# 2
# Lógica e os fundamentos da Aritmética em BS

Em 1983, Crispin Wright publicou uma pequena monografia intitulada *Frege's Conception of Numbers as Objects* (**FC**), na qual ele defendia uma espécie de logicismo de inspiração Fregeana em relação à Aritmética. Sua tese baseava-se em um **Princípio de Abstração** (**PA**)[31] mencionado por Frege em **GLA**, §63, atualmente chamado **Princípio de Hume** (**PH**)[32 33].

Wright percebeu que adicionando **PH,** juntamente com as definições Fregeanas de **Zero**, **Predecessor** e **Número Natural**, à lógica de segunda ordem clássica[34], obtemos uma teoria – hoje conhecida por **Aritmética de Frege** (**AF**)– na qual é possível derivar análogos dos axiomas de Dedekind-Peano da aritmética de segunda ordem (**AP2**)[35 36]. A derivação destes axiomas dentro de **AF** é chamada hoje em dia de **Teorema de Frege** (**TF**)[37].

---

31 Um Princípio de Abstração é um princípio que tem a seguinte forma:

$$\Sigma(\alpha) = \Sigma(\beta) \leftrightarrow \alpha \approx \beta,$$

onde '$\Sigma$...' é o operador-abstração, '$\alpha$' e '$\beta$' são entidades do domínio primitivo e '$\approx$' é uma relação de equivalência que ocorre entre as entidades '$\alpha$' e '$\beta$'. Estas entidades podem ser objetos, conceitos de primeira ordem, conceitos de segunda ordem, etc.

32 O nome **Princípio de Hume** foi cunhado por Boolos (1986). A justificativa é que antes de apresentar sua segunda definição do conceito de número em **GLA**, Frege cita uma passagem do livro *Tratado da Natureza Humana* (2000, Livro 1, Parte iii, seção I) do filósofo escocês David Hume. Contudo, este nome é enganador, uma vez que Frege não subscreve as teses Humeanas. Em particular, Frege assume a existência do número de um conceito sob o qual caem infinitos objetos que ele chamou de $\infty_1$ (**GLA**, §84), fato que Hume negaria. Números, na passagem mencionada do *Tratado da Natureza Humana*, são entendidos como sendo uma coleção finita de unidades. Dificilmente Hume aceitaria coleções infinitas de unidades e, consequentemente, números infinitos. Como veremos, o nome mais adequado poderia ser **Princípio de Cantor**.

33 Para os nossos propósitos, podemos apresentar **PH** na seguinte forma:

$$N_x F(x) = N_x G(x) \leftrightarrow F1-1G,$$

onde '$N_x ... x ...$' é o operador-abstração 'o número de...', '$F$' e '$G$' são conceitos de primeira ordem e '1-1' expressa a relação de equivalência de segunda ordem 'ser equinumérico a'.

34 Chamamos a lógica de segunda ordem de clássica quando o esquema de axioma de compreensão para conceitos é impredicativo.

35 **AP2** é obtida quando adicionamos à linguagem da lógica de segunda ordem clássica os primitivos '**0**' (uma constante individual), '**S**' (a constante de função 'sucessor') e '**Número Natural**' (uma constante de predicado) e os axiomas de Dedekind-Peano que regem estes primitivos. Estes axiomas podem ser expressos informalmente da seguinte forma: (1) zero é número natural; (2) o sucessor de um número natural é um número natural; (3) dois números naturais diferentes não têm o mesmo sucessor; (4) zero não é o sucessor de nenhum número natural; e, finalmente, (5) Axioma da Indução: para toda propriedade *F*, se ela se aplica a zero e se ela se aplica ao sucessor de um número natural sempre que ela se aplica a este último, então ela se aplica a todos os números naturais.

36 De fato, no artigo "Frege's Theory of Number" (1964), Charles Parsons já havia observado sobre a possibilidade de derivação dos axiomas de Dedekind-Peano a partir de **PH**.

37 O leitor interessado na derivação de **TF** em **FA** pode ler o apêndice de Duarte (2004). A mesma derivação é apresentada em **FC** (pp. 158-169), Boolos (1987, pp. 191-5), Boolos (1990, pp. 217-9), Tabata (2000) e Boolos; Heck Jr. (1997). Em **4**, mostraremos a derivação de **TF** adicio-

Ainda em **FC**, Wright mostrou que o **Paradoxo de Russell** não era derivável dentro de **AF**[38] e, por isto, ele conjecturou que esta teoria seria consistente[39]. Em sua resenha a **FC**, Burgess (1984, pág. 639) mostrou que existe um modelo no qual **PH** é verdadeiro e, assim, consistente. Tal modelo é dado pelo seguinte domínio de objetos: os números cardinais zero, um, dois,... e Aleph zero[40].

Três anos mais tarde, Boolos (1987) provou um resultado ainda mais forte, a saber, que **AF** é equiconsistente à **AP2**. Isto significa que a derivação de uma contradição em **AF** pode ser transformada em uma derivação de uma contradição em **AP2** e vice-versa[41]. De acordo com Boolos, pelo menos neste artigo, a equiconsistência entre **AF** e **AP2** mostra com certeza quase absoluta que **AF** e, consequentemente, **PH** são consistentes[42].

Wright notou que em **GLA**, logo após introduzir sua definição explícita do operador cardinalidade, Frege imediatamente propõe um esboço de prova de **PH**. A partir daí, nenhum outro uso é feito desta definição (e das extensões) nos esboços das provas dos demais teoremas de **GLA**, sendo todos estes esboços de provas elaborados por meio de **PH**[43] [44].

Este fato levantou a questão se Frege tinha plena consciência de **TF**. Em dois artigos interessantes - "*The Development of Arithmetic in Frege's Grundgesetze der Arithmetik* (1993) e "*Definition by Induction in Frege's Grundgesetze der Arithmetik*" (1995) -, Heck argumenta que apesar de Frege utilizar o **Axioma V** e, consequentemente, extensões de conceitos, em inúmeras provas de teoremas

---

nando o **PH** à lógica de **BS**. Há diferenças entre as nossas provas e as provas de Heck, Boolos e Wright.

38 **FC** (pp. 156-8)

39 **FC** (pág. 158).

40 Em sua resenha ao livro *Frege: Philosophy of Language* (1973) de Dummett, Peter Geach (1976, pp. 446-7) já mencionara que este domínio poderia satisfazer **PH**.

41 **TF** mostra que é possível interpretar **AP2** em **AF**. O que Boolos mostrou foi como interpretar **AF** em **AP2**, ou seja, ele mostrou como derivar dentro de **AP2** uma fórmula que corresponderia ao **PH**. Veja, por exemplo, Boolos (1987, pág. 190). Uma prova formal da equiconsistência entre **AF** e **AP2** é apresentada em Boolos; Heck Jr. (1997, pp. 334-6).

42 Boolos parece ter mudado de opinião posteriormente. Compare Boolos (1987, pág. 191) com Boolos (1997, pág. 313).

43 Na verdade, em **GLA**, §83, há menção de extensões de conceitos: "In order to prove the proposition I. of the last paragraph, we must show that *a* is the Number which belongs to the concept "member of the series of natural numbers ending with *a*, but not identical with *a*". And for this, again, it is necessary to prove that this concept has **an extension identical** with that of the concept "member of the series of natural numbers ending with d" (**FA**, pág. 95, nosso grifo).

44 Veja também Boolos; Heck Jr. (1997).

por todo **GGA**, a única prova que faz uso essencial desta lei nas provas dos axiomas de Dedekind-Peano[45] é exatamente a prova de um análogo de **PH** (**GGAI**, teoremas 32 e 49) e que Frege conhecia tal fato [46].

Em Duarte (2004, pp. 38-39), há uma pequena digressão onde mencionamos uma carta que Frege enviou a Marty na qual ele afirmava que estava próximo de terminar um livro em que provava "os primeiros princípios sobre contar os números" (Frege, 1980, pp. 99-102)[47]. Originalmente, este livro fora escrito na conceitografia[48]. Porém, acatando uma sugestão de Carl Stumpf[49], Frege escreveu **GLA** na linguagem ordinária para servir como uma espécie de prolegômenos ao livro mencionado na carta a Marty. A partir disto, concluímos:

> Assim, apesar de ser uma especulação, parece plausível, dadas as evidências textuais, que Frege já tinha escrito grande parte de *Die Grundlagen der Arithmetik* em 1882 (na sua notação conceitual), não o publicou por receio de que este livro tivesse uma pequena aceitação (como ocorrera com *Begriffsschrift*) e Frege o publicou somente em 1884 depois de re-escrever o seu conteúdo na linguagem ordinária (seguindo a sugestão de Carl Stumpf). Novamente especulando, o livro escrito na notação conceitual em 1882 talvez seja o livro que Frege teve de descartar depois da introdução dos valores de verdade como objetos e da distinção entre sentido e referência (Duarte, 2004, pág. 40).

Quando escrevemos esta passagem não tínhamos ideia de alguns fatos im-

45 Certamente, há outros usos essenciais da Lei V em **GGA**. Por exemplo, na prova do teorema 1 (**GGAI**, pág. 74) e nas provas dos teoremas 219 (**GGAI**, pág. 185) e 251 (**GGAI,** pág. 195).

46 Heck Jr. (1993, pág. 259) é cuidadoso em afirmar que Frege era consciente de tal derivação dos axiomas de Dedekind-Peano em **GGA** usando apenas **PH** e sem usar extensões de conceitos, mas, posteriormente, ele escreve: "The second-order theory whose sole "non-logical" axiom is Hume's we call Fregean arithmetic: Fregean arithmetic is equiconsistent with second-order arithmetic and is thus almost certainly consistent. Frege's proofs of the axioms of arithmetic, in *Grundgesetze*, can thus be reconstructed as proofs in Fregean arithmetic: *Indeed, it can be argued that Frege knew full well that the axioms of arithmetic are derivable, in second-order logic, from Hume's principle*. That is to say: The main theorem of *Grundgesetze*, which George Boolos has rightly urged us to call Frege's theorem, is that Hume's principle implies the axioms of second-order arithmetic." (Heck Jr., 1995, pp. 296-7, nosso grifo).

47 Existe uma dúvida se esta correspondência foi endereçada a Anton Marty ou a Carl Stumpf (em 1882, ambos lecionavam na Universidade de Praga e eram colegas), ou se Frege enviou uma carta com conteúdos parecidos a ambos, uma vez que Carl Stumpf enviou uma missiva a Frege que parece ser uma resposta à carta enviada a Marty. Veja a introdução do editor (Frege, 1980, pág 99). Não obstante, não há dúvidas sobre veracidade da carta.

48 Na carta, Frege pediu a Marty que resenhasse **BS** em algum jornal especializado, porque isto facilitaria a publicação de outros trabalhos, em particular, de um livro que ele estava terminando de escrever.

49 Carl Stumpf escreve: "With regard to your work, to which I am looking forward with extraordinary interest, please do not take it amiss if I ask you whether it would not be appropriate to explain your line of thought first in ordinary language and then – perhaps separately on another occasion or in the very same book – in conceptual notation: I should think that this would make for a more favourable reception of *both* accounts. But I cannot, of course, judge this from a distance." (Frege, 1980, pág. 172).

portantes em relação ao sistema lógico de **BS**, que provavelmente é o sistema no qual Frege provou os axiomas da Aritmética em 1882.

Em seu livro *Logical Forms I* (2001), Chateaubriand menciona o seguinte:

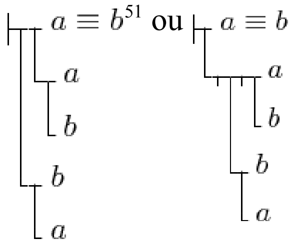
> Moreover, at the end of the preface (p.8) Frege says that he could have combined the two laws of double negation into the single formula
> (5) $\vdash (\top\!\top\, a \equiv a)$,
> which suggests that identity can also be used to express something like logical equivalence. Given Frege's conventions on the use of variables (p. 25), (5) is a universally quantified formula that is judged true for all conceptual contents. So for each specific sentence *A*, the conceptual contents $\top\!\top\, A$ and $-A$ are the same. *But, obviously, this does not hold for conditionality in general; i.e. from Frege's characterization of conditionality one cannot infer that if the relation of conditionality holds between the contents (of) A and B in both directions, then* $A \equiv B$. Since Frege does not introduce notions of logical implication and logical equivalence, we also have a question about the relation between identity and biconditionality (pág. 270, nosso grifo)

O mesmo ponto também foi enfatizado por Landini (1996):

> For my part, I consider that the notion of "sameness of conceptual content" Frege intended was simply the notion of replaceability in all contexts of the *Begriffsschrift*. Frege wrote (Frege, *1879*, 21):
>
> Now let $\vdash A \equiv B$ mean that *the sign A and the sign B have the same conceptual content, so that we can everywhere put B for A and conversely*.
>
> A version of Leibniz's Law is adopted as an axiom to govern the sign, $\begin{array}{l} \vdash\!\top\!\top\, fa \\ \quad\;\, fb \\ \quad a \equiv b \end{array}$ and this is explained by the meaning assigned to "$a \equiv b$". Now the sign '≡' was replaced by '=' in the *Grundgesetze*. So it is not insignificant that $\begin{array}{l} \vdash (\text{-}\, a) = (\text{-}\, b) \\ \;\;\top\!\top\!\top\, a \\ \qquad\;\; b \\ \qquad b \\ \quad\; a \end{array}$ is equivalents to be intersubstituted *salva veritate*. Accordingly, we should not expect Frege to rail at what would be the analogue for the *Begriffsschrift*, viz., $\begin{array}{l} \vdash a \equiv b. \\ \;\;\top\!\top\!\top\, a \\ \qquad\;\; b \\ \qquad b \\ \quad\; a \end{array}$
>
> *This is not provable in the Begriffsschrift, to be sure*[50].(pp. 137-8, nosso grifo).

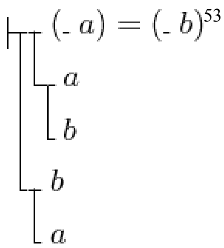
50 Nosso grifo.

Inicialmente, tentamos provar, dentro da conceitografia, a fórmula, a qual chamaremos (**BB**),



mencionada nas passagens de Chateaubriand e Landini acima. Depois de inúmeras tentativas frustradas, convencemo-nos completamente de que (**BB**) não era realmente provável. Neste caso, deveríamos apresentar uma prova de independência de (**BB**) em relação aos axiomas de **BS**[52]. Tal prova encontra-se no apêndice 1 da presente tese.

Em nossa tentativa frustrada de provar (**BB**), voltamos nossa atenção para a prova do teorema (**IVa**) em **GGAI** (pág. 68; **BLA**, pp. 115-7). (**IVa**) é a fórmula:



Em **GGA**, (**IVa**) é provável porque Frege introduziu no sistema um novo axioma que não se encontra em **BS**, o axioma **IV**:



51 Na notação contemporânea: $(a \supset b) \supset ((b \supset a) \supset (a \equiv b))$. Nesta fórmula, '$\equiv$' não deve ser confundido com 'se e somente se' da nossa linguagem. Mais adiante, o significado de '$\equiv$' será explicado.

52 No caso, os axiomas que comporiam o "cálculo proposicional" de Frege.

53 Não é possível traduzir esta fórmula para a linguagem contemporânea, uma vez que o simbolo '—', que designa um conceito, não ocorre nela. A ocorrência deste símbolo no consequente é extremamente importante, porque sem o mesmo o teorema IVa seria falso para algumas instâncias. Em **3**, discutiremos a linguagem de **GGA**.

$$\begin{array}{l}\vdash\!\!\!\!-\; (\text{-}\, a) = (\text{-}\, b) \\ \;\;\llcorner_{\top}\; (\text{-}\, a) = (_{\top}\, b)\end{array}$$ [54]

Um análogo desta fórmula

$$\begin{array}{l}\vdash\!\!\!\!-\; a \equiv b \\ \;\;\llcorner_{\top}\; a \equiv (_{\top}\, b)\end{array},$$ [55]

a qual chamaremos (**IV***), também não é provável em **BS** (apêndice 1). Assim, os meios de se provar (**BB**) usando (**IV***) de forma análoga aos de **GGA** não estão disponíveis em **BS**[56].

A fórmula

$$\vdash (_{\top\top}\, a \equiv a),$$

a qual chamaremos (**NN**) e que Frege menciona que poderia ser introduzida como um axioma de **BS**[57], também não é provável no sistema (apêndice 1). Em **GGA**, um análogo de (**NN**) é o teorema (**IVb**)

$$\vdash (\text{-}\, a) = (_{\top\top}\, a)$$

E, como no caso de (**IVa**), a prova de (**IVb**) depende do axioma **IV**[58]. Se (**BB**) fosse provável no sistema de **BS**, (**NN**) também seria provável, uma vez que em **BS** há os axiomas (**31**) e (**41**).

O fato mais importante é que a prova de **PH** a partir da definição explícita do operador-abstração 'o número de...' por meio de extensões de conceitos (**GLA**,

54 Novamente, não é possível expressar esta fórmula na linguagem lógica contemporânea. O uso do símbolo '—' no axioma IV é essencial, caso contrário haveria instâncias que o falsificariam. Uma vez que Frege faz a distinção entre sentido e referência, os símbolos '—*a*', '—*b*' e '$_{\top}$ *b*' designam valores de verdade. Assim, o que o axioma IV afirma é que ou '—*a*' e '$_{\top}$ *b*' designam o mesmo valor de verdade ou '—*a*' e '—*b*' designam o mesmo valor de verdade.

55 Uma vez que em **BS** não há ainda a distinção entre sentido e referência, esta fórmula afirma que ou '*a*' e '$_{\top}$ *b*' expressam o mesmo conteúdo conceitual ou '*a*' e '*b*' expressam o mesmo conteúdo conceitual.

56 Se (**IV***) fosse provável em **BS**, então (**BB**) também o seria.

57 "I noticed only later that formulas (31) and (41) can be combined into the single formula

$$\vdash (_{\top\top}\, a \equiv a)$$

which makes even more simplifications possible" (**CN**, pág. 107).

