsschrift, regras de inferência e teoremas importantes

4.1.1. Axiomas de Begriffsschrift

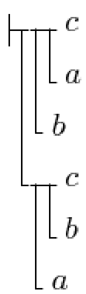
Axioma 1 de BS (§ 14) – (1BS)



Axioma 2 de BS (§ 14) – (2BS)

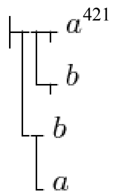


Axioma 8 de BS (§ 16) – (8BS)

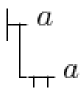


420 Existe um paralelo entre o uso do **Teorema IVa** e o uso das extensões em **GGA**, que não parece ser uma mera coincidência. Como Heck (1993) mostrou, o único uso essencial das extensões de conceitos em **GGA** é na prova do **Princípio de Hume**. O que estamos mostrando aqui é que o único uso essencial do **Teorema IVa** em **GGA1** é justamente na prova do **Princípio de Hume** também. Todos os outros usos são totalmente dispensáveis.

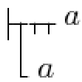
Axioma 28 de BS (§ 17) – (28BS)



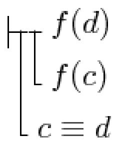
Axioma 31 de BS (§ 18) – (31BS)



Axioma 41 de BS (§ 19) – (41BS)

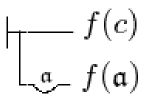


Axioma 52 de BS (§ 20) – (52BS)

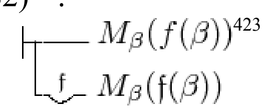


Axioma 54 de BS (§ 21) – (54BS)

Axioma 58 de BS (§ 22) – (58BS1)



Implicitamente, em BS, Frege assume uma instância de segunda-ordem do Axioma 58, cuja forma seria (58BS2)[422]:



.

Também usaremos a seguinte versão de segunda ordem do Axioma 58 que chamaremos indiscriminadamente de 58BS2:

421 Este axioma também é dispensável, porque introduziremos mais adiante uma regra de inferência que corresponde exatamente a este axioma.

422 Veja as provas dos teoremas 77 e 93 de **BS**, por exemplo.

423 Na notação contemporânea: $\forall f M_\beta(f(\beta)) \supset M_\beta(g(\beta))$.

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\top\!\!\!-\; M_{\alpha\beta}(f(\alpha,\beta)) \\ \;\;\llcorner\!\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!-\; M_{\alpha\beta}(\mathfrak{f}(\alpha,\beta)) \end{array}$$ [424] [425]

.

4.1.2.
Regras de inferência

Modus Ponens (MP)

De

$$\vdash a$$

e

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\top\, b \\ \;\;\llcorner\, a \end{array},$$

inferir

$$\vdash b.$$ [426]

Seguindo Frege, aplicamos uma forma generalizada de MP. Por exemplo, das fórmulas

$$\vdash c$$

e

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\top\!\!\top\!\!\top\, d \\ \;\;\;\;\;\;\;\llcorner\, c \\ \;\;\;\;\llcorner\, b \\ \;\;\llcorner\, a \end{array},$$

podemos inferir

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\top\!\!\top\, d \\ \;\;\;\;\llcorner\, b \\ \;\;\llcorner\, a \end{array}.$$

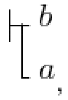
Contraposição (CP)

De

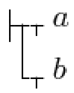
424 Em **GGA**, Frege não faz uso dessa versão de **58BS2**, uma vez que, com a introdução dos percursos de valores, ele é capaz de representar funções de segunda-ordem por meio de funções de primeira ordem. Mas parece razoável assumir que ele tenha feito uso de algo similar a esta lei em 1882, principalmente porque ela é necessária na prova de (**PH6**) e dos teoremas 5 e 6. Veja, por exemplo, o uso de **58BS2** na prova da fórmula 29 abaixo.

425 A propósito, na §25 de **GGA**, Frege reivindica que é feito apenas um único uso de **58BS2** (lei básica IIb), mas isto é incorreto. Ela é usada na prova do teorema 1 (**GGA**, pág. 74) e na prova do teorema 123 (**GGA**, pág. 138), que é um análogo de (**G3**) abaixo.

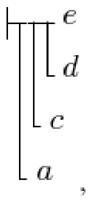
426 Na notação contemporânea: $a, a \supset b \vdash b$.



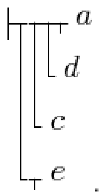
inferir

 [427] [428]

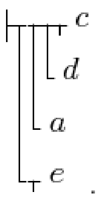
Novamente, seguindo Frege, utilizaremos uma versão generalizada de CP. Por exemplo, da fórmula



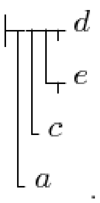
podemos inferir



Ou, então, podemos inferir

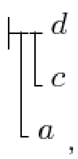


E ainda podemos inferir



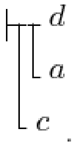
Permutação dos Antecedentes (P)

De

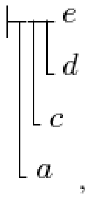


inferir

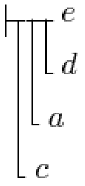
427 Na notação contemporânea: $a \supset b \vdash \neg b \supset \neg a$.
428 Como já mencionamos esta regra corresponde ao **Axioma 28** de BS.

 [429] [430]

Essa regra pode ser generalizada também. Assim, a partir da fórmula

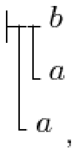


podemos inferir, por exemplo,

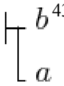
 [431]

Amalgamação de Antecedentes Idênticos (AmI)

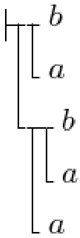
De



inferir

 [432]

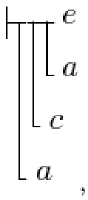
Frege não provou o teorema



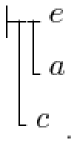
correspondente a esta regra em **BS**, embora o mesmo seja provável.

Como nos casos anteriores, é possível generalizar (AmI). Assim, por exemplo, da fórmula

429 Na notação contemporânea: $(a \supset (c \supset d)) \vdash (c \supset (a \supset d))$.
430 Como já mencionamos, esta regra corresponde ao **Axioma 8** de BS.
431 Veja os **Teoremas 12-17** de **BS**.
432 Na notação contemporânea: $(a \supset (a \supset b)) \vdash (a \supset b)$.

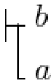


podemos inferir

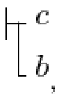


Transitividade do Condicional (TR)

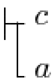
De



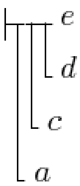
e



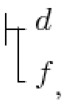
inferir

 [433] [434]

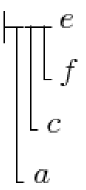
Como anteriormente, generalizações desta regra serão utilizadas nas provas. Por exemplo, de



e



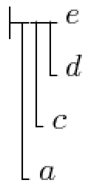
podemos inferir



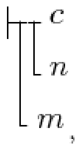
Mais um exemplo: de

433 Na notação contemporânea: $a \supset b, b \supset c \vdash a \supset c$.

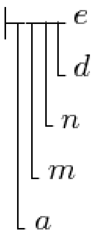
434 Esta regra corresponde ao **Teorema 5** de **BS**.



e

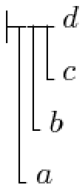


podemos inferir

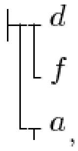


Terceiro Método de Inferência de GGA - (TMI)

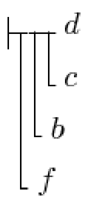
De



e



podemos inferir

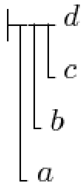

[435]

Esta regra é um pouco mais complicada que as demais. Quando duas fórmulas têm consequentes idênticos e um dos antecedentes de uma fórmula ocorre com uma negação na outra, podemos juntar em uma única fórmula todos os demais antecedentes que implicam o consequente comum, excluindo o antecedente que é

435 Na notação contemporânea: $(a \supset (b \supset (c \supset d))), (\neg a \supset (f \supset d)) \vdash (f \supset (b \supset (c \supset d)))$.

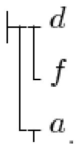
afirmado em uma e negado na outra. No exemplo acima, este antecedente, que é afirmado em uma fórmula, mas negado na outra, é o '*a*'. Para entendermos melhor esta regra, basta ter em mente como ela pode ser derivada das demais acima. Assumamos

(I)



e

(II)

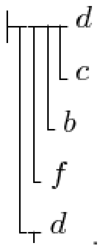


De (II), por meio de (CP), obtemos

(III)

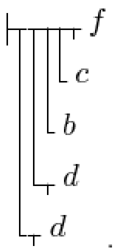
De (I) e (III), por meio de (TR), inferimos

(IV)



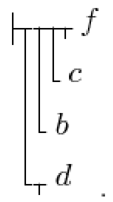
De (IV), por (CP), derivamos

(V)



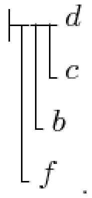
De (V), usando (AmI), obtemos

(VI)



E, finalmente, de (VI), por meio de (CP), obtemos

(VII)



Generalização universal I e II - (GU1, GU2)

(GUI)

De

$$\vdash f(a),$$

inferir

$$\vdash\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!- f(\mathfrak{a})$$

(GU2)

De

$$\vdash M_\beta f(\beta),$$

inferir

$$\vdash\!\!\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!\!- M_\beta \mathfrak{f}(\beta)$$ [436].

E também de

$$\vdash M_{\alpha\beta} f(\alpha, \beta),$$

inferir

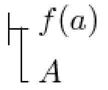
$$\vdash\!\!\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!\!- M_{\alpha\beta} \mathfrak{f}(\alpha, \beta).$$

436 Confira as provas dos teoremas 91 e 93 de **BS**.

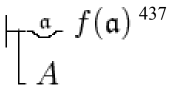
Confinamento da Generalidade ao Consequente I e II– (CGC1, CGC2)

(CGC1)

De

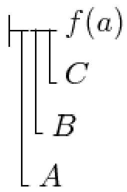
,

podemos inferir

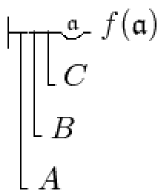
[437],

onde '*a*' não ocorre livre em *A*[438].

Uma versão generalizada de **CGC1** será aplicada também. Assim, por exemplo, de

,

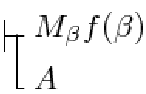
podemos inferir

,

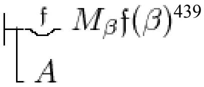
onde '*a*' não ocorre livre nem em *A*, nem em *B* e nem *C*.

(CGC2)

De

,

podemos inferir

[439],

437 Na notação moderna: $A \supset f(a) \vdash A \supset \forall x f(x)$

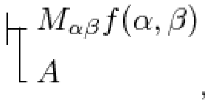
438 Veja §11 de **BS**.

439 Na notação contemporânea: $A \supset M_\beta(g(\beta)) \vdash A \supset \forall f M_\beta(f(\beta))$.

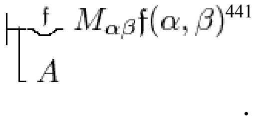
onde '*f*' não ocorre livre em '*A*'[440].

Também usaremos a seguinte versão de (CGC2):

De

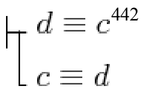


inferir

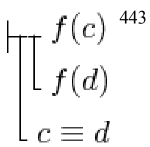


4.1.3.
Teoremas importantes

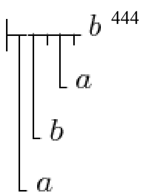
Teorema 55 de BS - (55BS)



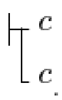
Teorema 57 de BS - (57BS)



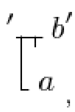
Teorema Ie de GGA - (IeGGA)



Frege não provou este teorema em **BS**, embora o mesmo seja provável. Em **BS**, temos o Teorema 27 (27BS)



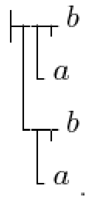
Substituindo-se '*c*' por



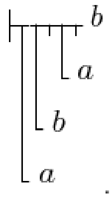
440 Para um exemplo de **CGC2** em **BS**, veja a prova do teorema 91.
441 Versões generalizadas de **CGC2** também serão usadas.
442 Na notação contemporânea: $(c \equiv d) \supset (d \equiv c)$.
443 Na notação contemporânea: $((c \equiv d) \supset (f(d) \supset f(c)))$.
444 Na notação contemporânea: $(a \supset (b \supset \neg(a \supset \neg b)))$.

,

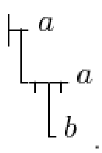
obtemos



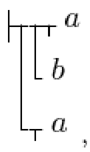
Desta fórmula, por (CP) e (P) , inferimos



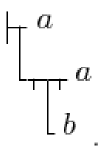
Teorema Ib de GGA - (IbGGA)


[445]

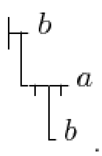
Este teorema também não foi provado em **BS**, não obstante é provável no sistema. Da seguinte instância do 1BS



e (CP), derivamos



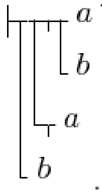
Também é provável em **BS** o seguinte teorema que chamaremos indiscriminadamente de (IbGGA):


[446]

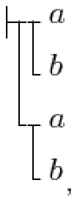
445 Na notação contemporânea: $(\neg(b \supset \neg a) \supset a)$.

446 A prova deste teorema em **BS** é usando o **Teorema 38** de **BS** e contraposição.

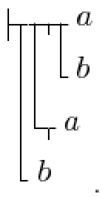
Teorema If de GGA - (IfGGA)

 [447]

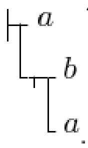
Novamente, este teorema não foi provado em **BS**, contudo é provável no sistema. Da seguinte instância de (27BS)



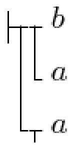
(CP) e (P), inferimos



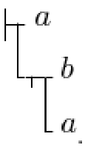
Teorema Id de GGA – (IdGGA)

 [448]

Outro teorema que não foi provado por Frege em **BS**, mas que é provável no sistema. A partir do Teorema 38 de **BS** (38BS)



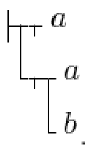
e (**CP**), obtemos



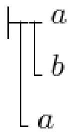
447 Na notação contemporânea: $(b \supset (\neg a \supset \neg(a \supset b)))$.

448 Na notação contemporânea: $(\neg(a \supset b) \supset a)$.

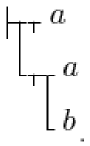
Teorema Ic de GGA - (IcGGA)

 [449]

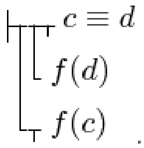
Este teorema também é provável em **BS**. A partir de 1BS



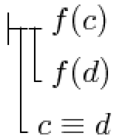
e CP, derivamos



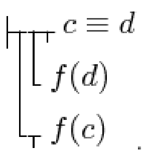
Teorema IIIb de GGA – (IIIbGGA)

 [450]

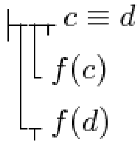
Este teorema também é provável em **BS**. A partir de 57BS



e (**CP**), inferimos



Teorema IIId de GGA - (IIIdGGA)

 [451]

Este teorema também é provável em **BS**. A partir de 52BS

449 Na notação contemporânea: $(\neg(b \supset a) \supset \neg a)$.
450 Na notação contemporânea: $(\neg f(c) \supset (f(d) \supset \neg(c \equiv d)))$.
451 Na notação contemporânea: $(\neg f(d) \supset (f(c) \supset \neg(c \equiv d)))$.

$$\vdash \begin{array}{l} f(d) \\ \quad f(c) \\ c \equiv d \end{array}$$

e (CP), derivamos

$$\vdash \begin{array}{l} c \equiv d \\ \quad f(c) \\ \neg\, f(d) \end{array}$$.

Teorema 36 de BS – (36BS)

$$\vdash \begin{array}{l} b \\ \quad \neg\, a \\ a \end{array}$$ [452]

4.2.
Definições dos conceitos aritméticos fundamentais

Definição de uma Relação S ser Funcional ou Muitos-para-Um (BS, §31, GLA, §72):

$$\Vdash \left(\left(\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\, \overset{\mathfrak{b}}{\smile} \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \begin{array}{l} \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{a} \\ S(\mathfrak{e}, \mathfrak{a}) \end{array} \\ S(\mathfrak{e}, \mathfrak{b}) \end{array} \right) \equiv Func_{\alpha\beta}S(\alpha, \beta) \right)$$ [453]

(A)

Definição de uma Relação S ser Um-para-Muitos (GLA, §72)

$$\Vdash \left(\left(\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\, \overset{\mathfrak{b}}{\smile} \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \begin{array}{l} \mathfrak{e} \equiv \mathfrak{a} \\ S(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \end{array} \\ S(\mathfrak{e}, \mathfrak{b}) \end{array} \right) \equiv UpM_{\alpha\beta}S(\alpha, \beta) \right)$$ [454] [455]

(B)

A conjunção de (A) e (B) define quando uma relação S é 1-1. Ou seja, uma rela-

---

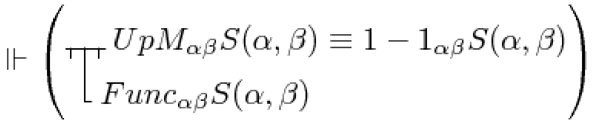
452 Na notação contemporânea: $(a \supset (\neg a \supset b))$.

453 Na notação contemporânea: $Func_{\alpha\beta}S(\alpha,\beta) \equiv_{def} \forall x \forall y \forall z (S(x,y) \wedge S(x,z) \supset y = z)$.

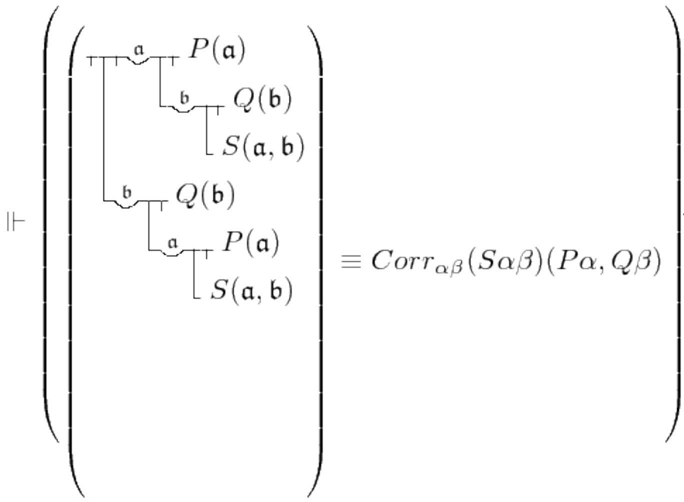
454 Aqui, seguimos a nomenclatura de Russell (1919, pág. 47): "One-many relations may be defined as relations such that, if x has the relation in question to y, there is no other term x' which also has the relation to y".

455 Na notação contemporânea: $UpM_{\alpha\beta}S(\alpha,\beta) \equiv_{def} \forall x \forall y \forall z (S(x,y) \wedge S(z,y) \supset x = z)$.

ção S é 1-1 justamente no caso em que ela é funcional (Muitos-para-Um) e Um-para-Muitos[456]. Em notação Fregeana:

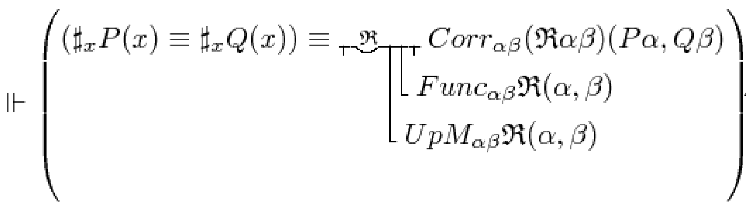


Definição de uma Correlação entre os Conceitos P e Q via uma Relação S (GLA, §71):


[457]

(C)

Princípio de Hume (GLA, §63 e §72):


[458]

(PH).

456 Em **GLA** (§ 72), Frege define: "We have thus seen when the objects falling under the concepts *F* and *G* are correlated with each other by the relation ϕ. But now in our case, this correlation has to be one-one. By this I understand that the following propositions both hold good:

I. If *d* stands in the relation ϕ to *a*, and if *d* stands in the relation ϕ to *e*, then generally, whatever *d*, *a* and *e* may be, *a* is the same as *e*.

II. If *d* stands in the relation ϕ to *a*, and if *b* stands in the relation ϕ to *a*, then generally, whatever *d*, *b* and *a* may be, *d* is the same as *b*.".

457 Dois conceitos *P* e *Q* são correlacionados por uma relação *S* justamente quando para todo objeto *x* que cai sob *P* existe um objeto *y* que cai sob *Q* e *S*(*x*,*y*) e para todo objeto *y* que cai sob *Q* existe um objeto *x* que é *P* e *S*(*x*, *y*). Na notação contemporânea:
$Corr_{\alpha\beta}(S\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta) \equiv_{def} [\forall x(P(x) \to \exists y\ (Q(y)\ \&\ \mathrm{S}(x, y))\ \&\ \forall y(Q(y) \to \exists x(P(x)\ \&\ (S(x, y))]$.

458 Relembrando: o número que pertence ao conceito *P* é igual ao número que pertence ao conceito *Q* justamente quando existe um relação *R* tal que *R* é funcional e Um-para-Muitos e *R* correlaciona os *P*s e os *Q*s.

Definição do Número Zero (GLA, §74):

$\Vdash (\sharp_x(\neg\, x \equiv x) \equiv 0)$[459]

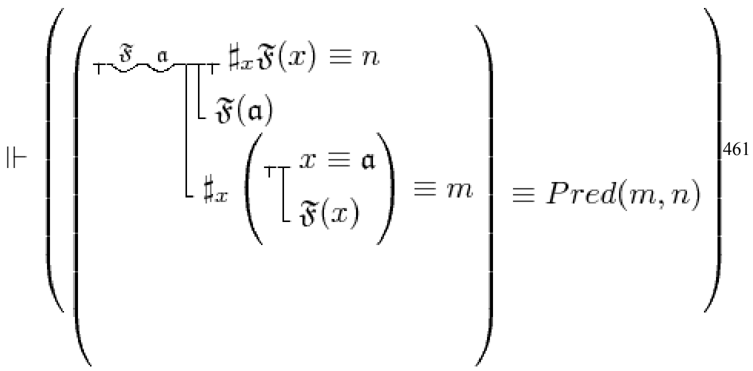
(D)

Definição do Número Um (GLA, §77)

$\Vdash (\sharp_x(x \equiv 0) \equiv 1)$[460]

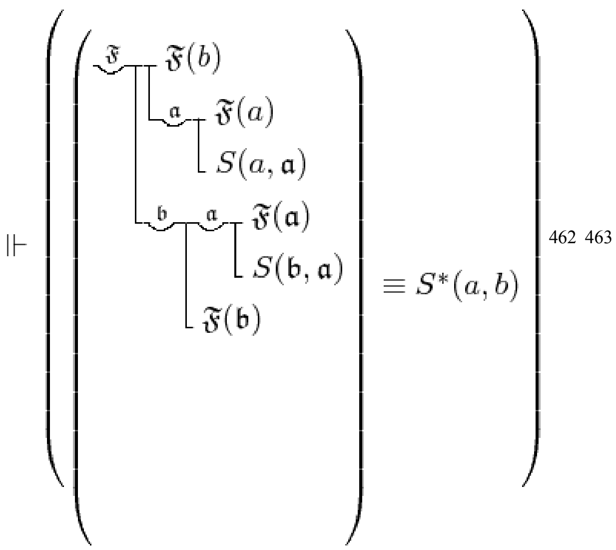
(E)

Definição da Relação 'Sucessor' (GLA, §76):



(F)

Definição do Ancestral Forte de uma Relação S (BS, §26, GLA, §79):



(G)

459 Ou seja, 0 é o número que pertence ao conceito 'ser diferente de si mesmo'.

460 Ou seja, 1 é o número que pertence ao conceito 'ser idêntico a 0'.

461 Isto é, *n* é o sucessor de *m* (ou *m* é o predecessor de *n*) justamente quando existem um *conceito F* e um objeto *y* tal que o número que pertence ao conceito *F* é *n* e *y* cai sob o conceito *F* e o número que pertence ao conceito ' cair sob F mas diferente de *y*' é *m.*

462 Na notação contemporânea:
$S^*(a,b) \equiv_{def} \forall F\{[\forall x \forall y(F(x) \wedge S(x,y) \supset F(y)) \wedge \forall x(S(a,x) \supset F(x))] \supset F(b)\}$

463 De acordo com Frege, esta fórmula define o conceito de "*b* vir depois *de a* na relação *f*".

Definição do Ancestral Fraco de uma Relação S **(BS, §29, GLA, §81)**

$$\Vdash \left(\begin{array}{l} \top\; b \equiv a \\ \llcorner_{\top}\; S^{*}(a,b) \end{array}\right) \equiv S^{**}(a,b)$$ [464] [465]

(H)

Definições de Número Cardinal (GLA, §72) e Número Natural (GLA, §83)

$$\Vdash [(\,\top\!\overset{\mathfrak{F}}{\smile}\!\top\; \natural_x \mathfrak{F}(x) \equiv n) \equiv Card(n)]$$ [466]

(I)

$$\Vdash [Pred^{**}(0,n) \equiv Nat(n)]$$ [467]

(J)

4.3 - Provas

Derivações a partir das Definições

(A)

$$\vdash \left(\left(\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\; \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{a} \\ \qquad\qquad\quad \llcorner\; S(\mathfrak{e},\mathfrak{a}) \\ \qquad\quad \llcorner\; S(\mathfrak{e},\mathfrak{b}) \end{array} \right) \equiv Func_{\alpha\beta} S(\alpha,\beta) \right)$$

Usando o 52BS

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\!\top\; f(d) \\ \quad\;\; \llcorner\; f(c) \\ \quad \llcorner\; c \equiv d \end{array},$$

obtemos

464 Na notação contemporânea: $S^{**}(a,b) \equiv_{def} S^{*}(a,b) \vee b = a$

465 Segundo Frege, esta fórmula define o conceito de "*b* pertencer à *f*-série iniciada por *a*" ou "*a* pertencer a *f*-série terminada por *b*".

466 Na notação contemporânea: $Card(n) \equiv_{def} \exists F(\natural_x F(x) = n)$.

467 Número natural é todo objeto que pertence Pred-série iniciada por 0.

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\top\!\top\, Func_{\alpha\beta}S(\alpha,\beta)\\
\quad \llcorner \smile^{\mathfrak{e}}\smile^{\mathfrak{b}}\!\top\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\top\, \mathfrak{b}\equiv\mathfrak{a}\\
\qquad\qquad\qquad \llcorner\, S(\mathfrak{e},\mathfrak{a})\\
\qquad\qquad \llcorner\, S(\mathfrak{e},\mathfrak{b})\\
\llcorner \left(\left(\begin{array}{l}\smile^{\mathfrak{e}}\smile^{\mathfrak{b}}\!\top\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\top\, \mathfrak{b}\equiv\mathfrak{a}\\ \qquad\qquad \llcorner\, S(\mathfrak{e},\mathfrak{a})\\ \qquad \llcorner\, S(\mathfrak{e},\mathfrak{b})\end{array}\right) \equiv Func_{\alpha\beta}S(\alpha,\beta)\right),
\end{array}$$

(α1),

substituindo-se ‘c’ por

$$\begin{array}{l}
``\smile^{\mathfrak{e}}\smile^{\mathfrak{b}}\!\top\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\top\, \mathfrak{b}\equiv\mathfrak{a}\;"\\
\qquad\qquad\qquad \llcorner\, S(\mathfrak{e},\mathfrak{a})\\
\qquad\qquad \llcorner\, S(\mathfrak{e},\mathfrak{b})\;,
\end{array}$$

‘*d*’ por ‘$Func_{\alpha\beta}S(\alpha,\beta)$’ e ‘$f\xi$’ por ‘ξ’.

Aplicando MP entre (A) e (α1), derivamos

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\top\, Func_{\alpha\beta}S(\alpha,\beta)\\
\llcorner \smile^{\mathfrak{e}}\smile^{\mathfrak{b}}\!\top\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\top\, \mathfrak{b}\equiv\mathfrak{a}\\
\qquad\qquad\qquad \llcorner\, S(\mathfrak{e},\mathfrak{a})\\
\qquad\qquad \llcorner\, S(\mathfrak{e},\mathfrak{b})
\end{array}$$

(A1).

Usando 57BS:

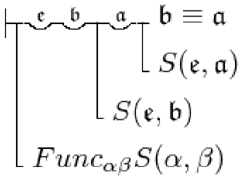
$$\begin{array}{l}
\vdash\!\top\!\top\, f(c)\\
\quad \llcorner\, f(d)\\
\llcorner\, c\equiv d),
\end{array}$$

obtemos

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\top\!\top\!\smile^{\mathfrak{e}}\smile^{\mathfrak{b}}\!\top\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\top\, \mathfrak{b}\equiv\mathfrak{a}\\
\qquad\qquad\qquad\quad \llcorner\, S(\mathfrak{e},\mathfrak{a})\\
\qquad\qquad\quad \llcorner\, S(\mathfrak{e},\mathfrak{b})\\
\quad \llcorner\, Func_{\alpha\beta}S(\alpha,\beta)\\
\llcorner \left(\left(\begin{array}{l}\smile^{\mathfrak{e}}\smile^{\mathfrak{b}}\!\top\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\top\, \mathfrak{b}\equiv\mathfrak{a}\\ \qquad\qquad \llcorner\, S(\mathfrak{e},\mathfrak{a})\\ \qquad \llcorner\, S(\mathfrak{e},\mathfrak{b})\end{array}\right) \equiv Func_{\alpha\beta}S(\alpha,\beta)\right)
\end{array}$$

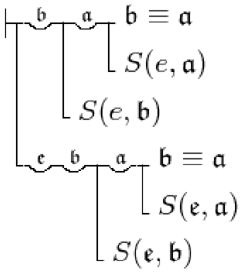
(α2).