58 Há, pelo menos, uma outra fórmula de **GGA** que não é provável em **BS**, uma vez que sua prova depende do axioma IV: $\vdash (a = b) = (b = a)$, cuja transcrição para a notação de **BS** seria $\vdash (a \equiv b) \equiv (b \equiv a)$. Com uma pequena modificação na tabela para '$\equiv$' dada no apêndice 1, é possível mostrar a independência desta fórmula em relação aos axiomas de **BS**.

§73) parece depender implicitamente de (**BB**). Mas, o sistema lógico pressuposto em **GLA** é justamente o sistema lógico de **BS**, no qual (**BB**) não é provável. Poderíamos supor que Frege tivesse introduzido posteriormente (**BB**) ou, até mesmo (**IV***), como um axioma, talvez no livro escrito na conceitografia, o qual Frege tinha mencionado na carta enviada a Marty.

Porém, em nossa visão, a introdução de (**BB**) ou (**IV***) em **BS**, onde a distinção entre sentido e referência ainda não tinha sido feita, resulta em consequências extremamente indesejáveis para Frege[59].

Destarte, fomos levados a supor que a derivação dos primeiros princípios sobre contar os números" (axiomas de Peano) mencionada por Frege na carta a Marty poderia ter sido executada por meio do **PH**, assumindo-o como uma espécie de axioma ou um tipo de definição.

Contudo, observando as provas dos axiomas de Dedekind-Peano em **GGA**, percebemos que há muitos usos do teorema **IVa**. Portanto, se todos os usos de **IVa** (ou, pelo menos, alguns destes) nas provas dos axiomas de Dedekind-Peano em **GGA** fossem essenciais, então certamente as provas mencionadas por Frege em **GLA** dependeriam de (**BB**)[60].

Felizmente, nenhum uso do teorema **IVa** nas provas dos axiomas de Dedekind-Peano em **GGA** é essencial, exceto o uso na prova do **PH** a partir da definição explícita[61]. Assim sendo, é possível provar todos os teoremas mencionados em **GLA** (§§70-83) sem recorrer a (**BB**) (veja **4** da presente tese). Portanto,

59 Por outro lado, a introdução de (**NN**) como um axioma em **BS** não parece ter consequências muito nocivas para o sistema.

60 Percebemos que há uma diferença entre as provas dadas em **GLA (**§75**)** e **GGAI** (§§98-9, pp. 128-9) do seguinte teorema: se nada cai sob um conceito *F*, então o número que pertence a ele é zero. Em **GLA**, Frege explicitamente afirma que devemos encontrar uma relação que correlaciona 1-1 os objetos que caem sob *F* (por hipótese nada cai sob ele) e os objetos que caem sob o conceito "ser diferente de si mesmo". A correlação é trivialmente satisfeita por qualquer relação. Então, Frege propõe correlacionar os conceitos mencionados via identidade, que é uma relação 1-1 (veja em **4**, teorema 4). Em **GGA**, Frege prova esta proposição usando o teorema 96: se dois conceitos *F* e *G* são coextensivos, então os números que pertencem a eles são idênticos. Curiosamente, o teorema 96 é provável em **BS** + **PH** (veja apêndice). Mas, Frege não pode usá-lo para provar o teorema mencionado, dado que ele teria de usar (**BB**) para provar o seguinte: se nada cai sob *F*, então os conceitos *F* e "ser diferente de si mesmo" são coextensivos. E daqui, usando (96), obter: se nada cai sob *F*, então os números que pertencem aos conceitos *F* e "ser diferente de si mesmo" são idênticos. A prova de **GGA** é mais simples que a de **GLA**. Portanto, a diferença nas provas parece sugerir que Frege não tinha (**BB**) em **GLA.**

61 Certamente, há, pelo menos, um outro uso essencial do teorema (**IVa**) em **GGA**, a saber, na prova do teorema 1 (**GGAI**, pág. 74). Contudo, o teorema 1 não desempenha qualquer papel nas provas dos axiomas de Dedekind-Peano quando assumimos **PH** como axioma ou definição.

acreditamos que Frege conhecia **TF** desde 1882.

Os fatos mencionados acima explicariam também a dificuldade interpretativa que ocorre em **GLA**, relacionada com uma certa tensão que existe entre um dos princípios fundamentais do livro – o princípio do contexto – e o procedimento de Frege em **GLA**, §68, onde ele introduziu as extensões de conceitos e definiu explicitamente o operador-abstração "o número de...".

Em **GLA**, tudo nos leva a crer que Frege irá definir o operador-abstração contextualmente (via **PH**). O princípio do contexto é mencionado um pouco antes da introdução de **PH** (**GLA**, §62), o qual, parece-nos, sustentaria definições contextuais. Mas, de forma abrupta, Frege rejeita este tipo de definição e introduz as extensões de conceitos. Neste caso, porém, o princípio do contexto não parece mais desempenhar qualquer papel na definição do operador-abstração.

O que é mais estranho é que **GLA** foi escrito para ser uma espécie de prolegômeno ao livro mencionado na carta a Marty e, como tal, ele deveria ter argumentos suficientes para mostrar que extensões de conceitos eram "objetos lógicos". Entretanto, nada disso foi feito por Frege. Na famosa nota de rodapé da § 68 de **GLA**, Frege "assume que é conhecido o que é a extensão de um conceito".

Todavia, esta afirmação é totalmente desconfortável para um filósofo que na primeira parte de seu livro critica matemáticos e filósofos que tentaram definir números como aquilo que se aplica a coleções (classes, multiplicidades, conjuntos, etc.) de coisas (ou unidades), porque tais coleções seriam entidades físicas ou mentais e que, neste caso, números não teriam uma aplicação universal. Frege teria de argumentar por que extensões não seriam entidades físicas ou mentais, por que extensões não seriam as mesmas entidades que coleções, classes, multiplicidades, conjuntos, etc..

Certamente, depois de **GLA,** devido à introdução do **Axioma V**[62] em seu

62 Em **GGA**, o **Axioma V** tem a seguinte forma:

$$z'fz = z'gz = (x)(fx = gx),$$

onde '*z'...z...*' é o operador-abstração 'a extensão de...', '*f*' e '*g*' referem-se a funções de primeira ordem e '(*x*)(*fx*=*gx*)' é a formula que diz que as funções *f* e *g* são coextensivas (elas têm o mesmo resultado para qualquer valor como argumento).

A transcrição do **Axioma V** na notação contemporânea é:

$$z'Fz = z'Gz \leftrightarrow (x)(F(x) \leftrightarrow G(x)).$$

Aqui, '*F*' e '*G*' não se referem a funções de primeira ordem, mas sim conceitos de primeira ordem.

Um análogo do **Axioma V** na linguagem de **BS** seria:

$$z'Fz \equiv z'Gz \equiv (x)(Fx \equiv Gx)$$

sistema lógico, Frege estaria em posição de argumentar que extensões não eram entidades físicas, nem mentais, mas sim lógicas. Portanto, parece plausível que, em 1884, Frege não dispunha ainda de seu **Axioma V**, caso contrário por que ele não o teria mencionado para justificar a introdução das extensões?

Provavelmente, Frege não tinha uma prova formal de **PH** a partir da sua definição explícita do operador-abstração quando publicou **GLA** e a introdução das extensões de conceitos em **GLA** pode ter sido um ato tardio, quando grande parte deste livro já estava pronta[63].

Em um rascunho de um artigo intitulado "Formal Arithmetic Before Grundgesetze", Heck defende esta mesma posição[64]:

> What Boolos observed, however, was that the discussion and resolution of the Caesar objection is *so* independent of everything else that happens in *Die Grundlagen* that the book's intelligibility would suffer *not at all* were sections 66-69 and 73 simply deleted. A handful of minor changes would have to be made elsewhere (that last half section 107 would need deleting, too, for example), but that is all. Boolos was thus inclined to suppose that Frege's intention, when he began writing *Die Grundlagen*, and even for most of the time he was composing it, was to define numbers not explicitly but contextually, in terms of *HP*, and to derive axioms for arithmetic from *HP* in pure second-order logic. But, at some point in the process – perhaps under the influence of the Caesar objection, perhaps for some other reason he does not mention – Frege changed his mind and decided to define numbers explicitly, patching the manuscript with the mentioned material. (Heck Jr. (?), pág. 27)
>
> I thus conclude that, in the early manuscript of *Grundgesetze*, Frege did not define numbers explicitly at all but rather defined them contextually, in terms of *HP*. (Heck Jr(?), pág. 31)[65] [66].

A nossa descoberta de que para provar **PH** a partir da definição explícita do operador-abstração em **GLA** é necessário (**BB**) também explicaria a demora na

63 A seguir, mencionaremos uma nota de Scholz (47) sobre a existência de um manuscrito no qual Frege define o operador-abstração 'o número de...' sem usar extensões. Scholz datou-o como tendo sido escrito depois de 1884, porém acreditamos que há um erro na data. O conteúdo do manuscrito mencionado por Scholz é exatamente o conteúdo existente nas seções §§63-8 de **GLA**. Isto nos leva a crer que este manuscrito seria uma espécie de inserção que Frege fez em **GLA**. Assim, poderíamos datá-lo entre 1883 e 1884. Na nota de Scholz, há uma expressão simbólica de **PH**. Além disso, de acordo com ele, há uma tentativa de Frege de definir extensões de conceitos. Isto fortemente sugere que Frege em 1884 não tinha o **Axioma V** e não sabia direito como tratar das extensões.

64 Em "To Err is Humean" (1999, pp. 254-5), Mark Wilson também sustenta esta hipótese.

65 Quando Heck nos enviou este artigo, ele afirmou que não mais sustentava as suas conclusões finais.

66 O "early manuscript" mencionado por Heck é justamente o livro referido na carta de Frege a Marty.

publicação de **GGA** e o descarte de um primeiro manuscrito (**BLA**, pp. 5-7), o qual acreditamos ser o livro mencionado na carta a Marty. A prova de **PH** depende completamente da distinção entre sentido e referência, da hipótese de que os valores de verdade são objetos e da introdução do axioma **IV** no sistema, justamente as mudanças que levaram Frege a descartar um manuscrito anteriormente escrito[67].

No seu artigo não-publicado, Heck supõe ser uma objeção a sua posição de que Frege introduziu as extensões tardiamente em **GLA** (e ter provado as leis da aritmética via **PH**) o fato de Frege ter demorado tanto tempo para publicar **GGA** e de ter descartado este primeiro manuscrito. De acordo com Heck,

> I thus conclude that, in the early manuscript of *Grundgesetze*, Frege did not define numbers explicitly at all but rather defined them contextually, in terms of *HP*. One might object that, if that were correct, it would have been no harder for him to patch the early manuscript than was for him to patch *Die Grundlagen*: All he would have had to do is add some material corresponding to section 73 of *Die Grundlagen*, in which *HP* is derived from the explicit definition. But then the early manuscript need not have been discarded (Heck Jr. (?), pág. 31).

Como resposta a esta objeção, Heck afirma:

> But to this objection one can reply in exactly the same way I replied earlier to a similar objection to the Immodest Proposal. It would be a mistake to suppose that the changes that forced Frege to discard his early manuscript had to be so tightly connected to his definition of number. Frege abandoned the earlier manuscript not because of changes in his definition of number but because of “internal changes” to [his] begriffsschrift. As we saw, the development of a sharp distinction between functions and objects was one such change: it required Frege to distinguished first – from second-order quantification and so to change how many of the steps in his formal arguments were justified. There were other changes, too. Together, they required Frege to make such extensive changes to his early manuscript that he decided it was easier just to start over (Heck, Jr.(?), pág. 31).

A objeção mencionada por Heck na passagem acima não nos parece correta. Não é uma simples questão de adicionar algum material correspondendo a § 73 de **GLA**.

A resposta de Heck à objeção também não nos parece correta, visto que, como já mencionamos, a prova de **PH** a partir da definição explícita exige as mudanças mencionadas por Frege em **GGA**. O problema é que Heck tem em mente a prova de **PH** a partir da definição explícita em lógica de segunda ordem clássica,

67 No capítulo **3**, também veremos que estas mudanças são necessárias para a prova do teorema 1 de **GGA**.

na qual o **Axioma V** é a seguinte formula:

$$z'Fz = z'Gz \leftrightarrow (x)(F(x) \leftrightarrow G(x))$$[68]

Contudo, a derivação que estamos considerando é quando adicionamos o seguinte análogo do **Axioma V**

$$z'fz \equiv z'gz. \equiv .(x)(fx \equiv gx)$$[69]

à lógica de **BS**. Neste caso, não seria possível obter **PH**, dentro de **BS**, a partir da definição explícita do operador-abstração sem usar (**BB**)[70].

Em um artigo recente, Landini (2006) defendeu a tese segundo a qual Frege poderia ter definido os números cardinais como conceitos de segunda ordem no manuscrito mencionado na carta a Marty e que o mesmo foi descartado devido à introdução dos percursos de valores

> Frege reports that his new notion of course-of-values of functions introduces a departure from the original system which he was "forced" to discard. If we take the notion of extension, value-range, or course-of-value (which seem to be used synonymously) as part of the improvements, it is reasonable to assume that the original system was an account of cardinal numbers as second-level concepts (2006, pág. 208).

Certamente, a introdução dos percursos de valores foi a responsável pelas mudanças no sistema de **GGA**, mas não é óbvia a inferência de Landini de que Frege tinha definido anteriormente números cardinais como conceitos de segunda ordem. Na verdade, depois do **Paradoxo de Russell**, Frege cogitou defini-los desta forma, mas ele rapidamente rejeitou a definição[71].



---

68 Na verdade, em **GLA**, o operador-abstração parece ser definido como sendo a extensão de um conceito de segunda ordem. Neste caso, deveríamos assumir a seguinte instância do **Axioma V**:

$$Ext_Z\Phi(Z) = Ext_Z\Psi(Z) \leftrightarrow (M)(\Phi(M) \leftrightarrow \Psi(M)),$$

onde '$Ext_Z...Z...$' é o operador-abstração 'a extensão de...', '$\Phi$' e '$\Psi$' referem-se a conceitos de segunda ordem e '$(M)(\Phi(M) \leftrightarrow \Psi(M))$' expressa a relação de coextensividade entre estes conceitos.

69 O análogo do **Axioma V** para introduzir extensões de conceitos de segunda ordem seria expresso na linguagem de **BS** pela fórmula:

$$Ext_Z\Phi(Z) \equiv Ext_Z\Psi(Z) \equiv (M)(\Phi(M) \equiv \Psi(M)).$$

70 Para evitarmos desentendimentos, é preciso frisar que a teoria obtida quando adicionamos este análogo do **Axioma V** à lógica de **BS** é inconsistente. Neste caso, **PH** é trivialmente derivado no sistema. Obviamente, não é este tipo de derivação que Frege tinha em mente em **GLA**. Então quando dissermos que **PH** não é provável, entenda-se: não é provável na forma imaginada por Frege.

71 Em "*Notes for Ludwig Darmstaeder*" escrito em 1919, Frege escreve: "Since a statement of number based on counting contains an assertion about a concept, in a logically perfect language a sentence used to make such a statement must contain two parts, first a sign for the

Frege afirma explicitamente que os números cardinais são objetos em **GLA**, mas poderia ser plausível que antes de 1884 ele tivesse assumido que estes fossem conceitos de segunda ordem.

Todavia, esta hipótese teria obrigado Frege a fazer mudanças substanciais nas definições dadas em **BS**. Logo, acreditamos que, já em **BS**, Frege assume implicitamente que números cardinais devem ser objetos[72].

Depois desta pequena introdução aos assuntos que serão tratados neste capítulo e no próximo capítulo, começaremos nossa análise de **BS**.

---

concept about which the statement is made, and secondly a sign for a second level concept. These second level concepts form a series and there is a rule in accordance with which, if one of these concepts is given, we can specify the next. *But still we do not have in them the numbers of arithmetic; we do not have objects, but concepts. How can we get from these concepts to the numbers of arithmetic in a way that cannot be faulted? Or are there simply no numbers in arithmetic? Could the numerals help to form signs for these second-level concepts, and yet not be signs in their own right?"* (Frege, 1979, pp. 256-7, nosso grifo). Um pouco antes desta passagem, Frege afirma: "The miracle of number. The adjectival use of number-words is misleading. In arithmetic a number-word makes its appearance in the singular as a proper name of an object of this science; it is not accompanied by the indefinite article, but is saturated. Subsumption: "Two is a prime", not subordination. The combinations 'each two', 'all two' do not occur." (pág. 256).

72 No artigo "Boole's logical Calculus and the Concept-script" escrito entre 1880 e 1881 (Frege, 1979, pp. 9-46), Frege afirma explicitamente que números são objetos: "We may now express

$$2^4 = 16$$

by the sentences '2 is a fourth root of 16' or '**the individual 2 falls under the concept "4th root of 16**" or "belongs to the class of 4th roots of 16". But we may also just well say '4 is a logarithm of 16 to the base 2'. Here the 4 is being treated as replaceable and so we get the concept 'logarithm of 16 to the base 2':

$$2^x = 16.$$

The *x* indicates here the place to be occupied by **the sign for the individual falling under the concept**. We may now also regard the 16 in $x^4 = 16$ as replaceable in its turn, which we may represent, say, by $x^4 = y$. In this way we arrive at the concept of a relation, namely the relation of a number to its 4th power. **And so instead of putting a judgement together out of an individual as subject*** and an already previously formed concept as predicate, we do the opposite and arrive a concept splitting up the judgeable content.

*T**he cases where the subject is not an individual are completely different from these and are left out of consideration.**" (pp. 16-17, nosso grifo). Todavia, devemos ter cautelas com este artigo, uma vez que Frege parece tê-lo modificado em datas posteriores. Por exemplo, na página 17, Frege adicionou uma nota que diz: "***As I have since seen, Wundt makes a similar use of this image in his *Logik*". De acordo com os editores da edição alemã, a passagem da *Logik* de Wundt mencionada na nota foi introduzida apenas na terceira edição datada de 1906. Infelizmente, esta nota dos editores alemães não se encontra na tradução inglesa dos escritos póstumos. Segundo Janssen (2001), os editores alemães cometeram um erro, uma vez que a passagem mencionada por Frege na nota já aparece na segunda edição de *Logik* publicada em 1893: "Frege has a footnote on the last sentence of the citation: 'as I have seen since, Wundt uses in his Logik the same image in a similar way". The authors of the *German* edition of Frege's *Posthumous Writings* inform us that this picture of parts as atoms does *not* occurs in the first edition from 1880 of Wundt's *Logik*, but in the 3rd edition from 1906. This is not quite correct: the picture already occurs in the 2nd edition from 1893" (Janssen, 2001, pág. 126). A questão é que não podemos saber com certeza absoluta se Frege introduziu posteriormente outras possíveis modificações.