De (A) e (α2), aplicando MP, chegamos a



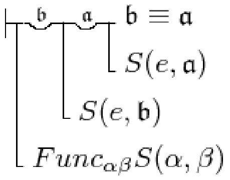
(α3).

Usando a seguinte instância de 58BS1



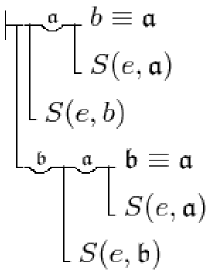
(IIa),

obtemos



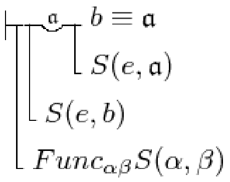
(α4),

por meio de TR entre (IIa) e (α3). Novamente, considerando a seguinte instância de 58BS1



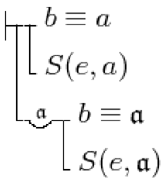
(IIa'),

obtemos



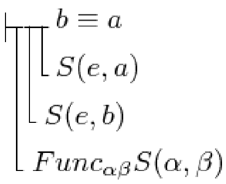
(α5),

por meio de TR entre (IIa') e (α4). Finalmente, da seguinte instância de 58BS1



(IIa"),

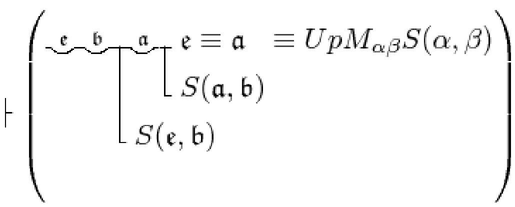
derivamos



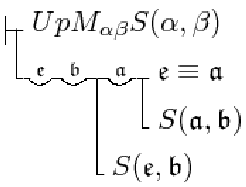
(A2)

por meio de TR entre as fórmulas (IIa") e (α5).

(B)

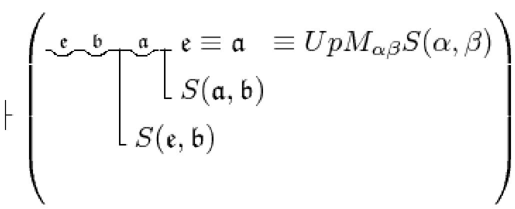


(52BS): ——————————[468]

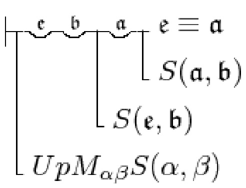


(B1).

(B)

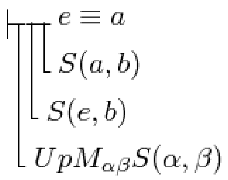


(57BS): ——————————



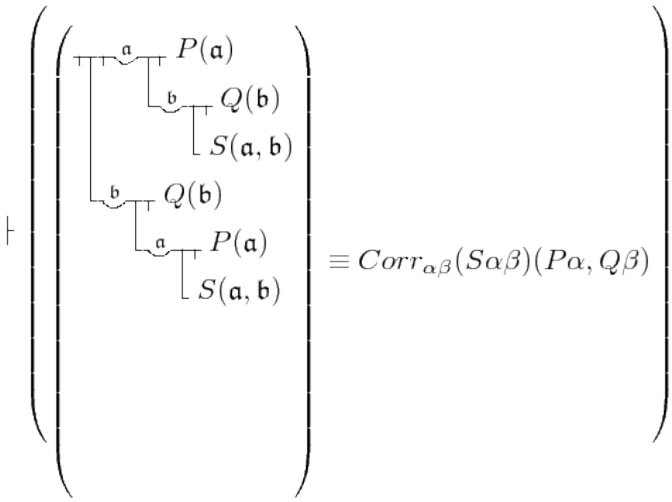
Aplicando 58BS1 (3x), obtemos

468 Este traço indica que aplicamos **MP**.

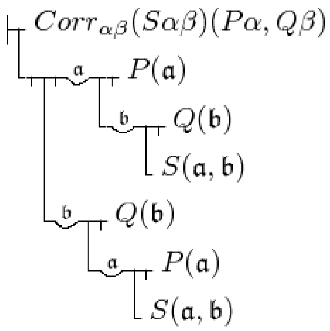


(B2).

(C)

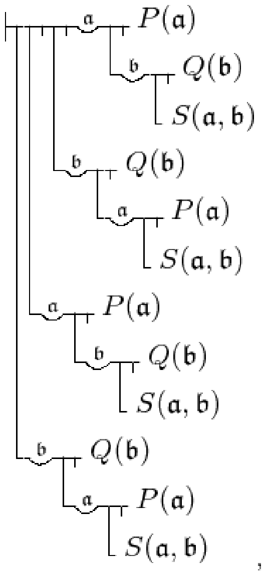


(52BS):

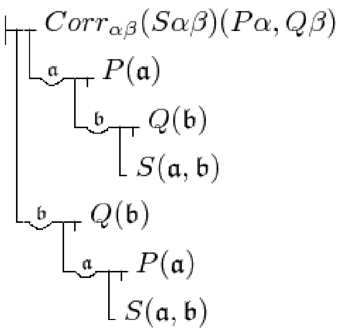


(χ1).

A partir da seguinte instância do teorema IeGGA

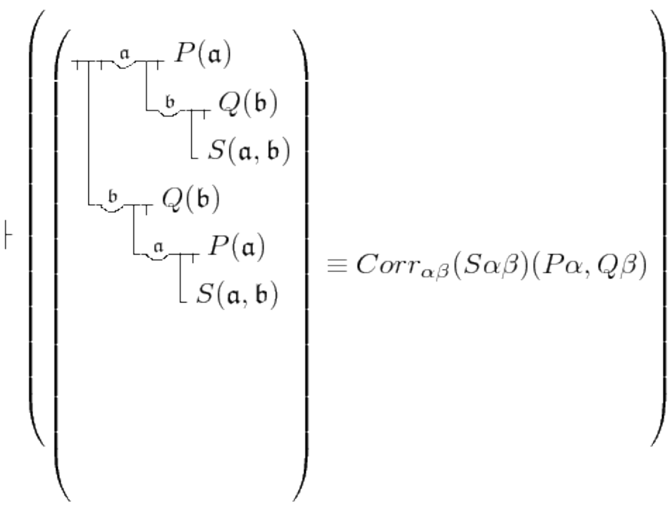


$(\chi 1)$ e TR, derivamos

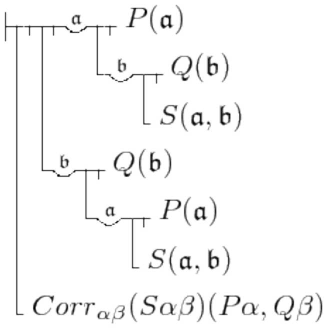


(C1).

(C)

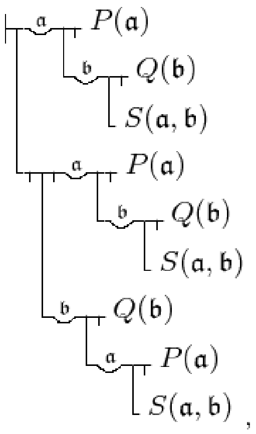


(57BS): ———————

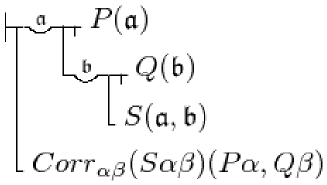


(C2).

A partir da seguinte instância do teorema IbGGA

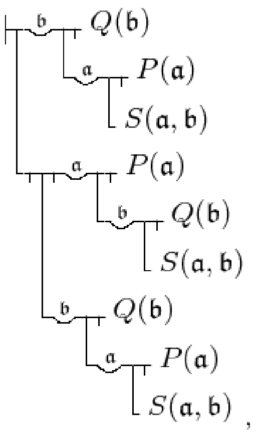


(C2) e TR, temos



(C3).

A partir de (C2) e da seguinte instância de IbGGA



por meio de TR, obtemos

$$\vdash \begin{array}{l} \smile^{\mathfrak{b}}\; Q(\mathfrak{b}) \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}}\; P(\mathfrak{a}) \\ \qquad S(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \\ Corr_{\alpha\beta}(S\alpha\beta)(P\alpha,Q\beta) \end{array}$$

(C4).

Da seguinte instância de 58BS1

$$\vdash \begin{array}{l} P(a) \\ \quad \smile^{\mathfrak{b}}\; Q(\mathfrak{b}) \\ \qquad S(a,\mathfrak{b}) \\ \smile^{\mathfrak{a}}\; P(\mathfrak{a}) \\ \quad \smile^{\mathfrak{b}}\; Q(\mathfrak{b}) \\ \qquad S(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \end{array}$$

,

(C3) e TR, derivamos

$$\vdash \begin{array}{l} P(a) \\ \quad \smile^{\mathfrak{b}}\; Q(\mathfrak{b}) \\ \qquad S(a,\mathfrak{b}) \\ Corr_{\alpha\beta}(S\alpha\beta)(P\alpha,Q\beta) \end{array}$$

(C5).

Da seguinte instância de 58BS1

$$\vdash \begin{array}{l} Q(b) \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}}\; P(\mathfrak{a}) \\ \qquad S(\mathfrak{a},b) \\ \smile^{\mathfrak{b}}\; Q(\mathfrak{b}) \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}}\; P(\mathfrak{a}) \\ \qquad S(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \end{array},$$

(C4) e TR, obtemos

$$\vdash \begin{array}{l} Q(b) \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}}\; P(\mathfrak{a}) \\ \qquad S(\mathfrak{a},b) \\ Corr_{\alpha\beta}(S\alpha\beta)(P\alpha,Q\beta) \end{array}$$

(C6).

(PH)

$$\vdash \left((\sharp_x P(x) \equiv \sharp_x Q(x)) \equiv \smile^{\mathfrak{R}} \begin{array}{l} Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(P\alpha,Q\beta) \\ \quad Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha,\beta) \\ UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha,\beta) \end{array} \right)$$

(52BS): ———————————

$$Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta)$$
$$Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta)$$
$$UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta)$$
$$\sharp_x P(x) \equiv \sharp_x Q(x)$$

(PH1).

(PH)

$$\vdash \left((\sharp_x P(x) \equiv \sharp_x Q(x)) \equiv \begin{array}{l} Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta) \\ Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \\ UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \end{array} \right)$$

(57BS): ———————————

$$\sharp_x P(x) \equiv \sharp_x Q(x)$$
$$Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta)$$
$$Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta)$$
$$UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta)$$

(PH2).

A partir de (PH1) e CP, chegamos a

$$\sharp_x P(x) \equiv \sharp_x Q(x)$$
$$Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta)$$
$$Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta)$$
$$UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta)$$

(PH3).

A partir de (PH2) e CP, obtemos

$$Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta)$$
$$Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta)$$
$$UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta)$$
$$\sharp_x P(x) \equiv \sharp_x Q(x)$$

(PH4).

Com a seguinte instância de 58BS2

$$Corr_{\alpha\beta}(S\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta)$$
$$Func_{\alpha\beta}S(\alpha, \beta)$$
$$UpM_{\alpha\beta}S(\alpha, \beta)$$
$$Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta)$$
$$Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta)$$
$$UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta)$$
,

(PH4) e TR, derivamos

$$\vdash\; Corr_{\alpha\beta}(S\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta)$$
$$Func_{\alpha\beta}S(\alpha, \beta)$$
$$UpM_{\alpha\beta}S(\alpha, \beta)$$
$$\top\; \sharp_x P(x) \equiv \sharp_x Q(x)$$

(PH5).

De (PH5) e CP, obtemos

$$\vdash\; \sharp_x P(x) \equiv \sharp_x Q(x)$$
$$Func_{\alpha\beta}S(\alpha, \beta)$$
$$UpM_{\alpha\beta}S(\alpha, \beta)$$
$$Corr_{\alpha\beta}(S\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta)$$

(PH6).

(D)

$$\vdash (\sharp_x(\top\; x \equiv x) \equiv 0)$$

(52BS): ―――――――――

$$\vdash\; F(0)$$
$$F(\sharp_x(\top\; x \equiv x))$$

(D1).

(D)

$$\vdash (\sharp_x(\top\; x \equiv x) \equiv 0)$$

(57BS): ―――――――――

$$\vdash\; F(\sharp_x(\top\; x \equiv x))$$
$$F(0)$$

(D2).

(E)

$$\vdash (\sharp_x(x \equiv 0) \equiv 1)$$

(52BS): ―――――――――

$$\vdash\; F(1)$$
$$F(\sharp_x(x \equiv 0)$$

(E1).

(E)

$$\vdash (\sharp_x(x \equiv 0) \equiv 1)$$

(57BS): ―――――――――

$$\vdash \begin{array}{l} F(\sharp_x(x \equiv 0)) \\ F(1) \end{array}$$

(E2).

(F)

$$\vdash \left(\left(\overset{\mathfrak{F}\ \ \mathfrak{a}}{\smile\ \smile} \begin{array}{l} \sharp_x \mathfrak{F}(x) \equiv n \\ \mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \\ \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv \mathfrak{a} \\ \mathfrak{F}(x) \end{array} \right) \equiv m \end{array} \right) \equiv Pred(m,n) \right)$$

(52BS): ―――――――

$$\vdash \begin{array}{l} Pred(m,n) \\ \overset{\mathfrak{F}\ \ \mathfrak{a}}{\smile\ \smile} \begin{array}{l} \sharp_x \mathfrak{F}(x) \equiv n \\ \mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \\ \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv \mathfrak{a} \\ \mathfrak{F}(x) \end{array} \right) \equiv m \end{array} \end{array}$$

(F1).

(F)

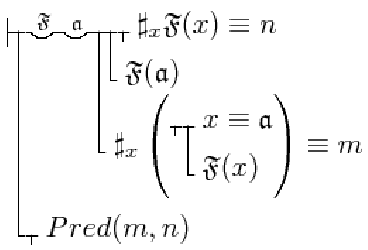
$$\vdash \left(\left(\overset{\mathfrak{F}\ \ \mathfrak{a}}{\smile\ \smile} \begin{array}{l} \sharp_x \mathfrak{F}(x) \equiv n \\ \mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \\ \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv \mathfrak{a} \\ \mathfrak{F}(x) \end{array} \right) \equiv m \end{array} \right) \equiv Pred(m,n) \right)$$

(57BS): ―――――――

$$\vdash \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{F}\ \ \mathfrak{a}}{\smile\ \smile} \begin{array}{l} \sharp_x \mathfrak{F}(x) \equiv n \\ \mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \\ \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv \mathfrak{a} \\ \mathfrak{F}(x) \end{array} \right) \equiv m \end{array} \\ Pred(m,n) \end{array}$$

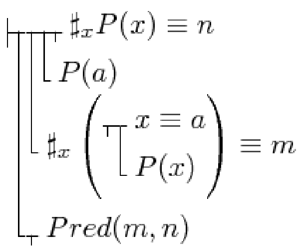
(F2).

A partir de (F1) e CP, temos



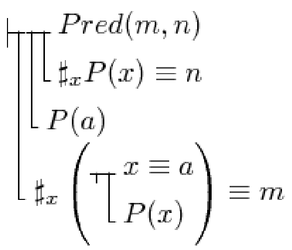
(F3).

Usando instâncias de 58BS2, 58BS1, F3 e TR, obtemos



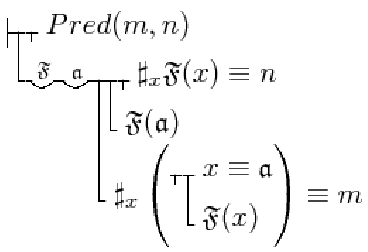
(F4).

A partir de (F4) e CP, obtemos



(F5).

A partir de (F2) e CP, temos



(F6).

(G)

$$\BGassert \left(\left(\BGquant{\mathfrak{F}} \BGconditional{\BGconditional{\BGcontent{\mathfrak{F}(b)}}{\BGquant{\mathfrak{a}} \BGconditional{\BGcontent{\mathfrak{F}(a)}}{\BGcontent{S(a,\mathfrak{a})}}}}{\BGquant{\mathfrak{b}} \BGconditional{\BGquant{\mathfrak{a}} \BGconditional{\BGcontent{\mathfrak{F}(\mathfrak{a})}}{\BGcontent{S(\mathfrak{b},\mathfrak{a})}}}{\BGcontent{\mathfrak{F}(\mathfrak{b})}}} \right) \equiv S^*(a,b) \right)$$

(52BS): ————————

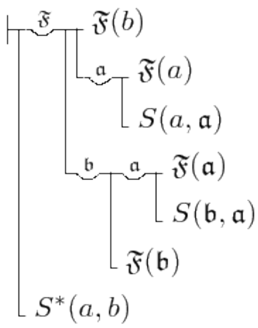
$$\BGassert \BGconditional{\BGcontent{S^*(a,b)}}{\BGquant{\mathfrak{F}} \BGconditional{\BGconditional{\BGcontent{\mathfrak{F}(b)}}{\BGquant{\mathfrak{a}} \BGconditional{\BGcontent{\mathfrak{F}(a)}}{\BGcontent{S(a,\mathfrak{a})}}}}{\BGquant{\mathfrak{b}} \BGconditional{\BGquant{\mathfrak{a}} \BGconditional{\BGcontent{\mathfrak{F}(\mathfrak{a})}}{\BGcontent{S(\mathfrak{b},\mathfrak{a})}}}{\BGcontent{\mathfrak{F}(\mathfrak{b})}}}}$$

(G1).

(G)

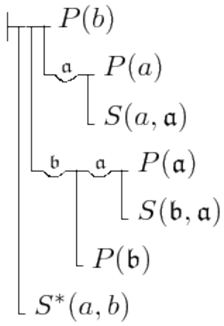
$$\BGassert \left(\left(\BGquant{\mathfrak{F}} \BGconditional{\BGconditional{\BGcontent{\mathfrak{F}(b)}}{\BGquant{\mathfrak{a}} \BGconditional{\BGcontent{\mathfrak{F}(a)}}{\BGcontent{S(a,\mathfrak{a})}}}}{\BGquant{\mathfrak{b}} \BGconditional{\BGquant{\mathfrak{a}} \BGconditional{\BGcontent{\mathfrak{F}(\mathfrak{a})}}{\BGcontent{S(\mathfrak{b},\mathfrak{a})}}}{\BGcontent{\mathfrak{F}(\mathfrak{b})}}} \right) \equiv S^*(a,b) \right)$$

(57BS): ————————



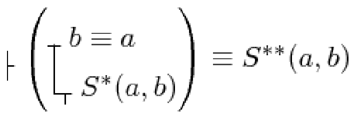
(G2).

Usando uma instância do axioma 58BS2, G2 e TR, obtemos:

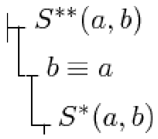


(G3).

(H)

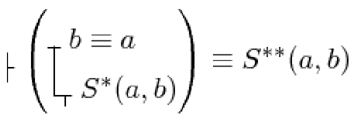


(52BS): ——————————

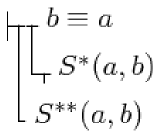


(H1).

(H)



(57BS): ——————————



(H2).

(J)

$\vdash [Pred^{**}(0, n) \equiv Nat(n)]$

(52BS): ――――――――――

$\vdash$ $Nat(n)$
$Pred^{**}(0, n)$

(J1)

(J)

$\vdash [Pred^{**}(0, n) \equiv Nat(n)]$

(57): ――――――――――

$\vdash$ $Pred^{**}(0, n)$
$Nat(n)$

(J2).

Teoremas [469]

Teorema 1

$$\vdash Func_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta)$$ [470 471]

De 52BS, temos a seguinte instância

$\vdash$ $b \equiv a$[472]
$e \equiv a$
$e \equiv b$

.

Por meio de GU1, obtemos

$\vdash \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$ $\mathfrak{b} \equiv \mathfrak{a}$
$\mathfrak{e} \equiv \mathfrak{a}$
$\mathfrak{e} \equiv \mathfrak{b}$

(a1).

De (a1), (A1) e MP, derivamos

$\vdash Func_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta)$

(Teor. 1).

Teorema 2

$$\vdash UpM_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta)$$ [473]

De 57BS, temos a seguinte instância

---

469 Nas provas que se seguirão, aplicaremos **P** e **AmI** sem qualquer menção.

470 O teorema 1 afirma que a relação de identidade é funcional.

471 Os teoremas 1 e 2 (a seguir) são enunciados por Frege em **GLA** (§75): "In view of what has been said above [(§71)] on the meaning of these expressions, it follows, on our assumption [that no object falls under either concept], that these conditions are satisfied by every relation whatsoever, and therefore among others by identity, which is moreover a *one-one relation*" (meu grifo).

472 Aqui, substituímos '$f\xi$' por '$\xi \equiv a$'.

473 O teorema 2 afirma que a relação de identidade é Um-para-Muitos.

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \top\!\top e \equiv a \\ \;\;\llcorner b \equiv a \\ \llcorner e \equiv b \end{array}$$ [474]

(a2).

Da seguinte instância de 55BS

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \top b \equiv a \\ \llcorner a \equiv b \end{array},$$

(a2) e TR, derivamos

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \top\!\top e \equiv a \\ \;\;\llcorner a \equiv b \\ \llcorner e \equiv b \end{array}$$

(b2).

Por meio de GU1, obtemos

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\!\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\begin{array}{l} \top \mathfrak{e} \equiv \mathfrak{a} \\ \llcorner \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b} \end{array} \\ \llcorner \mathfrak{e} \equiv \mathfrak{b}$$

(c2).

De (c2), (B1) e MP, derivamos

$$\vdash UpM_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta)$$

(Teor.2).

Teorema 3

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top G(\mathfrak{a}) \\ \llcorner \sharp_x G(x) \equiv 0 \end{array}$$ [475]

De (D2), substituindo-se '$F\xi$' por '$\sharp_x G(x) \equiv \xi$', temos

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \top \sharp_x G(x) \equiv \sharp_x(\top\, x \equiv x) \\ \llcorner \sharp_x G(x) \equiv 0 \end{array}$$

(a3).

De (a3), (PH1) e TR, obtemos:

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \top\!\top\!\overset{\mathfrak{R}}{\smile}\!\top\!\top Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(G\alpha, \top\, \beta \equiv \beta) \\ \qquad\quad\llcorner Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \\ \qquad\llcorner UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \\ \llcorner \sharp_x G(x) \equiv 0 \end{array}$$

(b3).

---

474 Aqui, também substituímos '$f\xi$' por '$\xi \equiv a$'.

475 Frege (**GLA**, § 75): "Now it must be possible to prove, by means of what has already been laid down, that every concept under which no object falls is equal (*gleichzahlig*) to every other concept under which no object falls, and to them alone; from which it follows that 0 is the Number which belongs to any such concept, and that no object falls under any concept if the number which belongs to that concept is 0".

De 1BS, temos a seguinte instância:

$$\vdash \begin{array}{l} b \equiv b \\ R(a,b) \\ b \equiv b \end{array}$$

(c3).

De 54BS

$$\vdash b \equiv b,$$

(c3) e MP, derivamos

$$\vdash \begin{array}{l} b \equiv b \\ R(a,b) \end{array}$$

(d3).

Por GU1, temos

$$\vdash\!\smile^{\mathfrak{b}} \begin{array}{l} \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{b} \\ R(a,\mathfrak{b}) \end{array}$$

(e3).

Da seguinte instância de (C5)

$$\vdash \begin{array}{l} G(a) \\ \smile^{\mathfrak{b}} \begin{array}{l} \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{b} \\ R(a,\mathfrak{b}) \end{array} \\ Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(G\alpha,_{\top}\beta \equiv \beta) \end{array},$$

(e3) e MP, obtemos

$$\vdash \begin{array}{l} G(a) \\ Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(G\alpha,_{\top}\beta \equiv \beta) \end{array}$$

(f3).

De (f3) e CP, temos

$$\vdash \begin{array}{l} Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(G\alpha,_{\top}\beta \equiv \beta) \\ G(a) \end{array}$$

(g3).

Da seguinte instância de 36BS

$$\vdash \begin{array}{l} Func_{\alpha\beta}R(\alpha\beta) \\ UpM_{\alpha\beta}R(\alpha\beta) \\ \begin{array}{l} Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(G\alpha,_{\top}\beta \equiv \beta) \\ G(a) \end{array} \\ \begin{array}{l} Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(G\alpha,_{\top}\beta \equiv \beta) \\ G(a) \end{array} \end{array},$$

(h3)

e CP, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(G\alpha, {}_{\top}\, \beta \equiv \beta) \\ \quad G(a) \\ \quad Func_{\alpha\beta}R(\alpha\beta) \\ \quad UpM_{\alpha\beta}(R\alpha\beta) \\ \quad {}_{\top} Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(G\alpha, {}_{\top}\, \beta \equiv \beta) \\ \quad G(a) \end{array}$$

(i3)

De (g3), (i3) e MP, derivamos

$$\begin{array}{l} \vdash Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(G\alpha, {}_{\top}\, \beta \equiv \beta) \\ \quad Func_{\alpha\beta}R(\alpha\beta) \\ \quad UpM_{\alpha\beta}R(\alpha\beta) \\ \quad G(a) \end{array}$$

(j3).

Por CGC2, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash \overset{\mathfrak{R}}{\smile} {}_{\top} Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(G\alpha, {}_{\top}\, \beta \equiv \beta)^{476} \\ \quad Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha\beta) \\ \quad UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha\beta) \\ \quad G(a) \end{array}$$

(k3).

De (k3) e contraposição, temos

$$\begin{array}{l} \vdash {}_{\top} G(a) \\ \quad {}_{\top} \overset{\mathfrak{R}}{\smile} {}_{\top} Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(G\alpha, {}_{\top}\, \beta \equiv \beta) \\ \qquad Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha\beta) \\ \qquad UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha\beta) \end{array}$$

(l3).

De (b3), (l3) e TR, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash {}_{\top} G(a) \\ \quad \sharp_x G(x) \equiv 0 \end{array}$$

(m3).

Por CGC1, derivamos

$$\begin{array}{l} \vdash \overset{\mathfrak{a}}{\smile} {}_{\top} G(\mathfrak{a}) \\ \quad \sharp_x G(x) \equiv 0 \end{array}$$

(Teor.3).

476 Se *a* cai sob o conceito *G*, então não existe uma relação *R* que correlaciona os conceitos *G* e “ser diferente de si mesmo” e que seja Funcional e Um-para-Muitos.

Teorema 4[477]

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\, \sharp_x G(x) \equiv 0 \\ \quad \llcorner\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\top\, G(\mathfrak{a}) \end{array}$$ [478]

Na seguinte instância de (PH6)

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\!\top\!\top\, \sharp_x G(x) \equiv \sharp_x(\top\, x \equiv x) \\ \quad\quad\quad \llcorner\, Func_{\alpha\beta} S(\alpha, \beta) \\ \quad\quad \llcorner\, UpM_{\alpha\beta} S(\alpha, \beta) \\ \quad \llcorner\, Corr_{\alpha\beta}(S\alpha\beta)(G\alpha,_\top\, \beta \equiv \beta) \end{array}$$

(a4),

substitua ‘*S*(ξ,ζ)’ por ‘ξ=ζ’, assim temos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\!\top\!\top\, \sharp_x G(x) \equiv \sharp_x(\top\, x \equiv x) \\ \quad\quad\quad \llcorner\, Func_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta) \\ \quad\quad \llcorner\, UpM_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta) \\ \quad \llcorner\, Corr_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta)(G\alpha,_\top\, \beta \equiv \beta) \end{array}$$

(b4).

De (Teor.1), (Teor.2) e MP, derivamos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\, \sharp_x G(x) \equiv \sharp_x(\top\, x \equiv x) \\ \quad \llcorner\, Corr_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta)(G\alpha,_\top\, \beta \equiv \beta) \end{array}$$

(c4).