## 2.1.
## Begriffsschrift

Em “*Methods of Calculation on an Extension of the Concept of Quantity*”(**MC**), Frege defendeu, pela primeira vez, o caráter não-intuitivo da Aritmética e a sua independência em relação à Geometria. Após afirmar que o conceito de quantidade, antes concebido geometricamente, tornou-se problemático, senão impossível, com a introdução de quantidades negativas e imaginárias, ele escreve:

> All that has remained is certain general properties of addition, which now emerge as the essential characteristic marks of quantity. The concept has thus gradually freed itself from intuition and made itself independent. This is quite unobjectionable, especially since its earlier intuitive character was at bottom mere appearance. (Frege, 1984, pág. 56)

> If a beginner is shown how to add angles, then he knows what they are. And it is clear that a concept as comprehensive and abstract as the concept of quantity cannot be an intuition. There is accordingly a noteworthy difference between geometry and arithmetic in the way in which their fundamental principles are grounded. The elements of all geometry constructions are intuitions, and geometry refers to intuition as the source of its axioms. Since the object of arithmetic does not have an intuitive character, its fundamental propositions cannot stem from intuition either. (Frege, 1984, pp.56-7)

> If, as we have shown, we do not find the concept of quantity in intuition, but create it ourselves, then we are justified in trying to formulate its definitions so as to permit as manifold an application as possible, in order to extend the domain that its subject to arithmetic as far as possible. (Frege, 1984, pág. 57)

Nas três passagens acima, Frege rejeita nitidamente que a intuição, seja temporal, espacial ou de qualquer outro tipo, desempenha algum papel nas definições dos conceitos aritméticos, já que a aritmética trata daquilo que é abstrato, não-intuitivo. Por conseguinte, parece-nos ser correta a afirmação feita na introdução da presente tese de que Frege pertencia ao segundo grupo de matemáticos que desejavam extirpar a intuição desta Aritmética.

Provavelmente, Frege não tinha estabelecido para si mesmo o projeto de fundamentar a Aritmética por meios puramente lógicos em **MC**, ou seja, ele não teria pensado em 1874 no seu projeto logicista[73]

73 De acordo com Sluga (1980, pág. 48), em **MC** Frege estaria defendendo o caráter analítico (no sentido Kantiano) das proposições da aritmética, uma vez que as mesmas seriam obtidas por meio do conceito de quantidade (magnitude). Para Sluga, existe uma diferença entre afirmar que as proposições aritméticas são analíticas e afirmar que elas são deriváveis de princípios ló-

Contudo, em **MC**, há uma série de ideias que foram desenvolvidas posteriormente. Por exemplo, o conceito de operação (ou função) desempenha um papel fundamental e, muito provavelmente, foi a partir disto que Frege chegou em sua análise dos conteúdos conceituais em termos de função e argumento. Ele estendeu a noção de função para a análise das sentenças, o que lhe possibilitou, por exemplo, a introdução de conceitos relacionais (relações) na sua lógica.

Em **MC**, de acordo com Frege, os números naturais são um tipo especial de quantidades. Todavia, ele não explica em detalhes como eles seriam definidos[74] [75], indicando apenas que os números 2, 3, 4, ... poderiam ser obtidos a partir de 1 e da repetição de uma mesma operação, a função sucessor[76]. Se designarmos esta função (ou operação) por $fx$, então temos que $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=4$, etc.. Mas, como $f(1)=2$, então $f(2)=f(f(1))=3$. Uma vez que $f(f(1))=3$, então $f(3)=f(f(f(1)))=4$, e assim por diante[77]. Há uma conexão disto com as definições dos números cardinais

gicos apenas: "What Frege had in fact argued in his second dissertation was that arithmetical propositions are analytic in the Kantian sense. Their truth follows from the concepts occurring in them; to be more specific, it follows from the concept of magnitude. One must distinguish two different claims here, namely:
(1) Arithmetical propositions are analytic;
(2) Arithmetical propositions are derivable from logical principles
According to Frege's own later characterization (F. pp. 3-4), an analytic truth is one that follows from logical principles and definitions alone. Propositions (2) therefore implies (1); but the reverse is not necessarily the case. It holds only if we assume the the definitions of the arithmetical terms which are needed to derive all arithmetical propositions can ultimately be cast in purely logical terms. In the second dissertation, Frege assumed that arithmetical truths 'followed from the concept of magnitude,' but he did not raise the question whether this concept can be defined in a purely logical vocabulary. Proposition (2) expresses what is known as 'the logicist thesis' – the claim of the reducibility of arithmetic to logic. It seems then that in his second dissertation Frege assumed the analyticity of arithmetical propositions but had not yet raised in his mind the question of the validity of the logicist thesis. In fact, no interest in questions of logic is visible in his first writings".

74 "It would take us too afield to explain in detail how the content of arithmetic is contained in the properties of quantity which we have set out, and how special kinds of quantity, such as natural number and an angle, can also be defined from this standpoint. The only conclusion is we will draw here is that quantity can also be ascribed to operations" (Frege, 1984, pp. 57-8).

75 Na sua arguição de defesa de **MC**, Frege apresentou e defendeu cinco teses, uma das quais era a tese segundo a qual os números não eram dados primitivos, mas definíveis: "Zahl is nicht ein ursprünglich Gegebenes, sondern läßt sich definieren" (Kreiser, 2001, pág. 123).

76 "Every recursive formula teaches us how to obtain the result for 2, 3,… etc from the result for 1 by repetition of the same procedure" (Frege, 1984, pág. 58).

77 A partir da operação $fx$, a função sucessor, é possível, como o próprio Frege afirma (1984, pág. 58), definir o conceito de adição. Assim, 2+3, significa que aplicamos a 2 a operação $fx$ três vezes, ou seja, $f(f(f(2)))$. Mas, como $2=f(1)$, temos $f(f(f(f(1))))$ que é igual a 5. E a partir do conceito de adição, podemos obter o conceito de multiplicação: $2\times3$ é a soma de $(2+2)+2$ ou a soma de $3+3$. E a partir da multiplicação podemos obter o conceito de potência: $4^3$ é $(4\times4)\times4$, que, por sua vez, é $(4+4+4+4)+(4+4+4+4)+(4+4+4+4)+(4+4+4+4)$. Poderíamos reduzir isto a função sucessor.

finitos individuais que foram dadas em **GLA**[78].

Além disso, há uma íntima conexão entre a obtenção dos números naturais a partir de 1 e da operação iterada *fx* e as definições dos ancestrais forte e fraco de uma relação que Frege estabeleceu em **BS**. Provavelmente, foi tentando expressar esta iteração *n* vezes que Frege deve ter pensado na quantificação de segunda ordem. Em lógica de primeira ordem, não é possível definir o ancestral de uma relação sem introduzir as reticências[79]. Isto seria feito da seguinte forma: diríamos que *a* está na relação de ancestralidade forte *R* com *b*- *R**(*a*, *b*) - se e somente se

$$R(a,b) \vee \exists x(R(a,x) \wedge R(x,b)) \vee \exists x \exists y(R(a,x) \wedge R(x,y) \wedge R(y,b)) \vee ...$$ [80] [81]

Diríamos que *a* está na relação de ancestralidade fraca *R* com *b* – *R***(*a*, *b*) – justamente no caso em que

$$R^*(a,b) \vee a = b$$ [82]

As reticências nas definições dos ancestrais forte e fraco acima constituiriam lacunas nas provas que Frege desejava completamente extirpar de seu sistema lógico de **BS**. Neste caso, a quantificação de segunda ordem elimina completamente estas lacunas, permitindo uma definição explícita do ancestral.

No prefácio de **BS**, Frege sustenta que há duas formas de se alcançar a verdade de uma proposição, sendo que a "correta" seria estabelecer explicitamente a

78 Mais tarde, Frege assumiu que 0 é um número natural e, com a introdução deste número, ele foi capaz de mostrar que há infinitos números naturais. Isto é interessante, porque não é totalmente correta a afirmação de que Frege obtém uma prova da existência de infinitos números naturais, porque ele introduz estes como objetos. Falta a informação adicional de que ele considerou o número 0 como sendo um número natural. No século XIX, muitos matemáticos não aceitavam 0 como sendo um número natural. Dedekind (1888), por exemplo, não conta 0 entre os naturais (como mencionado na introdução da presente tese, Landau também não considera 0 um número natural).

79 "The only conclusion we will draw here is that quantity can also be ascribed to operations. If we repeated an operation *f* by constantly resubmitting its result to it, we can regard the repeated applications of operations *f* as new operations. Now it is clear that two or more of the operations obtained in this way, *ff*, *fff*, …, acting in succession on an object, can always be replaced by a single operation consisting likewise in a repetition of *f*". (Frege, 1984, pp. 57-8).

80 Ou seja, *a* está na relação de ancestralidade forte *R* com *b* (ou como Frege diria: *b* vem depois de *a* na relação *R*) justamente quando ou *a* está na relação *R* com *b*, ou quando existe um objeto *x* tal que *a* está na relação *R* com *x* e *x* está na relação *R* com *b* ou quando existe um objeto *x* e existe um objeto *y* tais que *a* está na relação *R* com *x* e *x* está na relação *R* com *y* e *y* está na relação *R* com *b* ou ....

81 A fórmula '$\exists x(R(a,x) \wedge R(x,b))$' expressa que '*a* encontra-se na relação composta de *R* com *R* com *b*', ou seja: *aR*/*Rb*. Portanto, a fórmula pode ser entendida da seguinte forma: $R(a,b) \vee aR/Rb \vee aR/R/Rb, ....$

82 Desta fórmula, instanciando *R* para *Pred* (predecessor) e *a* para 1, obteríamos uma definição de número natural, a saber, número natural é todo objeto que se encontra na relação de Pred-ancestralidade com 1 ou é o próprio 1.

partir de quais princípios[83] a proposição em questão é derivada[84]. Portanto, em **BS**, o conceito de prova é fundamental.

Como será observado mais adiante, isto está relacionado com a terceira parte de **BS**, na qual Frege prova, por meios puramente lógicos, uma série de fatos sobre o conceito de 'seguir-em-uma-sequência', que antes poderiam ser considerados fundamentados por meio da intuição, talvez temporal.

Assim, embora possamos considerar que esta intuição desempenharia algum papel na verdade da proposição que afirma a transitividade da relação 'vir depois de em uma sequência *f*'[85], o que Frege mostrou em **BS** é que esta proposição pode ser firmemente estabelecida, isto é, provada, sem qualquer recurso a esta intuição.

Obviamente, assumir a intuição temporal pode ser extremamente útil para darmos a um neófito uma ideia inicial do conceito de transitividade do ancestral. Contudo, ser útil não significa ser necessário e este é um ponto fundamental para Frege.

Em **BS**, Frege divide todas as proposições que necessitam de provas em duas classes distintas: a primeira classe consiste nas proposições que podem ser estabelecidas de modo puramente lógico; a segunda consiste nas proposições que necessitam de algum fato empírico nas suas provas[86].

Como foi mencionado em Duarte (2004), esta divisão de Frege não é exaustiva, porque ela exclui proposições sintéticas *a priori*. Estas proposições não necessitam de fatos empíricos nas provas de sua verdade, tampouco são estabelecidas por meios puramente lógicos. Este fato torna-se ainda mais obscuro, por-

83 Estes princípios são os axiomas, regras de inferências e definições de uma determinada teoria.

84 "Thus, on the one hand, we can ask by what path a proposition has been gradually established; or, on the other hand, in what way it is finally most firmly establishable. Perhaps the former question must be answered differently for different people. The latter [question] is more definite, and its answer is connected with the inner nature of propositions under consideration". (**CN**, pág. 103)

85 Como já mencionado, esta relação é definida por meio do ancestral de uma relação. Depois, a partir da sua definição, Frege prova a proposição: se *a* vem depois de *b* em uma sequência *f* e se *b* vem depois de *c* nesta sequência *f*, então *a* vem depois de *c* na sequência *f*. Considerando o termo "vir depois de" temporalmente, parece evidente a verdade da proposição. Não haveria nem a necessidade de prová-la.

86 "The firmest method of proof is obviously the purely logical one, which, disregarding the particular characteristics of things, is based solely upon the laws on which all knowledge rests. Accordingly, we divide all truths which require a proof into two kinds: the proof of the first kind can proceed purely logically, while that of the second kind must be supported by empirical facts." (**CN**, pág. 103).

que Frege admite intuições *a priori* em **BS**[87].

No seu primeiro livro, o logicismo é apresentado como uma hipótese. De acordo com Frege:

> Now, while considering the question to which of these two kinds [of truths] do judgments of arithmetic belong, I had first to test how far one get in arithmetic by means of logical deductions alone, supported only by the laws of thought, which transcend all particulars. The procedure in this effort was: I sought first to reduce the concept of ordering-in-a-sequence to the notion of logical consequence, in order to advance from here to the concept of number (**CN**, pág. 104).

Com objetivo de expressar sem ambiguidades os conceitos aritméticos fundamentais e de dar provas de teoremas tomando-se a precaução de suprimir lacunas na cadeia de dedução, a fim de eliminar qualquer participação velada de elementos intuitivos, Frege percebeu a necessidade de inventar a sua conceitografia[88].

A linguagem ordinária é ineficiente para cumprir este objetivo, uma vez que as palavras são carregadas de múltiplos significados[89]. Um fato que talvez tenha gerado problemas a Frege foi como expressar a relação de condicionalidade entre duas proposições sem que a noção de causalidade fosse imediatamente pensada. Isto poderia comprometer suas provas, visto que se o condicional fosse pensado causalmente, então suas provas dependeriam da intuição temporal (causa e efeito). Na sua conceitografia, Frege introduziu um símbolo que expressa esta relação e cujo significado é estipulado e único. Este mesmo fato vale para os demais símbo-

87 “Besides, we see in this example how pure thought (regardless of any content given through the senses or **even given *a priori* through an intuition**) is able, all by itself, to produce from the content which arises from its own nature judgements which at first glance seem to be possible only on grounds of some intuition” (**CN**, pág. 167, nosso grifo). Depois, em **GLA**, Frege apresenta uma caracterização completa destes conceitos. Uma proposição é analítica se a sua justificação, isto é, prova, depende apenas de leis lógicas (axiomas ou teoremas lógicos) e definições expressas por meios puramente lógicos. Uma proposição é sintética se a sua justificação depende de alguma lei que não tem caráter lógico. Uma proposição é *a priori* se, na sua justificação, nenhum apelo é feito a fatos particulares, ou seja, a justificação depende apenas de leis gerais que nem admitem, nem necessitam de uma prova. Por outro lado, se a justificação da proposição depende de um fato particular, então a verdade desta proposição é *a posteriori*.

88 Esta passagem exemplifica muito bem a necessidade da conceitografia: “I sought first to reduce the concept of ordering-in-a-sequence to the notion of logical consequence, in order to advance from here to the concept of number. So that something intuitive could not squeeze in unnoticed here, it was most important to keep the chain of reasoning free of gaps” (CN, pág. 104).

89 “Language proves to be deficient, however, when it comes to protecting thought from error. It does not even meet the first requirement which we must place upon it in this respect; namely, being unambiguous. The most dangerous cases [of ambiguity] are those in which the meanings of a word are only slightly different, the subtle and yet not unimportant variations” (CN, pág. 84).

los lógicos primitivos de **BS**.

Não discutiremos minuciosamente todas as questões relacionadas a **BS**. Nossa principal tarefa aqui é mostrar alguns aspectos que acreditamos que são fundamentais para as discussões posteriores.

### 2.1.1.
### As noções lógicas primitivas de BS

A notação lógica empregada por Frege em **BS** é totalmente distinta da atual, portanto faz-se necessário explicar o significado dos símbolos que lá ocorrem. Faremos uso do seguinte expediente: introduziremos os símbolos na notação de Frege e traduzi-los-emos para a nossa notação lógica contemporânea. Infelizmente, a conceitografia de Frege tem certas características que não são encontradas na nossa lógica em termos de regras de formação sintática. E alguns problemas que serão discutidos terão mais sentido utilizando-se a notação Fregeana. Portanto, embora seja extremamente trabalhoso, resolvemos empregar os dois tipos de notação. Quando não houver problemas em relação à notação da lógica contemporânea, empregá-la-emos.

**BS** é dividida em três partes: na primeira, Frege explica[90] as noções lógicas primitivas e a sua regra de inferência[91] e introduz seus respectivos símbolos; na segunda, os axiomas lógicos são apresentados e vários teoremas lógicos são derivados; e na terceira, são introduzidas quatro definições de conceitos aritméticos a partir das quais alguns teoremas matemáticos importantes são inferidos.

#### 2.1.1.1.
#### As letras itálicas, o traço de conteúdo, o traço de juízo, conteúdo judicável e conteúdo conceitual

No subtítulo de **BS**, lemos: "Uma Linguagem-Fórmula do Puro Pensamento

---

90 Bynum traduz a seção I por "Definition of Symbols". Porém, a palavra 'definição' não nos parece adequada, uma vez que Frege não pode definir o que é logicamente simples. Frege usa a palavra alemã "Erklärung" que pode ser, consistentemente, traduzida por "explicação" ou, até mesmo, por "elucidação".

91 Frege afirma a existência de apenas uma regra de inferência, a regra de *modus ponens*. Todavia, outras regras são implicitamente utilizadas: generalização universal de primeira ordem e de segunda ordem, a regra de substituição para conteúdos conceituais, a regra de substituição para funções e a regra de confinamento do quantificador universal ao consequente.

Modelada na Linguagem-Fórmula da Aritmética". Este subtítulo é totalmente oportuno, uma vez que muitos dos estratagemas usados na aritmética foram satisfatoriamente adaptados por Frege na construção da sua conceitografia.