Da seguinte instância de (C1)

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\!\top\, Corr_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta)(G\alpha,_\top\, \beta \equiv \beta) \\ \quad\quad \llcorner\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\top\!\top\, G(\mathfrak{a}) \\ \quad\quad\quad\quad \llcorner\!\smile^{\mathfrak{b}}\!\top\, \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{b} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad \llcorner\, \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b} \\ \quad \llcorner\!\smile^{\mathfrak{b}}\!\top\, \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{b} \\ \quad\quad\quad \llcorner\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\top\!\top\, G(\mathfrak{a}) \\ \quad\quad\quad\quad\quad \llcorner\, \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b} \end{array}$$

,

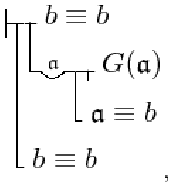
(c4) e TR, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\!\top\, \sharp_x G(x) \equiv \sharp_x(\top\, x \equiv x) \\ \quad\quad \llcorner\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\top\!\top\, G(\mathfrak{a}) \\ \quad\quad\quad\quad \llcorner\!\smile^{\mathfrak{b}}\!\top\, \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{b} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad \llcorner\, \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b} \\ \quad \llcorner\!\smile^{\mathfrak{b}}\!\top\, \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{b} \\ \quad\quad\quad \llcorner\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\top\!\top\, G(\mathfrak{a}) \\ \quad\quad\quad\quad\quad \llcorner\, \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b} \end{array}$$

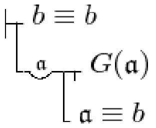
(d4).

477 Em **GGA**, é feito uso do teorema IVa na prova desta proposição.
478 Se nada cai sob um conceito *G*, o número que pertence a ele é igual a 0.

De 1BS

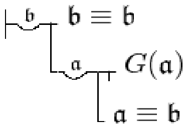


54BS e MP, derivamos



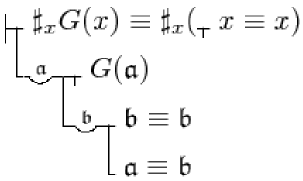
(e4).

Por GU1, obtemos



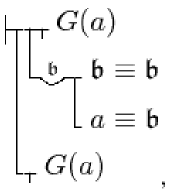
(f4).

De (d4), (f4) e MP, inferimos

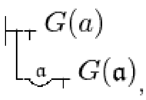


(g4).

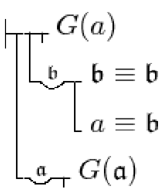
Da seguinte instância do Axioma I



e da seguinte instância de 58BS1

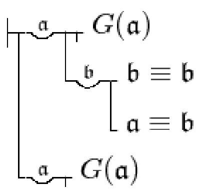


por meio de TR, obtemos



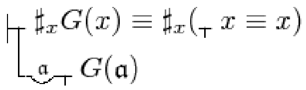
(h4).

Por CGC1, inferimos



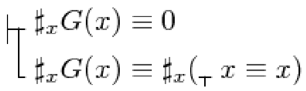
(i4).

De (g4), (i4) e TR, obtemos



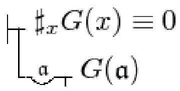
(j4).

Da seguinte instância de (D1)



[479]

(j4) e TR, inferimos

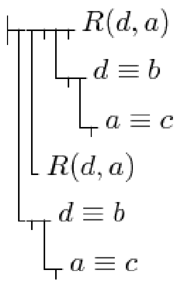


(Teor.4).

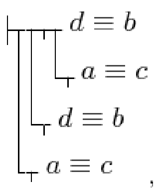
Teorema 5[480]

$$\vdash Func_{\alpha\beta}Pred(\alpha, \beta)$$ [481]

Da seguinte instância do teorema IeGGA



e da seguinte instância do teorema IfGGA



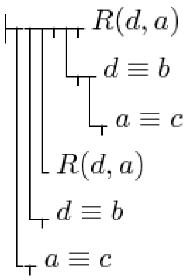
,

aplicando-se TR, obtemos

479 Substitua '$P\xi$' por '$\sharp_x G(x) \equiv \xi$'.

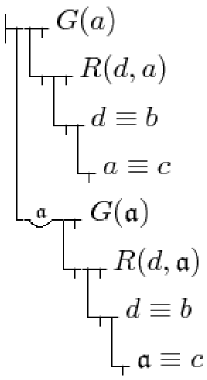
480 Em **GGA** (pp 87- 113), Frege faz alguns usos do teorema IVa (e usa uma vez IVb).

481 A relação de predecessão é funcional. Esta proposição é mencionada em 78.5 (**GLA**, §78). Lá, Frege afirma que '*Pred*' é 1-1 (*beiderseits eindeutige*), o que significa que ela é funcional e Um-para-Muitos. O teorema 5 é o primeiro membro da conjunção. No teorema 6, provamos o segundo membro.

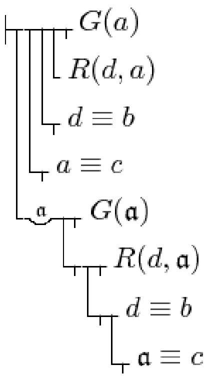


(1).

Da seguinte instância de 58BS1

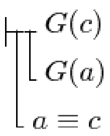


e de (1) por meio de TR, temos

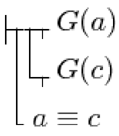


(2).

Da seguinte instância de 52BS

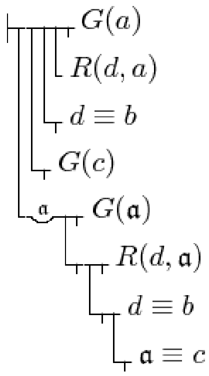


e CP, inferimos



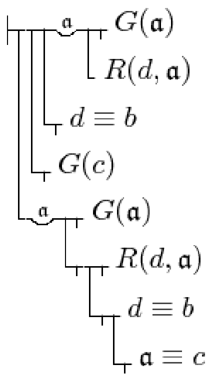
(57BSa).

De (2) e (57BSa),por meio de TMI, obtemos



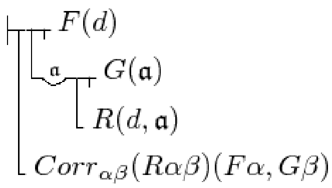
(3).

Aplicando CGC1, derivamos

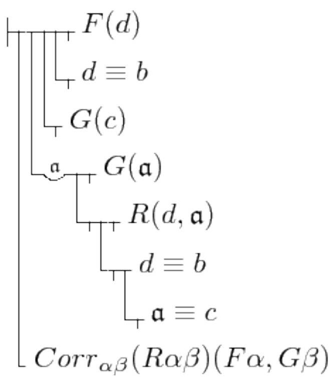


(4).

Da seguinte instância de (C5)



e (4) por meio de TR, obtemos



(5).

Da seguinte instância de 52BS

$$\begin{array}{l} F(b) \\ F(d) \\ d \equiv b \end{array}$$

e CP, inferimos

$$\begin{array}{l} F(d) \\ F(b) \\ d \equiv b \end{array}$$

(57BSb).

De (5) e (57BSb), por meio de TMI, obtemos

$$\begin{array}{l} F(d) \\ \mathfrak{a}\; G(\mathfrak{a}) \\ R(d, \mathfrak{a}) \\ d \equiv b \\ \mathfrak{a} \equiv c \\ F(b) \\ G(c) \\ Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(F\alpha, G\beta) \end{array}$$

(6).

Aplicando CGC1, temos

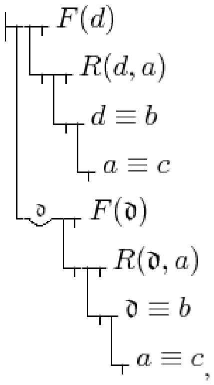
$$\begin{array}{l} \mathfrak{d}\; F(\mathfrak{d}) \\ \mathfrak{a}\; G(\mathfrak{a}) \\ R(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}) \\ \mathfrak{d} \equiv b \\ \mathfrak{a} \equiv c \\ F(b) \\ G(c) \\ Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(F\alpha, G\beta) \end{array}$$

(7).

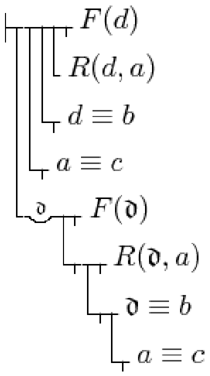
De (1)

$$\begin{array}{l} R(d, a) \\ d \equiv b \\ a \equiv c \\ R(d, a) \\ d \equiv b \\ a \equiv c \end{array}$$

e da seguinte instância de 58BS1

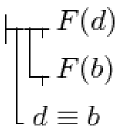


por meio de TR, obtemos

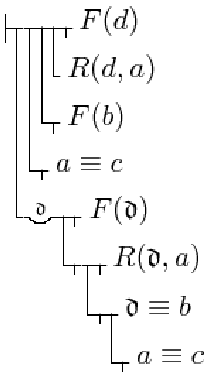


(8).

De (57BSb)

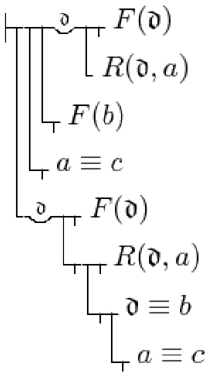


e (8), por meio de TMI, derivamos



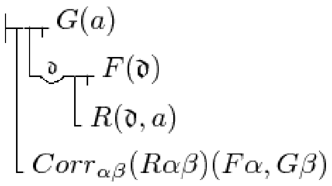
(9)

Aplicando CGC1, temos

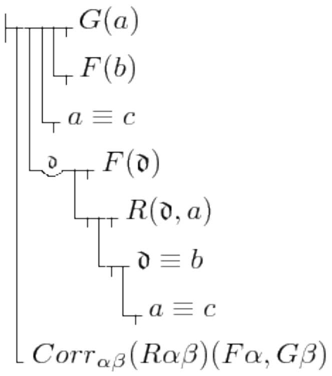


(10).

Da seguinte instância de (C6)

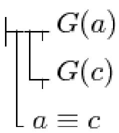


e (10), por meio de TR, obtemos

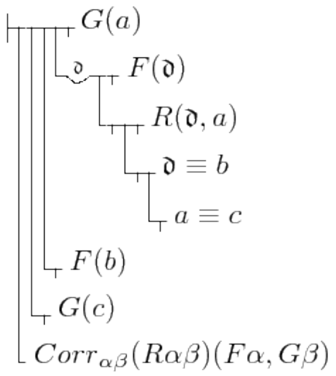


(11).

De (57BSa)

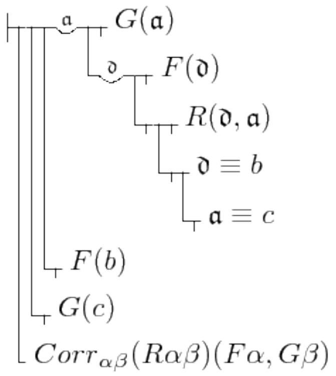


e (11), por meio de TMI, derivamos



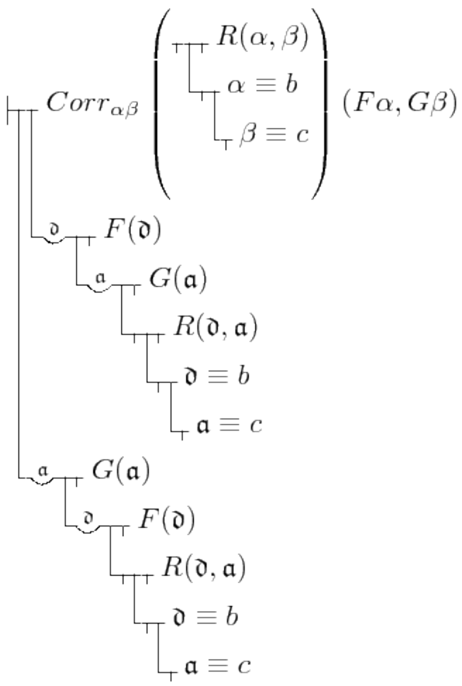
(12).

Aplicando CGC1, obtemos

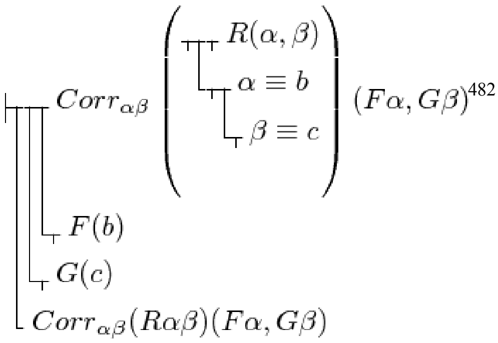


(13).

Da seguinte instância de (C1)

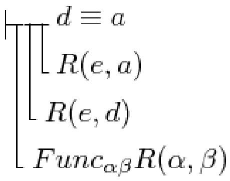


(7) e (13), por meio de TR, obtemos

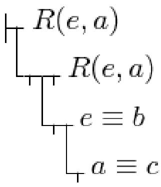


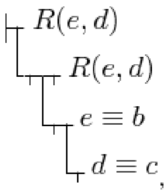
(14).

Da seguinte instância de (A2)

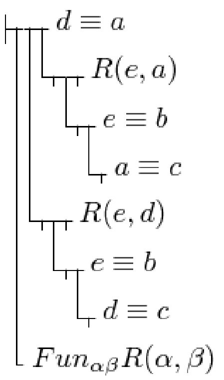


e das seguintes instâncias do IbGGA

 (a)

 (b)

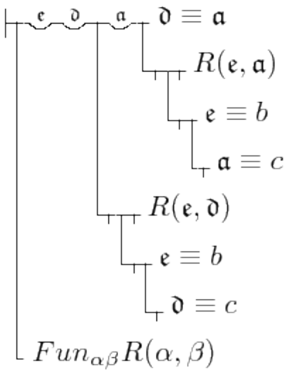
por meio de TR, obtemos



(15).

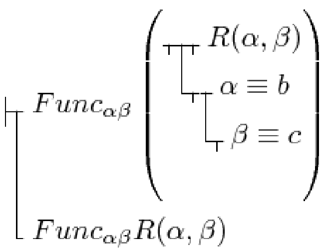
Aplicando CGC1, temos

482 Esta proposição afirma que se $R(x,y)$ correlaciona os conceitos F e G e se b não cai sob F e se c não cai sob G, então a relação 'x encontra-se na relação R com y, mas x é diferente de b e y é diferente de c' correlaciona os conceitos F e G.



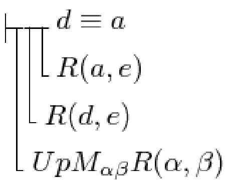
(16).

De (16), (A1) e TR, derivamos

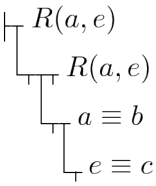
 [483]

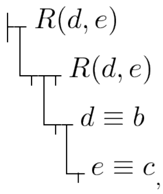
(17).

Da seguinte instância de (B2)

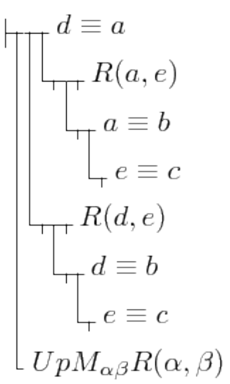


e das seguintes instâncias de IbGGA

 (c),

 (d)

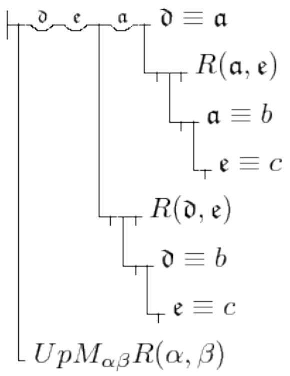
por meio de TR, obtemos



(18).

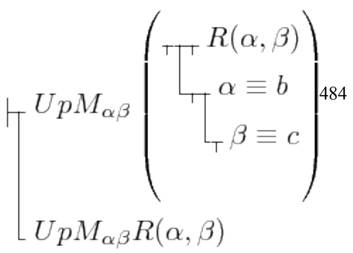
483 Esta proposição afirma que se $R(x,y)$ é funcional, então a relação '*x* encontra-se na relação *R* com *y*, mas *x* é diferente de *b* e *y* é diferente de *c*' também é funcional.

Aplicando CGC1, temos



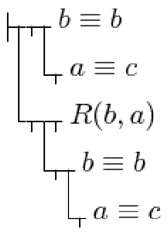
(19).

De (19), (B1) e TR, derivamos

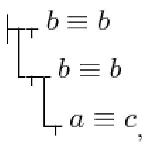


(20).

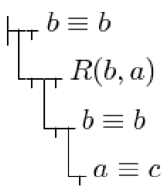
Da seguinte instância de IdGGA



e da seguinte instância de IcGGA



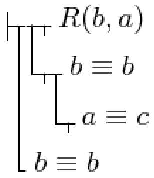
por meio de TR, obtemos



(21).

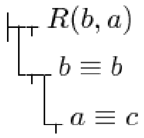
De (21) e CP, obtemos

484 Esta proposição afirma que se $R(x,y)$ é Um-para-Muitos, então a relação 'x encontra-se na relação R com y, mas x é diferente de b e y é diferente de c' também é Um-para-Muitos.



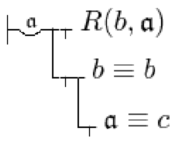
(22).

De (22), 54BS e MP, derivamos



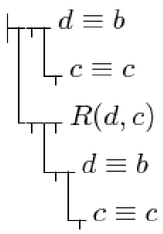
(23).

Aplicando GU1, temos

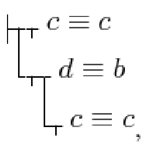


(24).

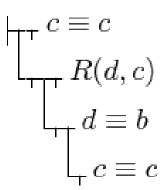
A partir da seguinte instância de IdGGA



e da seguinte instância de IdGGA

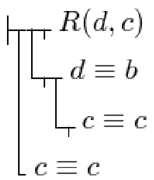


por meio de TR, obtemos



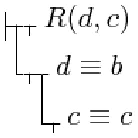
(25).

De (25) e CP, temos



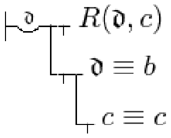
(26).

De (26), 54BS e MP, derivamos



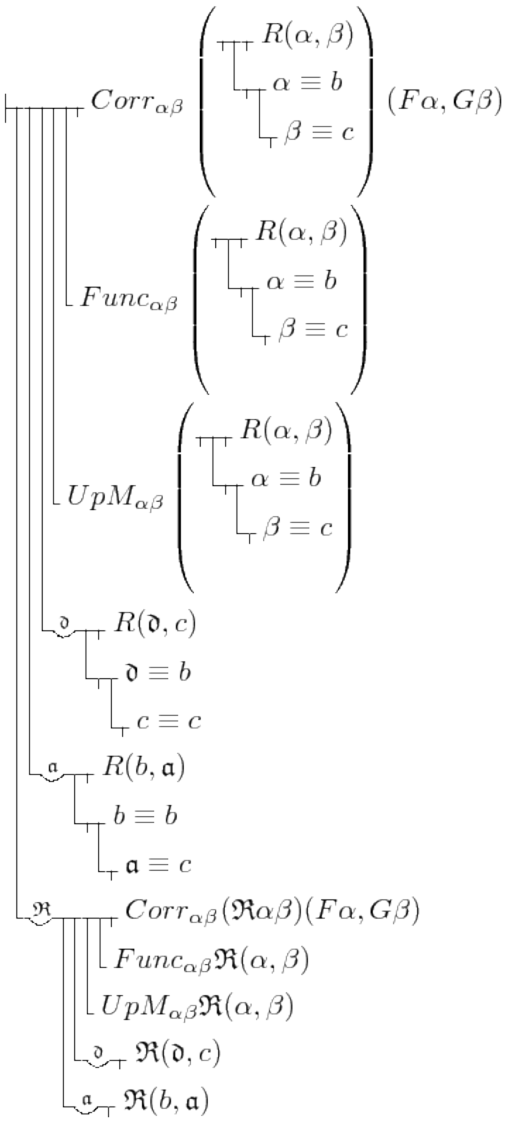
(27).

Aplicando GU1, obtemos



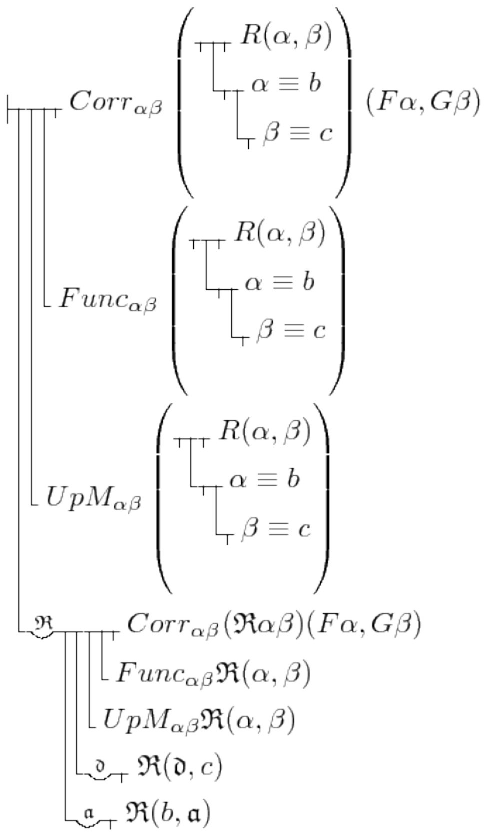
(28).

Da seguinte instância de 58BS2



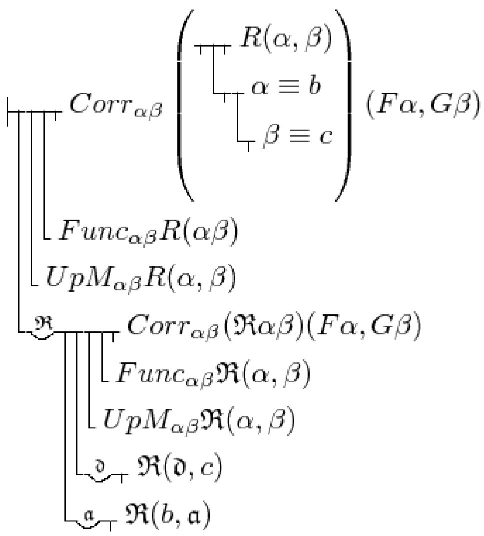
,

(24), (28) e MP, derivamos



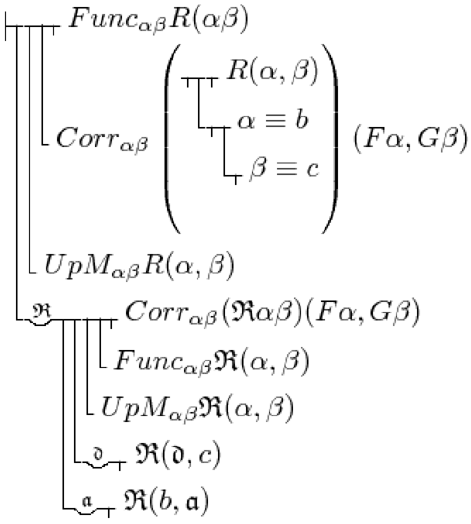
(29).

De (29), (20), (17) e TR, temos



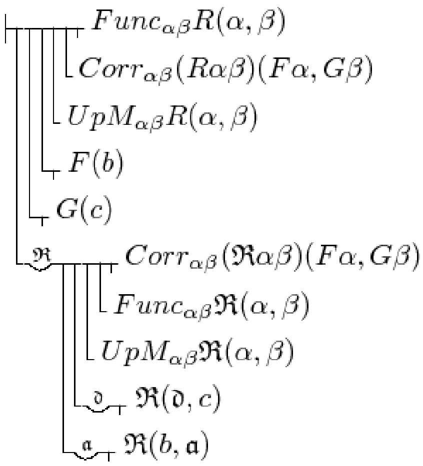
(30).

De (30) e CP, temos



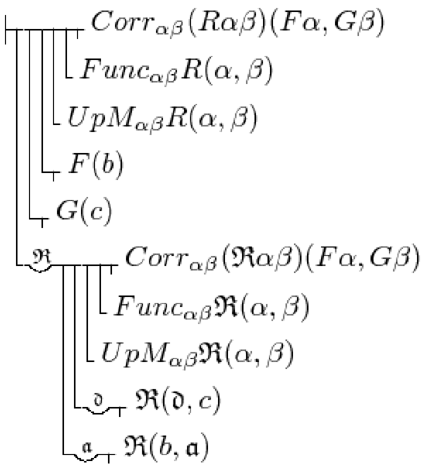
(31).

De (31), (14) e TR, obtemos



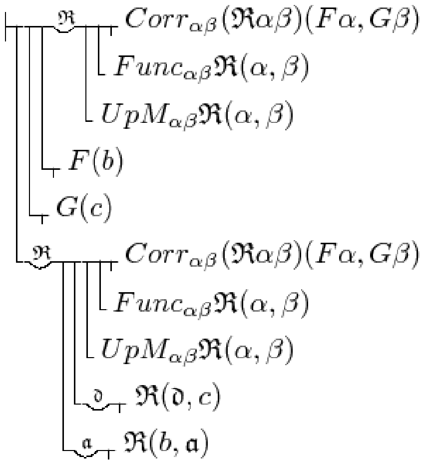
(32).

De (32) e contraposição, derivamos



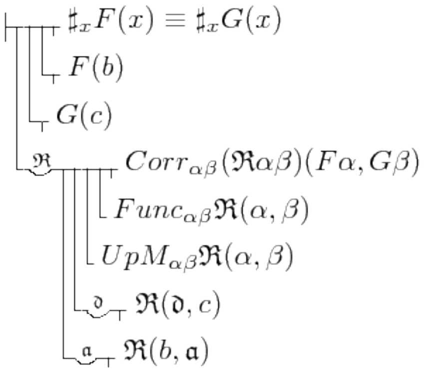
(33).

Aplicando CGC2, obtemos



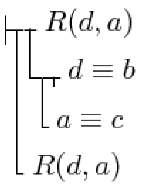
(34).

De (34), e de uma instância de (PH3) e TR, derivamos

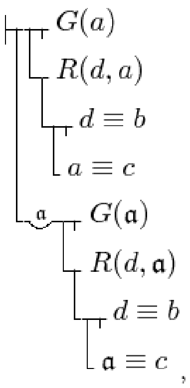


(35).

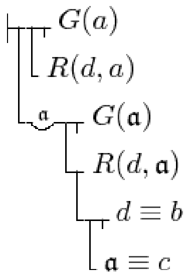
Da seguinte instância do 1BS



e da seguinte instância de 58BS1

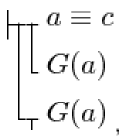


por meio de TR, temos

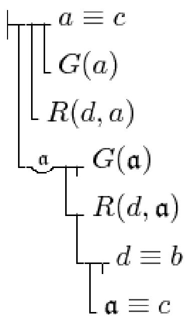


(36).

Da seguinte instância do Teorema 38BS

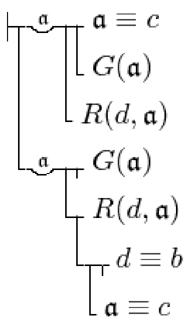


(36) e TR, obtemos



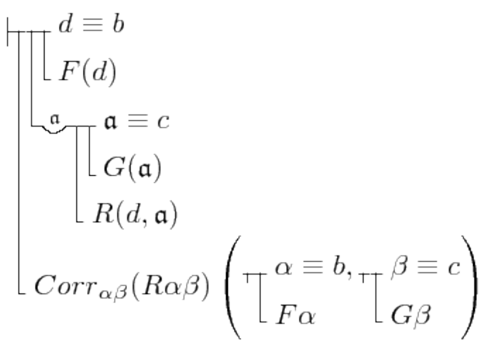
(37).

Aplicando CGC1, temos



(38).

Da seguinte instância de (C5)



e (38), por meio de TR, derivamos

$$\begin{array}{l} \vdash\; d \equiv b \\ \quad\;\; F(d) \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}}\; G(\mathfrak{a}) \\ \qquad\quad R(d,\mathfrak{a}) \\ \qquad\qquad d\equiv b \\ \qquad\qquad \mathfrak{a}\equiv c \\ \quad Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)\left(\begin{array}{ll} \alpha\equiv b, & \beta\equiv c \\ F\alpha & G\beta\end{array}\right)\end{array}$$

(39).

Da seguinte instância de 27BS

$$\begin{array}{l} \vdash\; d \equiv b \\ \qquad c \equiv c \\ \quad\;\; d \equiv b \\ \qquad c \equiv c \end{array}$$

,

54BS e MP, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash\; d \equiv b \\ \quad\;\; d \equiv b \\ \qquad c \equiv c \end{array}$$

(40).

Da seguinte instância de 38BS

$$\begin{array}{l} \vdash\; R(d,c) \\ \qquad d \equiv b \\ \quad\;\; d \equiv b \end{array}$$

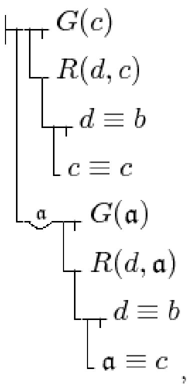
,

(40) e TR, temos

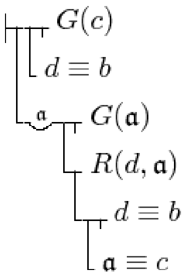
$$\begin{array}{l} \vdash\; R(d,c) \\ \qquad\quad d \equiv b \\ \qquad\quad c \equiv c \\ \quad\;\; d \equiv b \end{array}$$

(41).