Em §1 de **BS**, Frege afirma que na sua linguagem artificial haverá dois tipos de símbolos, a saber: aqueles que terão um significado fixo ou determinado e aqueles que terão um significado "indeterminado", significando várias coisas. Os símbolos que terão significado fixo são os dos primitivos lógicos que serão introduzidos na parte 1 de **BS** e os símbolos que terão o significado "indeterminado" são as letras itálicas que servirão para expressar generalidade sem o uso do quantificador universal e que serão introduzidas na parte 2 de **BS**[92].

A ideia de usar letras itálicas para expressar generalidade ocorreu a Frege observando a maneira pela qual as leis ou proposições gerais são expressas na Aritmética e Álgebra. Por exemplo, a lei comutativa da adição tem a seguinte forma:

$$(a+b)=(b+a) \qquad (1).$$

Na fórmula acima, '*a*' e '*b*' podem ser quaisquer números[93]. Uma instância desta lei é, por exemplo, a fórmula:

$$(1+4)=(4+1) \qquad (2).$$

Para Frege, a fórmula (1) é equivalente à seguinte fórmula:

$$\forall x\forall y((x+y)=(y+x)) \qquad (3).$$

De (3), podemos obter (1), usando o axioma 58 de **BS;** e de (1), obtemos (3), por meio de generalização universal.

Por outro lado, (2) não é equivalente nem à formula (1), nem à formula (3). Embora seja possível obter (2) a partir de (1) ou (3)[94], a inversa não será possível, uma vez que não podemos generalizar universalmente em (2). Este ponto é extre-

---

92 Na linguagem da aritmética, os símbolos que têm um significado fixo são aqueles símbolos que nomeiam os números individuais (os numerais) e as constantes de funções e operações. Por exemplo, '√','+'. Frege escreve: "The symbols customarily used in the general theory of magnitudes fall into two kinds. The first consists of the letters, each of which represents either a number left undetermined or a function left undetermined. This indeterminateness makes it possible to use letters for the expression of the general validity of propositions, as in

$$(a+b)c=ac+bc.$$

The other kind consists of such symbols as +, –, √, 0, 1, 2; each of which has its own specific meaning". (**CN**, pág. 111).

93 A lei comutativa da soma vale para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

94 (2) poderá somente ser obtida em **BS**, como entendemos, se os nomes próprios '1' e '4' e a constante de função '+' forem introduzidos no sistema.

mamente importante e, às vezes, ele é negligenciado pela literatura secundária: em *BS*, não há quaisquer nomes próprios ou constantes de função (não-lógicas[95]). Assim, o símbolo “$F(a)$” pode ser expresso mais acuradamente deste modo: '$\forall x F(x)$', ou melhor,$\forall\mathfrak{F}\forall x(\mathfrak{F}(x))$. O artifício de introduzir letras itálicas é permitir inferências por meio de *modus ponens*, sem que, com isso, haja perda de generalidade.

Na linguagem ordinária, a força assertórica de uma sentença encontra-se implicitamente entendida. Assim, quando dizemos que ‘a água é composta de $H_2O$’, não estamos meramente indicando a hipótese de a água ser composta destes elementos químicos na razão 2:1, mas sim estamos afirmando como verdadeiro o fato d'água ser composta de dois átomos de hidrogênio e um átomo de oxigênio.

Ao inventar a sua conceitografia, Frege desejava evitar que quaisquer hipóteses fossem tacitamente assumidas nas cadeias de inferências. Neste sentido, Frege deve ter pensado que era necessário introduzir um símbolo que expressasse explicitamente a asserção de uma proposição. Tal símbolo é introduzido em §2 de **BS**:

$$\vdash$$

Este símbolo é composto de dois outros símbolos: o traço de juízo

‘|’

e o traço de conteúdo

‘—’.

Inicialmente, Frege não faz qualquer tipo de restrição ao emprego do símbolo complexo '$\vdash$':

> A judgement will always be expressed with the aid of the symbol
>
> $$\vdash$$
>
> which stands to the left of the symbol or combination of symbols giving the content of the judgement (**CN**, pág. 111).

Porém, este símbolo complexo não pode ser aplicado a qualquer tipo de símbolo ou combinação de símbolos, pois há uma restrição na aplicação do traço de conteúdo, a saber,

$$—A$$

95 O quantificador universal é uma constante lógica de função.

somente será bem-formado, se '*A*' expressar um conteúdo judicável[96].

Frege nunca foi totalmente claro sobre o que são conteúdos judicáveis. Qual é a sua natureza? O conteúdo judicável é uma entidade linguística ou não-linguística? E parece não existir um consenso sobre isso na literatura secundária. Por exemplo, de acordo com Guilhermo Haddock:

> A judgeable content is precisely a sequence of signs that can be preceded either by the horizontal line or by the combination of the vertical line and the horizontal line. (2006, pp. 4-5)

Na passagem acima, Haddock parece assumir que conteúdos judicáveis são entes linguísticos: a sequência de sinais que é precedida pelo traço de conteúdo. No entanto, a sua explicação não ajuda a esclarecer o que é um conteúdo judicável. Por que, tomando-se um exemplo de Frege, a ideia de "casa" – ou o símbolo "casa", na visão de Haddock - não pode ser precedida pelo traço de conteúdo?[97] Qual a diferença entre o símbolo "casa" e os símbolos que podem ser precedidos pelo traço de conteúdo?

Por outro lado, há autores que sustentam que conteúdos judicáveis são entidades não-linguísticas: conteúdo judicável é o conteúdo de uma sentença assertórica[98]. Mas, novamente, poderíamos perguntar: o que é o conteúdo de uma sentença assertórica? De acordo com Gideon Makin:

> Judgeable contents resemble Russellian propositions in many aspects (while differing in others): they are the bearers of truth, the entities which enter into inferential relations, and the kind of entity one's relation to which constitute knowledge (1994, pág. 83)[99]

Acreditamos que Makin esteja mais próximo da verdade do que Haddock[100].



---

96 "The content stroke serves also to relate any sign to the whole formed by the symbols that follow the stroke. *Whatever follows the content stroke must always have an judgeable content*" (**CN**, pág. 112). Modificamos ligeiramente a tradução de Bynum.

97 "*Not every content* can become a judgement by placing $\vdash$ before its symbols; for example, the idea "house" cannot." (**CN**, pág. 112).

98 Gideon Makin (1994) escreve: "...and the content of a complete indicative sentence is a judgeable content" (pág. 83).

99 Frege é explícito sobre conteúdos judicáveis serem os "carregadores" da verdade. No fragmento póstumo "Logic", ele escreve: "Now whatever can thus be posed in a question, we wish to call a judgeable content. Therefore, the content of any truth is "a judgeable content" (1979, pág. 8). Para manter uma tradução homogênea do termo alemão '*beurtheilbare Inhalte*', mudamos ligeiramente a tradução.

100 Bynum (1972) também defende que conteúdos judicáveis podem ser vistos como proposições: "The major units of meaning for Frege's notation are conceptual contents of propositional ex-

Embora Frege não tenha feito ainda a sua distinção entre sentido e referência, dificilmente ele teria considerado o conteúdo judicável como sendo uma expressão linguística (entidade linguística): uma sentença ou uma sequência de sinais[101] [102].

Conteúdos judicáveis podem ser verdadeiros ou falsos, são passíveis de julgamentos. Assim, em sua regra de formação de nomes em **BS**, o traço horizontal pode apenas ser aplicado a conteúdos que podem ser afirmados ou negados, ou melhor, a símbolos que expressam conteúdos que podem ser afirmados ou negados. É neste sentido que o traço de conteúdo não pode ser anexado ao símbolo 'casa', porque este não expressa um conteúdo que é passível de ser verdadeiro ou falso (conteúdo não-judicável). Da mesma forma, admitindo-se que '2' seja um nome próprio que ocorre na conceitografia, o seguinte não é bem-formado em **BS**:

—2

Portanto, não podemos ter

$$\vdash 2$$

Por outro lado, admitindo-se que '2+2=4' seja um nome de um conteúdo judicável pertencente à conceitografia, o seguinte seria bem formado em **BS**.

—2+2=4[103].

E, portanto, poderíamos afirmá-lo como verdadeiro

$$\vdash 2 + 2 = 4$$

Na §3 de **BS**, há uma passagem bastante enganadora que parece relacionar intimamente a noção de conteúdo judicável com a noção de conteúdo concei-

pressions – "judgeable contents" (beurtheilbare Inhalte). Only such contents can be asserted and thereby become "judgements" (today called "assertions"). Another term for "judgeable content" would be 'propositions' (*Sätze*); and, indeed, Frege sometimes refers to them that way." (pp. 66-7). Novamente, mudamos ligeiramente a tradução de Bynum para manter a uniformidade.

101 Para uma discussão detalhada, veja Rodrigues Filho (2007, capítulo 3).

102 Em uma carta enviada a Husserl (Frege, 1980, pág. 63), Frege afirma que na sua noção de conteúdo judicável estariam misturados o pensamento e seu valor de verdade.

103 De acordo com Frege, '—2+2=4' significa 'a proposição que 2+2=4' ou "a circunstância em que 2+2=4'. Veja (**BS**, §2, pág. 112).

tual[104]. De acordo com Frege, na sua conceitografia, a distinção entre sujeito e predicado não ocorre. Para ele, esta distinção acabou levando os lógicos a fazerem classificações não-essenciais de um ponto de vista lógico.

Por exemplo, segundo a lógica tradicional de sua época, as sentenças 'em Platéia, os gregos derrotaram os persas' e 'em Platéia, os persas foram derrotados pelos gregos' expressariam conteúdos judicáveis diferentes, porque ambas as sentenças têm sujeitos e predicados diferentes.

Todavia, Frege sustenta que ambas as sentenças expressam o mesmo conteúdo conceitual. Embora ele não afirme explicitamente o que são conteúdos conceituais, à primeira vista, ele parece apresentar o seguinte critério por meio do qual poderíamos dizer quando duas sentenças expressariam o mesmo conteúdo conceitual:

(**CC**): o conteúdo conceitual expresso pela sentença $A$ é igual ao conteúdo conceitual expresso pela sentença $B$ (se e?) somente se a partir de qualquer conjunto $\Gamma$ de sentenças (que expressam conteúdos) e de qualquer sentença S* expressando um conteúdo, $\Gamma + \{A\}$ deriva S* se e somente $\Gamma + \{B\}$ deriva S*.

(**CC**) poderia ser reescrita da seguinte forma: as sentenças $A$ e $B$ expressarão o mesmo conteúdo conceitual (se e?) somente se $A$ e $B$ forem logicamente equivalentes[105].

Introduzimos o sinal de interrogação na condição suficiente porque temos dúvidas se este critério captura, de fato, o que Frege realmente teria em mente. Não obstante, em geral, muitos intérpretes de Frege consideram que o critério expressaria tanto a condição necessária quanto a suficiente. Por exemplo, Beaney (2007, pág. 96) escreve:

104 Como veremos, a passagem é enganadora porque conteúdos conceituais também são associados aos conteúdos não-judicáveis. Isto é nítido quando Frege introduz o seu símbolo para identidade de conteúdo. Isto quer dizer que a noção de conteúdo conceitual é mais abrangente que a noção de conteúdo judicável.

105 Uma vez que de $\Gamma+\{A\}$, derivamos $A$ e de $\Gamma+\{B\}$, derivamos $B$, então para que $A$ e $B$ tenham o mesmo conteúdo é necessário em particular que de $\Gamma+\{A\}$, derivemos $B$ e de $\Gamma+\{B\}$, derivemos A. Como partimos de um mesmo conjunto $\Gamma$ de sentenças, então isso significa que $A$ e $B$ têm o mesmo conteúdo (se e?) somente se de $A$ derivamos $B$ e de $B$ derivamos $A$.

> But the implication is that the value of a function, in the case of propositions, is what Frege calls the 'conceptual content' ('begrifflicher Inhalt') of the proposition. This notion was introduced in §3 of the Begriffsschrift, where it is characterized as that part of the content of a proposition that influences its possible consequences. On Frege's view, the following propositions have the same conceptual content:
> (GP) At Platea the Greeks defeated the Persians
> (PG) At Platea the Persians were defeated by the Greeks.
> While we might discern "a slight difference of sense" between these two propositions, Frege writes, the content they have in common is what predominates: "I call that part of the content that is the same in both the conceptual content" (1879, p. 3/1997, p. 53). *Essentially, two propositions have the same conceptual content if and only if they are logically equivalent* (nosso grifo).

Mais adiante em seu artigo, Beaney (2007, pág. 100) afirma:

> According to Frege at the time of the *Begriffsschrift*, two propositions have the same conceptual content if and only if they have the same possible consequences (cf. 1879, p. 3/ 1997, p. 54). *To say that two propositions P and Q have the same possible consequences is to say that they are logically equivalent, i. e., that P implies Q, and Q implies P. So Frege's criterion can be formulated thus:*
> *(CC) Two propositions have the same conceptual content iff they are logically equivalent* (nosso grifo)

O problema se encontra na seguinte direção: se *P* e *Q* são logicamente equivalentes, então *P* e *Q* têm o mesmo conteúdo conceitual. Simbolicamente, isto seria expresso dentro da conceitografia pela fórmula (**BB**), a qual não é provável no sistema de **BS**. Os axiomas introduzidos em **BS** que regulamentam o símbolo para identidade de conteúdo apenas dão conta da direção da esquerda para a direita. Quando duas sentenças têm o mesmo conteúdo conceitual, podemos mostrar dentro da conceitografia que elas são logicamente equivalentes.

Rodrigues Filho (2007) também tem sérias dúvidas sobre a direção da esquerda para direita de (**CC**). De acordo com ele, uma vez que todas as sentenças da Aritmética seriam lógicas na visão Frege, elas expressariam o mesmo conteúdo conceitual, porque quaisquer duas sentenças logicamente verdadeiras são logicamente equivalentes entre si[106].

106 Rodrigues Filho escreve: "Na citação [4] acima, Frege fala de correção de inferências. Se tomarmos Frege ao pé da letra, e substituirmos 'juízo' por 'sentença', ele está dizendo que:

(8) duas sentenças $A$ e $B$ têm o mesmo conteúdo conceitual se, e somente se, para todo $\Gamma$ e $\alpha$; $\Gamma; A \vdash \alpha$ se, e somente se, $\Gamma; B \vdash \alpha$.

Posto que o lado direito de (8) é equivalente à equivalência lógica entre $A$ e $B$, nós temos

(9) duas sentenças A e B têm o mesmo conteúdo conceitual se, e somente se, $A \vdash\dashv B$.

Entretanto, podemos estar certos que Frege não tinha em mente exatamente o que entendemos por equivalência lógica. O nosso conceito de equivalência lógica, para Frege, não seria uma

De fato, Rodrigues Filho poderia ter mencionado que este problema surge já em **BS**, porque todas as fórmulas prováveis neste livro expressariam o mesmo conteúdo conceitual, já que são todas logicamente equivalentes.

Se Frege tivesse introduzido (**BB**) – $((a \supset b) \supset ((b \supset a) \supset (a \equiv b)))$ - como um axioma na pretensão de capturar a direção da direita para esquerda de (**CC**), então, uma vez que há o axioma 1 de **BS**[107]

(**1BS**) $(a \supset (b \supset a))$,

dadas quaisquer duas fórmulas $P$ e $Q$ prováveis no sistema, poderíamos obter por meio de *modus ponens*

(i) $P \supset Q$

(ii) $Q \supset P$

E assim, supondo que (**BB**) esteja presente no sistema, obteríamos, aplicando *modus ponens*, a fórmula

(**Id**) $P \equiv Q$.

Em particular, assumindo (**BB**) como um axioma de **BS**, a fórmula que afirma que o ancestral de uma relação é transitivo (Teorema 98) ou a fórmula que afirma a indução matemática (teorema 81) expressaria o mesmo conteúdo conceitual que a simples fórmula $(a \supset a)$.

Na nossa visão, isto é completamente inaceitável. O problema surge porque consideramos conteúdos conceituais expressos por sentenças como algo próximo às proposições (ou, até mesmo, pensamentos) e consideramos a identidade de conteúdo como sendo, de fato, uma espécie de identidade entre estas entidades[108]. Neste caso, dificilmente as fórmulas que afirmam a transitividade do ancestral, o princípio de indução e $(a \supset a)$ expressariam a mesma proposição (ou o mesmo pensamento).

condição suficiente para identidade de conteúdo conceitual. Em primeiro lugar, se os teoremas da aritmética são verdades lógicas, como Frege sustentava, de (9) poder-se-ia concluir que todos os teoremas da aritmética têm o mesmo conteúdo. Frege certamente não concordaria com isso” (Rodrigues Filho, 2007, pp. 81-2). Para este mesmo ponto, veja Haddock (1986, pp. 38-41; 2006, pág. 6).

107 Gostaríamos de agradecer a Abílio Rodrigues Filho que nos indicou o uso do axioma 1 simplificando nossa prova inicial.

108 Frege sustenta que a identidade de conteúdos não relaciona os próprios conteúdos conceituais, mas sim nomes para estes conteúdos. Esta visão é completamente surpreendente, porque, neste caso, parece claro que quaisquer fórmulas prováveis em **BS** não expressarão o mesmo conteúdo conceitual, uma vez que seus nomes são completamente diferentes.

Alguns autores sustentam que a identidade de conteúdo conceitual poderia ser considerada como uma espécie de equivalência (ou bicondicional), quando sentenças ocorrem nela. Por exemplo, já citamos uma passagem de Chateaubriand (2001, pág. 270) na qual ele sugere justamente esta interpretação[109].

De fato, ela parece ser natural. Não obstante, em nossa nossa visão, ela é problemática, por causa do seguinte motivo:

(**1**) teríamos um mesmo símbolo com dois significados diferentes em **BS**. Quando os termos que ocorrem junto com o símbolo para identidade de conteúdos forem variáveis objectuais (ou nomes próprios), então '$\equiv$' expressará a identidade. Por outro lado, quando os termos forem sentenças, então '$\equiv$' expressará a equivalência.