Da seguinte instância de 58BS1

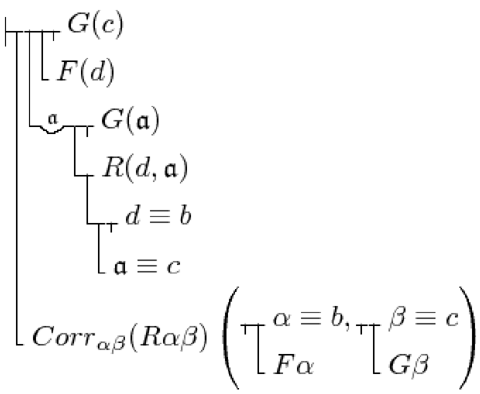


(41) e TR, obtemos



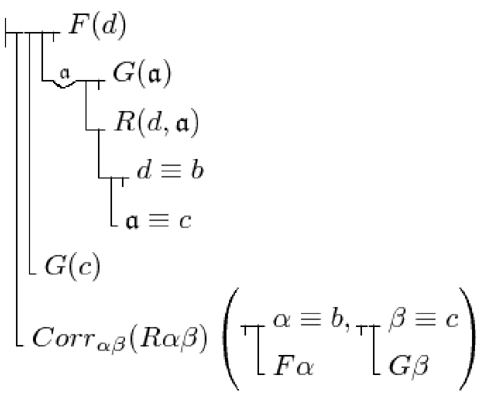
(42).

De (39), (42) e TR, derivamos



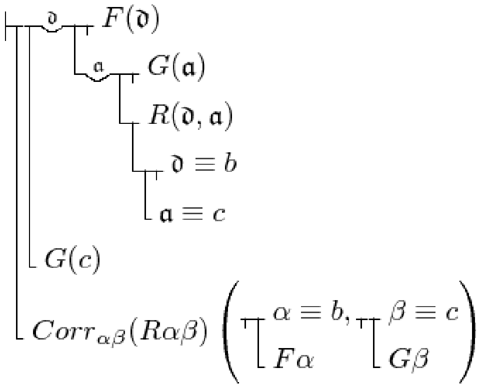
(43).

De (43) e CP, obtemos



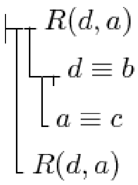
(44).

Aplicando CGC1, temos

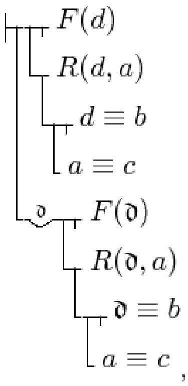


(45).

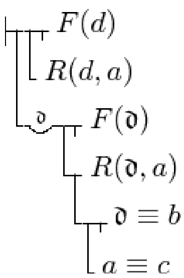
Da seguinte instância do 1BS



e da seguinte instância de 58BS1

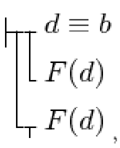


por meio de TR, temos

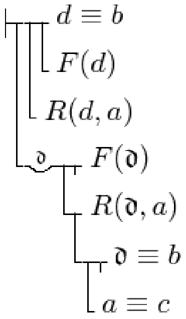


(46).

Da seguinte instância de 38BS

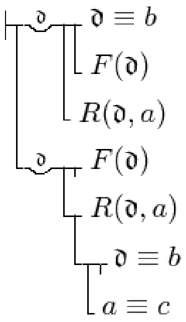


(46) e TR, obtemos



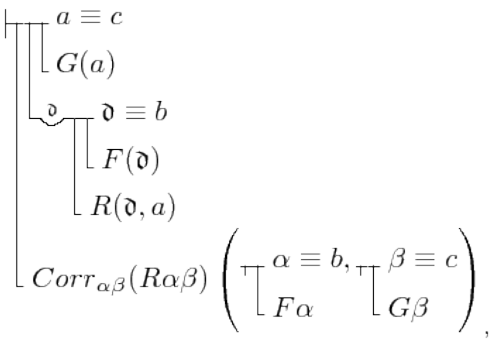
(47).

Aplicando CGC1, chegamos a

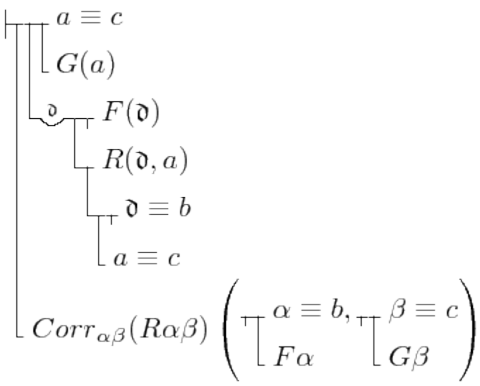


(48).

Da seguinte instância de (C6)

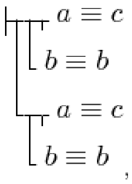


(48) e TR, obtemos

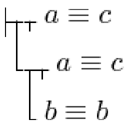


(49).

Da seguinte instância do 27BS

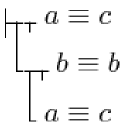


54BS e MP, derivamos



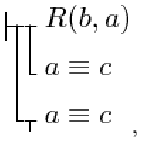
(50).

De (50) e CP, obtemos

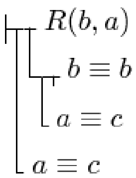


(51).

Da seguinte instância de 38BS

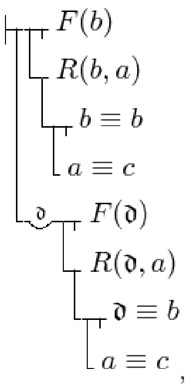


(51) e TR, obtemos

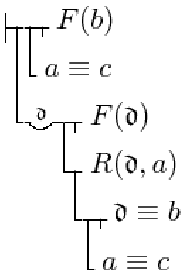


(52).

Da seguinte instância de 58BS1

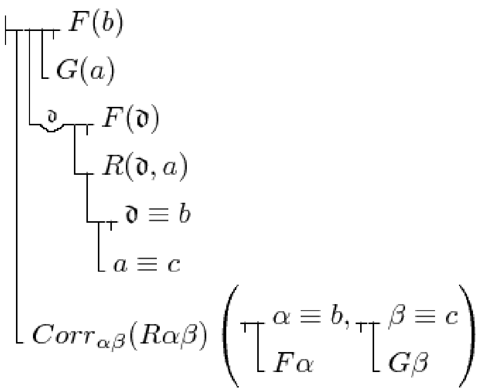


(52) e TR, temos



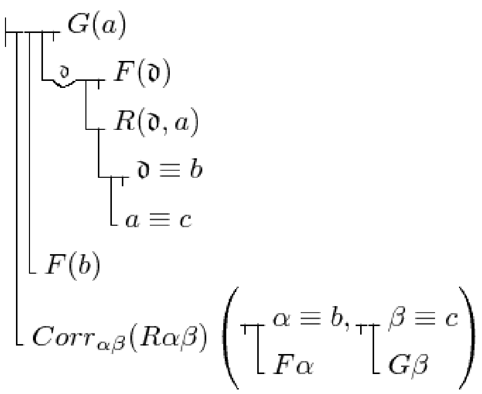
(53).

De (53), (49) e TR, derivamos



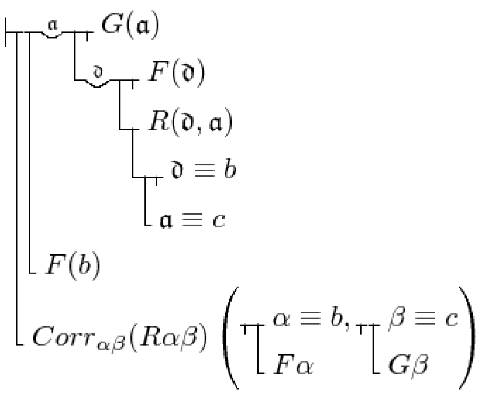
(54).

De (54) e CP, obtemos



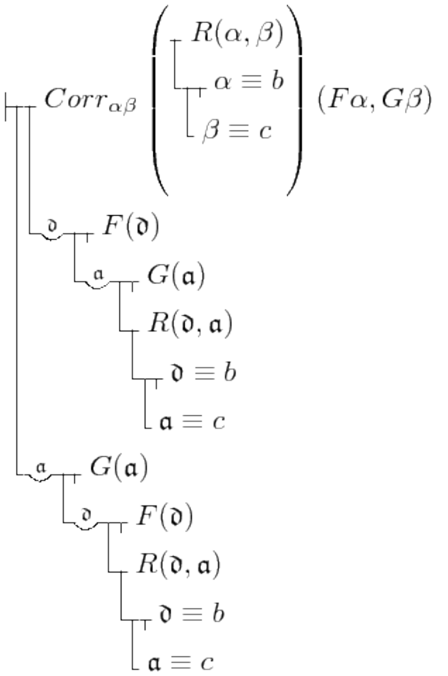
(55).

Aplicando CGC1, temos



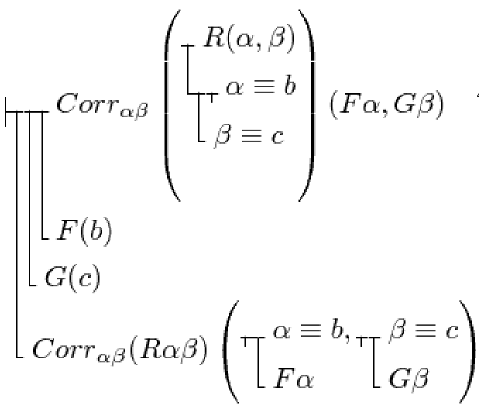
(56).

Da seguinte instância de (C1)



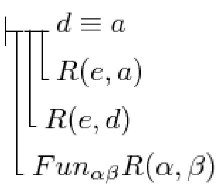
,

(45), (56) e TR, derivamos

 [485]

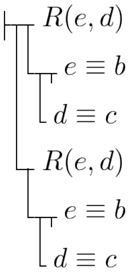
(57).

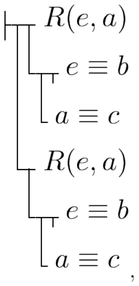
Da seguinte instância de (A2)



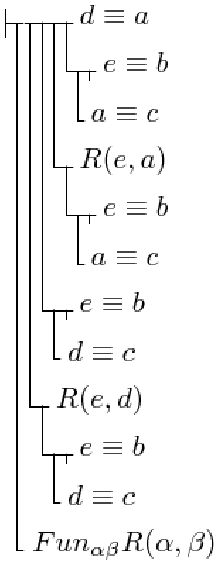
e das seguintes instâncias do 27BS

485 Esta proposição afirma que se *R*(*x,y*) correlaciona os conceitos 'cair sob *F*, mas ser diferente de *b*' e 'cair sob *G*, mas ser diferente de *c*' e se *b* cai sob *F* e se *c* cai sob *G*, então a relação '*x* é igual a *b* e *y* é igual a *c* ou *R*(*x,y*)' correlaciona os conceitos *F* e *G*.



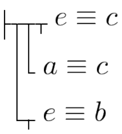


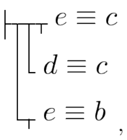
por meio de TR, obtemos



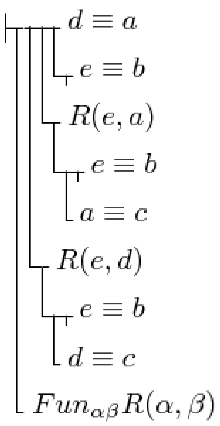
(58).

Das seguintes instâncias de 1BS





(58) e TR, inferimos



(59).

Da seguinte instância de 38BS

$$\BGassert\BGconditional{\BGnot a \equiv c}{\BGconditional{a \equiv c}{\BGnot b \equiv b}},$$

e da seguinte instância de 27BS

$$\BGassert\BGconditional{\BGconditional{\BGconditional{a \equiv c}{\BGnot b \equiv b}}{R(b,a)}}{\BGconditional{\BGconditional{a \equiv c}{\BGnot b \equiv b}}{R(b,a)}},$$

por meio de TR, obtemos

$$\BGassert\BGconditional{\BGconditional{\BGconditional{a \equiv c}{\BGnot b \equiv b}}{R(b,a)}}{\BGconditional{\BGnot a \equiv c}{R(b,a)}}$$

(60).

De (60) e CP, temos

$$\BGassert\BGconditional{\BGconditional{\BGconditional{a \equiv c}{\BGnot b \equiv b}}{R(b,a)}}{\BGconditional{\BGnot R(b,a)}{a \equiv c}}$$

(61).

Da seguinte instância de 58BS1

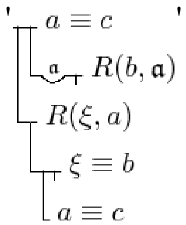
$$\BGassert\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{a}}\BGnot R(b,\mathfrak{a})}{\BGnot R(b,a)},$$

(61) e TR, obtemos

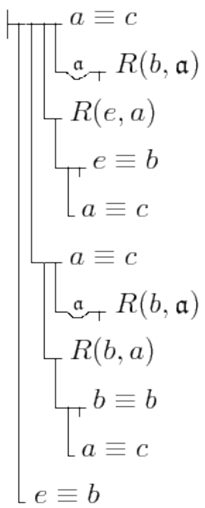
$$\BGassert\BGconditional{\BGconditional{\BGconditional{a \equiv c}{\BGnot b \equiv b}}{R(b,a)}}{\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{a}}\BGnot R(b,\mathfrak{a})}{a \equiv c}}$$

(62).

Substituindo-se '$f\xi$' por

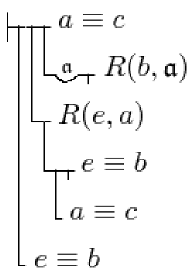


'c' por 'e' e 'd' por 'b' em 57BS, temos



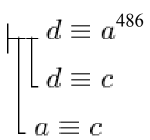
(57BS1).

De (57BS1), (62) e MP, derivamos



(63).

Da seguinte instância do 57BS



,

(63) e TR, temos

486 Substitua '$f\xi$' por '$d \equiv \xi$'.

$$d \equiv a$$
$$d \equiv c$$
$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\; R(b, \mathfrak{a})$$
$$R(e, a)$$
$$\top\, e \equiv b$$
$$a \equiv c$$
$$e \equiv b$$

(64).

Da seguinte instância de (63)

$$d \equiv c$$ [487]
$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\; R(b, \mathfrak{a})$$
$$R(e, d)$$
$$\top\, e \equiv b$$
$$d \equiv c$$
$$e \equiv b$$

(64) e TR, obtemos

$$d \equiv a$$
$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\; R(b, \mathfrak{a})$$
$$R(e, a)$$
$$\top\, e \equiv b$$
$$a \equiv c$$
$$R(e, d)$$
$$\top\, e \equiv b$$
$$d \equiv c$$
$$e \equiv b$$

(65).

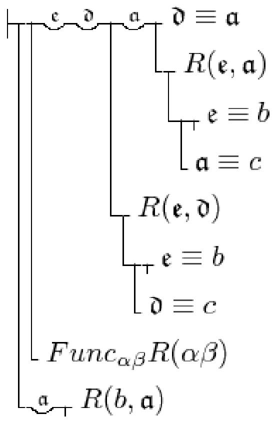
De (65), (59) e TMI, obtemos

$$d \equiv a$$
$$R(e, a)$$
$$\top\, e \equiv b$$
$$a \equiv c$$
$$R(e, d)$$
$$\top\, e \equiv b$$
$$d \equiv c$$
$$Func_{\alpha\beta} R(\alpha\beta)$$
$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\; R(b, \mathfrak{a})$$

(66).

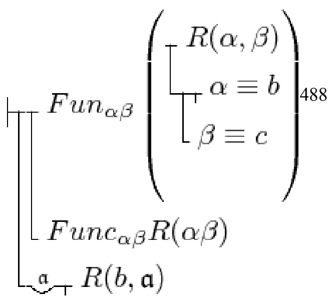
487 Substitua '*a*' por '*d*'.

Aplicando CGC1, temos



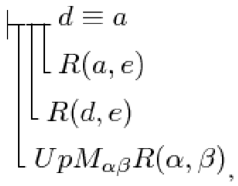
(67).

De (A1), (67) e TR, obtemos

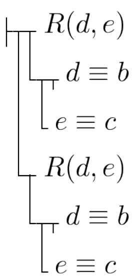


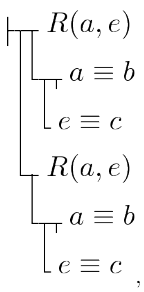
(68).

Da seguinte instância de (B2)



e das seguintes instâncias de 27BS





por meio da TR, obtemos

488 Esta proposição afirma que se $R(x,y)$ é funcional e se b não está na relação R com nenhum objeto, então a relação "x é igual a b e y igual a c ou $R(x,y)$" é funcional.

$$d \equiv a$$
$$a \equiv b$$
$$e \equiv c$$
$$R(a, e)$$
$$a \equiv b$$
$$e \equiv c$$
$$d \equiv b$$
$$e \equiv c$$
$$R(d, e)$$
$$d \equiv b$$
$$e \equiv c$$
$$UpM_{\alpha\beta}R(\alpha, \beta)$$

(69).

Das seguintes instâncias de 38BS

$$d \equiv b \quad e \equiv c \quad e \equiv c \qquad\qquad a \equiv b \quad e \equiv c \quad e \equiv c \, ,$$

(69) eTR, temos

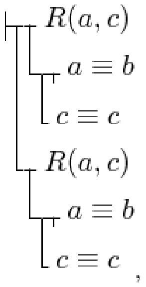
$$d \equiv a$$
$$e \equiv c$$
$$R(a, e)$$
$$a \equiv b$$
$$e \equiv c$$
$$R(d, e)$$
$$d \equiv b$$
$$e \equiv c$$
$$UpM_{\alpha\beta}R(\alpha, \beta)$$

(70).

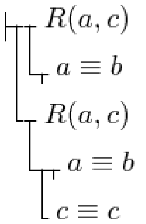
Da seguinte instância de IBS

$$a \equiv b \quad c \equiv c \quad a \equiv b \, ,$$

e da seguinte instância de 27BS

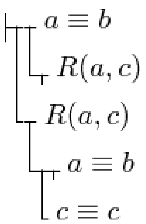


por meio de TR, inferimos



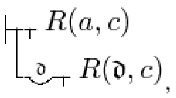
(71).

De (71) e CP, derivamos

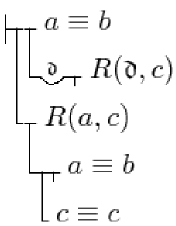


(72).

Da seguinte instância de 58BS1

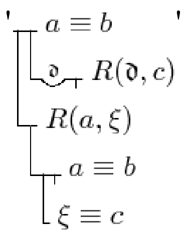


(72) e TR, temos



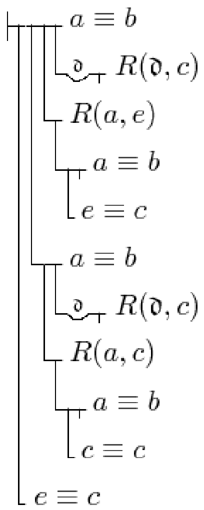
(73).

Substituindo-se '$f\xi$' por



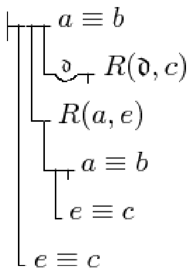
,

'*c*' por '*e*' e '*d*' por '*c*' em 57BS, obtemos



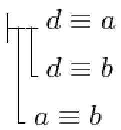
(57BS2).

De (57BS2), (73) e MP, derivamos

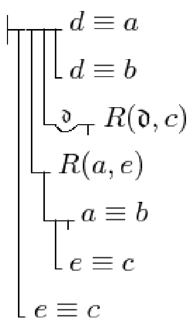


(74).

Da seguinte instância de 57BS

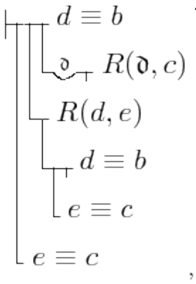


(74) e TR, inferimos

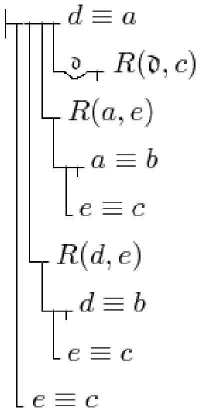


(75).

Da seguinte instância de (74)

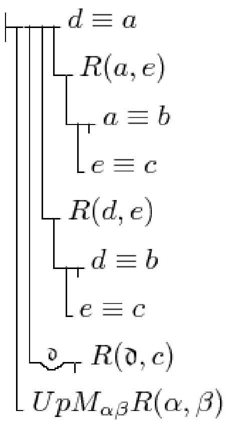
 [489]

(75) e TR, derivamos



(76).

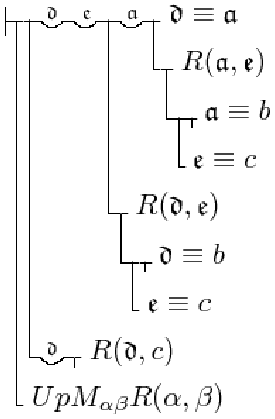
De (76), (70) e TMI, obtemos



(77).

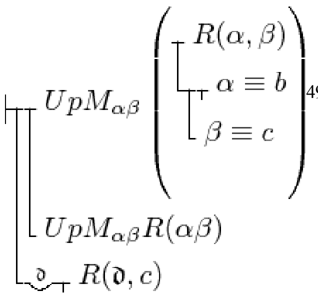
Aplicando CGC1, temos

489 Substitua '*a*' por '*d*'.



(78).

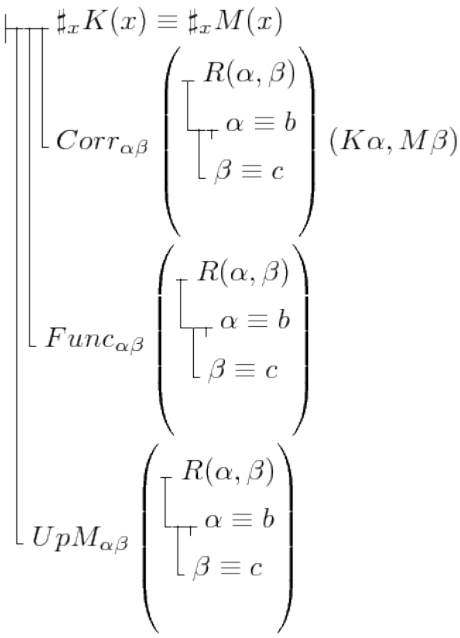
De (78), (B1) e TR, obtemos



[490]

(79)

Da seguinte instância de (PH6)



,

(57)[491], (68), (79) e TR, temos

490 A proposição 79 afirma que se $R(x,y)$ é Um-para-Muitos e se nenhum objeto está na relação R com c, então a relação ' x é igual a b e y é igual a c ou $R(x,y)$' é Um-para-Muitos também.

491 Na fórmula (**57**), substitua '$F\xi$ ' por '$K\xi$ ' e '$G\xi$ ' por '$M\xi$ '.

$$
\begin{array}{l}
\vdash\!\top\!\top\!\top\!\top\!\top\!\top\!\top\; \sharp_x K(x) \equiv \sharp_x M(x) \\
\quad\quad\quad\quad\quad \llcorner\, Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)\left(\begin{array}{l} \top\!\!\top\, \alpha \equiv b, \\ \llcorner\, K\alpha \end{array} \begin{array}{l} \top\!\!\top\, \beta \equiv c \\ \llcorner\, M\beta \end{array} \right) \\
\quad\quad\quad\quad \llcorner\, Func_{\alpha\beta} R(\alpha,\beta) \\
\quad\quad\quad \llcorner\, UpM_{\alpha\beta} R(\alpha,\beta) \\
\quad\quad\quad \llcorner\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, R(b,\mathfrak{a}) \\
\quad\quad \llcorner\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\!\top\, R(\mathfrak{d},c) \\
\quad \llcorner\, K(b) \\
\llcorner\, M(c)
\end{array}
$$

(80).

De (80) e CP, derivamos

$$
\begin{array}{l}
\vdash\!\top\!\top\!\top\!\top\!\top\!\top\!\top\; Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)\left(\begin{array}{l} \top\!\!\top\, \alpha \equiv b, \\ \llcorner\, K\alpha \end{array} \begin{array}{l} \top\!\!\top\, \beta \equiv c \\ \llcorner\, M\beta \end{array} \right) \\
\quad\quad\quad\quad\quad \llcorner\, Func_{\alpha\beta} R(\alpha,\beta) \\
\quad\quad\quad\quad \llcorner\, UpM_{\alpha\beta} R(\alpha,\beta) \\
\quad\quad\quad \llcorner\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, R(b,\mathfrak{a}) \\
\quad\quad \llcorner\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\!\top\, R(\mathfrak{d},c) \\
\quad\quad \llcorner\, K(b) \\
\quad \llcorner\, M(c) \\
\llcorner\!\top\, \sharp_x K(x) \equiv \sharp_x M(x)
\end{array}
$$

(81).

Aplicando CGC2, obtemos

$$
\begin{array}{l}
\vdash\!\top\!\top\!\top\!\overset{\mathfrak{R}}{\smile}\!\top\!\top\!\top\!\top\; Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)\left(\begin{array}{l} \top\!\!\top\, \alpha \equiv b, \\ \llcorner\, K\alpha \end{array} \begin{array}{l} \top\!\!\top\, \beta \equiv c \\ \llcorner\, M\beta \end{array} \right) \\
\quad\quad\quad\quad\quad \llcorner\, Func_{\alpha\beta} \mathfrak{R}(\alpha,\beta) \\
\quad\quad\quad\quad \llcorner\, UpM_{\alpha\beta} \mathfrak{R}(\alpha,\beta) \\
\quad\quad\quad \llcorner\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{R}(b,\mathfrak{a}) \\
\quad\quad \llcorner\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{R}(\mathfrak{d},c) \\
\quad\quad \llcorner\, K(b) \\
\quad \llcorner\, M(c) \\
\llcorner\!\top\, \sharp_x K(x) \equiv \sharp_x M(x)
\end{array}
$$

(82).

Substituindo-se '$F\xi$' por '$\begin{array}{l} \top\!\!\top\, \xi \equiv b \\ \llcorner\, K\xi \end{array}$' e '$G\xi$' por '$\begin{array}{l} \top\!\!\top\, \xi \equiv c \\ \llcorner\, M\xi \end{array}$' na fórmula (35), obtemos

$$
\begin{array}{l}
\vdash \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv b \\ K(x) \end{array} \right) \equiv \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv c \\ M(x) \end{array} \right) \\
\quad b \equiv b \\
\quad K(b) \\
\quad c \equiv c \\
\quad M(c) \\
\quad \smile^{\mathfrak{R}}\; Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta) \left(\begin{array}{l} \alpha \equiv b, \\ K\alpha \end{array} \begin{array}{l} \beta \equiv c \\ M\beta \end{array} \right) \\
\qquad Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \\
\qquad UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta) \\
\qquad \smile^{\mathfrak{a}}\; \mathfrak{R}(b, \mathfrak{a}) \\
\qquad \smile^{\mathfrak{d}}\; \mathfrak{R}(\mathfrak{d}, c)
\end{array}
$$

(35a)

De (35a), (82) e TR, obtemos

$$
\begin{array}{l}
\vdash \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv b \\ K(x) \end{array} \right) \equiv \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv c \\ M(x) \end{array} \right) \\
\quad b \equiv b \\
\quad K(b) \\
\quad c \equiv c \\
\quad M(c) \\
\quad K(b) \\
\quad M(c) \\
\quad \sharp_x K(x) \equiv \sharp_x M(x)
\end{array}
$$

(83).

Das seguintes instâncias de 1BS

$$
\begin{array}{l}
\vdash b \equiv b \\
\quad K(b) \\
\quad b \equiv b
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
\vdash c \equiv c \\
\quad M(c) \\
\quad c \equiv c
\end{array},
$$

54BS e MP, derivamos

$$
\begin{array}{l}
\vdash b \equiv b \\
\quad K(b)
\end{array}
$$

(84)

e

$$
\begin{array}{l}
\vdash c \equiv c \\
\quad M(c)
\end{array}
$$

(85).

De (83), (84), (85) e MP, inferimos

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\!\!\top\!\!\top\!\!\top\!\!\top\; \sharp_x \left(\begin{array}{l} \top\!\!\top\, x \equiv b \\ \quad \llcorner\, K(x) \end{array}\right) \equiv \sharp_x \left(\begin{array}{l} \top\!\!\top\, x \equiv c \\ \quad \llcorner\, M(x) \end{array}\right) \\
\qquad\quad \llcorner\, K(b) \\
\qquad \llcorner\, M(c) \\
\quad \llcorner\!\!\top\, \sharp_x K(x) \equiv \sharp_x M(x)
\end{array}$$

(86).

De (86) e CP, temos

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\!\!\top\!\!\top\!\!\top\; \sharp_x K(x) \equiv \sharp_x M(x) \\
\qquad\quad \llcorner\, K(b) \\
\qquad \llcorner\, M(c) \\
\quad \llcorner\, \sharp_x \left(\begin{array}{l} \top\!\!\top\, x \equiv b \\ \quad \llcorner\, K(x) \end{array}\right) \equiv \sharp_x \left(\begin{array}{l} \top\!\!\top\, x \equiv c \\ \quad \llcorner\, M(x) \end{array}\right)
\end{array}$$

[492]

(87).