Este ponto é interessante, porque uma das críticas de Frege a Boole é exatamente que os símbolos usados na lógica deste último têm múltiplos significados:

> MacColl explains the expressions for secondary propositions independently of the *primary* ones. In this way, the intermingling of time is certainly avoided; but as a result, every interconnection is severed between the two parts which, according to Boole, compose logic. We proceed, then, either in *primary propositions* and use the formulas in the sense stipulated by Boole; or else, we proceed in *secondary propositions* and use the interpretations of MacColl. Any [logical] transition from one kind of judgement to the other – which, to be sure, often occurs in actual thinking – is blocked; *for we can not use the same symbols with a double meaning in the same context* (CN, pág. 92, nosso grifo).

Em seus dois livros publicados sobre lógica - *The Mathematical Analysis of Logic* (1847) e *The Laws of Thought* (1854) – Boole dividiu as proposições em duas categorias: à primeira, pertencem as proposições primárias; e, à segunda, as proposições secundárias. As proposições primárias estabelecem relações entre classes, enquanto as secundárias estabelecem relações entre proposições.

No que diz respeito às proposições primárias, Boole introduz na sua linguagem lógica os símbolos *x*, *y*, *z*,... que são variáveis objectuais que percorrem as classes[110]. Além disso, Boole introduziu, em sua linguagem, os símbolos (constan-

109 Landini (1996, pág. 138) também sugere isto. Ele escreve: “But Frege's willingness to have $\vdash (_{\top\top}\, a \equiv a)$ as a logical principle suggests that the replacement of signs (including logical equivalents) is what he was after with the sign '≡'. When flanked by propositional contents, Frege's “$a \equiv b$” simply amounts to a biconditional”.

110 “Let us employ the letters X, Y, Z, to represent the individual members of classes, X applying to every member of one class, as members of that particular class, and Y to every member of another class as members of such class, and so on, according to the received language of treatises on Logic.

tes lógicas) '0' (representando a classe nula), '1' (representando a classe universal ou o universo de discurso), '+' (representando a união entre classes), '-' (representando o complemento de uma classe em relação à outra), '*v*' (representando a classe indeterminada) e '.' (representando a interseção entre classes)[111].

Na sua linguagem, Boole representa simbolicamente sentenças da forma "Todo X é Y" assim:

$$x.(1-y)=0$$

Esta fórmula afirma que a interseção entre a classe das coisas que pertencem a *x* e a classe das coisas que não pertencem a *y* é vazia. Ou seja, não existe nada que pertença a *x* que não pertença a *y*.

A sentença "Nenhum X é Y" é representada simbolicamente pela fórmula:

$$x.y=0$$

Esta fórmula afirma que a interseção entre as classes *x* e *y* é vazia, isto é, não há nada que pertença a *x* e pertença a *y*.

A sentença "Algum X é Y" é representada simbolicamente pela fórmula:

$$x.y=v$$

Ou seja, existe algo que pertence à classe *x* e pertence à classe *y*, sendo este "algo" representado pelo símbolo *v*, a classe indeterminada[112].

A sentença "Algum X não é Y" é simbolizada no sistema de Boole da seguinte forma:

$$x.(1-y)=v$$

Isto quer dizer que há algo (representado pelo símbolo *v*) que pertence à classe *x* e à classe não-*y*.

Por outro lado, quando voltamos nossa atenção para as proposições secun-

Further let us conceive a class of symbols *x*, *y*, *z*, possessed of the following character.
The symbol *x* operating upon any subject comprehending individuals or classes, shall be supposed to select from that subject all the *Xs* which it contains. In like manner the symbol *y, operating upon any subject, shall be supposed to select from it all individuals of the class Y which are comprised in it, and so on"* (Boole, 1847, pág. 15).

111 Boole não introduz um símbolo para expressar a negação, sendo esta interpretada da seguinte forma: $1-x$. Uma vez que '1' representa a classe universal, '$1-x$' representa a classe de todas as coisas, exceto aquelas que pertencem à classe *x*, ou seja, '$1-x$' tem o mesmo significado que não-*x*.

112 A classe indeterminada é bastante controversa, embora, como tentamos mostrar em Duarte (2006, não publicado), ela seja extremamente importante para uniformizar a linguagem lógica de Boole. A sentença "Algum X é Y" poderia ser satisfatoriamente representada pela seguinte fórmula: $x.y\neq 0$ (ou seja, a interseção entre as classes *x* e *y* não é vazia). Contudo, isto acarretaria problemas no sistema de dedução de Boole.

dárias, os símbolos mencionados acima mudam de interpretação. Agora, '*x*', '*y*', '*z*',... não são mais variáveis objectuais que percorrem classes, e sim variáveis proposicionais que percorrem proposições[113].

As constantes lógicas também mudam sua interpretação. '1' é interpretado ora como sendo a classe de todas as possibilidades ou circunstâncias em que uma proposição é verdadeira, ora como designando o "Verdadeiro"[114]. Da mesma forma, '0' é interpretado ora como sendo a classe nula de possibilidades de uma proposição ser verdadeira, ora é interpretado como sendo o "Falso"[115].

Os símbolos '+' e '.' são interpretados, respectivamente, como sendo a disjunção e a conjunção. O símbolo '-' é usado como um auxiliar para expressar a negação de uma proposição. Por exemplo, sendo $x$ uma variável para uma proposição, podemos expressar não-$x$ da seguinte forma: $1 - x$.

Com este aparato, é totalmente possível expressar leis lógicas. Por exemplo, a lei da não-contradição é dada pela fórmula:

$$x.(1 - x) = 0$$

Não existe a possibilidade das proposições $x$ e não-$x$ serem ambas verdadeiras ao mesmo tempo[116].

A lei do terceiro excluído é representada pela fórmula:

113 "We may, in fact, represent the Propositions *A* is *B*, *C* is *D*, by the arbitrary symbols X and Y respectively, and express our syllogism in such forms as the following:

If X is true, then Y is true,
But X is true, therefore Y is true.

Thus, what we have to consider is not objects and classes of objects, but the truths of Propositions, namely, of those elementary Propositions which are embodied in terms of our hypothetical premises.

To the symbols X, Y, Z, representative of Propositions, we may appropriate the elective symbols *x*, *y*, *z*, in the following sense.

The hypothetical Universe, 1, shall comprehend all conceivable cases and conjectures of circumstances.

The elective symbol *x* attached to any subject expressive of such cases shall select those cases in which the Proposition X is true, and similar for Y and Z". (Boole, 1847, pp. 48-9).

114 Em Boole (1847, pág. 51), há a seguinte passagem: "To express that a given Proposition X is true.

The symbol 1-*x* selects those cases in which the Proposition X is false. But if the Proposition is true, there are no such cases in its hypothetical Universe, therefore

$$1 - x = 0,$$

or

$$x = 1\text{", (25).}$$

115 Em Boole (1847, pág. 51), lemos: "The elective symbol *x* selects all those cases in which the Proposition is true, and therefore if the Proposition is false,

$$x = 0, \text{(26)".}$$

116 Na interpretação primária, esta fórmula afirma que a interseção entre as classes *x* e não-*x* é vazia.

$$x + 1 - x = 1$$

Ou seja, ou $x$ ou não-$x$ é verdadeira[117].

Boole apresenta uma proto-tabela de verdade, uma vez que ele afirma que dadas duas proposições quaisquer $X$ e $Y$, há exatamente quatro possibilidades de combinação, a saber:

(1) $X$ é verdadeira e $Y$ é verdadeira
(2) $X$ é verdadeira e $Y$ é falsa
(3) $X$ é falsa e $Y$ é verdadeira
(4) $X$ é falsa e $Y$ é falsa

Cada uma destas possibilidades sendo representadas na linguagem Booleana pelas fórmulas

(1') $x.y$
(2') $x(1-y)$
(3') $(1-x).y$
(4') $(1-x).(1-y)$[118]

Na linguagem Booleana, "P implica materialmente Q" é representada pela fórmula

$$x.(1-y) = 0$$

Isto quer dizer que a possibilidade da proposição $x$ ser verdadeira e $y$ ser falsa não ocorre. Boole pode representar a regra de *modus ponens* no seu sistema da seguinte forma:

De $X$ implica materialmente $Y$: $x.(1-y) = 0$
e $X$ é verdadeiro: $x = 1$,
inferir que $Y$ é verdadeiro: $y = 1$[119].

Depois desta breve exposição da linguagem lógica de Boole, podemos entender as críticas de Frege. Em primeiro lugar, Boole utiliza os símbolos – '0', '1','=', '+', '.', '-' - cujo significado já estava bem estabelecido na Matemática. De acordo com Frege, o uso destes mesmos símbolos para expressar juízos da lógica deveria ser evitado.

E, no caso de Frege, que desejava fundamentar logicamente a aritmética, o uso destes símbolos para expressar relações lógicas introduziria enormes ambigui-

117 Na interpretação primária, esta fórmula afirma que a união entre as classes $x$ e não-$x$ resulta no conjunto universal.
118 Boole (1847, pág. 50).
119 Basta substituir '$x$' por '1' na fórmula $x.(1-y) = 0$, obtendo $1 - y = 0$. Logo, $y$=1.

dades dentro do sistema. Por exemplo, em uma sentença tal como "ou 1+1 é igual 2 ou 1+1 não é igual a 2", teríamos '+' representando a adição entre números e '+' representando a disjunção entre estas sentenças[120].

Ademais, os símbolos introduzidos por Boole mudam de significado dependendo de se estamos tratando de proposições primárias ou secundárias. '0' pode designar a classe vazia ou a classe nula de possibilidades ou ainda o "Falso"; '1' pode designar a classe universal ou classe de todas as possibilidades ou ainda o "Verdadeiro". O mesmo vale para os símbolos '+' e '.'[121] [122] [123].

De acordo com Frege, um e o mesmo símbolo deve manter o seu significado fixo. Portanto, parece-nos plausível que a identidade de conteúdo deva ser entendida, de fato, como uma espécie de identidade quando nomes para conteúdos judicáveis ocorrem nela, e não como uma espécie de equivalência.

---

120 "Anyone demanding the closest possible agreement between the relations of the signs and relations of the things themselves will always feel it to be back to front when logic, whose concern is correct thinking and which is also the foundation of arithmetic, borrows its sign from arithmetic. To such a person it will seem more appropriate to develop for logic its own signs, derived from the nature of logic itself; we can then go on to use them throughout the other sciences wherever it is a question of preserving the formal validity of a chain of inference" (Frege, 1979, pág. 12). Em outra passagem, Frege afirma: "What we have to do now, in order to produce a more adequate solution, is to supplement the signs of mathematics with a formal element, since it would be inappropriate to leave the signs we already have unused. But on this score alone Boole's logic is already completely unsuited to the task of making this supplementation, since it employs the signs +, 0 and 1 in a sense which diverges from their arithmetical ones. It would lead to great inconvenience if the same signs were to occur in one formula with different meanings. This is not an objection to Boole, since such an application of his formulae obviously lay completely outside his intentions. Thus, the problem arises of devising signs for logical relations that are suitable for incorporation into the formula-language of mathematics, and in this way of forming – at least for a certain domain – a complete concept-script. This is where my booklet comes in" (Frege, 1979, pp. 13-14).

121 Além disso, as variáveis '*x*', '*y*', '*z*',..., percorrem domínios diferentes dependendo de se estamos tratando de proposições primárias ou secundárias. Isto também ocorre na conceitografia, como será observado mais adiante.

122 Frege escreve: "The full incongruity of the introduction here of the idea of time instants stands out most clearly if you think of eternal truths such as those of mathematics. Schröder seems to avoid the artificiality this involves, since, in company with Hugh McColl, he explains expressions like $A = 0$, $A + B = 1$ etc. — whose sense, on the Boolean conception, is self-explanatory when taken in conjunction with the stipulations of the first part — all over again without referring back. But in this way the last weak link between the two parts is also snapped, and the signs 0, 1, = receive yet a third meaning in addition to their Boolean and arithmetical ones. According to Boole, 0 means the extension of the concept under which nothing falls, as for example the extension of the concept 'whole number whose square is 2'. By 1, Boole understands the extension of his *universe of discourse*. These meanings hold for the first as much as the second part. If one now ruptures this connection, then strictly speaking 0 has not longer an independent meaning in the second part; combined with the identity it means a denial expressed as judgement, while '=1' designates an affirmation, which I express by the judgement-stroke" (Frege, 1979, pág. 15).

123 Veja também, (Frege, 1979, pp. 47-52).

Também é possível conjecturar a razão de Frege introduzir o símbolo '$\equiv$' para expressar a identidade de conteúdo e não o símbolo '='. Na nossa visão, o símbolo '=' já tinha alcançado um determinado significado dentro da Matemática – identidade numérica. Porém, Frege não tinha certeza, pelo menos em **BS**, se este significado era o mesmo que ele queria propor, a saber, o de identidade lógica [124] [125].

Outro fato que podemos mencionar a nosso favor é que, em **BS,** Frege introduziu os seguintes axiomas que regem a identidade de conteúdo conceitual:

(Axioma 52) $\vdash ((c \equiv d) \supset (f(c) \supset f(d)))$

(Axioma 54) $\vdash c \equiv c$[126]

Na linguagem lógica contemporânea, estes axiomas são justamente encontrados em sistemas de lógica de primeira ordem com identidade.

As únicas ocasiões nas quais o símbolo para identidade de conteúdo ocorre junto com nomes que expressam conteúdos judicáveis em **BS** são exatamente nas definições de conceitos aritméticos. Toda definição em **BS** tem a seguinte forma:

(Def) $\Vdash A \equiv B$[127],

onde '*A*' é o *definiens* e 'B', o *definiendum*. Usando o axioma 52 acima e o teorema 57

(Teorema 57): $\vdash ((c \equiv d) \supset (f(d) \supset f(c)))$,

Frege obtém as fórmulas (i) $\vdash A \supset B$ e (ii) $\vdash B \supset A$. Estas fórmulas são deriva-

124 Em GGA1, Frege escreve: "The primitive signs used in *Begriffsschrift* occur here also, with one exception. Instead of the three parallel lines I have adopted the ordinary sign of equality, since I have persuaded myself that it has in arithmetic precisely the meaning that I wish to symbolize. That is, I use the word "equal" to mean the same as "coinciding with" or "identical with"; and the sign of equality is actually used in arithmetic in this way". (**BLA**, pág 6). Em uma carta enviada a Hugo Dingler (em 1917), Frege escreve: "I am thinking of sending you: *Revue de métaphysique et de morale* (1895, No. 1); Review of H. Cohen, *The Principle of the Infinitesimal Method and its History*; 'On the Formal Theories of Arithmetic'; and 'Applications of the Conceptual Notation'. This lecture still represents the position of my *Conceptual Notation*. Instead of '$\equiv$' I would now write '='; for I see that the equals sign is used in mathematics as a sign of identity. In geometry, too, the sign '=' can at least be understood in the same way if 'AB' is taken to mean not the length but the measure of the length, or the number we get when we measure the length" (Frege, 1980, pp. 27-8). Em **BS**, a tripla barra designa a identidade, a dúvida de Frege era se a identidade numérica '=' era uma identidade no sentido estrito

125 Em **GLA** §63, Frege chama a atenção do leitor para o fato de que **PH** não define a identidade numérica, mas, ao contrário, fazendo uso da identidade lógica, ele introduziria novos termos, os números cardinais.

126 Entretanto, como será visto, há problemas com estes axiomas e a interpretação de Frege para a identidade de conteúdo.

127 O símbolo $\Vdash$ significa que o que se segue está sendo estipulado. Assim, '$\Vdash A \equiv B$' deve ser entendido da seguinte forma: É estipulado que os símbolos *A* e *B* expressam o mesmo conteúdo conceitual; o símbolo *A* deve expressar o mesmo conteúdo conceitual que o símbolo *B*.

das substituindo-se no axioma 52 ou teorema 57, '*c*' por '*A*', '*d*', por '*B*' e a função '$f\Gamma$' por '$\Gamma$'[128], obtendo assim as fórmulas:

(52*) $\vdash ((A \equiv B) \supset (A \supset B))$

(57*) $\vdash ((A \equiv B) \supset (B \supset A))$

Embora uma definição seja uma estipulação e, portanto, não é verdadeira, nem falsa, ela é convertida, de acordo com Frege, em um juízo[129]. Portanto, uma vez que é estipulado que os símbolos '*A*' e '*B*' devem expressar o mesmo conteúdo conceitual, isto é convertido na seguinte verdade: o símbolo *A* expressa o mesmo conteúdo conceitual que o símbolo *B*:

(Prop) $\vdash A \equiv B$

E aplicando *modus ponens* entre (52*) ou (57*) e (Prop), obtemos (i) e (ii)[130].

Parece plausível e consistente supor que as definições em **BS** estipulam que o *definiens* e o *definiendum* expressam a mesma proposição (ou um mesmo pensamento)[131]. De fato, poderíamos supor que as fórmulas '$A \supset B$' e '$B \supset A$' obtidas por intermédio de uma definição expressariam o mesmo conteúdo que fórmula '$A \supset A$'. E, na verdade, podemos eliminar completamente as definições de **BS** assumindo justamente esta fórmula ou o axioma 58.

Entretanto, como já mencionado, no prefácio de **BS**, Frege sugere que ele poderia ter introduzido (**NN**) como um axioma

(**NN**): $\vdash (\neg\neg a \equiv a)$

e, com isso, simplificar o seu sistema axiomático. Acreditamos que Frege tinha

---

128 Ou seja, Frege considera, neste caso, a função '$\Gamma$' como sendo uma espécie de função identidade, que resulta no próprio argumento. Depois, em **GGA**, quando Frege introduziu o horizontal como um conceito, substituímos '$f\xi$' por '$-\xi$'. Em **BS**, o traço de conteúdo não desempenha um papel semântico, apenas sintático, portanto ele não é uma função e não pode substituir '$f\Gamma$'.

129 "This sentence [a definição dada em §24] is different from those considered previously since symbols occur in it which have not been defined before; it itself gives the definition. It does not say, "The right side of the equation has the same content as the left side."; but, "They are to have the same content". This sentence is therefore not a judgement... Although originally (69) is not a judgement, still it is readily converted into one; for once the meaning of the new symbol is specified, it remains fixed from then on; and therefore formula (69) holds also as judgement, but as analytic one, since we can only get out what was put into the new symbols" (**CN**, pp. 167-8).

130 Em algumas provas, Frege usa, ao invés do teorema 57, o teorema 68

$$((\forall x f(x) \equiv b) \supset (b \supset f(c)))$$

Esta fórmula é uma consequência do teorema 57.

131 Posteriormente, de acordo com Frege, devido à distinção entre sentido e referência, nas definições estipulamos que o *definiens* e o *definiendum* têm o mesmo sentido e a mesma referência. Veja, por exemplo, (**GGA**, §27).

em mente  a derivação dos axiomas (31) e (41) de **BS**

(31) $\neg\neg a \supset a$
(41) $a \supset \neg\neg a$

por meio de (**NN**), (52*), (57*) e *modus ponens*. Frege também poderia provar o axioma 54 de **BS** a partir de (**NN**). Bastaria substituir em (52), '*c*' por '$\neg\neg a$', '*d*' por '*a*' e a função '$f\Gamma$' por '$\Gamma \equiv a$', obtendo assim:

(52') $\vdash ((\neg\neg a \equiv a) \supset ((\neg\neg a \equiv a) \supset a \equiv a)))$

Agora, é suficiente aplicar *modus ponens* duas vezes entre (**NN**) e (52') para obter (54)[132].

(**NN**) parece minar o nosso argumento de que conteúdos conceituais expressos por sentenças são proposições (ou pensamentos). Em geral, esperar-se-ia que as sentenças '$\neg\neg a$' e '*a*' não expressassem a mesma proposição (ou pensamento); e, portanto, que Frege não teria em mente em **BS** que '$\equiv$' designasse um tipo de identidade quando tal símbolo ocorre junto com sentenças.

Como argumentamos acima, se isto fosse o caso, então as próprias críticas de Frege a Boole voltar-se-iam contra ele, já que a identidade de conteúdo teria um duplo significado.

Embora Frege nunca tenha sido totalmente explícito sobre um critério de identidade para pensamentos, há uma passagem em uma carta enviada a Husserl (1906), na qual ele escreve:

> It seems to me an objective criterion is necessary for recognizing a thought again as the same, for without it logical analysis is impossible. Now it seems to me that the only possible means of deciding whether sentences *A* expresses the same thought as sentence *B* is the following, and here I assume that neither of two sentences contains a logically self-evident component part in its sense. If *both* the assumption that the content of *A* is false and that of *B* true and the assumption that the content of *A* is true and that of *B* false lead to a logical contradiction, and *if this can be established without knowing whether the content of A or B is true or false, and without requiring other than purely logical laws for this purpose, then nothing can belongs to the content of A as far as it is capable of being judged true or false, which does not also belong to the content of B*" (Frege, 1980, pág. 70, nosso grifo).

De acordo com o critério mencionado acima, duas sentenças *A* e *B* expressam o mesmo pensamento, se elas forem logicamente equivalentes, mas, além dis-

132 Esta prova foi-nos mencionada por Landini. Não obstante, não temos certeza se Frege tinha isto em mente. Parece-nos razoável que ele desejava derivar apenas (31) e (41) a partir de (**NN**).

so, isto pode ser estabelecido sem que saibamos qual é o valor de verdade de $A$ e $B$. Agora, quaisquer duas sentenças $A$ e $\neg\neg A$ parecem satisfazer este critério. Não precisamos saber o valor de verdade de $A$ para sabermos que $A$ e $\neg\neg A$ devem ter o mesmo valor de verdade[133].

Por outro lado, '$a \supset a$' e a fórmula que expressa a transitividade do ancestral forte (fórmula 98 de **BS**) não parecem satisfazer este critério, porque embora seja provável no sistema de **BS** que ambas as sentenças são logicamente equivalentes, não podemos afirmar isto sem saber o valor de verdade destas sentenças[134].

No seu último artigo publicado - "Compound Thoughts" (1923-6) -, Frege explicitamente afirma que as sentenças '$a$' e '$\neg\neg a$' expressam o mesmo pensamento:

> Let us now consider cases where a thought is compounded with itself rather than with some different thought. For any 'A' that is a sentence proper, 'A and A' expresses the same thought as 'A'; the former says no more and no less than the latter. It follows that 'not (A and A)' express the same as 'not A'.
> Equally, '(not A) and (not A)' also expresses the same as 'not A'; and consequently 'not[(not A) and (not A)] also express the same as 'not (not A)', or 'A'. Now, 'not[(not A) and (not A)] expresses a compound of the fourth kind and instead of this we can say 'A or A'. Accordingly, not only 'A and A', but also 'A or A' has the same sense as 'A' (Frege, 1980, pp.. 404-5)[135].

Certamente, esta passagem não pode ser considerada como uma forte evidência de que, em **BS,** (**BB**) afirma que as sentenças '$a$' e '$\neg\neg a$' expressariam a mesma proposição (ou pensamento), porque foi escrita 44 anos depois da publicação do primeiro livro de Frege.

Contudo, esta passagem, junto com as nossas observações anteriores, e com as observações que serão feitas a seguir, fornecerão, acreditamos, uma evidência de que Frege entende os conteúdos conceituais expressos por sentenças como algo próximo a proposições e que o símbolo para identidade de conteúdo quando ocorre junto com sentenças expressa também a identidade.

Em uma carta enviada a Husserl datada de 1891, ao mencionar as doutrinas de **GLA**, Frege escreve:

---

133 Veja Levine (2006).

134 Não estamos afirmando que este critério de Frege é razoável. Por exemplo, as sentenças $A$ e $\neg\neg\neg\neg\neg\neg A$ satisfariam o critério? Poderíamos afirmar que elas expressam o mesmo pensamento?

135 Em (Frege, 1984, pág. 399): "Thus from '(not A) and B' we obtain '(not (not B)) and (not A)'. But since 'not (not B)' has the same sense as 'B', we have here 'B and (not A)', which expresses the same as '(not A) and B'".

I have drawn the last step from concept to object horizontally in order to indicate that it takes place on the same level, that concept and concepts have the same objectivity (see my Foundations, sect. 47). In literary use it is sufficient if everything has a sense; in scientific use there must also be meanings. In the Foundations I did not yet draw the distinction between sense and meaning. In sec. 97 I should now prefer to speak of 'having a meaning' instead of 'having a sense'. Elsewhere, too, e.g., in sects 100, 101, 102, I would now often replace 'sense' by meaning'. What I used to call judgeable content is now divided into thought and truth value. Judgement in the narrower sense could be characterized as a transition from thought to a truth value. (Frege, 1980, pág. 63).

In **GGA**, Frege afirma:

The old signs that appear here outwardly unchanged, and whose algorithm has also hardly changed, are nonetheless provided with different explanations. The former 'content-stroke' reappears as the 'horizontal'. These are consequences of a thoroughgoing development of my logical views. Formerly I distinguished two components in that whose external form is a declarative sentence: (1) the acknowledgment of truth, (2) the content that is acknowledged to be true. *The content I called a 'judgeable content'. This last now split for me into what I call 'thought' and 'truth-value', as a consequence of distinguishing between sense and meaning of a sign*[136] (**BLA**, pp. 6-7, nosso grifo).

Estas duas passagens sugerem que o pensamento é parte da concepção de conteúdo judicável e, portanto, parte da noção de conteúdo conceitual expresso por uma sentença.

No artigo "On Mr. Peano's Conceptual Notation and My Own" (1897), há a seguinte passagem na qual Frege justifica a sua distinção entre sentido e referência e a introdução dos valores de verdade como objetos:

According to this, '$2 > 3$', '$7^2 = 0$' and '$\wedge$' are signs for the same thing, i.e., the meanings of these signs coincide. Now since Mr. Peano also allows the sign of equality to occur between any two true sentences, he apparently subscribes to my above-stated doctrine. If he nevertheless nowhere (so far as I can see) expressly states it, then that is probably because he has been deterred by the strangeness of my tenet. Nay, I am not even sure whether he grants this inference from his premises. The agreement with my doctrine is on this account no less remarkable, since it happens to hold in spite of this repugnance. *The natural objection to this would be that true sentences can express different thoughts. According to Mr. Peano the sentences '2.2=4' and '3>2' can be connected by the sign of equality: '(2.2=4)=(3>2)'; and yet anyone would agree that they by no means signify the same thing. Without my distinction between sense and meaning this difficulty would be insuperable. Hence this distinction gains indirect confirmation from what is maintained by my doctrine of the True and the False*" (Frege, 1984, pp. 240-1)[137].

136 Alteramos ligeiramente a passagem.

137 Em "*On Sense and Meaning*" (Frege, 1984, pág. 162), há a seguinte passagem: "So far we

Acreditamos que a objeção mencionada na passagem, a saber, de que sentenças verdadeiras podem expressar pensamentos diferentes, aplicar-se-ia à teoria lógica de **BS**, caso Frege tivesse introduzido (**BB**) como axioma no seu sistema. E, de fato, parece-nos que foi a necessidade de introduzir algo como (**BB**) que motivou, em parte, a distinção entre sentido e referência e a introdução dos valores de verdade como objetos[138].

Se nossa interpretação estiver correta, a introdução de (**BB**) em **BS** levaria ao seguinte dilema: ou todas as fórmulas prováveis no sistema expressariam a mesma proposição (ou pensamento), ou existiriam instâncias que falsificariam (**BB**) e, neste caso, ele não poderia ser considerado um axioma[139].

A introdução de (**IV***) em **BS** levaria ao mesmo dilema. Relembrando, (**IV***) seria a fórmula

$$\vdash \neg(a \equiv \neg b) \supset (a \equiv b)$$

que afirma que dadas duas sentenças *a* e *b*, ou *a* expressa o mesmo conteúdo conceitual que $\neg b$, ou *a* expressa o mesmo conteúdo conceitual que *b*. Certamente, esta fórmula, se introduzida em **BS**, implicará que todas as sentenças logicamente

have considered the sense and meaning only of such expressions, words, or signs as we have called proper names. We now inquire concerning the sense and meaning of an entire assertoric sentence. Such a sentence contains a thought. Is this thought, now, to be regarded as its sense or its meaning? Let us assume for the time being that the sentence does mean something. If we now replace one word of the sentence by another having the same meaning, but a different sense, this can have no effect upon the meaning of the sentence. Yet we can see that in such a case the thought changes; since, e.g., the thought in the sentence 'The morning star is a body illuminated by the Sun" differs from that in the sentence 'The evening star is a body illuminated by the Sun'. Anybody who did not know that the evening star is the morning star might hold the one thought to be true, the other false. The thought, accordingly, cannot be what is meant by the sentence, but must rather be considered as its sense".

138 Frege precisa que a identidade ocorra entre sentenças e, portanto, é necessário que elas tenham uma referência e que esta seja tal que duas sentenças verdadeiras designem a mesma coisa. Daí a necessidade de introduzir os objetos o Verdadeiro e o Falso. A justificação desta nossa afirmação encontra-se em **2** e **3**.

139 Chateaubriand afirma o seguinte: "So when Frege distinguishes clearly between sign, sense, and denotation, it is not only the problem of identity for objects that has to be straightened out; there are problems with the formulation of his concept script in general. And in particular there is a very pressing problem about what to do with sentential signs. Do they denote? What is the denotation of a sentence? Given the formulations in *Begriffsschrift*, the most natural solution would have been to take conceptual contents (now thoughts) as their denotation. And many later logicians have indeed taken something like propositions as the denotation of sentences. But this wouldn't do, because although it may take care of the propositional logic, it doesn't give a solution to other problems that Frege was facing. The problem of identity, for instance. Given his solution to this problem, the substitutivity arguments with which he eliminates thoughts as the denotation of sentences is inevitable. So Frege concluded that thoughts (the old conceptual contents) are the senses of sentences. But it now became imperative that he should find denotations for sentences. Why? For several reason, mostly connected to the development of his views on truth" (2001, pág. 270).

equivalentes expressam o mesmo conteúdo conceitual, uma vez que é demonstrável em **BS** a seguinte fórmula:

(**A**) $\vdash (a \supset b) \supset ((b \supset a) \supset \neg(a \equiv \neg b))$[140]

Como já mencionamos, dadas duas fórmulas *A* e *B* prováveis em **BS**, temos que (i) $A \supset B$ e (ii) $B \supset A$. Assim, usando (**A**), (i) e (ii), por meio de *modus ponens*, obtemos

(**B**) $\vdash \neg(A \equiv \neg B)$.

Ora, uma vez que (**IV***) estaria presente no sistema, derivaríamos, por *modus ponens* entre (**B**) e (**IV***), a fórmula

$$\vdash (A \equiv B)$$

Obviamente, se (**IV***) fosse um axioma no sistema, (**BB**) seria provável. Além disso, (**NN**) também seria provável em **BS**, aplicando *modus ponens* entre as fórmulas (31), (41) e (**BB**). E, de fato, poderíamos eliminar os axiomas (31) e (41) do sistema, porque a seguinte fórmula é provável em **BS**:

(**C**) $\vdash \neg(a \equiv \neg a)$[141]

Destarte, da seguinte instância de (**IV***)

(**D**) $\vdash \neg(a \equiv \neg\neg a) \supset (a \equiv \neg a)$,

obtemos, por contraposição, a fórmula

(**E**) $\vdash \neg(a \equiv \neg a) \supset (a \equiv \neg\neg a)$.

Ora, aplicando *modus ponens* entre (**C**) e (**E**), derivaríamos (**NN**)[142]. E a partir de (**NN**), obteríamos os "axiomas" (31) e (41) na forma já indicada acima[143].

Frege nunca introduziu um símbolo para bi-implicação no seu sistema lógico, mas para auxiliar nosso argumento, vamos supor que '$a \leftrightarrow b$' seja uma abreviação para a fórmula

(**F**) $\neg((a \supset b) \supset \neg(b \supset a))$.

O sistema lógico de **BS** é completo em relação aos operadores sentenciais '$\neg$' e '$\supset$', portanto, neste caso, a seguinte fórmula é provável no sistema

(**BB**$\leftrightarrow$) $((a \supset b) \supset ((b \supset a) \supset (a \leftrightarrow b)))$

---

140 Dadas quaisquer duas sentenças *A* e *B*, se elas se implicam mutuamente, então *A* não expressa o mesmo conteúdo conceitual que $\neg B$. Veja a prova no apêndice 4.

141 Veja a prova no apêndice 4.

142 Na verdade, (**NN**) é a fórmula '$(\neg\neg a \equiv a)$'. Mas a seguinte fórmula é provável em **BS**: $\vdash (a \equiv b) \supset (b \equiv a)$. Assim, obteríamos (**NN**) a partir de $\vdash (a \equiv \neg\neg a)$.

143 Quase todas as provas são análogas as de **GGAI** (pp. 67-69; **BLA**, pp. 114-8).

Assim, dado (**BB**$\leftrightarrow$), a seguinte fórmula é provável no sistema a partir dos axiomas (31) e (41)

(**NN**$\leftrightarrow$) $\neg\neg a \leftrightarrow a$.

Ademais, são prováveis no sistema as fórmulas

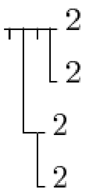
(52*$\leftrightarrow$) $(a \leftrightarrow b). \supset (a \supset b)$

(57*$\leftrightarrow$) $(a \leftrightarrow b). \supset (b \supset a)$

(54 $\leftrightarrow$) $(a \leftrightarrow a)$[144]

É interessante que as leis lógicas acima comumente aceitas, embora prováveis, não são provadas em **BS**. Frege preferiu assumir os axiomas (52) e (54), a partir dos quais é possível derivar o teorema (57), a ter de provar (52*$\leftrightarrow$), (54*$\leftrightarrow$) e (57*$\leftrightarrow$). Além disso, ao invés de provar (**NN**$\leftrightarrow$), ele cogitou introduzir (**NN**) como axioma. Isto é significativo.

Se introduzirmos a equivalência em **BS** por meio da abreviação acima, perceberemos que '$\equiv$' e '$\leftrightarrow$' não têm o mesmo significado. Por exemplo, se admitirmos que '2' é um nome da conceitografia,'2 $\equiv$ 2' será bem formado, mas '2 $\leftrightarrow$ 2' não o será, porque, na notação Fregeana, isto equivale a:




Embora ainda não tenhamos explicado todos os símbolos presentes na fórmula supracitada, podemos ver a ocorrência do símbolo do traço de conteúdo anexado ao símbolo '2' que expressa um conteúdo não-judicável. Mas, como já afirmamos, '**—**2' é mal-formado em **BS** e, portanto, este símbolo inteiro é mal-formado[145].

Acreditamos que a identidade de conteúdo ocorrendo entre sentenças foi permitida para tentar uniformizar, na medida do possível, o sistema lógico de

144 O teorema 55 - $(a \equiv b) \supset (b \equiv a)$ - também tem a sua contrapartida: $(a \leftrightarrow b) \supset (b \leftrightarrow a)$. Além disso, a fórmula $(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow (b \leftrightarrow a)$ é provável, embora sua contrapartida não o seja em **BS**.

145 Em **GGA**, '2 $\leftrightarrow$ 2' é bem formado no sistema, mas ainda assim, a equivalência e a identidade não designam a mesma função. Por exemplo, assumindo que '2' e '3' sejam nomes de **GGA**, '2=3' é falso, mas '2 $\leftrightarrow$ 3' é verdadeiro.

**BS**[146]. E para evitar ambiguidades no seu sistema, Frege foi obrigado a interpretar o símbolo '$\equiv$' como uma identidade em todos os casos. As sentenças deveriam expressar algo, que foi chamado conteúdo judicável (o conteúdo conceitual de sentenças).

Em nossa visão, em §3, Frege não está comprometido em fornecer um critério de identidade para conteúdos conceituais. Segundo nosso entendimento, ele pretendia refutar a visão tradicional que considerava a estrutura gramatical da sentença como pertinente à estrutura lógica[147]. Temos de ter em mente ao lermos a passagem mencionada em §3 que, para Frege, os conteúdos conceituais podem ser analisados de várias formas, cada uma das quais, embora diferentes, resultam no mesmo conteúdo conceitual[148] [149].