Da seguinte instância do 52BS

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\!\!\top\!\!\top\; \sharp_x M(x) \equiv a \\
\qquad \llcorner\, \sharp_x K(x) \equiv a \\
\quad \llcorner\, \sharp_x K(x) \equiv \sharp_x M(x)
\end{array}$$

[493]

e CP, obtemos

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\!\!\top\!\!\top\; \sharp_x K(x) \equiv a \\
\qquad \llcorner\!\!\top\, \sharp_x M(x) \equiv a \\
\quad \llcorner\, \sharp_x K(x) \equiv \sharp_x M(x)
\end{array}$$

(52BSa)

De (52BSa), (87) e TR, derivamos

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\!\!\top\!\!\top\!\!\top\!\!\top\; \sharp_x K(x) \equiv a \\
\qquad\qquad \llcorner\!\!\top\, \sharp_x M(x) \equiv a \\
\qquad\quad \llcorner\, K(b) \\
\qquad \llcorner\, M(c) \\
\quad \llcorner\, \sharp_x \left(\begin{array}{l} \top\!\!\top\, x \equiv b \\ \quad \llcorner\, K(x) \end{array}\right) \equiv \sharp_x \left(\begin{array}{l} \top\!\!\top\, x \equiv c \\ \quad \llcorner\, M(x) \end{array}\right)
\end{array}$$

(88).

Substituindo-se '$f\xi$' por

---

492 Esta proposição afirma que se o número que pertence ao conceito "cair sob *K*, mas ser diferente de *b*" é igual ao número que pertence ao conceito "cair sob *M*, mas ser diferente de *c*" e se *c* cai sob *M* e se *b* cai sob *K*, então o número que pertence a *K* é igual ao número que pertence a *M*.

493 Instancie '$f\xi$' por '$\xi \equiv a$', '*c*' por '$\sharp_x K(x)$' e '*d*' por '$\sharp_x M(x)$'.

$$'\begin{array}{l} \sharp_x K(x) \equiv a \\ \sharp_x M(x) \equiv a \\ K(b) \\ M(c) \\ \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv b \\ K(x) \end{array} \right) \equiv \xi \end{array}' ,$$

'c' por '$\sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv c \\ M(x) \end{array} \right)$' e '$d$' por '$e$' em 52BS, obtemos

$$\vdash \begin{array}{l} \sharp_x K(x) \equiv a \\ \sharp_x M(x) \equiv a \\ K(b) \\ M(c) \\ \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv b \\ K(x) \end{array} \right) \equiv e \\ \quad \begin{array}{l} \sharp_x K(x) \equiv a \\ \sharp_x M(x) \equiv a \\ K(b) \\ M(c) \\ \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv b \\ K(x) \end{array} \right) \equiv \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv c \\ M(x) \end{array} \right) \end{array} \\ \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv c \\ M(x) \end{array} \right) \equiv e \end{array}$$

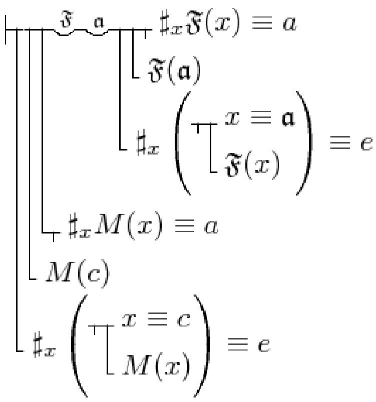
(52BSb)

De (52BSb), (88) e MP, derivamos

$$\vdash \begin{array}{l} \sharp_x K(x) \equiv a \\ K(b) \\ \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv b \\ K(x) \end{array} \right) \equiv e \\ \sharp_x M(x) \equiv a \\ M(c) \\ \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv c \\ M(x) \end{array} \right) \equiv e \end{array}$$

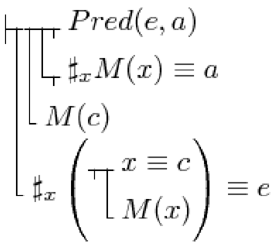
(89).

Aplicando CGC2 e CGC1, inferimos



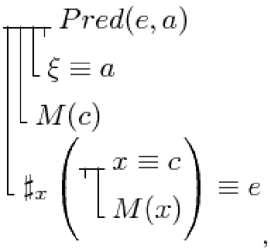
(90).

De (90), (F6) e TR, temos



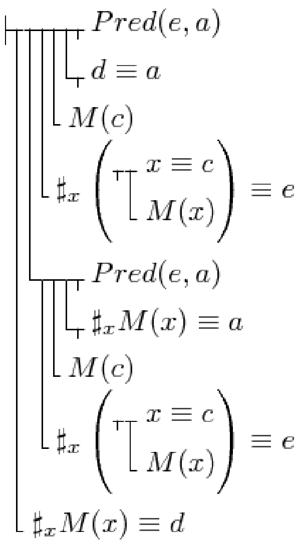
(91).

Substituindo-se '$f\xi$' por

'


,

'c' por '$\sharp_x M(x)$' em 52BS, obtemos



(52BSc).

De (52BSc), (91) e MP, derivamos

$$\vdash\begin{array}{l} Pred(e,a) \\ \neg\, d \equiv a \\ M(c) \\ \sharp_x \left(\begin{array}{l} \neg\,\neg\, x \equiv c \\ M(x) \end{array}\right) \equiv e \\ \sharp_x M(x) \equiv d \end{array}$$

(92).

De (92) e CP, obtemos

$$\vdash\begin{array}{l} \sharp_x M(x) \equiv d \\ M(c) \\ \sharp_x \left(\begin{array}{l} \neg\,\neg\, x \equiv c \\ M(x) \end{array}\right) \equiv e \\ \neg\, d \equiv a \\ Pred(e,a) \end{array}$$

(93).

Aplicando CGC2 e CGC1, temos

$$\vdash\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{F}\ \ \mathfrak{a}}{\smile}\ \begin{array}{l} \sharp_x \mathfrak{F}(x) \equiv d \\ \mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \\ \sharp_x \left(\begin{array}{l} \neg\,\neg\, x \equiv \mathfrak{a} \\ \mathfrak{F}(x) \end{array}\right) \equiv e \end{array} \\ \neg\, d \equiv a \\ Pred(e,a) \end{array}$$

(94).

De (94), (F6) e TR, inferimos

$$\vdash\begin{array}{l} Pred(e,d) \\ \neg\, d \equiv a \\ Pred(e,a) \end{array}$$

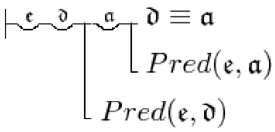
(95).

De (95) e CP, obtemos

$$\vdash\begin{array}{l} d \equiv a \\ Pred(e,a) \\ Pred(e,d) \end{array}$$

(96).

Aplicando GU1, derivamos



(97).

De (97), (A1) e MP, inferimos

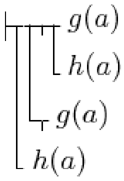
$\vdash Func_{\alpha\beta}Pred(\alpha, \beta)$

(Teor. 5).

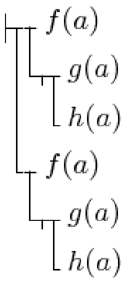
Teorema 6[494]

$$\vdash UpM_{\alpha\beta}Pred(\alpha, \beta)$$[495].

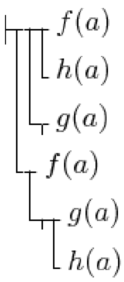
Da seguinte instância do Teorema IfGGA



e da seguinte instância de 27BS



por meio da TR, obtemos



(98).

Por CP, temos

494 Em **GGA1** (pp. 113-127), é feito uso do teorema IVa na prova desta proposição.
495 A relação de predecessão é Um-para-Muitos.

$$\begin{array}{l} g(a) \\ f(a) \\ h(a) \\ f(a) \\ g(a) \\ h(a) \end{array}$$

(99).

Da seguinte instância de (B2)

$$\begin{array}{l} d \equiv b \\ R(b,n) \\ R(d,n) \\ UpM_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta) \end{array}$$

e da seguinte instância de 57BS

$$\begin{array}{l} R(d,n) \\ R(d,a) \\ a \equiv n \end{array}$$ [496] ,

por meio de TR, inferimos

$$\begin{array}{l} d \equiv b \\ R(b,n) \\ R(d,a) \\ UpM_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta) \\ a \equiv n \end{array}$$

(100).

Da seguinte instância de 27BS

$$\begin{array}{l} a \equiv n \\ G(a) \\ a \equiv n \\ G(a) \end{array}$$,

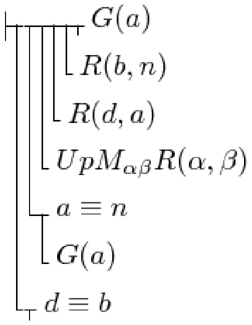
(100) e TR, obtemos

$$\begin{array}{l} d \equiv b \\ R(b,n) \\ R(d,a) \\ UpM_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta) \\ G(a) \\ a \equiv n \\ G(a) \end{array}$$

(101).

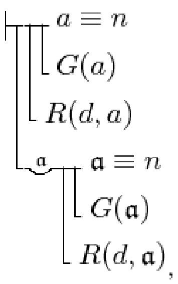
496 Substitua '$f\xi$' por '$R(d,\xi)$', 'c' por 'a' e 'd' por 'n'.

Por CP, temos

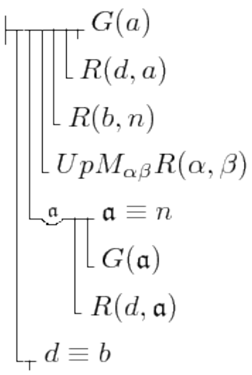


(102).

Da seguinte instância de 58BS1

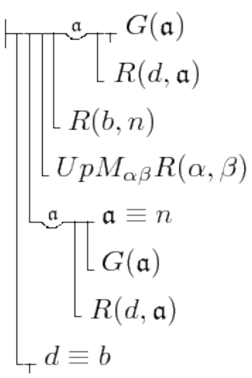


(102) e TR, inferimos



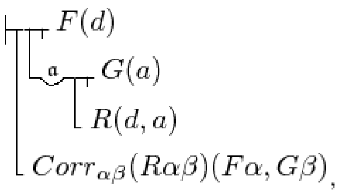
(103).

Aplicando CGC1, temos

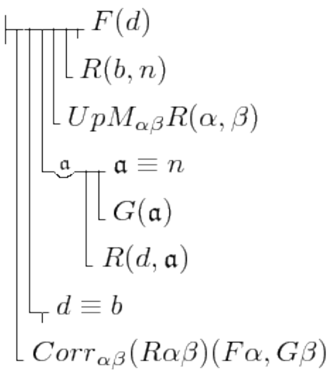


(104).

Da seguinte instância de (C3)

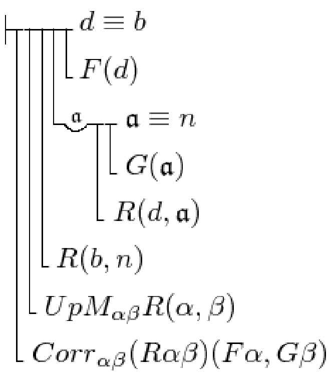


(104) e TR, obtemos



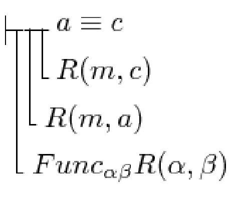
(105).

Por CP, obtemos

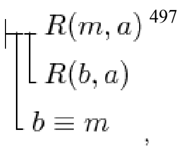


(106).

Da seguinte instância de (A2)

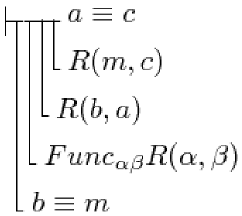


e da seguinte instância de 57BS



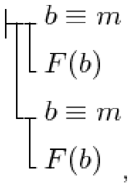
por meio de TR, obtemos

497 Substitua '$f\xi$' por '$R(\xi, a)$', 'c' por 'b' e 'd' por 'm'.

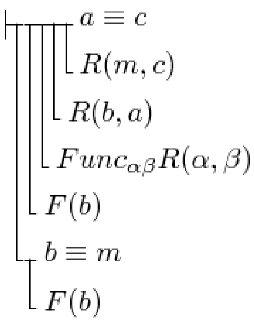


(107).

Da seguinte instância de 27BS

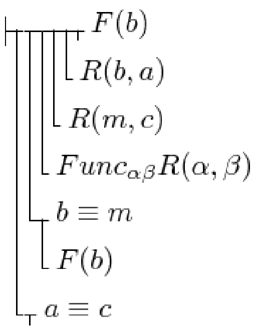


(107) e TR, inferimos



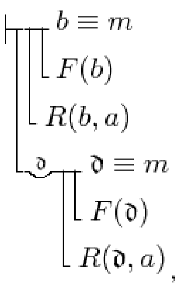
(108).

Por CP, obtemos

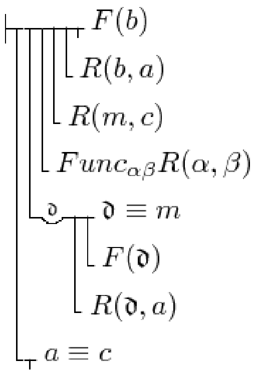


(109).

Da seguinte instância de 58BS1

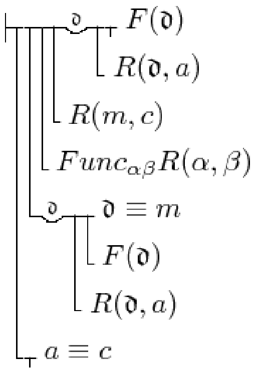


(109) e TR, inferimos



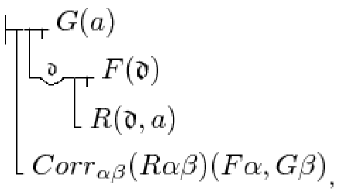
(110).

Aplicando CGC1, temos

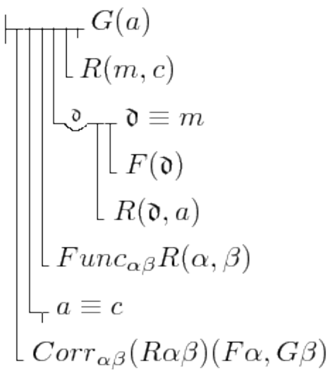


(111).

Da seguinte instância de (C4)

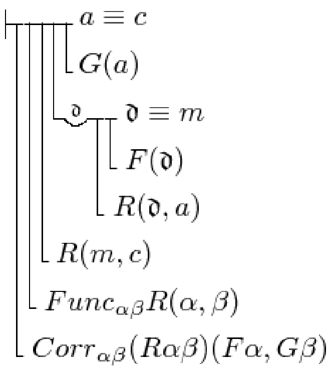


(111) e TR, obtemos

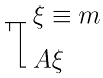
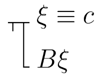


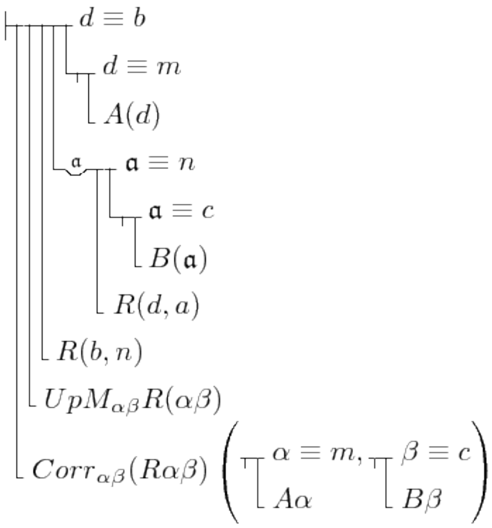
(112).

Por CP, temos



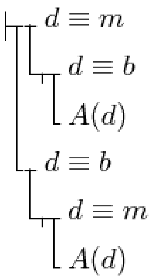
(113).

Na fórmula (106), substituindo-se '$F\xi$' por  e '$G\xi$' por , obtemos



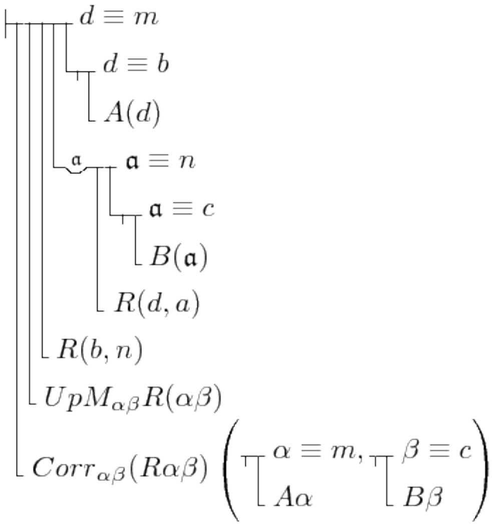
(114).

Na fórmula (99), substituindo-se '*a*' por '*d*', '*f*ξ' por 'ξ = *b*', '*g*ξ' por 'ξ= *m*' e '*h*ξ' por '*A*ξ', obtemos



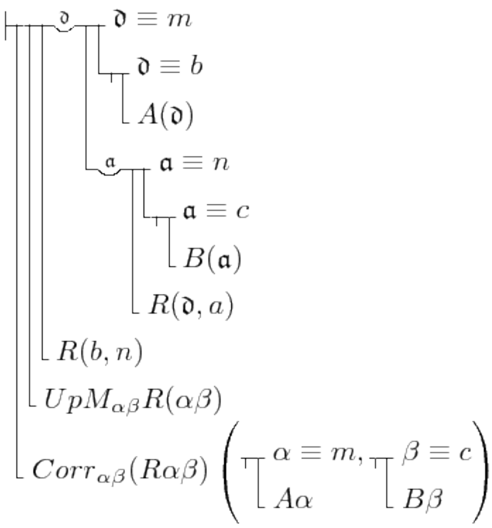
(115).

De (114), (115) e TR, obtemos

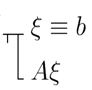


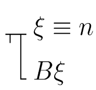
(116).

Aplicando CGC1, obtemos

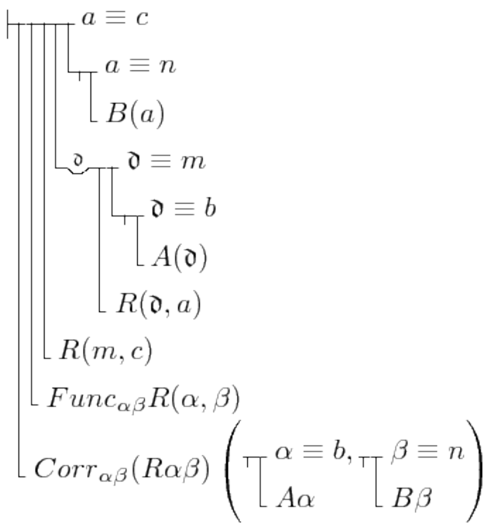


(117).

Na fórmula (113), substituindo-se '$F\xi$' por '

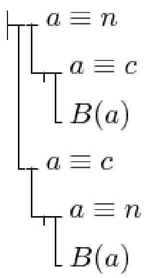
' e '$G\xi$' por 

, obtemos



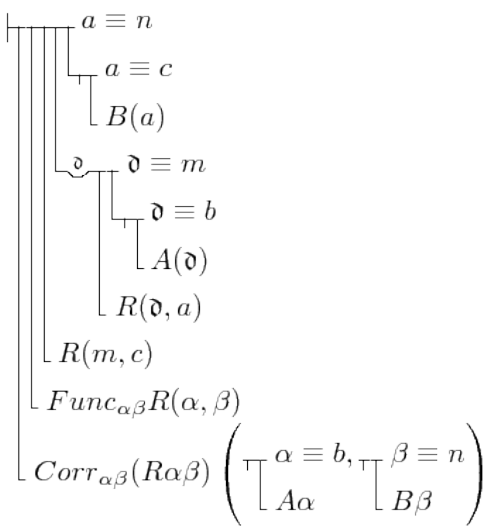
(118).

Na fórmula (99), substituindo '$f\xi$' por '$\xi = c$', '$g\xi$' por '$\xi = n$' e '$h\xi$' por '$B\xi$', obtemos



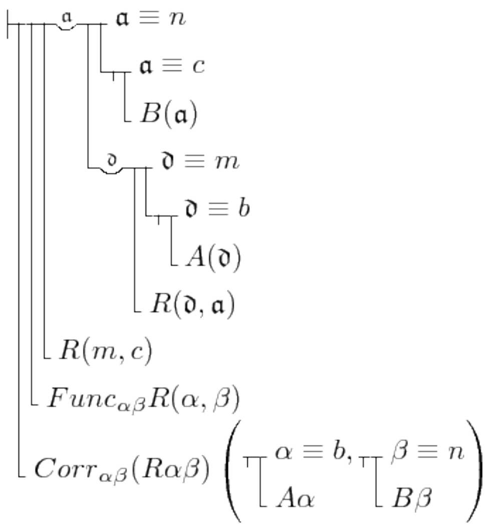
(119).

De (118), (119) e TR, obtemos



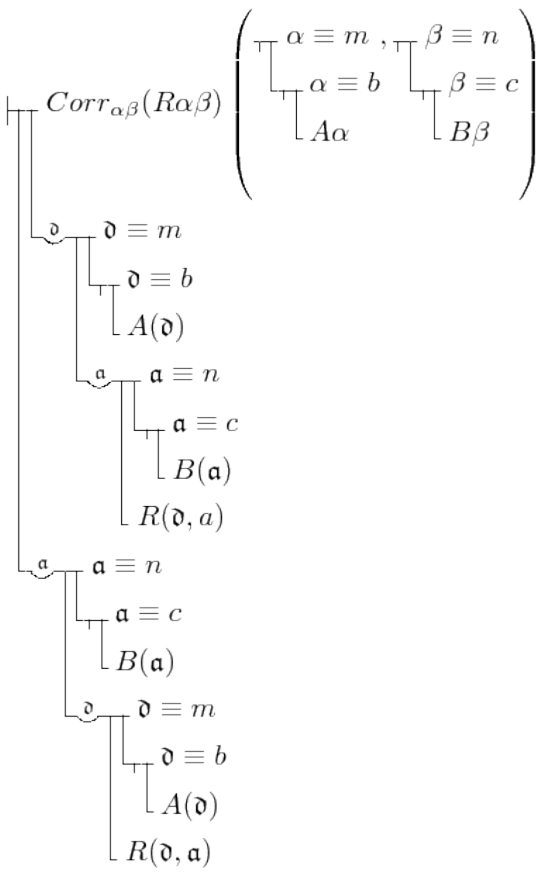
(120).

Aplicando CGC1, derivamos

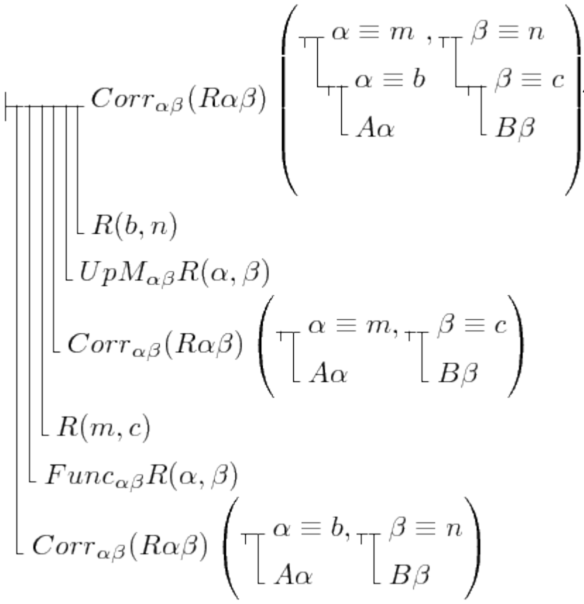


(121).

Da seguinte instância de (C1)

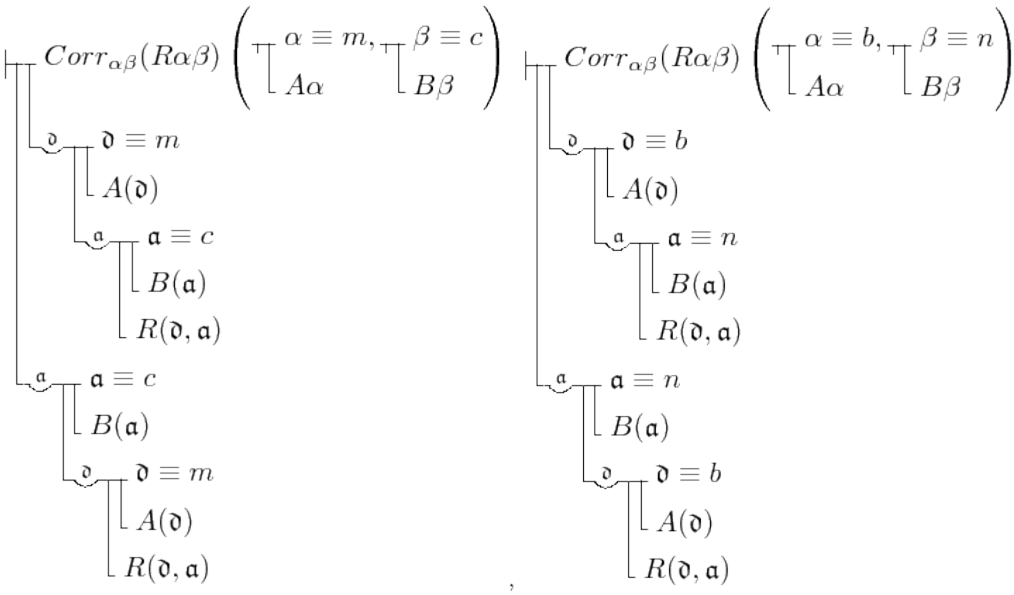


(117), (121) e TR, obtemos

[498]

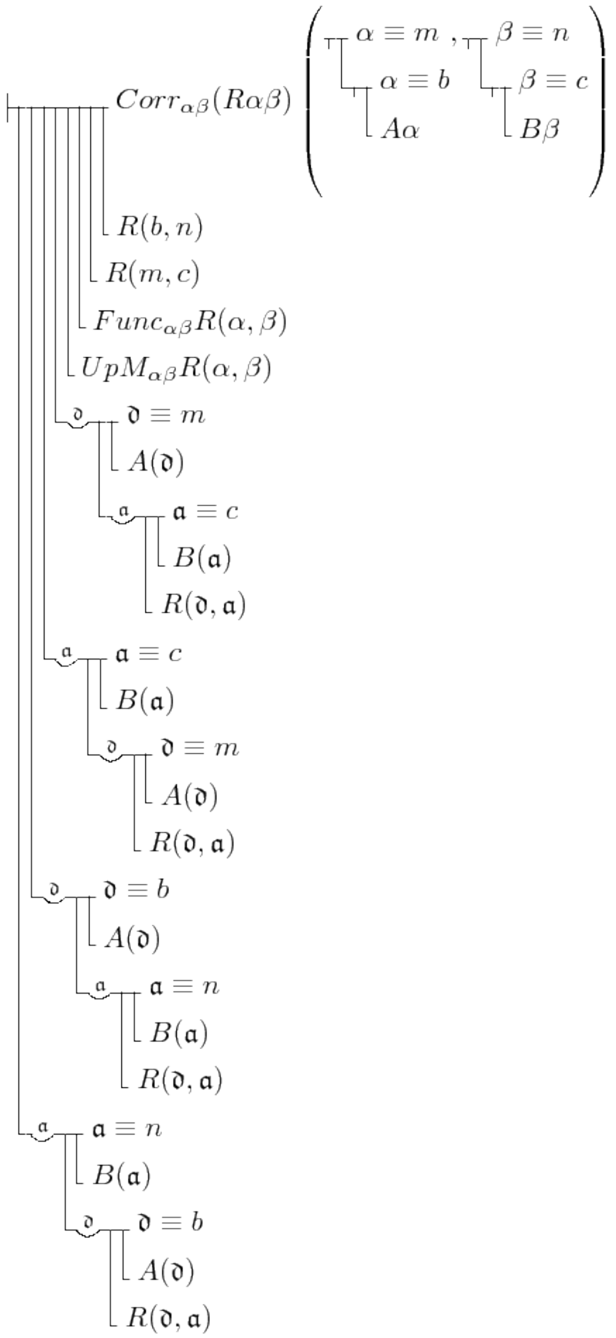
(122).

Das seguintes instâncias de (C1)



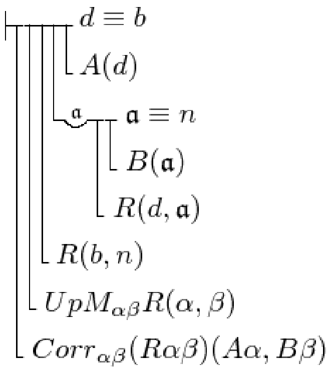
e (122), por meio de TR, inferimos

498 Esta proposição afirma que se $R(x,y)$ correlaciona os conceitos "cair sob A, mas ser diferente de b" e "cair sob B, mas ser diferente n" e se $R(x,y)$ é funcional e se $R(m,c)$ e se $R(x,y)$ correlaciona os conceitos "cair sob A, mas ser diferente de m" e "cair sob B, mas ser diferente de c" e se R(x,y) é Um-para-Muitos e se $R(b,n)$, então $R(x,y)$ correlaciona os conceitos "cair sob A, mas ser diferente de b e ser diferente de m" e "cair sob B, mas ser diferente de c e ser diferente de n".



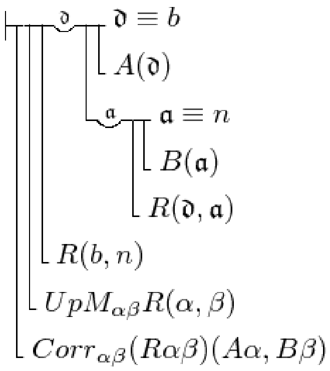
(123).

Na fórmula (106), substituindo-se '*F*ξ' por '*A*ξ' e '*G*ξ' por '*B*ξ', obtemos



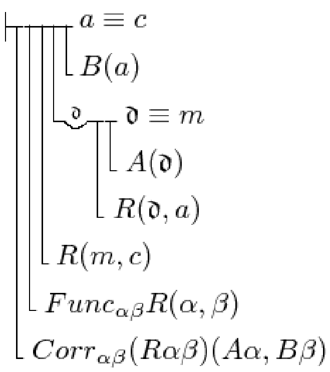
(124).

Aplicando CGC1, obtemos



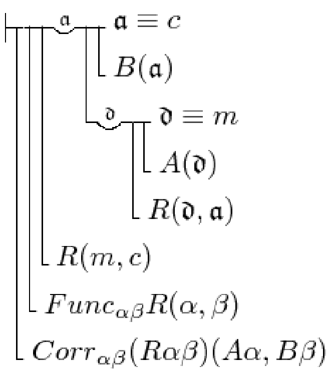
(125).

Na fórmula (113), substituindo-se '*F*ξ' por '*A*ξ' e '*G*ξ' por '*B*ξ', obtemos



(126).

Aplicando CGC1, temos



(127).

De (123), (125), (127) e TR, inferimos

$$Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)\left(\begin{array}{ll} \alpha \equiv m\ , & \beta \equiv n \\ \quad \alpha \equiv b & \quad \beta \equiv c \\ \quad A\alpha & \quad B\beta \end{array}\right)$$
$$R(b, n)$$
$$R(m, c)$$
$$Func_{\alpha\beta}R(\alpha, \beta)$$
$$UpM_{\alpha\beta}R(\alpha, \beta)$$
$$\mathfrak{d} \equiv m$$
$$A(\mathfrak{d})$$
$$\mathfrak{a} \equiv c$$
$$B(\mathfrak{a})$$
$$R(\mathfrak{d}, \mathfrak{a})$$
$$\mathfrak{a} \equiv n$$
$$B(\mathfrak{a})$$
$$\mathfrak{d} \equiv b$$
$$A(\mathfrak{d})$$
$$R(\mathfrak{d}, \mathfrak{a})$$
$$Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(A\alpha, B\beta)$$

(128).

Na fórmula (106), substituindo-se '*F*ξ' por '*A*ξ', '*G*ξ' por '*B*ξ', '*b*' por '*m*' e '*n*' por '*c*', obtemos

$$d \equiv m$$
$$A(d)$$
$$\mathfrak{a} \equiv c$$
$$B(\mathfrak{a})$$
$$R(d, \mathfrak{a})$$
$$R(m, c)$$
$$UpM_{\alpha\beta}R(\alpha, \beta)$$
$$Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(A\alpha, B\beta)$$

(129).

Aplicando CGC1, temos

$$\BGassert\BGconditional{Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(A\alpha, B\beta)}{\BGconditional{UpM_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta)}{\BGconditional{R(m,c)}{\BGquant{\mathfrak{d}}\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{a}}\BGconditional{R(\mathfrak{d},\mathfrak{a})}{\BGconditional{B(\mathfrak{a})}{\mathfrak{a}\equiv c}}}{\BGconditional{A(\mathfrak{d})}{\mathfrak{d}\equiv m}}}}}$$

(130).

Na fórmula (113), substituindo-se '*F*ξ' por '*A*ξ', '*G*ξ' por '*B*ξ', '*m*' por '*b*' e '*c*' por '*n*', obtemos

$$\BGassert\BGconditional{Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(A\alpha, B\beta)}{\BGconditional{Func_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta)}{\BGconditional{R(b,n)}{\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{d}}\BGconditional{R(\mathfrak{d},a)}{\BGconditional{A(\mathfrak{d})}{\mathfrak{d}\equiv b}}}{\BGconditional{B(a)}{a\equiv n}}}}}$$

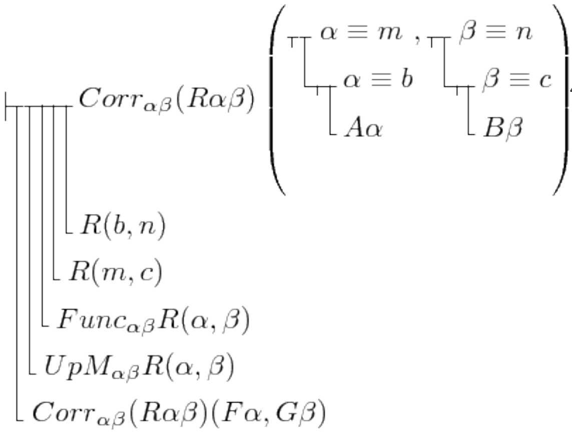
(131).

Aplicando CGC1, temos

$$\BGassert\BGconditional{Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(A\alpha, B\beta)}{\BGconditional{Func_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta)}{\BGconditional{R(b,n)}{\BGquant{\mathfrak{a}}\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{d}}\BGconditional{R(\mathfrak{d},\mathfrak{a})}{\BGconditional{A(\mathfrak{d})}{\mathfrak{d}\equiv b}}}{\BGconditional{B(\mathfrak{a})}{\mathfrak{a}\equiv n}}}}}$$

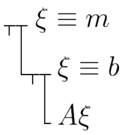
(132).

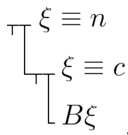
De (128), (130), (132) e TR, inferimos

[499]

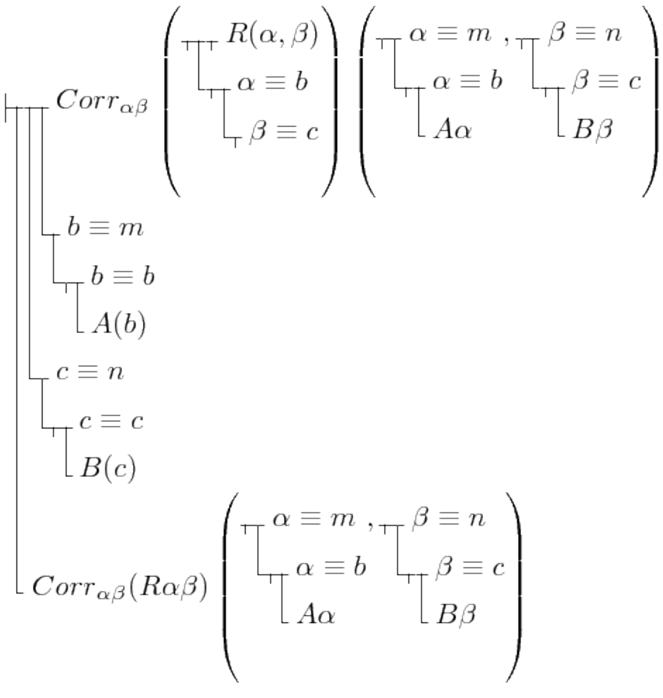
(133).

Na fórmula (14), substituindo-se '*F*ξ' e *G*ξ' por



,

respectivamente, obtemos



(134).

Da seguinte instância de 36BS

---

499 Se *R* correlaciona os conceitos *A* e *B* e se *R* é Um-para-Muitos e se *R* é funcional e se *m* está na relação *R* com *c* e se *b* está na relação R com *n*, então *R* correlaciona os conceitos "cair sob *A*, mas ser diferente de *b* e ser diferente de *m*" e "cair sob *B*, mas ser diferente de *c* e ser diferente de *n*".

$$\vdash\!\begin{array}{l} \top\!\top\, b \equiv m \\ \quad A(b) \\ \quad \top\, b \equiv b \\ b \equiv b \end{array},$$

54BS e MP, derivamos

$$\vdash\!\begin{array}{l} \top\, b \equiv m \\ \quad A(b) \\ \top\, b \equiv b \end{array} \qquad (135).$$

Por CP, inferimos

$$\vdash\!\begin{array}{l} \top\, b \equiv b \\ \quad A(b) \\ \top\, b \equiv m \end{array} \qquad (136).$$

Novamente, por CP obtemos

$$\vdash\!\begin{array}{l} b \equiv m \\ \top\!\top\, b \equiv b \\ \quad A(b) \end{array} \qquad (137).$$

A prova da proposição

$$\vdash\!\begin{array}{l} c \equiv n \\ \top\!\top\, c \equiv c \\ \quad B(c) \end{array} \qquad (138).$$

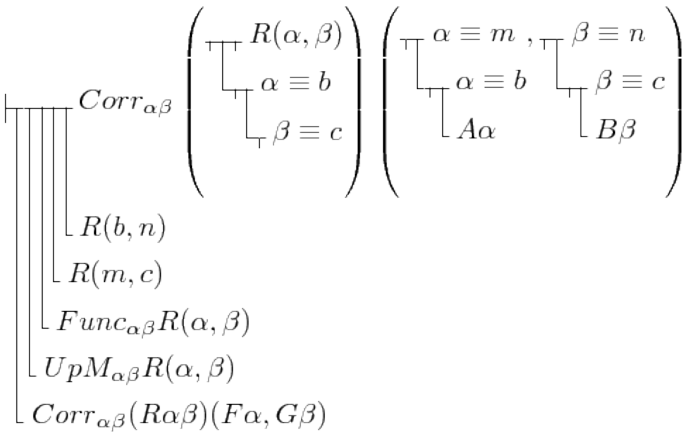
é similar à da proposição (137).

De (134), (137), (138) e MP, obtemos

$$\vdash\!\begin{array}{l} Corr_{\alpha\beta}\left(\begin{array}{l} \top\!\top\, R(\alpha,\beta) \\ \quad \top\, \alpha \equiv b \\ \quad \top\, \beta \equiv c \end{array}\right)\left(\begin{array}{ll} \top\, \alpha \equiv m\ , & \top\, \beta \equiv n \\ \quad \top\, \alpha \equiv b & \quad \top\, \beta \equiv c \\ \quad A\alpha & \quad B\beta \end{array}\right)^{500} \\ Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)\left(\begin{array}{ll} \top\, \alpha \equiv m\ , & \top\, \beta \equiv n \\ \quad \top\, \alpha \equiv b & \quad \top\, \beta \equiv c \\ \quad A\alpha & \quad B\beta \end{array}\right) \end{array} \qquad (139).$$

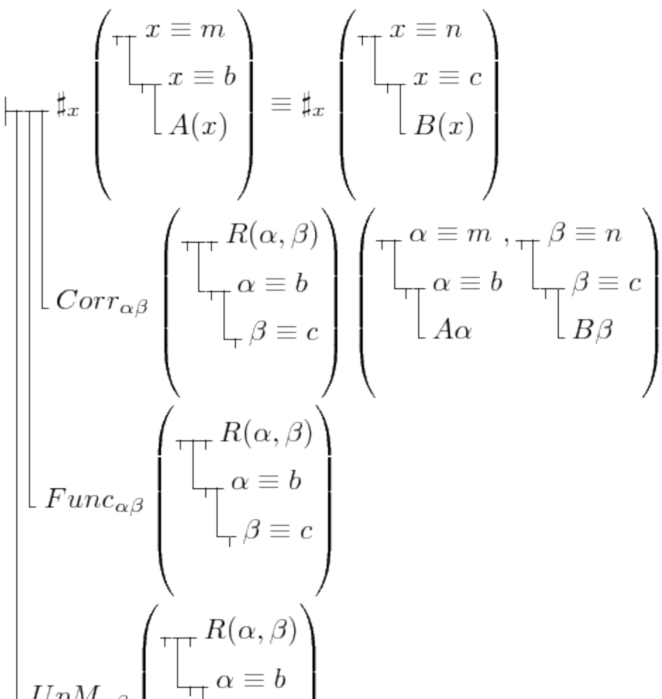
500 Esta proposição afirma que se *R*(*x*,*y*) correlaciona os conceitos "cair sob *A*, mas ser diferente de *b* e ser diferente de *m*" e "cair sob *B*, mas ser diferente de *c* e ser diferente de *n*", então a relação "*x* encontra-se na relação *R* com *y* e *x* é diferente de *b* e *y* é diferente de *c*" correlaciona os conceitos "cair sob *A*, mas ser diferente de *b* e ser diferente de *m*" e "cair sob *B*, mas ser diferente de *c* e ser diferente de *n*".

De (133), (139) e TR, derivamos



(140).

Da seguinte instância de (PH6)



(17), (20) e TR, inferimos

$$
\vdash \begin{array}{l}
\sharp_x\left(\begin{array}{l} x \equiv m \\ \quad x \equiv b \\ \quad\quad A(x) \end{array}\right) \equiv \sharp_x\left(\begin{array}{l} x \equiv n \\ \quad x \equiv c \\ \quad\quad B(x) \end{array}\right) \\
Corr_{\alpha\beta}\left(\begin{array}{l} R(\alpha,\beta) \\ \quad \alpha \equiv b \\ \quad\quad \beta \equiv c \end{array}\right)\left(\begin{array}{l} \alpha \equiv m \\ \quad \alpha \equiv b \\ \quad\quad A\alpha \end{array}, \begin{array}{l} \beta \equiv n \\ \quad \beta \equiv c \\ \quad\quad B\beta \end{array}\right) \\
Func_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta) \\
UpM_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta)
\end{array}
$$

(141).

De (140), (141) e TR, derivamos

$$
\vdash \begin{array}{l}
\sharp_x\left(\begin{array}{l} x \equiv m \\ \quad x \equiv b \\ \quad\quad A(x) \end{array}\right) \equiv \sharp_x\left(\begin{array}{l} x \equiv n \\ \quad x \equiv c \\ \quad\quad B(x) \end{array}\right) \\
R(b,n) \\
R(m,c) \\
Func_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta) \\
UpM_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta) \\
Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(A\alpha, B\beta)
\end{array}
$$

(142).

Na fórmula (87), substituindo-se '*b*' por '*m*', '*c*' por '*n*', '*K*ξ' por

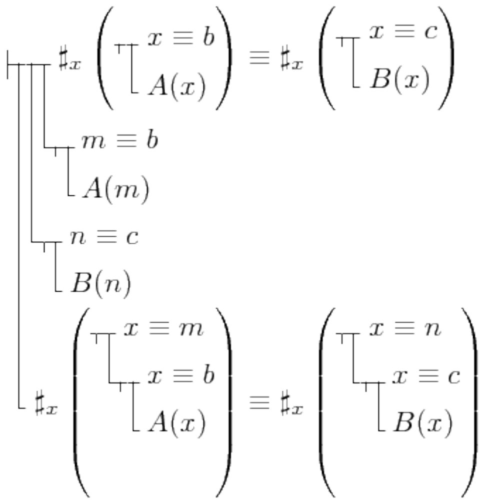
' $\begin{array}{l} \xi \equiv b \\ \quad A\xi \end{array}$ '

e '*M*ξ' por

' $\begin{array}{l} \xi \equiv c \\ \quad B\xi \end{array}$ '

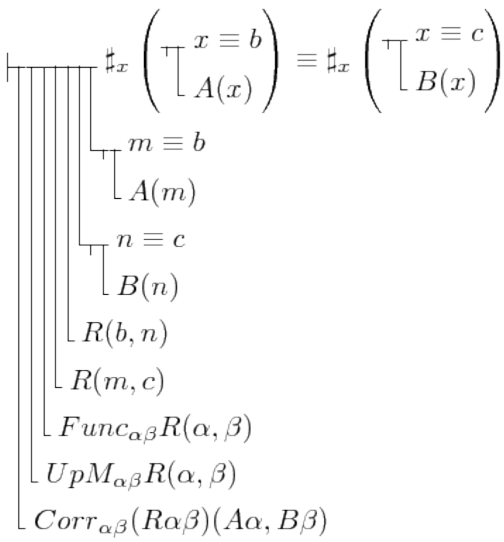
,

obtemos



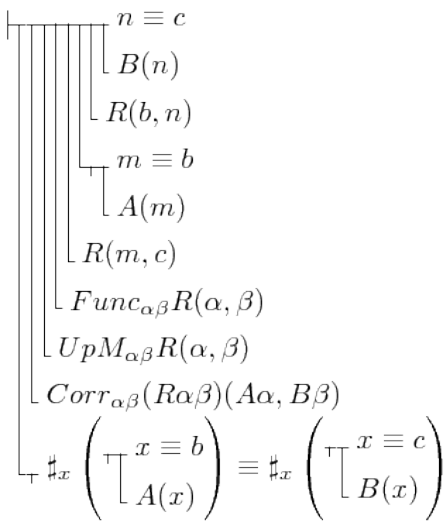
(143).

De (142), (143) e TR, temos



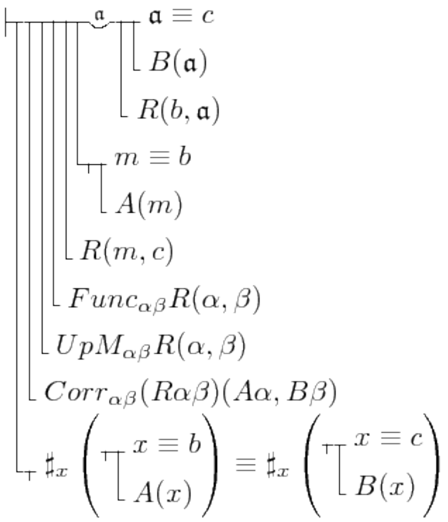
(144).

Por CP, obtemos



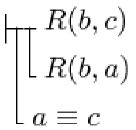
(145).

Aplicando CGC1, derivamos

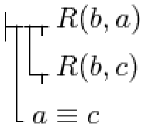


(146).

Da seguinte instância de 52BS

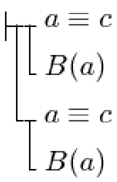


e contraposição, obtemos

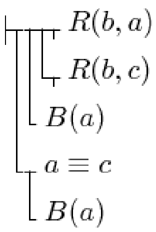


(147).

Da seguinte instância de 27BS

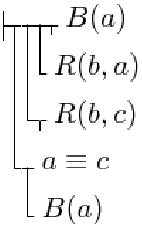


(147) e TR, inferimos



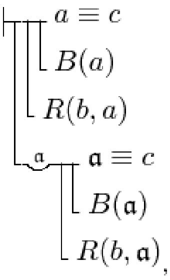
(148).

Por CP, obtemos

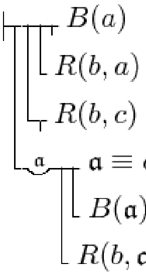


(149).

Da seguinte instância de 58BS1

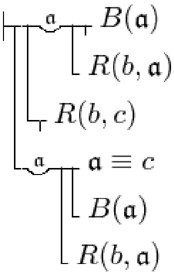


(149) e TR, inferimos



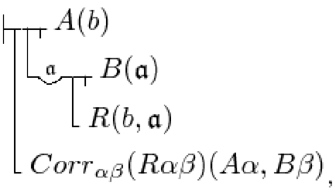
(150).

Aplicando CGC1, obtemos

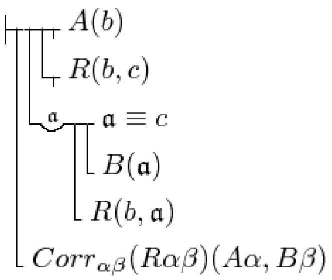


(151).

Da seguinte instância de (C3)

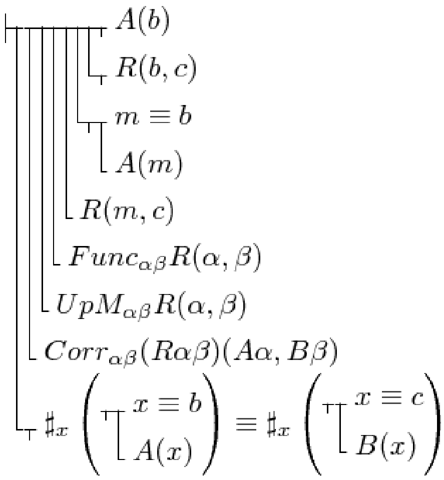


(151) e TR, inferimos



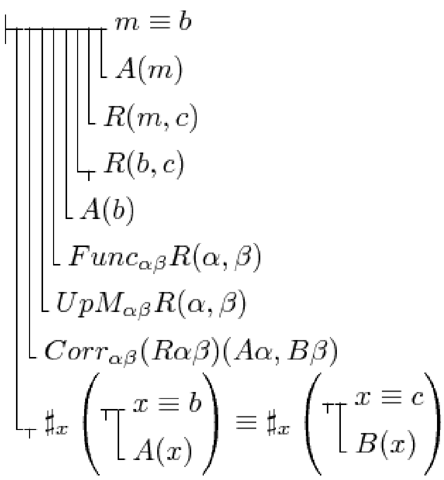
(152).

De (146), (152) e TR, derivamos



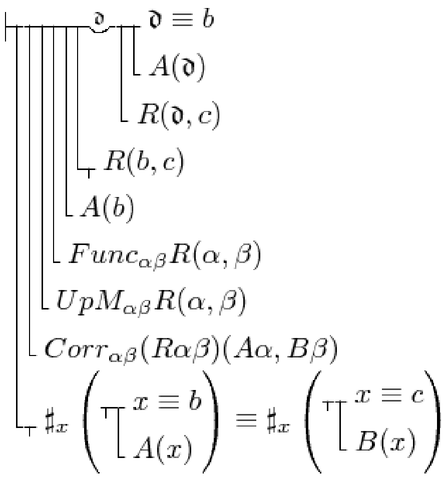
(153).

Por CP, obtemos



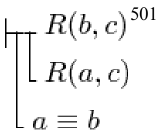
(154).

Aplicando CGC1, temos

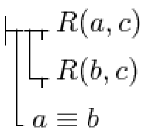


(155).

Da seguinte instância de 52BS

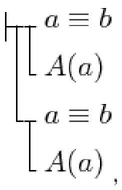
 [501]

e CP, derivamos

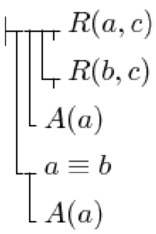


(156).

Da seguinte instância de 27BS



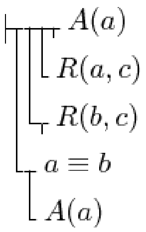
(156) e TR, obtemos



(157).

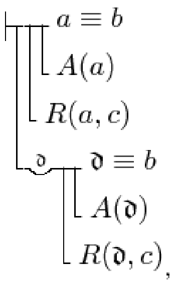
Por CP, temos

501 Substitua '*f*ξ' por ' *R*(ξ, *c*)”, '*c*' por '*a*' e '*d*' por '*b*'.

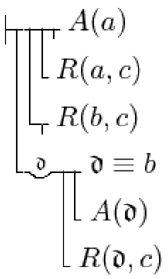


(158).

Da seguinte instância de 58BS1

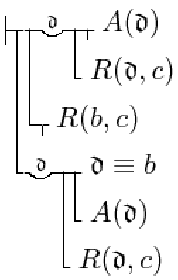


(158) e TR, inferimos



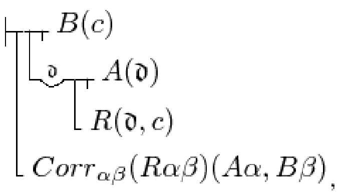
(159).

Aplicando CGC1, derivamos



(160).

Da seguinte instância de (C4)



(160) e TR, obtemos

$$
\begin{array}{l}
\vdash B(c) \\
\quad \neg\, R(b,c) \\
\quad \smile^{\mathfrak{d}} \neg\, \mathfrak{d} \equiv b \\
\qquad A(\mathfrak{d}) \\
\qquad R(\mathfrak{d}, c) \\
\quad Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(A\alpha, B\beta)
\end{array}
$$

(161).

De (155), (161) e TR, inferimos

$$
\begin{array}{l}
\vdash B(c) \\
\quad \neg\, R(b,c) \\
\quad A(b) \\
\quad Func_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta) \\
\quad UpM_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta) \\
\quad Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(A\alpha, B\beta) \\
\quad \neg\, \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv b \\ A(x) \end{array} \right) \equiv \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv c \\ B(x) \end{array} \right)
\end{array}
$$

(162).

Por CP, temos

$$
\begin{array}{l}
\vdash \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv b \\ A(x) \end{array} \right) \equiv \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv c \\ B(x) \end{array} \right) \\
\quad \neg\, R(b,c) \\
\quad A(b) \\
\quad B(c) \\
\quad Func_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta) \\
\quad UpM_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta) \\
\quad Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(A\alpha, B\beta)
\end{array}
$$

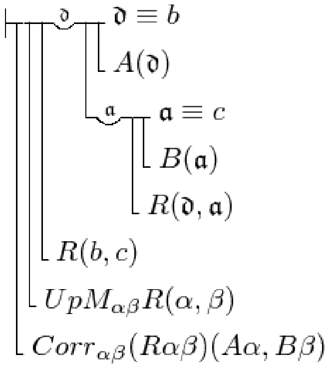
(163).

Na fórmula (106), substituindo-se '*n*' por '*c*', '*F*ξ' por '*A*ξ' e '*G*ξ' por '*B*ξ', obtemos

$$
\begin{array}{l}
\vdash d \equiv b \\
\quad A(d) \\
\quad \smile^{\mathfrak{a}} \mathfrak{a} \equiv c \\
\qquad B(\mathfrak{a}) \\
\qquad R(d, \mathfrak{a}) \\
\quad R(b,c) \\
\quad UpM_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta) \\
\quad Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(A\alpha, B\beta)
\end{array}
$$

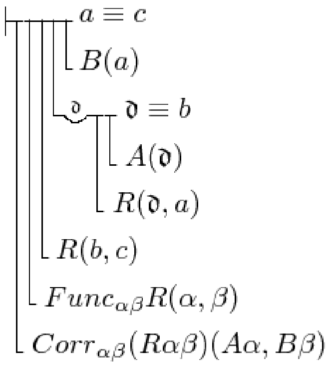
(164).

Aplicando CGC1, temos



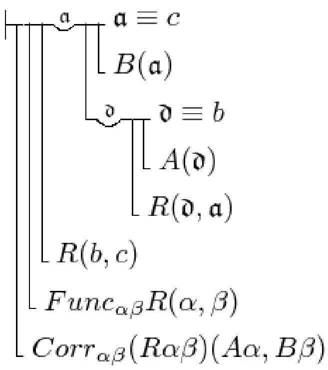
(165).

Na fórmula (113), substituindo-se '*m*' por '*b*', '*F*ξ' por '*A*ξ' e '*G*ξ' por '*B*ξ', obtemos



(166).

Aplicando CGC1, temos



(167).

Da seguinte instância de (C1)

$$
\begin{array}{l}
\vdash Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)\left(\begin{array}{l}\top\ \alpha \equiv b,\\ \llcorner A\alpha\end{array}\ \begin{array}{l}\top\ \beta \equiv c\\ \llcorner B\beta\end{array}\right)\\
\quad \llcorner \overset{\mathfrak{d}}{\smile}\ \mathfrak{d} \equiv b\\
\qquad \llcorner A(\mathfrak{d})\\
\qquad \llcorner \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \mathfrak{a} \equiv c\\
\qquad\quad \llcorner B(\mathfrak{a})\\
\qquad\quad \llcorner R(\mathfrak{d}, \mathfrak{a})\\
\quad \llcorner \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \mathfrak{a} \equiv c\\
\qquad \llcorner B(\mathfrak{a})\\
\qquad \llcorner \overset{\mathfrak{d}}{\smile}\ \mathfrak{d} \equiv b\\
\qquad\quad \llcorner A(\mathfrak{d})\\
\qquad\quad \llcorner R(\mathfrak{d}, \mathfrak{a})
\end{array}
$$

,

(165), (167) e TR, inferimos

$$
\begin{array}{l}
\vdash Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)\left(\begin{array}{l}\top\ \alpha \equiv b,\\ \llcorner A\alpha\end{array}\ \begin{array}{l}\top\ \beta \equiv c\\ \llcorner B\beta\end{array}\right)\\
\qquad\quad \llcorner R(b, c)\\
\qquad \llcorner Func_{\alpha\beta}R(\alpha, \beta)\\
\quad \llcorner UpM_{\alpha\beta}R(\alpha, \beta)\\
\llcorner Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(A\alpha, B\beta)
\end{array}
$$

(168).