### 2.1.1.2.
### O condicional e o *modus ponens*

Na §5 de **BS**, Frege introduz e explica o seu símbolo que designa o condicional. De acordo com ele, se admitirmos que *A* e *B* expressam conteúdos judicáveis[150], então há as seguintes quatro possibilidades de combinação: (1) ambos *A* e *B* são afirmados; (2) *A* é afirmado e *B* é negado; (3) *A* é negado e *B* é afirmado; e (4) *A* e *B* são ambos negados. O símbolo

exclui a terceira possibilidade acima. O traço vertical

que une

146 Contudo, Frege não foi completamente bem-sucedido.

147 Frege também critica as distinções entre juízos bastante comuns na lógica tradicional. Veja **BS**, §4.

148 Frege remete o leitor justamente a §9 de **BS**, onde ele explica sua análise de sentenças como sendo de função e argumento.

149 Em (Baker & Hacker, 2003, pág. 277), há a seguinte passagem: "Different sentences in natural language will be equivalent to a single formula of the concept-script if their conceptual content is identical. In particular a passive transform of an action-statement has the same content as the original active form (Frege, 1879, §3). Or, more generally, pairs of sentences exploiting expressions for relations and their inverses are equivalent in content, e. g., "heavier" and "lighter", "give" and "receive" (Frege, 1879, §9:¶ 9)".

150 "If *A* and *B* stand for *judgeable contents* (§2), there are the following four possibilities..." (**CN**, pág. 114).

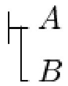
$—A$

e

$—B$[151]

é o traço de condicionalidade.

O que o símbolo



(**Con**)

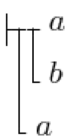
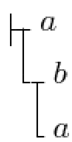
expressa pode ser traduzido na notação lógica contemporânea por:'$B \supset A$'.

Portanto, a leitura das fórmulas de Frege é feita de baixo para cima. Chamaremos *B* que ocorre em (**Con**) o antecedente e *A*, o consequente.

Deve ser observada a importância do traço de conteúdo para a determinação do escopo do condicional. Na notação lógica contemporânea, este escopo é dado pelo uso dos parênteses. Por exemplo, as fórmulas

(I) $(a \supset (b \supset a))$ e (II) $((a \supset b) \supset a)$

têm significados diferentes: (I) é uma tautologia, ou seja, verdadeira em todas interpretações dadas a *a* e *b*; por outro lado, (II) não é uma tautologia, sendo falsa quando *a* é falso. Estas fórmulas são simbolizadas na conceitografia do seguinte modo:

(I')  e (II') 

Sem o traço de conteúdo, não poderíamos expressar dentro da conceitografia as fórmulas (I) e (II). Teríamos apenas

151 Como o traço de condicionalidade une '—*A*' e '—*B*', se '*A*' e '*B*' não forem conteúdos judicáveis, então '—*A*' e '—*B*' não serão bem-formadas e, por sua vez, o símbolo inteiro não o será. É importante salientar que a estipulação do significado do traço de condicionalidade é condicional. Portanto, não parece coincidência que quando Frege chegou a rejeitar definições condicionais, ele tenha substituído o traço de conteúdo pelo horizontal, que agora denota uma função total de objetos a valores de verdade. Desta forma, a estipulação do traço de condicionalidade deixa de ser condicional.

$$\begin{array}{c} a \\ | \\ b \\ | \\ a \end{array}$$

Logo, o traço de conteúdo desempenha um papel sintático central na formação e distinção das fórmulas bem-formadas dentro da conceitografia.

Frege estipula e determina um único significado que deve ser entendido pelo traço de condicionalidade. Ele tenta explicar que este símbolo poderia ser traduzido na linguagem ordinária por meio da conjunção 'se'. Assim, poderíamos traduzir

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top A \\ \quad\llcorner B \end{array}$$

por "se *B*, [então] *A*". Contudo, por vezes, a conjunção 'se' é carregada de aspectos causais, enquanto, na visão de Frege, o traço de conteúdo expressa a implicação material.

Intimamente relacionada com o condicional está a regra de inferência conhecida por *modus ponens*. Na notação contemporânea, esta regra é representada da seguinte forma: $a, a \supset b \vdash b$

Na notação conceitual, a regra de *modus ponens* é simbolizada assim

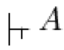
$$\begin{array}{rl} (P_1) & \vdash\!\!\top A \\ & \quad\llcorner B \\ (P_2) & \vdash B \\ \hline & \vdash A \end{array}$$

($P_1$) exclui a possibilidade de *B* ser afirmado e *A*, negado, a possibilidade (3) mencionada acima; por outro lado, ($P_2$) exclui a possibilidade de *B* ser negado, portanto, exclui as possibilidades (2) e (4) supracitadas. Portanto, temos como única opção, com a conjunção de ($P_1$) e ($P_2$), a primeira possibilidade, a saber, *A* ser afirmado e *B* ser afirmado. Logo, podemos e, de fato, devemos inferir que *A* é afirmado.

Frege (**CN**, §6, pág. 120) menciona que esta é a sua única regra de inferência, contudo, isso não é verdadeiro. Um ponto interessante é que Frege (**BS**, §6, pág. 120) admite transformar as leis lógicas provadas na segunda parte de **BS** em regras de inferência. Em **GGA**, ele explicitamente assume este procedimento. No momento certo, também admitiremos, em nossas deduções no capítulo **4**, regras de inferência baseadas nas leis que foram provadas na parte 2 de **BS**.

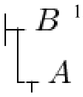
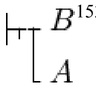
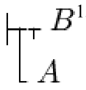
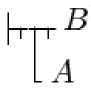
### 2.1.1.3.
### A negação

Em §7 de **BS**, Frege introduz e explica o seu símbolo que designa a negação. De acordo com ele, a fórmula



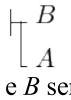
significa: "*A* não ocorre". A negação é o pequeno traço – o traço de negação - anexado ao traço de conteúdo de *A*. Na notação contemporânea, a negação de *A* é geralmente simbolizada por: $\neg A$.

Observamos novamente o papel fundamental do traço de conteúdo para expressar o escopo da negação. Na notação lógica atual, este escopo é designado também pelo uso dos parênteses. Assim, as fórmulas (1) $((\neg A) \supset B)$, (2) $\neg(A \supset B)$, (3) $(A \supset (\neg B))$ e (4) $\neg(A \supset (\neg B))$ expressam coisas diferentes. Na conceitografia, estas fórmulas seriam traduzidas pelas seguintes fórmulas, respectivamente:

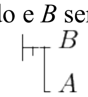
(1')  [152], (2')  [153], (3')  [154] e (4')  [155]

152 Isto significa que o caso no qual *A* é negado e B é negado não ocorre, permanecendo apenas as possibilidades (1), (2) e (3), ou seja, A é afirmado ou B é afirmado (ou ambos).

153 A fórmula



afirma que a possibilidade de *A* ser afirmado e *B* ser negado não ocorre. Portanto, a fórmula



afirma que a possibilidade de *A* ser afirmado e *B*, negado ocorre.

154 A fórmula

afirma que a possibilidade de *A* ser afirmado e não-*B* ser afirmado não ocorre, Ou seja, *A* e *B* não podem ser ambos afirmados, restando as possibilidades (2), (3) ou (4).

155 Uma vez que a fórmula

(1’) e (4’) podem ser traduzidas na linguagem ordinária, respectivamente, por: ‘*A* ou *B*’ (‘ou’ no sentido inclusivo) e ‘*A* e *B*’; (2′) pode ser traduzida por: ‘*A* e não-*B*’; e (3′) por: ‘não-*A* ou não-*B*’ (‘ou’ inclusivo).

Como no caso do traço de condicionalidade, o símbolo ‘$_{\top} A$’ apenas será bem-formado, se ‘*A*’ designar um conteúdo judicável. Portanto, se admitirmos que ‘2’ é um nome que ocorre na conceitografia, então

$$_{\top} 2$$

não é bem-formado, uma vez que

$$—2$$

também não o é.

### 2.1.1.4.
### A identidade de conteúdo conceitual, função, argumento e generalidade

Em §8 de **BS**, Frege introduz e explica o símbolo que designa a identidade de conteúdo conceitual que é simbolizada por:

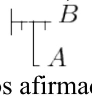
$$\equiv$$

O símbolo ‘$\equiv$’ é distinto do traço de condicionalidade e do traço de negação, porque ele relaciona não os próprios conteúdos, mas nomes que designam os conteúdos:

> Identity of content differs from conditionality and negation by relating to names, not to contents. Although symbols are usually only representatives of their contents – so that each combination [of symbols usually] expresses only a relation between their contents – they at once appear *in propria persona* as soon as they are combined by the symbol for identity of content, for this signifies the circumstance that two names have the same content. Thus, with the introduction of a symbol for identity of content, a bifurcation is necessarily introduced into the meaning of every symbol, the same symbols at times standing for their contents, at times for themselves (**CN**, pág. 124)

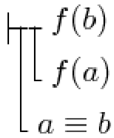
---

afirma que *A* e *B* não podem ser ambos afirmados, então



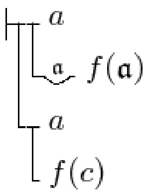
afirma a possibilidade de *A* e *B* serem ambos afirmados.

Esta passagem parece pôr em xeque a nossa argumentação anterior segundo a qual Frege não pode interpretar ‘$\equiv$’ como sendo uma espécie de equivalência porque isto introduziria ambiguidades no sistema. Embora ela seja problemática, percebamos que os símbolos que terão um duplo significado não são as constantes lógicas de **BS**, mas as letras latinas. Por exemplo, o axioma 52 é representado na conceitografia pela fórmula



Em '$a \equiv b$', '$a$' e '$b$' designam os próprios símbolos, enquanto que em '$f(a)$' e '$f(b)$ ', '$a$' e '$b$' devem expressar conteúdos conceituais[156] [157]. Contudo, os primitivos lógicos devem manter o seu significado fixo.

Há outros casos de ambiguidade em **BS** que estão relacionados com as letras latinas. Por exemplo, Frege prova o seguinte teorema:



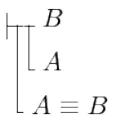
[158]

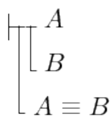
Apesar do símbolo '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{a})$' ainda não ter sido explicado, o importante é percebermos que na fórmula acima '$a$' tem de expressar um conteúdo judicável, caso contrário, ela seria mal-formada. Não obstante, '$c$' não precisa ser necessariamente um conteúdo judicável, embora '$f(c)$' tenha de ser.

Por outro lado, Frege introduziu o seguinte axioma no sistema

156 Não é necessário que '$a$' e '$b$' expressem conteúdos judicáveis. Veja mais adiante.

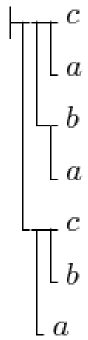
157 Na conceitografia, (52*) e (57*) seriam representadas, respectivamente, pelas fórmulas:

,



Neste caso, '$A$' e '$B$' ocorrendo em '$A \equiv B$' designariam os próprios nomes de conteúdos judicáveis, enquanto que em '—$A$' e '—$B$', designariam conteúdos judicáveis.

158 Teorema 61 de **BS**. Na notação contemporânea: $(f(c) \supset a) \supset (\forall x f(x) \supset a)$



Neste caso, '*a*', '*b*' e '*c*' devem expressar necessariamente conteúdos judicáveis. Frege não faz distinções entre as letras latinas. Elas podem percorrer tanto conteúdos judicáveis, quanto conteúdos conceituais em geral. No primeiro caso, as letras latinas “funcionariam” como variáveis proposicionais; no segundo como variáveis objectuais[159] [160] [161].

A interpretação do símbolo para identidade de conteúdo conceitual é surpreendente. De fato, ela gera outro problema, já mencionado por Dummett[162]. De acordo com Frege, uma relação *R* é funcional justamente quando

$$\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(x, z) \supset y \equiv z)$$

Em '$R(x,y)$' e '$R(x,z)$' quantificamos sobre conteúdos conceituais (objetos), porém em '$y \equiv z$' estamos quantificando sobre nomes de conteúdos.

Portanto, embora oficialmente Frege estipule que a identidade de conteúdos relacione símbolos para os conteúdos, na prática, parece-nos, que '$\equiv$' relaciona os conteúdos conceituais que são expressos pelos símbolos.

Isto é confirmado no fim de § 8, quando Frege escreve:

> Now, let
> $$\vdash (A \equiv B)$$
> mean: *the symbol A and the symbol B have the same conceptual content, so that we can always replace A by B and vice versa* (**CN**, 126).

Estritamente falando, se '$\equiv$' relacionasse nomes, Frege deveria dizer que o

---

159 É interessante que na linguagem de Boole, dependendo de se estramos lidando com proposições primárias ou secundárias, as variáveis mudam o seu domínio. Mas Frege é silencioso sobre este fato. Provavelmente, nada é mencionado porque ele sabia que na sua linguagem o mesmo ocorria.

160 Em **BS**, Frege parece usar as letras '*x*', '*y*', '*z*',... como percorrendo conteúdos conceituais.

161 Veja também as fórmulas 119 e 120.

162 “In *Begriffsschrift* Frege held that identity was a relation between names and not between things. His motive for this view was to give an explanation of the informativeness of a true identity-statement: but it makes nonsense of the use of bound variables on either side of the sign of identity” (Dummett, 1973, p. 544).

símbolo '*A*' é idêntico ao símbolo '*B*' e que o símbolo '*A*' pode ser substituído pelo símbolo '*B*' e vice-versa[163].

Frege parece confundir uso e menção. Assim, por exemplo, ele acredita que, nas expressões '—*A*' e '—*B*', o traço de conteúdo é anexado aos conteúdos judicáveis *A* e *B*. Mas, como fizemos na nossa exposição acima, a leitura mais plausível seria supor que o traço de conteúdo é anexado aos símbolos '*A*' e '*B*' que expressam conteúdos judicáveis.

Frege não é totalmente claro sobre as suas razões de estipular a identidade de conteúdo como relacionando nomes e não os próprios conteúdos conceituais. Não obstante, a seguinte passagem de "*On Sense and Meaning*" ilumina a questão:

> Equality gives rise to challenging questions which are not altogether easy to answer. Is it a relation? A relation between objects, or between names or signs of objects? In my *Begriffsschrift* I assumed the latter. The reasons which seem to favour this are the following: *a=a* and *a=b* are obviously statements of differing cognitive value: *a=a* holds *a priori* and, according to Kant, is to be labeled analytic, while statements of the form *a=b* often contain valuable extension of our knowledge and cannot always be established *a priori*…. Now if we were to regard equality as a relation between that which the names '*a*' and '*b*' designate, it would seem that *a=b* could not differ from *a=a* (i.e. provided *a=b* is true). A relation would thereby be expressed of a thing to itself, and indeed one in which each thing stands to itself but to no other thing.

De acordo com alguns autores, Frege desejava evitar o que ficou mais tarde conhecido por "Paradoxo da Identidade de Frege" (ou, simplesmente, "Paradoxo da Identidade")[164]. Conforme Frege, na sentença

Pelé ≡ Edson Arantes do Nascimento

se a identidade fosse entendida como uma relação entre os conteúdos expressos por 'Pelé' e 'Edson Arantes do Nascimento', então não haveria diferença cogniti-

---

163 ⊢'*A*' ≡ '*B*'.

164 Mendelsohn (2005, pág 28): "Identity statements differ in "cognitive value" [Erkenntniswerth]. Here is a simple example. 'Mark Twain = Mark Twain' is a mere truism, but 'Mark Twain = Samuel Clemens' says something of considerable historical significance. How does this fact challenge the standard view, on which $\alpha = \beta$ is understood to express that the relation being one and the same thing as holds between the objects designated by $\alpha$ and $\beta$? Since the relation is supposed to hold between the objects themselves, all that $\alpha = \beta$ expresses –the cognitive content of the sentence – is that the objects stand in the given relation. $\alpha = \beta$ and $\gamma = \delta$ ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$ , $\delta$ not necessarily distinct) all say the same thing – have the same cognitive content – if $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ , $\delta$ all stand for the same object. For the same relation is said to hold between the same objects. So, ironically, on the view that $\alpha = \beta$ is about the objects designated by $\alpha$ and $\beta$, the identity, if true, appears less a significant remark about the designated objects(s) than a trivial rehearsal of the Law of Identity. This is Frege's Paradox of Identity".

va entre as sentenças

(q) Pelé ≡ Pelé e (q´) Pelé ≡ Edson Arantes do Nascimento.

se, de fato, (q') fosse verdadeira.

Não obstante, alguém que não soubesse que ‘Pelé’ é um apelido de Edson Arantes do Nascimento, não teria conhecimento de (q’). E, portanto, quando lhe fosse informado que (q´) é verdadeiro, ele obteria um novo conhecimento

Em **BS**, a solução encontrada por Frege foi estipular que ‘≡’ relaciona nomes e que cada nome designa um modo de determinação do conteúdo, de forma que, embora os nomes designam o mesmo conteúdo, eles designam, em geral, de modo diferente, obtendo-se assim um novo conhecimento[165] [166].

O que nos é importante sobre a identidade de conteúdo conceitual é que este primitivo lógico não relaciona apenas nomes que expressam conteúdos judicáveis, mas também nomes que expressam conteúdos não-judicáveis. A primeira razão para esta interpretação é que quando Frege explica (ou elucida) o significado deste primitivo lógico, ele apresenta um exemplo da geometria, no qual um mesmo ponto geométrico é nomeado de duas formas diferentes (veja, **CN**, pp. 124-5). Mas, ponto geométrico é um objeto, um conteúdo não-judicável.

Contra esta interpretação, poderia ser oferecida a seguinte objeção: embora, Frege use um exemplo da geometria na sua elucidação do símbolo em questão, isto é feito apenas para facilitar o entendimento, não significando que, em **BS**, ele esteja comprometido com conteúdos não-judicáveis.