Da seguinte instância de (PH6)

$$
\begin{array}{l}
\vdash \sharp_x\left(\begin{array}{l}\top\ x \equiv b\\ \llcorner A(x)\end{array}\right) \equiv \sharp_x\left(\begin{array}{l}\top\ x \equiv c\\ \llcorner B(x)\end{array}\right)\\
\qquad \llcorner Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)\left(\begin{array}{l}\top\ \alpha \equiv b,\\ \llcorner A\alpha\end{array}\ \begin{array}{l}\top\ \beta \equiv c\\ \llcorner B\beta\end{array}\right)\\
\quad \llcorner Func_{\alpha\beta}R(\alpha, \beta)\\
\llcorner UpM_{\alpha\beta}R(\alpha\beta)
\end{array}
$$

(168) e TR, derivamos

$$\begin{array}{l} \vdash \sharp_x\left(\begin{array}{l} x \equiv b \\ A(x) \end{array}\right) \equiv \sharp_x\left(\begin{array}{l} x \equiv c \\ B(x) \end{array}\right) \\ \quad R(b,c) \\ \quad Func_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta) \\ \quad UpM_{\alpha\beta}R(\alpha\beta \\ \quad Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(A\alpha, B\beta) \end{array}$$ [502]

(169).

De (163), (169) e TMI, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash \sharp_x\left(\begin{array}{l} x \equiv b \\ A(x) \end{array}\right) \equiv \sharp_x\left(\begin{array}{l} x \equiv c \\ B(x) \end{array}\right) \\ \quad Func_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta) \\ \quad UpM_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta) \\ \quad Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(A\alpha, B\beta) \\ \quad A(b) \\ \quad B(c) \end{array}$$ [503]

(170).

Por CP, temos

$$\begin{array}{l} \vdash Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(A\alpha, B\beta) \\ \quad Func_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta) \\ \quad UpM_{\alpha\beta}R(\alpha,\beta) \\ \quad \sharp_x\left(\begin{array}{l} x \equiv b \\ A(x) \end{array}\right) \equiv \sharp_x\left(\begin{array}{l} x \equiv c \\ B(x) \end{array}\right) \\ \quad A(b) \\ \quad B(c) \end{array}$$

(171).

Aplicando CGC2, obtemos

502 Se *R* correlaciona os conceitos *A* e *B* e se *R* é Um-para-Muitos e se *R* é funcional e se *b* está na relação *R* com *c*, então o número que pertence ao conceito "cair sob *A*, mas ser diferente de *b*" é igual ao número que pertence ao conceito "cair sob *B*, mas ser diferente de *c*".

503 Se *c* cai sob *B* e se *b* cai sob *A* e se *R* correlaciona os conceitos *A* e *B* e se *R* é Um-para-Muitos e se *R* é funcional, então o número que pertence ao conceito "cair sob *A*, mas ser diferente de *b*" é igual ao número que pertence ao conceito "cair sob *B*, mas ser diferente de *c*".

$$\vdash \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{R}}{\smile}\; Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(A\alpha, B\beta) \\ \quad Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha,\beta) \\ \quad UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha,\beta) \\ \sharp_x \begin{pmatrix} x \equiv b \\ A(x) \end{pmatrix} \equiv \sharp_x \begin{pmatrix} x \equiv c \\ B(x) \end{pmatrix} \\ A(b) \\ B(c) \end{array}$$

(172).

Da seguinte instância de (PH3)

$$\vdash \begin{array}{l} \sharp x A(x) \equiv \sharp_x B(x) \\ \overset{\mathfrak{R}}{\smile}\; Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(A\alpha, B\beta) \\ \quad Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha,\beta) \\ \quad UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha,\beta) \end{array}$$

,

(172) e TR, temos

$$\vdash \begin{array}{l} \sharp x A(x) \equiv \sharp_x B(x) \\ \sharp_x \begin{pmatrix} x \equiv b \\ A(x) \end{pmatrix} \equiv \sharp_x \begin{pmatrix} x \equiv c \\ B(x) \end{pmatrix} \\ A(b) \\ B(c) \end{array}$$

(173).

Da seguinte instância de 52BS

$$\vdash \begin{array}{l} d \equiv \sharp_x \begin{pmatrix} x \equiv c \\ B(x) \end{pmatrix} \\ \sharp_x \begin{pmatrix} x \equiv b \\ A(x) \end{pmatrix} \equiv \sharp_x \begin{pmatrix} x \equiv c \\ B(x) \end{pmatrix} \\ \sharp_x \begin{pmatrix} x \equiv b \\ A(x) \end{pmatrix} \equiv d \end{array}$$

e CP, obtemos

$$\begin{array}{l}
\vdash \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv b \\ A(x) \end{array} \right) \equiv \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv c \\ B(x) \end{array} \right) \\
\quad d \equiv \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv c \\ B(x) \end{array} \right) \\
\quad \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv b \\ A(x) \end{array} \right) \equiv d
\end{array}$$

(174).

De (173), (174) e , inferimos

$$\begin{array}{l}
\vdash \sharp x A(x) \equiv \sharp_x B(x) \\
\quad A(b) \\
\quad \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv b \\ A(x) \end{array} \right) \equiv d \\
\quad B(c) \\
\quad d \equiv \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv c \\ B(x) \end{array} \right)
\end{array}$$

(175).

Aplicando CGC2 e CGC1, obtemos

$$\begin{array}{l}
\vdash \overset{\mathfrak{F}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile} \sharp x \mathfrak{F}(x) \equiv \sharp_x B(x) \\
\qquad \mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \\
\qquad \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv \mathfrak{a} \\ \mathfrak{F}(x) \end{array} \right) \equiv d \\
\quad B(c) \\
\quad d \equiv \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv c \\ B(x) \end{array} \right)
\end{array}$$

(176).

Da seguinte instância de (F6)

$$\begin{array}{l}
\vdash Pred(d, \sharp_x B(x)) \\
\quad \overset{\mathfrak{F}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile} \sharp x \mathfrak{F}(x) \equiv \sharp_x B(x) \\
\qquad \mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \\
\qquad \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv \mathfrak{a} \\ \mathfrak{F}(x) \end{array} \right) \equiv d
\end{array}$$

,

(176) e TR, derivamos

$$\vdash \begin{array}{l} Pred(d, \natural_x B(x)) \\ B(c) \\ d \equiv \natural_x \left(\begin{array}{l} x \equiv c \\ B(x) \end{array} \right) \end{array}$$

(177).

Da seguinte instância de 52BS

$$\vdash \begin{array}{l} Pred(d, e) \\ B(c) \\ d \equiv \natural_x \left(\begin{array}{l} x \equiv c \\ B(x) \end{array} \right) \\ Pred(d, \natural_x B(x)) \\ B(c) \\ d \equiv \natural_x \left(\begin{array}{l} x \equiv c \\ B(x) \end{array} \right) \\ \natural_x B(x) \equiv e \end{array}$$

,

(177) e MP, inferimos

$$\vdash \begin{array}{l} Pred(d, e) \\ B(c) \\ d \equiv \natural_x \left(\begin{array}{l} x \equiv c \\ B(x) \end{array} \right) \\ \natural_x B(x) \equiv e \end{array}$$

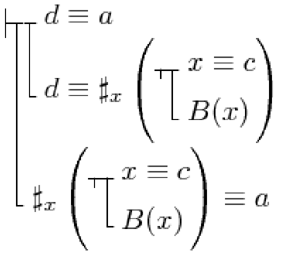
(178).

Por CP, obtemos

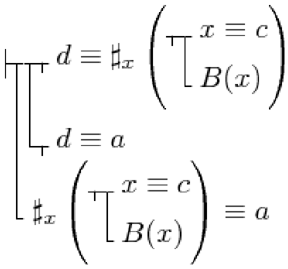
$$\vdash \begin{array}{l} \natural_x B(x) \equiv e \\ B(c) \\ d \equiv \natural_x \left(\begin{array}{l} x \equiv c \\ B(x) \end{array} \right) \\ Pred(d, e) \end{array}$$

(179).

Da seguinte instância de 52BS

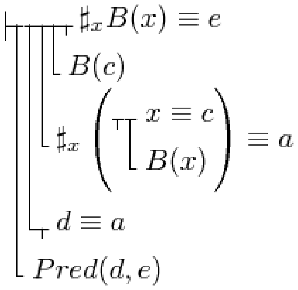


e CP, obtemos



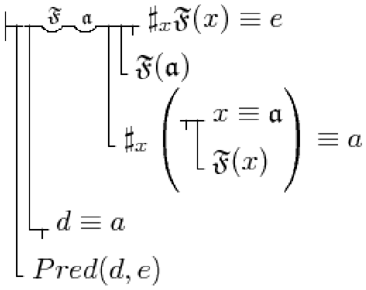
(180).

De (179), (180) e TR, inferimos



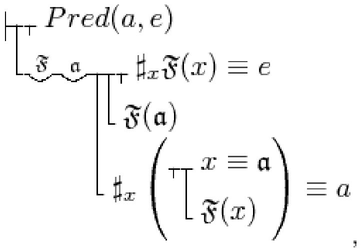
(181).

Aplicando CGC2 e CGC1, obtemos



(182).

Da seguinte instância de (F6)



(182) e TR, derivamos

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\!\!\top\, Pred(a,e)\\ \quad\llcorner\!\top\, d\equiv a\\ \;\llcorner\, Pred(d,e)\end{array}$$

(183).

Por CP, obtemos

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\!\!\top\, d\equiv a\\ \quad\llcorner\, Pred(a,e)\\ \;\llcorner\, Pred(d,e)\end{array}$$

(184).

Aplicando GU1, temos

$$\begin{array}{l}\vdash\!\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\!\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{e}\equiv\mathfrak{a}\\ \qquad\qquad\quad\llcorner\, Pred(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\\ \qquad\qquad\llcorner\, Pred(\mathfrak{e},\mathfrak{b})\end{array}$$

(185).

De (B1), (185) e MP, obtemos

$$\vdash UpM_{\alpha\beta}Pred(\alpha,\beta)$$

(Teor. 6).

Teorema 7

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\, \sharp_x\left(\begin{array}{l}\top\!\top\, H(x)\\ \;\llcorner\, F(x)\end{array}\right)\equiv 0\\ \;\llcorner\, \sharp_x H(x)\equiv 0\end{array}$$ [504] [505]

Da seguinte instância de (m3)

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\, H(a)\\ \;\llcorner\, \sharp_x H(x)\equiv 0\end{array}$$

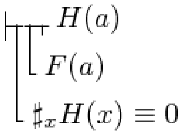
e seguinte instância de 1BS

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\!\!\top\!\!\top\, H(a)\\ \qquad\llcorner\, \sharp_x H(x)\equiv 0\\ \quad\llcorner\, F(a)\\ \;\llcorner\!\top\, H(a)\\ \quad\llcorner\, \sharp_x H(x)\equiv 0\end{array}$$,

504 Se o número que pertence ao conceito H é zero, então o número que pertence ao conceito "cair sob H e cair sob F" é zero.

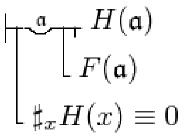
505 Os análogos dos nossos teoremas 7, 8 e 9 em **GGA** (pp. 127-131) não são provados explicitamente por meio do teorema IVa. Porém, ambos dependem de um análogo do nosso Teorema 4, que é provado usando-se o teorema IVa.

aplicando MP, obtemos



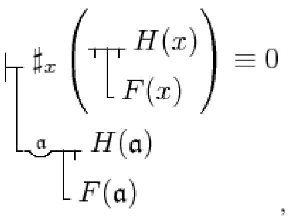
(186).

Aplicando CGC1, temos



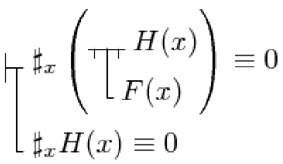
(187).

Da seguinte instância de (Teor. 4)



,

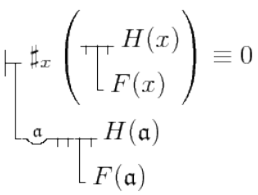
(187) e TR, inferimos



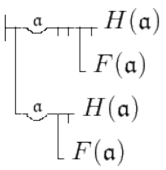
(Teor. 7).

Observação:

Na instância do (Teor 4) acima, usamos inadvertidamente a lei da dupla negação. A instância deveria ser:



Mas, o seguinte é provável no sistema de BS



por meio de 58BS1, 41BS, TR e CGC1.

Teorema 8

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\!\top\ \sharp_x F(x) \equiv 0 \\ \quad\ \ \sharp_x H(x) \equiv 0 \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}}\!\top\ H(\mathfrak{a}) \\ \qquad\quad F(\mathfrak{a}) \end{array}$$ [506]

Da seguinte instância de (m3)

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\ H(a) \\ \quad \sharp_x H(x) \equiv 0 \end{array}$$

e CP, temos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\ \sharp_x H(x) \equiv 0 \\ \quad H(a) \end{array}$$

(188).

Da seguinte instância de 58BS1

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\!\top\ H(a) \\ \quad\ \ F(a) \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}}\!\top\ H(\mathfrak{a}) \\ \qquad\quad F(\mathfrak{a}) \end{array},$$

(188) e TR, derivamos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\!\top\ \sharp_x H(x) \equiv 0 \\ \quad\ \ F(a) \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}}\!\top\ H(\mathfrak{a}) \\ \qquad\quad F(\mathfrak{a}) \end{array}$$

(189).

De (189) e CP, temos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\!\top\ F(a) \\ \quad\ \ \sharp_x H(x) \equiv 0 \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}}\!\top\ H(\mathfrak{a}) \\ \qquad\quad F(\mathfrak{a}) \end{array}$$

(190).

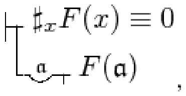
Aplicando CGC1, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\!\top\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\top\ F(\mathfrak{a}) \\ \quad\ \ \sharp_x H(x) \equiv 0 \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}}\!\top\ H(\mathfrak{a}) \\ \qquad\quad F(\mathfrak{a}) \end{array}$$

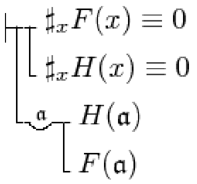
(191).

506 Se tudo que cai sob *F* cai sob *H* e se o número que pertence a *H* é zero, então o número que pertence a *F* também é zero.

Da seguinte instância de Teor. 4

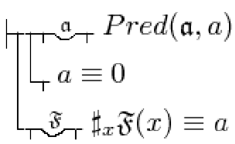


(191) e TR, derivamos



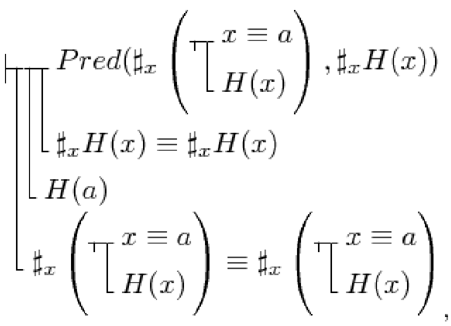
(Teor. 8).

Teorema 9

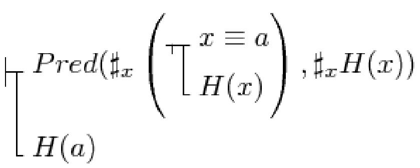


[507] [508]

Da seguinte instância de (F5)

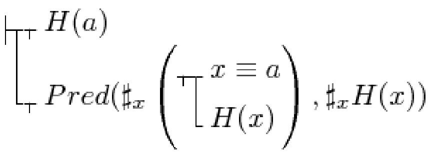


54BS e MP, derivamos



(192).

De (192) e CP, obtemos



(193).

Da seguinte instância de 58BS1

507 Este teorema é enunciado em **GLA**, §78: “6. Every Number except 0 follows in the series of natural numbers directly after a Number”.

508 Note que ao invés de '$\smile^{\mathfrak{F}}\ \sharp_x\mathfrak{F}(x) \equiv a$' poderíamos escrever '*Card*(*n*)'.

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\, Pred(\sharp_x \left(\begin{array}{l}\top\, x\equiv a\\ \llcorner\, H(x)\end{array}\right), \sharp_x H(x)) \\ \llcorner\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\top\, Pred(\mathfrak{a}, \sharp_x H(x))\end{array},$$

(193) e TR, derivamos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\, H(a) \\ \llcorner\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\top\, Pred(\mathfrak{a}, \sharp_x H(x))\end{array}$$

(194).

Aplicando CGC1, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\top\, H(\mathfrak{a}) \\ \llcorner\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\top\, Pred(\mathfrak{a}, \sharp_x H(x))\end{array}$$

(195).

Da seguinte instância de Teor. 4

$$\begin{array}{l} \vdash\, \sharp_x H(x) \equiv 0 \\ \llcorner\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\top\, H(\mathfrak{a})\end{array},$$

(195) e TR, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash\, \sharp_x H(x) \equiv 0 \\ \llcorner\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\top\, Pred(\mathfrak{a}, \sharp_x H(x))\end{array}$$

(196).

De (196) e contraposição, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\top\, Pred(\mathfrak{a}, \sharp_x H(x)) \\ \llcorner\top\, \sharp_x H(x) \equiv 0\end{array}$$

(197).

Substituindo-se '$f\xi$' por

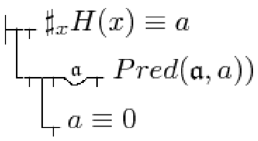
'$\begin{array}{l} \top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\top\, Pred(a, \xi) \\ \llcorner\top\, \xi \equiv 0\end{array}$'

'*c*' por '$\sharp_x H(x)$' e '*d*' por '*a*' em IIIdGGA, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\!\top\, \sharp_x H(x) \equiv a \\ \quad \llcorner\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\top\, Pred(\mathfrak{a}, \sharp_x H(x)) \\ \quad\quad \llcorner\top\, \sharp_x H(x) \equiv 0 \\ \llcorner\top\!\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\top\, Pred(\mathfrak{a}, a)) \\ \quad\quad \llcorner\top\, a \equiv 0 \end{array}$$

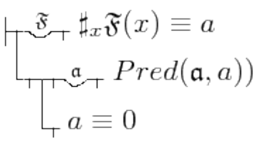
(IIIdGGAa)

De (IIIcGGAa), (197) e MP, inferimos



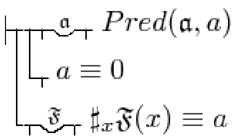
(198).

Aplicando CGC2, obtemos



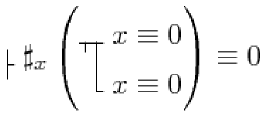
(199).

De (199) e CP, obtemos

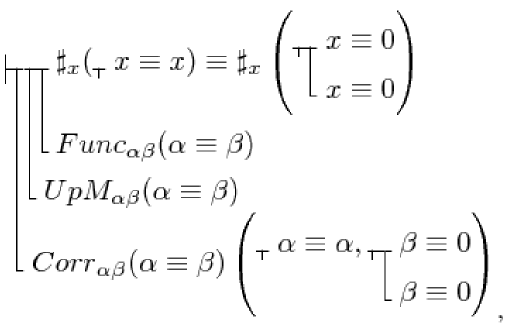


(Teor. 9).

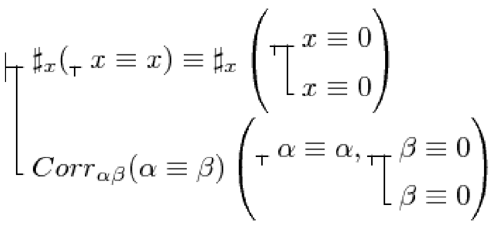
Lema 1

 [509] [510] [511]

Da seguinte instância de (PH6)



(Teor. 1), (Teor. 2) e MP, obtemos



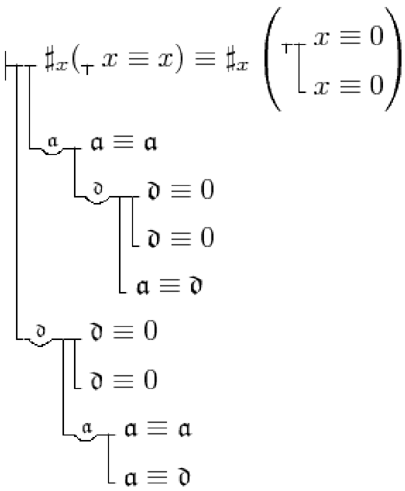
(200).

509 O número que pertence ao conceito "ser idêntico a 0, mas ser diferente de 0" é 0.

510 Este lema é importante para a prova de que 1 é o sucessor de 0. Aqui, podemos dizer "o sucessor" porque já provamos que '*Pred*' é funcional.

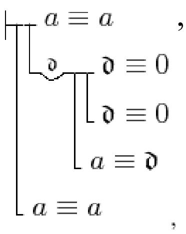
511 Na prova de um análogo deste lema em **GGA**, Frege usa o teorema 58 (**GGA**, pág. 104) que, por sua vez, depende do teorema IVb, que não é provável em **BS**. Além disso, ele usa um análogo do nosso teorema 4, que depende do teorema IVa.

De (200), (C1) e TR, derivamos

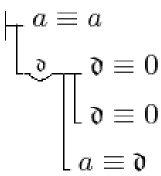


(201).

Da seguinte instância de 1BS

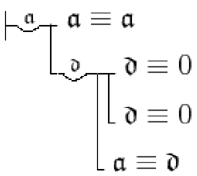


54BS e MP, inferimos



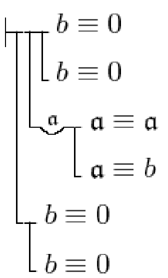
(202).

Aplicando GU1, obtemos



(203).

Da seguinte instância de 1BS



27BS e MP, derivamos

$$\vdash \begin{array}{l} b \equiv 0 \\ b \equiv 0 \\ \smile^{\mathfrak{a}} \begin{array}{l} \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a} \\ \mathfrak{a} \equiv b \end{array} \end{array}$$

(204).

Aplicando GU1, obtemos

$$\vdash \smile^{\mathfrak{d}} \begin{array}{l} \mathfrak{d} \equiv 0 \\ \mathfrak{d} \equiv 0 \\ \smile^{\mathfrak{a}} \begin{array}{l} \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a} \\ \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{d} \end{array} \end{array}$$

(205).

De (201), (203), (205) e MP, obtemos

$$\vdash \sharp_x(\top\, x \equiv x) \equiv \sharp_x \left(\top \begin{array}{l} x \equiv 0 \\ x \equiv 0 \end{array} \right)$$

(206).

Da seguinte instância de (D1)

$$\vdash \begin{array}{l} 0 \equiv \sharp_x \left(\top \begin{array}{l} x \equiv 0 \\ x \equiv 0 \end{array} \right) \\ \sharp_x(\top\, x \equiv x) \equiv \sharp_x \left(\top \begin{array}{l} x \equiv 0 \\ x \equiv 0 \end{array} \right) \end{array},$$

(206) e MP, inferimos

$$\vdash 0 \equiv \sharp_x \left(\top \begin{array}{l} x \equiv 0 \\ x \equiv 0 \end{array} \right)$$

(207).

De (207), (55BS) e MP, obtemos

$$\vdash \sharp_x \left(\top \begin{array}{l} x \equiv 0 \\ x \equiv 0 \end{array} \right) \equiv 0$$

(Lem. 1).

Teorema 10

$$\vdash Pred(c, 0)$$[512]

De (188)

512 Nenhum objeto precede o número 0.

$$\vdash \begin{array}{l} \sharp_x H(x) \equiv 0 \\ H(a) \end{array}$$

e da seguinte instância do 1BS

$$\vdash \begin{array}{l} \sharp_x H(x) \equiv 0 \\ H(a) \\ \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv a \\ H(x) \end{array} \right) \equiv c \\ \begin{array}{l} \sharp_x H(x) \equiv 0 \\ H(a) \end{array} \end{array}$$

,

aplicando MP, obtemos

$$\vdash \begin{array}{l} \sharp_x H(x) \equiv 0 \\ H(a) \\ \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv a \\ H(x) \end{array} \right) \equiv c \end{array}$$

(208).

Aplicando CGC2 e CGC1, temos

$$\vdash \smile^{\mathfrak{F}} \smile^{\mathfrak{a}} \begin{array}{l} \sharp_x \mathfrak{F}(x) \equiv 0 \\ \mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \\ \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv \mathfrak{a} \\ \mathfrak{F}(x) \end{array} \right) \equiv c \end{array}$$

(209).

De (209), (F6) e MP, inferimos

$$\vdash Pred(c, 0)$$

(Teor. 10).

Teorema 11

$$\vdash Pred(0, 1)$$ [513 514]

Da seguinte instância de (F5)

$$\vdash \begin{array}{l} Pred(0, 1) \\ \sharp_x (x \equiv 0) \equiv 1 \\ 0 \equiv 0 \\ \sharp_x \left(\begin{array}{l} x \equiv 0 \\ x \equiv 0 \end{array} \right) \equiv 0 \end{array}$$

,

513 1 é o sucessor de 0.

514 Este teorema é enunciado por Frege em **GLA**, §77.

54BS, (E), (Lem. 1) e MP, derivamos

$$\vdash Pred(0,1)$$

(Teor. 11).

Teorema 12

$$\vdash\!\top\, 0 \equiv 1$$ [515]

Da seguinte instância de IIIbGGA

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\!\!\top\, 0 \equiv 1 \\ \quad\;\; Pred(0,1) \\ \quad \top\, Pred(0,0) \end{array},$$

(Teor. 11) e MP, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\, 0 \equiv 1 \\ \quad \top\, Pred(0,0) \end{array}$$

(210).

De (210), (Teor. 10) e MP, deduzimos

$$\vdash\!\top\, 0 \equiv 1$$

(Teor. 12).

Teorema 13

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\top\, F(\mathfrak{a}) \\ \quad\;\; \sharp_x F(x) \equiv 1 \end{array}$$ [516] [517] [518]

De (Teor. 4)

$$\begin{array}{l} \vdash \sharp_x F(x) \equiv 0 \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}}\!\top\, F(\mathfrak{a}) \end{array}$$

e CP, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\top\, F(\mathfrak{a}) \\ \quad \top\, \sharp_x F(x) \equiv 0 \end{array}$$

(211).

Da seguinte instância de IIIdGGA

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\!\!\top\, \sharp_x F(x) \equiv 0 \\ \quad\;\; \sharp_x F(x) \equiv 1 \\ \quad \top\, 0 \equiv 1 \end{array},$$

(211) e TR, obtemos

515 0 é diferente de 1.

516 Se o número que pertence ao conceito *F* é 1, então existe algo que cai sob *F*.

517 Veja **GLA**, §78, proposição 2.

518 Novamente, este teorema depende de um análogo do nosso teorema 4, que em **GGA** é provado usando-se IVa.

$$\begin{array}{l}\vdash \neg\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\neg\; F(\mathfrak{a})\\ \qquad \sharp_x F(x)\equiv 1\\ \quad \neg\; 0\equiv 1\end{array}$$

(212).

De (212), (Teor. 12) e MP, inferimos

$$\begin{array}{l}\vdash \neg\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\neg\; F(\mathfrak{a})\\ \quad \sharp_x F(x)\equiv 1\end{array}$$

(Teor. 13).

Teorema 14

$$\begin{array}{l}\vdash a\equiv 1\\ \quad Pred(0,a)\end{array}$$ [519] [520] [521]

Da seguinte instância de (A2)

$$\begin{array}{l}\vdash a\equiv 1\\ \qquad Pred(0,1)\\ \quad\; Pred(0,a)\\ \quad Func_{\alpha\beta}Pred(\alpha,\beta)\end{array},$$

(Teor. 5), (Teor. 11) e MP, obtemos

$$\begin{array}{l}\vdash a\equiv 1\\ \quad Pred(0,a)\end{array}$$

(Teor. 14).

Teorema 15

$$\begin{array}{l}\vdash d\equiv a\\ \qquad F(a)\\ \qquad \sharp_x F(x)\equiv 1\\ \quad F(d)\end{array}$$ [522] [523]

Da seguinte instância do Teorema IIIdGGA

$$\begin{array}{l}\vdash e\equiv c\\ \quad\; R(a,e)\\ \quad \neg\; R(a,c)\end{array}$$

e CGC1, obtemos

519 Se *a* sucede 0, então *a* é igual a 1.
520 Veja **GLA**, §78, proposição 1.
521 Este teorema depende do nosso teorema 5, cujo análogo em **GGA** depende de IVa.
522 Se *d* cai sob *F* e se o número que pertence a *F* é igual a 1 e se *a* cai sob *F*, então *d* é igual a *a*.
523 Veja **GLA**, §78, proposição 3.

$$\mathfrak{a} \equiv c$$
$$R(a, \mathfrak{a})$$
$$R(a, c)$$

(213).

Da seguinte instância de (C3)

$$F(a)$$
$$\mathfrak{a} \equiv c$$
$$R(a, \mathfrak{a})$$
$$Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(F\alpha, \beta \equiv c),$$

(213) e TR, inferimos

$$F(a)$$
$$R(a, c)$$
$$Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(F\alpha, \beta \equiv c)$$

(214).

Por CP, obtemos

$$R(a, c)$$
$$F(a)$$
$$Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(F\alpha, \beta \equiv c)$$

(215).

Na fórmula (215) substituindo-se '*c*' por '0', obtemos

$$R(a, 0)$$
$$F(a)$$
$$Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(F\alpha, \beta \equiv 0)$$

(216).

Na fórmula (216), substituindo-se 'a' por 'd', obtemos

$$R(d, 0)$$
$$F(d)$$
$$Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(F\alpha, \beta \equiv 0)$$

(217).

Da seguinte instância de (B2)

$$d \equiv a$$
$$R(a, 0)$$
$$R(d, 0)$$
$$UpM_{\alpha\beta}R(\alpha\beta),$$

(216), (217)e TR, inferimos

$$d \equiv a$$
$$F(a)$$
$$F(d)$$
$$UpM_{\alpha\beta}R(\alpha\beta)$$
$$Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(F\alpha, \beta \equiv 0)$$

(218).

Por CP, obtemos

$$Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(F\alpha, \beta \equiv 0)$$
$$F(a)$$
$$F(d)$$
$$UpM_{\alpha\beta}R(\alpha\beta)$$
$$d \equiv a$$

(219).

Da seguinte instância de 1BS

$$d \equiv a$$
$$Func_{\alpha\beta}R(\alpha, \beta)$$
$$d \equiv a$$

,

(219) e TR, derivamos

$$Corr_{\alpha\beta}(R\alpha\beta)(F\alpha, \beta \equiv 0)$$
$$Func_{\alpha\beta}R(\alpha, \beta)$$
$$UpM_{\alpha\beta}R(\alpha, \beta)$$
$$F(a)$$
$$F(d)$$
$$d \equiv a$$

(220).

Aplicando CGC2, obtemos

$$\underbrace{}_{\mathfrak{R}} Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(F\alpha, \beta \equiv 0)$$
$$Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta)$$
$$UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta)$$
$$F(a)$$
$$F(d)$$
$$d \equiv a$$

(221).

Da seguinte instância de (PH3)

$$\sharp_x F(x) \equiv \sharp_x(x \equiv 0)$$
$$\underbrace{}_{\mathfrak{R}} Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(F\alpha, \beta \equiv 0)$$
$$Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta)$$
$$UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha, \beta)$$

,

(221) e TR, obtemos

$$\vdash \begin{array}{l} \neg\, \sharp_x F(x) \equiv \sharp_x(x \equiv 0) \\ F(a) \\ F(d) \\ \neg\, d \equiv a \end{array}$$

(222).

Por contraposição, temos

$$\vdash \begin{array}{l} d \equiv a \\ F(a) \\ F(d) \\ \sharp_x F(x) \equiv \sharp_x(x \equiv 0) \end{array}$$

(223).

Da seguinte instância de (E2)

$$\vdash \begin{array}{l} \sharp_x F(x) \equiv \sharp_x(x \equiv 0) \\ \sharp_x F(x) \equiv 1 \end{array},$$

(223) e TR

$$\vdash \begin{array}{l} d \equiv a \\ F(a) \\ \sharp_x F(x) \equiv 1 \\ F(d) \end{array}$$

(Teor. 15).

Lema 2

$$\vdash \sharp_x(x \equiv n) \equiv \sharp_x(x \equiv c)$$

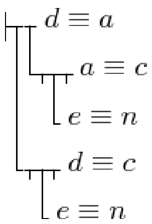
Da seguinte instância de 57BS

$$\vdash \begin{array}{l} d \equiv a \\ a \equiv c \\ d \equiv c \end{array}$$

e das seguintes instâncias de IbGGA

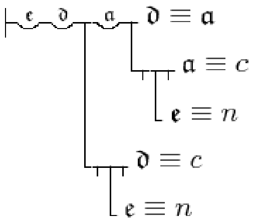
$$\vdash \begin{array}{l} a \equiv c \\ \neg \left(\begin{array}{l} \neg\, a \equiv c \\ e \equiv n \end{array} \right) \end{array} \qquad \vdash \begin{array}{l} d \equiv c \\ \neg \left(\begin{array}{l} \neg\, d \equiv c \\ e \equiv n \end{array} \right) \end{array},$$

por meio de TR, derivamos



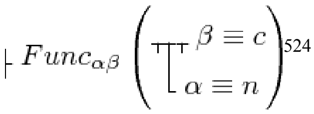
(224).

Aplicando GU1, obtemos



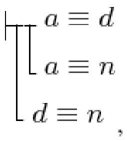
(225).

De (225), (A1), e MP, obtemos

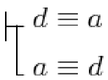


(226).

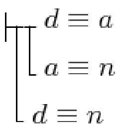
Da seguinte instância do Teorema 57 de BS



55BS

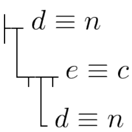
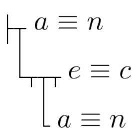


e TR, obtemos



(57BSb).

Das seguintes instâncias de Ib

57BSb e TR, derivamos

524 Isto é, a relação "*x* é igual a *n* e *y* é igual a *c*" é funcional

$$\BGassert\BGconditional{\BGconditional{d\equiv a}{\BGnot\BGconditional{\BGnot e\equiv c}{a\equiv n}}}{\BGnot\BGconditional{\BGnot e\equiv c}{d\equiv n}}$$

(227).

Aplicando GU1, temos

$$\BGassert\BGquant{\mathfrak{d}}\BGquant{\mathfrak{e}}\BGconditional{\BGquant{\mathfrak{a}}\BGconditional{\mathfrak{d}\equiv \mathfrak{a}}{\BGnot\BGconditional{\BGnot \mathfrak{e}\equiv c}{\mathfrak{a}\equiv n}}}{\BGnot\BGconditional{\BGnot \mathfrak{e}\equiv c}{\mathfrak{d}\equiv n}}$$

(228).

De (228), (B2) e MP, inferimos

$$\BGassert UpM_{\alpha\beta}\left(\BGnot\BGconditional{\BGnot \beta\equiv c}{\alpha\equiv n}\right)$$ [525]

(229).

Da seguinte instância de (PH6)

$$\BGassert\BGconditional{\BGconditional{\BGconditional{\sharp_x(x\equiv n)\equiv\sharp_x(x\equiv c)}{Corr_{\alpha\beta}\left(\BGnot\BGconditional{\BGnot \beta\equiv c}{\alpha\equiv n}\right)(\alpha\equiv n,\beta\equiv c)}}{Func_{\alpha\beta}\left(\BGnot\BGconditional{\BGnot \beta\equiv c}{\alpha\equiv n}\right)}}{UpM_{\alpha\beta}\left(\BGnot\BGconditional{\BGnot \beta\equiv c}{\alpha\equiv n}\right)}$$,

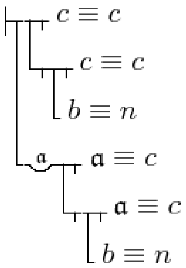
(226), (229) e MP, derivamos

$$\BGassert\BGconditional{\sharp_x(x\equiv n)\equiv\sharp_x(x\equiv c)}{Corr_{\alpha\beta}\left(\BGnot\BGconditional{\BGnot \beta\equiv c}{\alpha\equiv n}\right)(\alpha\equiv n,\beta\equiv c)}$$

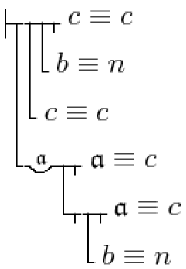
(230).

Da seguinte instância de 58BS1

525 Ou seja, a relação "*x* é igual a *n* e *y* é igual a *c*" é Um-para-Muitos.

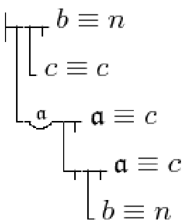


e CP, obtemos



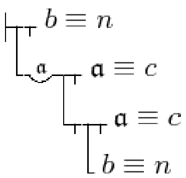
(231).

Novamente, por CP, obtemos



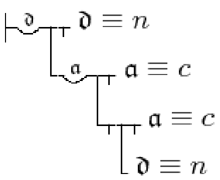
(232).

De (232), 54BS e MP, inferimos



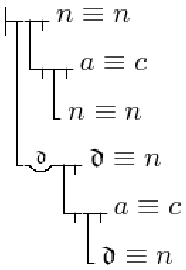
(233).

Aplicando GU1, temos

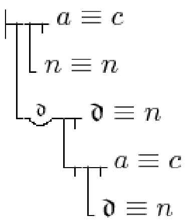


(234).

Da seguinte instância de 58BS1

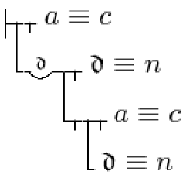


e CP, obtemos



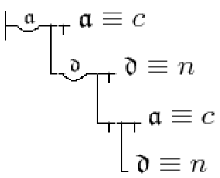
(235).

De (235), 54BS e MP, derivamos



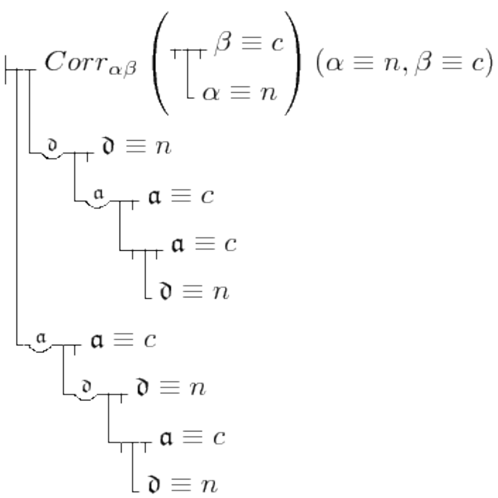
(236).

Aplicando GU1, temos



(237).

Da seguinte instância de (C1)



(234), (237) e MP, derivamos

$$\vdash Corr_{\alpha\beta}\left(\begin{array}{l} \beta \equiv c \\ \alpha \equiv n \end{array}\right)(\alpha \equiv n, \beta \equiv c)$$

(238).

De (230), (238) e MP, inferimos

$$\vdash \natural_x(x \equiv n) \equiv \natural_x(x \equiv c)$$

(Lema 2).

Teorema 17

$$\vdash \begin{array}{l} \natural_x F(x) \equiv 1 \\ \neg \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \neg\, F(\mathfrak{a}) \\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{d}}{\smile} \begin{array}{l} \mathfrak{d} \equiv \mathfrak{a} \\ F(\mathfrak{d}) \\ F(\mathfrak{a}) \end{array} \end{array}$$ [526]

Da seguinte instância do (Lema 2)

$$\vdash \natural_x(x \equiv 0) \equiv \natural_x(x \equiv c),$$

da seguinte instância de (E1)

$$\vdash \begin{array}{l} 1 \equiv \natural_x(x \equiv c) \\ \natural_x(x \equiv 0) \equiv \natural_x(x \equiv c) \end{array}$$

e MP, obtemos

$$\vdash 1 \equiv \natural_x(x \equiv c)$$

(239).

Da seguinte instância de 57BS

$$\vdash \begin{array}{l} A(1) \\ A(\natural_x(x \equiv c)) \\ 1 \equiv \natural_x(x \equiv c) \end{array},$$

(239) e MP, derivamos

$$\vdash \begin{array}{l} A(1) \\ A(\natural_x(x \equiv c)) \end{array}$$

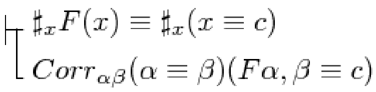
(240).

Da seguinte instância de (PH6)

$$\vdash \begin{array}{l} \natural_x F(x) \equiv \natural_x(x \equiv c) \\ Corr_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta)(F\alpha, \beta \equiv c) \\ Func_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta) \\ UpM_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta) \end{array},$$

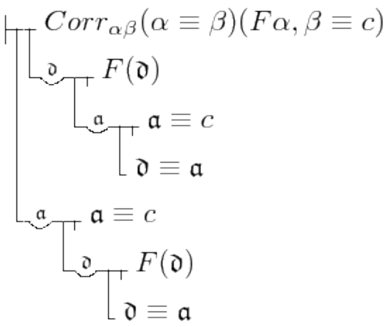
(Teor. 1), (Teor. 2) e MP, derivamos

526 Este teorema é enunciado por Frege em **GLA**, §78, proposição 4.



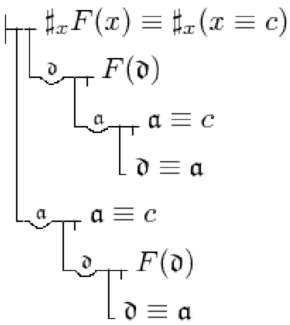
(241).

Da seguinte instância de (C1)



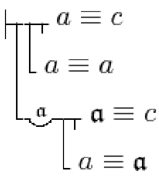
,

(241) e TR, obtemos



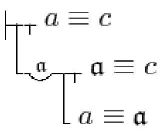
(242).

Da seguinte instância de 58BS1



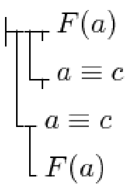
,

54BS e MP, inferimos



(243).

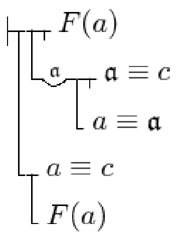
Da seguinte instância de 28BS



[527] ,

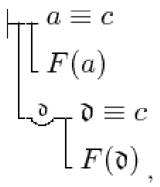
(243) e TR, inferimos

527 Aqui, poderíamos usar **27BS** e **CP**.

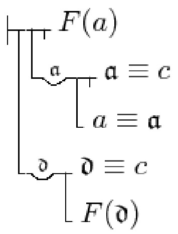


(244).

Da seguinte instância de 58BS1

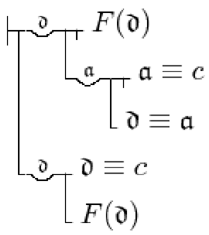


(244) e TR, derivamos



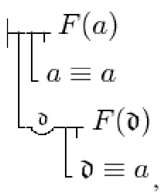
(245).

Aplicando CGC1, temos

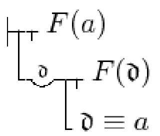


(246).

Da seguinte instância de 58BS1



54BS e MP, obtemos



(247).

Da seguinte instância de 57BS

$$\vdash \begin{array}{l} F(a) \\ F(c) \\ a \equiv c \end{array}$$

e CP, obtemos

$$\vdash \begin{array}{l} a \equiv c \\ F(a) \\ F(c) \end{array}$$

(248).

De (247), (248) e TR, inferimos

$$\vdash \begin{array}{l} a \equiv c \\ \overset{\mathfrak{d}}{\smile} \begin{array}{l} F(\mathfrak{d}) \\ \mathfrak{d} \equiv a \end{array} \\ F(c) \end{array}$$

(249).

Aplicando GU1, temos

$$\vdash \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \begin{array}{l} \mathfrak{a} \equiv c \\ \overset{\mathfrak{d}}{\smile} \begin{array}{l} F(\mathfrak{d}) \\ \mathfrak{d} \equiv \mathfrak{a} \end{array} \\ F(c) \end{array}$$

(250).

De (242), (246), (250) eTR, obtemos

$$\vdash \begin{array}{l} \sharp_x F(x) \equiv \sharp_x (x \equiv c) \\ \overset{\mathfrak{d}}{\smile} \begin{array}{l} \mathfrak{d} \equiv c \\ F(\mathfrak{d}) \end{array} \\ F(c) \end{array}$$

(251).

Da seguinte instância de (240) [528]

$$\vdash \begin{array}{l} \sharp_x F(x) \equiv 1 \\ \sharp_x F(x) \equiv \sharp_x (x \equiv c) \end{array},$$

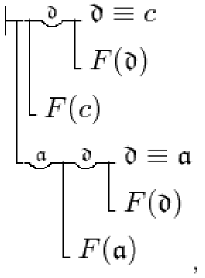
(251) e TR, derivamos

$$\vdash \begin{array}{l} \sharp_x F(x) \equiv 1 \\ \overset{\mathfrak{d}}{\smile} \begin{array}{l} \mathfrak{d} \equiv c \\ F(\mathfrak{d}) \end{array} \\ F(c) \end{array}$$

(252).

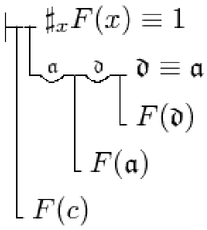
528 Substitua '$A\xi$' por '$\sharp_x F(x) \equiv \xi$'.

Da seguinte instância de 58BS1



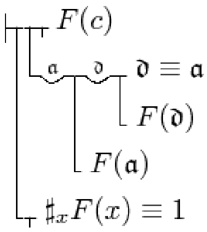
,

(252) e TR, inferimos



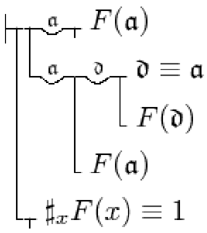
(253).

Por CP, obtemos



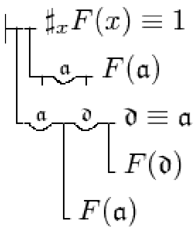
(254).

Aplicando CGC1, derivamos



(256).

Por contraposição novamente, obtemos



(Teor. 17).

Teorema 18

$$\vdash \begin{array}{l} \sharp_x(Pred^{**}(x,d)) \equiv \sharp_x \left(\begin{array}{l} \top\, x \equiv a \\ Pred^{**}(x,a) \end{array} \right) \\ Nat(a) \\ Pred(d,a) \end{array}$$ [529] [530]

Da seguinte instância de (H2)

$$\vdash \begin{array}{l} a \equiv b \\ \top\, Pred^{*}(b,a) \\ Pred^{**}(b,a) \end{array} ,$$

55BS e TR, obtemos

$$\vdash \begin{array}{l} b \equiv a \\ Pred^{**}(b,a) \\ \top\, Pred^{*}(b,a) \end{array}$$

(257).

De (257) e CP, temos

$$\vdash \begin{array}{l} Pred^{*}(b,a) \\ \top \begin{array}{l} b \equiv a \\ Pred^{**}(b,a) \end{array} \end{array}$$

(258).

De (258) e do Teorema 143 de **GGA**[531]

$$\vdash \begin{array}{l} Pred^{**}(b,d) \\ Pred^{*}(b,a) \\ Pred(d,a) \end{array} ,$$ [532]

por meio de TR, obtemos

$$\vdash \begin{array}{l} Pred^{**}(b,d) \\ \top \begin{array}{l} b \equiv a \\ Pred^{**}(b,a) \end{array} \\ Pred(d,a) \end{array}$$

(259).

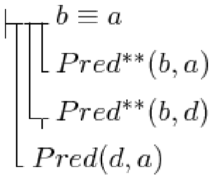
529 Ou seja, se *a* é o sucessor de *d* e se *a* é número natural, então o número que pertence ao conceito “pertencer à Pred-série terminada por *d*” é igual ao número que pertence ao conceito “pertencer à Pred-série terminada por *a*, mas ser diferente de *a*”.

530 Em **GGA** (pp. 146-47), é feito uso explicito de IVa na prova do análogo deste teorema.

531 O teorema 143 de **GGA** é provável no nosso sistema. Sua prova em **GGA** depende indiretamente do **Teorema IVa**, porque depende do teorema 88 de **GGA,** que é um análogo da nossa fórmula (**184**) provada sem usar IVa. Os demais teoremas necessários para provar 143 são prováveis da nossa base axiomática. Veja (**GGA**, pp. 137-144).

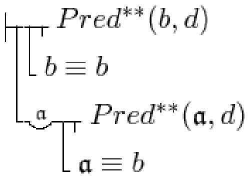
532 O teorema 143 afirma que se *a* é o sucessor de *d* e se *a* vem depois de *b* na Pred-serie, então *d* pertence à Pred-série iniciada por *b* (b vem depois de *d* na Pred-serie ou *d* é igual a *b*).

De (259) e CP, temos



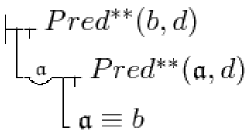
(260).

Da seguinte instância de 58BS1



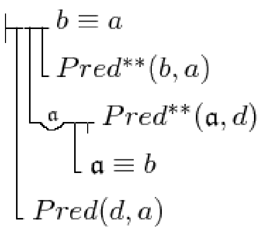
,

54BS e MP, obtemos



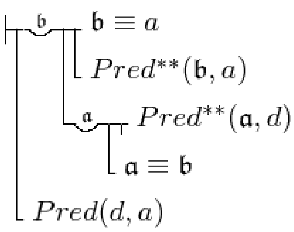
(261).

De (260), (261) e TR, inferimos



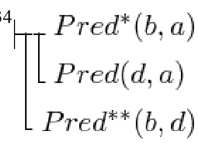
(262).

Aplicando CGC1, temos



(263).

Da seguinte instância do Teorema 134 de **GGA**[533]

[534]


e da seguinte instância do Teorema IIId

533 Esta fórmula corresponde a uma instância do teorema 102 de **BS**.
534 O teorema 134 de **GGA** não depende do teorema IVa, sendo provável no nosso sistema.

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top\, b \equiv a \\ \qquad Pred^{*}(b,a) \\ \quad \top\, Pred^{*}(a,a) \end{array},$$

por meio de TR, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top\!\!\top\, b \equiv a \\ \qquad\quad Pred^{**}(b,d) \\ \qquad Pred(d,a) \\ \quad \top\, Pred^{*}(a,a) \end{array}$$

(264).

Da seguinte instância do Teorema 145 de **GGA**[535]

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\, Pred^{*}(a,a) \\ \quad Pred^{**}(0,a) \end{array},$$ [536]

(264) e TR, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top\!\!\top\, b \equiv a \\ \qquad\quad Pred^{**}(b,d) \\ \qquad Pred(d,a) \\ \quad Pred^{**}(0,a) \end{array}$$

(265).

Da seguinte instância de If GGA

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top\!\!\top\, b \equiv a \\ \qquad\quad Pred^{**}(b,a) \\ \qquad \top\, b \equiv a \\ \quad Pred^{**}(b,a) \end{array},$$

(265) e TR, inferimos

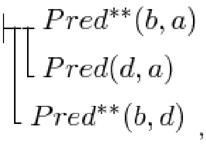
$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top\!\!\top\!\!\top\!\!\top\, b \equiv a \\ \qquad\qquad\quad Pred^{**}(b,a) \\ \qquad\qquad Pred(d,a) \\ \qquad\quad Pred^{**}(b,d) \\ \qquad Pred^{**}(0,a) \\ \quad Pred^{**}(b,a) \end{array}$$

(266).

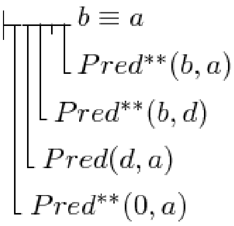
535 Novamente, o teorema 145 é provável no nosso sistema. Este teorema depende indiretamente de IVa, porque depende do teorema 143 de **GGA**. Mas, como já afirmamos, o teorema 143 de **GGA** é provável no nosso sistema. Os demais teoremas necessários são prováveis a partir da nossa base axiomática. De fato, muitos dos teoremas presentes nas páginas 137-144 de **GGA** são teoremas de **BS** ou instâncias de teorema de **BS**.

536 O teorema 145 afirma que se *a* é número natural, então ele não vem depois de si mesmo na Pred-série.

Da seguinte instância do Teorema 137 de **GGA**[537]

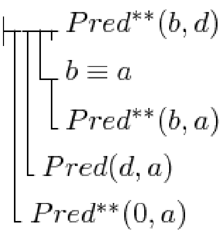
 [538]

(266) e TR, obtemos



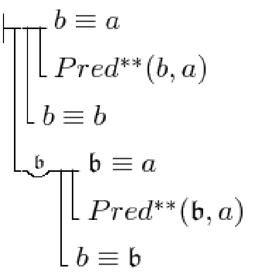
(267).

De (267) e CP, temos

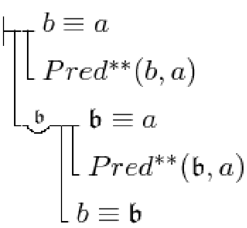


(268).

Da seguinte instância de 58BS1



54BS e MP, inferimos

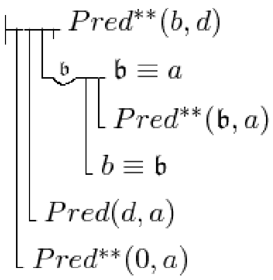


(269).

De (268), (269) e TR, obtemos

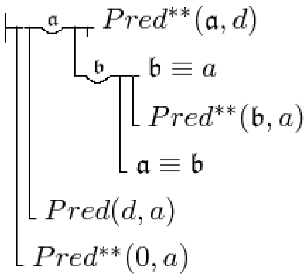
537 Esta fórmula corresponde a uma instância do teorema 108 de **BS**.

538 Se *d* pertence à Pred-série iniciada por *b* e se *a* é o sucessor de *d*, então *a* pertence à Pred-série iniciada por *b*.



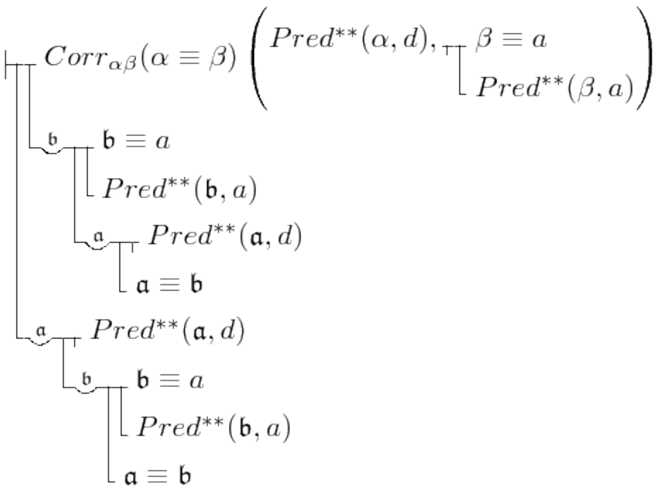
(270).

Aplicando CGC1, obtemos



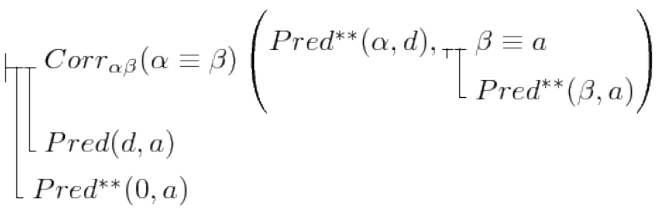
(271).

Da seguinte instância de (C1)



,

(263), (271) e TR, derivamos



(272).

Da seguinte instância de (PH6)

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \sharp_x(Pred^{**}(x,d)) \equiv \sharp_x\left(\begin{array}{l} \top\!\!\!\top\, x \equiv a \\ \quad Pred^{**}(x,a) \end{array}\right) \\ Func_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta) \\ UpM_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta) \\ Corr_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta)\left(Pred^{**}(\alpha,d), \begin{array}{l} \top\!\!\!\top\, \beta \equiv a \\ \quad Pred^{**}(\beta,a) \end{array}\right) \end{array},$$

(Teor.1), (Teor. 2) e MP, inferimos

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \sharp_x(Pred^{**}(x,d)) \equiv \sharp_x\left(\begin{array}{l} \top\!\!\!\top\, x \equiv a \\ \quad Pred^{**}(x,a) \end{array}\right) \\ Corr_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta)\left(Pred^{**}(\alpha,d), \begin{array}{l} \top\!\!\!\top\, \beta \equiv a \\ \quad Pred^{**}(\beta,a) \end{array}\right) \end{array}$$

(273).

De (272), (273) e TR, obtemos

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \sharp_x(Pred^{**}(x,d)) \equiv \sharp_x\left(\begin{array}{l} \top\!\!\!\top\, x \equiv a \\ \quad Pred^{**}(x,a) \end{array}\right) \\ Pred^{**}(0,a) \\ Pred(d,a) \end{array}$$

(274).

De (J2), (274) e TR, temos

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \sharp_x(Pred^{**}(x,d)) \equiv \sharp_x\left(\begin{array}{l} \top\!\!\!\top\, x \equiv a \\ \quad Pred^{**}(x,a) \end{array}\right) \\ Nat(a) \\ Pred(d,a) \end{array}$$

(Teor. 18).

A partir do teorema 18, podemos provar, dentro do nosso sistema, o teorema enunciado por Frege em **GLA** (§83) de que todo número natural tem um sucessor, uma vez que todos os teoremas necessários são prováveis. Além disso, é provável no sistema, sendo uma consequência direta da definição, que 0 é número natural. Ainda, são prováveis no nosso sistema os teoremas sobre o “Endlos” (o número dos números naturais) enunciado por Frege (**GLA**, §85), a saber que “Endlos” não é um número natural e que ele vem depois de si mesmo na Pred-série.

Estas provas tornam plausível que, em 1882, no livro mencionado na carta enviada a Marty, Frege tenha provado as leis básicas da aritmética adicionando o **Princípio de Hume** (ou como axioma ou como uma espécie de definição) ao sistema lógico de **BS**. Frege não precisaria da "equivalência" na forma do teorema IVa (**GGA**) para obter estas leis básicas. A questão muda quando ele resolve definir explicitamente o operador numérico em termos de extensões de conceitos. Agora, é necessária a "equivalência" na forma do teorema IVa, o qual não é provável em **BS**, para provar o **Princípio de Hume** e deste as leis básicas da aritmética.