Mas, esta objeção não nos parece satisfatória por dois motivos:

(**1**): em §8, Frege é bastante cuidadoso em usar apenas as palavras ‘conteúdo’ e ‘conteúdo conceitual’ na caracterização da identidade de conteúdo. Se obser-

165 “A separate name corresponds to each of these two modes of determination. Thus, the need of a symbol for identity of content rests the following fact: the same content can be fully determined in different ways; but, that the *same content*, in a particular case, is actually given by *two {different}* modes of determination is the content of a *judgement*. Before this {judgement] can be made, we must supply two different names , corresponding to the two [different] modes of determination, for the thing thus determined. But the judgement requires for its expression a symbol for identity of content to combine two names. It follows from this that different names for the same content are not always merely an indifferent matter of form; but rather, if they are associated with different modes of determination, they concern the very heart of the matter. In this case, the judgement as to identity of content is, in Kant’s sense synthetic.” (**CN**, pp. 125-6).

166 Como já mencionamos, estritamente falando, a sentença de nosso exemplo teria de relacionar, então, os nomes 'Pelé' e 'Edson Arantes do Nascimento': 'Pelé' ≡ 'Edson Arantes do Nascimento'.

varmos as seções anteriores de **BS**, por exemplo §5 (**CN**, pág. 114), veremos que ele é explícito sobre o traço de condicionalidade relacionar conteúdos judicáveis[167] [168].

Embora Frege não seja explícito, poderíamos dizer que para cada conteúdo judicável existe um conteúdo conceitual correspondente, mas que nem todo conteúdo conceitual corresponde a um conteúdo judicável. Por exemplo, Frege escreve:

> "*If, in an expression* (***whose content need not be judgeable***), *a simple or a complex symbol occurs in one or more places and we imagine it as replaceable by another* [symbol] (*but the same one each time*) *at all or some of these places, then we call the part of the expression that shows itself invariant* [under such replacement] *a function and the replaceable part its argument*" (**CN**, pág. 127, nosso grifo).

Na passagem acima, Frege admite que expressões cujos conteúdos são não-judicáveis podem ocorrer na conceitografia. Para exemplificar, poderíamos mencionar a expressão: '*sucessor de 0*' (que designa um conteúdo não-judicável). Se excluirmos '0' desta expressão, obtemos a expressão funcional *sucessor de ( )*. Ao introduzirmos no lugar de '0', '1', obtemos a expressão '*sucessor de 1*' que exprime um conteúdo não-judicável.

Por outro lado, se na expressão '$2^2 = 4$', que designa um conteúdo judicável, excluirmos '4', obtemos a expressão funcional: '$2^2 = ()$'[169]. E se, no lugar "vazio", introduzirmos '5', obtemos um novo conteúdo judicável: '$2^2 = 5$'. Este conteúdo judicável é falso. Portanto, podemos negá-lo e, em seguida, afirmar o conteúdo negado como verdadeiro: $\vdash\!\!\!\!\top\; 2^2 = 5$.

Há em **BS** uma proto-distinção entre conceitos e funções. Expressões funcionais que, quando "complementadas", resultam em um conteúdo judicável exprimiriam conceitos. Na carta a Marty, Frege claramente afirma isto:

> A concept is unsaturated in that it requires something to fall under it; hence it cannot exist on its own. *That an individual falls under it is a judgeable content*, and

167 Cf. (**CN**, pp. 94-5).

168 Beaney (2007, pág. 100) escreve: "But it is not just propositions that are regarded as having conceptual content. In §8 of the *Begriffsschrift*, in explaining his symbol for identity of content ('$\equiv$'), Frege makes clear that names have content, too, the content of a name being the object denoted. This suggests the following criterion in the case of names:
(CCn) Two names have the same (conceptual) content iff they denote the same object".

169 O conceito designado por esta expressão sendo: 'ser um quadrado de 2'.

> here the concept appears as a predicate and is always predicative. (Frege, 1980, pág. 101, nosso grifo).

Embora Frege não seja explícito sobre isto, toda e qualquer expressão que, quando "complementada", resulta em um conteúdo conceitual exprimiria uma função. '*sucessor de ( )*' expressaria uma função, mas não um conceito. Por outro lado, '$2^2 = ()$' expressaria um conceito[170].

(**2**): nas definições de ancestral fraco e função (parte 3 de **BS**), a identidade de conteúdo parece relacionar (nomes de) conteúdos não-judicáveis. De fato, Frege usará o ancestral fraco para definir o conceito de número natural. Há razões para acreditar que Frege já havia vislumbrado esta definição em 1879, ano de publicação de **BS**.

Em §9 de **BS**, Frege inicia sua discussão sobre a análise dos conteúdos conceituais em termos de função e argumento. Ele escreve:

> Let us suppose that the circumstance that hydrogen is lighter than carbon dioxide is expressed in our formula language. Then, in place of the symbol for hydrogen, we can insert the symbol for oxygen or for nitrogen. By this means, the sense is altered in such a way that "oxygen" or "nitrogen" enters into the relations in which "hydrogen" stood before. If we think of an expression as variable in this way, it divides into [1] a constant component which represents the totality of the relations and [2] the symbol which is regarded as replaceable by others and which denotes the object which stands in these relations. I call the first component a function, the second its argument. This distinction has nothing to do with the conceptual content, but only with our way of viewing it. Although, in the mode of consideration just indicated, "hydrogen" was the argument and "being lighter than carbon dioxide" the function, we can also apprehend the same conceptual content in such a way that "carbon dioxide" becomes the argument and "being heavier than hydrogen" the function. In this case we need only think of "carbon dioxide" as replaceable by other ideas like "hydrogen chloride gas" or "ammonia"(**CN**, pág. 126).

Explicaremos a passagem acima, usando um exemplo mais simples. Suponhamos que a seguinte sentença ocorra na conceitografia: "Platão foi discípulo de Sócrates". Esta sentença expressa um determinado conteúdo conceitual. Agora, se substituirmos o símbolo para Platão pelo símbolo para Aristóteles, por exemplo, obteremos a nova sentença: "Aristóteles foi discípulo de Sócrates". As duas sentenças mencionadas acima não podem expressar um mesmo conteúdo conceitual, uma vez que a primeira é verdadeira e a segunda é falsa[171].

170 Em outras palavras, conceitos são funções de conteúdos judicáveis. Em "*Function and Concept*" (Frege, 1984, pp. 137-156), conceitos são transformados em funções de verdade.

171 Como afirmamos, se duas sentenças expressam o mesmo conteúdo conceitual, então elas

Conforme Frege, podemos eliminar o símbolo para Platão na sentença supracitada, obtendo desta forma a expressão "( ) foi mestre de Sócrates", que é o componente constante mencionado na passagem; o símbolo para Platão é o termo substituível na sentença. O componente constante foi chamado de função, o termo substituível, de argumento. No nosso exemplo acima, a função é aquilo que é expresso por "( ) foi mestre de Sócrates"; o argumento é aquilo que é expresso pelo símbolo para Platão[172].

Ainda na passagem, Frege sugere que o mesmo conteúdo conceitual pode ser analisado diferentemente. Ao invés de excluirmos o símbolo para Platão, poderíamos considerar como componente substituível o símbolo para Sócrates. Neste caso, obteríamos os seguintes componentes: "Platão foi discípulo de ( )", "Sócrates". O primeiro expressa a função, o segundo, é o argumento.

Segundo Frege, estas duas análises embora diferentes sempre resultam no mesmo conteúdo conceitual. Assumamos que a sentença acima é simbolizada por:

$$R(a, b)$$

Na primeira análise, obtemos: $R(\Gamma, b)$[173] e *a*; na segunda: $R(a, \Gamma)$ e $b$[174]. Contudo, ao complementarmos as respectivas funções com seus respectivos argumentos, obtemos novamente: $R(a, b)$.

É possível, segundo Frege, considerar *a* e *b* como substituíveis na sentença $R(a, b)$. Desta forma, chegamos à seguinte análise: $R(\Gamma, \Delta)$ (função); *a* e *b* (os argumentos).

A ordem de ocorrência dos argumentos é importante, porque, nem sempre, $R(a, b)$ expressa o mesmo conteúdo conceitual que $R(b, a)$. No nosso exemplo, "Platão foi discípulo de Sócrates" expressa um conteúdo judicável verdadeiro. Por

devem ser logicamente equivalentes.

172 Há uma grande controvérsia em relação a **BS** sobre se Frege considerava funções como entidades linguísticas ou não. Filósofos como Dummett (1973; 1981; 1991b), Geach (1967) e Kenny (1995) sustentaram esta interpretação. Por outro lado, Baker e Hacker (2003) argumentaram contra esta posição. Embora muitas das noções de **BS** sejam problemáticas incluindo a de função, acreditamos que Baker & Hacker estejam mais próximos da verdade que Dummett, Geach e Kenny. Entretanto, não discutiremos esta questão em detalhes aqui.

173 'Γ' representa o lugar do argumento.

174 No seu exemplo, Frege utiliza a relação inversa. Assim, a função expressa por "hidrogênio é mais leve que ( )" é transformada na inversa "( ) é mais pesado que o hidrogênio". Embora Frege não defina a relação inversa em **BS**, ele está implicitamente assumindo que para qualquer relação $R(x, y)$ sua inversa é: $\hat{R}(y, x)$. Expresso na conceitografia, esta definição seria: $\Vdash (\hat{R}(y, x) \equiv R(x, y))$. Por definição, uma relação R e sua inversa expressam o mesmo conteúdo conceitual.

outro lado, “Sócrates foi discípulo de Platão” expressa um conteúdo judicável falso[175].

Se admitirmos que a sentença “Platão é filósofo” ocorre na conceitografia, e se considerarmos que o símbolo para Platão é substituível na mesma, obteremos desta forma os seguintes componentes: “( ) é filósofo” (expressando a função), “Platão” (expressando o argumento). Simbolicamente, isto pode ser representado por: $F(a)$. Para cada argumento diferente do símbolo para Platão, a sentença resultante expressará conteúdos conceituais distintos.

Há outras formas de se analisar as sentenças de nossos exemplos[176]. Por exemplo, poderíamos imaginar que, na sentença “Platão foi discípulo de Sócrates”, o componente substituível seja a expressão “( ) foi discípulo de ( )” e que o componente fixo seja “Platão ( ) Sócrates”. Esta expressão representa uma função de segunda ordem que pode ser parafraseada da seguinte forma: “ser uma relação que ocorre entre Platão e Sócrates (necessariamente nesta ordem)”. Sob esta função caem relações de primeira ordem[177]. Simbolicamente, podemos expressar isto da seguinte forma: $\Upsilon(a, b)$ (função); $R(\Gamma, \Delta)$ (argumento)[178].

E como anteriormente, para cada relação de primeira ordem (argumento), obtemos sentenças que expressam conteúdos conceituais diferentes. Por exemplo, se o argumento for “( ) foi pai de ( )”, obteremos a sentença: “Platão foi pai de Sócrates”. Certamente, esta sentença expressa um conteúdo conceitual diferente que o da sentença “Platão foi discípulo de Sócrates”.

O mesmo tipo de análise é valido para a sentença “Platão é filósofo”. Pode-

175 Se a relação for simétrica, a ordem dos argumentos não importará.

176 Em Chateaubriand (2001), principalmente capítulos 1-6, há uma discussão detalhada sobre isto.

177 Em **BS**, não há uma clara distinção das entidades, como ocorreu posteriormente no trabalho de Frege. De acordo com ele, as entidades são divididas em objetos e funções. Os objetos pertencem ao nível mais baixo da hierarquia. As funções são divididas em níveis: funções de primeira ordem são aquelas cujos argumentos significativos são objetos; funções de segunda ordem são aquelas cujos argumentos significativos são funções de primeira ordem e assim sucessivamente. Além disso, em cada nível, as funções são distinguidas pelo número de argumentos que elas permitem. Assim, há funções de primeira ordem unárias; funções de primeira ordem binárias, etc.; funções de segunda ordem unárias, funções de segunda ordem binárias, etc..

178 “Since the symbol $\Phi$ occurs at a place in the expression

$$\Phi(A)$$

and since we can think of it as replaced by the other symbols [such as] $\Psi$, $X$ - which then express other functions of argument $A$ – we can consider $\Phi(A)$ as function of the argument $\Phi$. This shows quite clearly that the concept of function in analysis, which I have in general followed, is far more restricted than the one developed here” (**CN**, pág. 129).

mos considerar que o componente substituível seja a expressão "(  ) é filósofo". Portanto, o elemento fixo seria "Platão (  )". Esta última expressão pode ser parafraseada do seguinte modo: "ser uma propriedade que pertença a Platão". Simbolicamente, isto pode ser expresso assim: $\Upsilon(a)$ (função); $F(\Gamma)$ (argumento).

E, novamente, para cada função de primeira ordem (argumento), obtemos sentenças que expressam conteúdos conceituais distintos. Por exemplo, se o argumento for "(  ) é brasileiro", obtemos a sentença "Platão é brasileiro". Esta sentença expressa um conteúdo diferente que o expresso pela sentença "Platão é filósofo".

O que é mais importante em tudo isso, é, por exemplo, que a análise da sentença "Platão é filósofo" em termos de "Platão (  )" (função) e "(  ) é filósofo" produz o mesmo conteúdo conceitual que o da sentença em termos de "(  ) é filósofo" (função) e "Platão" (argumento). O mesmo vale para a análise da sentença "Platão foi discípulo de Sócrates" em termos de "Platão (  ) Sócrates" (função) e "(  ) foi discípulo de (  )" (argumento); e em termos de "(  ) foi discípulo de (  )"(função) e "Platão" e "Sócrates" (argumentos).

Um dos objetivos de §9 de **BS** é articular o argumento iniciado em §3, segundo o qual a distinção entre sujeito e predicado não ocorre na sua conceitografia. É possível analisar os conteúdos conceituais de inúmeras formas, contudo todas estas análises em termos de função e argumento resultarão no mesmo conteúdo conceitual, embora, gramaticalmente, elas expressem sentenças distintas.

Outro objetivo de Frege é introduzir dentro da conceitografia modos de expressão para funções unárias e binárias. Isto é de grande importância porque, caso contrário, ele não poderia definir de forma totalmente nítida os conceitos de ancestral forte, fraco e função.

Em §10 de **BS**, Frege introduziu os símbolos

$$\Phi(A) \text{ e } \Psi(A, B)$$

O primeiro símbolo representa uma função unária cujo argumento é $A$; o segundo, uma função binária cujos argumentos são $A$ e $B$.

Ademais, podemos aplicar o traço de conteúdo aos símbolos $\Phi(A)$ e $\Psi(A, B)$

**(a)** $—\Phi(A)$

**(b)** —$\Psi(A, B)$

Implicitamente, é assumido que $\Phi(A)$ e $\Psi(A, B)$ expressam conteúdos judicáveis, caso contrário (**a**) e (**b**) seriam mal-formados. Em outras palavras, $\Phi(\Gamma)$ e $\Psi(\Gamma, \Delta)$ devem expressar, respectivamente, um conceito e uma relação.

O símbolo

$$\vdash \Phi(A)$$

expressa o juízo que *A* tem a propriedade Φ; e o símbolo

$$\vdash \Psi(A, B),$$

que *A* encontra-se na relação **Ψ** com *B*.

Agora, junto com os demais primitivos do sistema, é possível formar conteúdos mais complexos. Por exemplo, expressaríamos na conceitografia o conteúdo da sentença "se *A* tem a propriedade ***Φ*** e se *A* está na relação **Ψ** com *B*, então *B* tem a propriedade ***Φ***" por meio da fórmula:

$$\begin{array}{l} \top\!\!\top\!\!-\, \Phi(B) \\ \mid\;\llcorner\, \Psi(A, B) \\ \llcorner\, \Phi(A) \end{array}$$ [179]

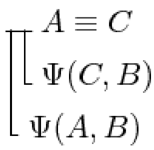
Conceitograficamente, o conteúdo da sentença "se *A* está na relação **Ψ** com *B* e se *A* está na relação **Ψ** com *C*, então *B* e *C* expressam o mesmo conteúdo conceitual" seria representado por meio da fórmula:

$$\begin{array}{l} \top\!\!\top\!\!-\, B \equiv C \\ \mid\;\llcorner\, \Psi(A, C) \\ \llcorner\, \Psi(A, B) \end{array}$$ [180]

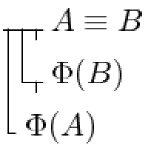
O conteúdo da sentença "se *A* está na relação **Ψ** com *B* e se *C* está na relação **Ψ** com *B*, então *A* e *C* expressam o mesmo conteúdo conceitual" é dado na conceitografia pela fórmula:

179 A partir deste conteúdo, Frege define quando uma propriedade *F* é hereditária em uma relação *f*.

180 Com este conteúdo, definimos o conceito de uma relação *f* ser funcional.

 [181]

O conteúdo da sentença “Se *A* tem a propriedade *Φ* e se *B* não tem a propriedade *Φ* , então *A* e *B* não expressam o mesmo conteúdo conceitual” é representado na conceitografia pela fórmula:

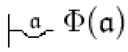


Outra inovação de Frege foi a introdução de um símbolo que expressa a generalidade:

 [182]

Na regra de formação, a letra gótica deve aparecer sempre acima da concavidade e em alguma expressão que sucede ao símbolo acima. Por exemplo

De acordo com Frege, se anexarmos o traço de juízo à fórmula acima



isto afirma “the judgment that the function is a fact whatever we may take as its argument” (**CN**, pág. 130)[183].

Em **BS**, há seguinte passagem

> The meaning of a German letter is subject only to the obvious restrictions that [1] the assertibility (§2) of a combination of symbol following stroke must remain

181 Com este conteúdo, podemos definir quando uma relação *f* é um-para-muitos.

182 A introdução da generalidade está intimamente ligada com a análise dos conteúdos conceituais em termos de função e argumento. Na lógica tradicional, sentença “Todo A é B” era analisada em termos de sujeito e predicado. Gramaticalmente, o sujeito da sentença é “Todo A”, que formava uma unidade, e o predicado é “B”. Boole analisou “todo A” e “B” em termos de classe. Assim, “Todo A é B” afirma que todos os objetos que pertencem à classe A são idênticos a alguns objetos que pertencem à classe B. Na visão de Frege, “Todo A é B” expressa uma relação de subordinação entre os conceitos A e B. E esta relação é determinada da seguinte forma: para todo objeto *x*, se *x* cai sob A, então *x* cai sob B. A sua ideia foi justamente introduzir um símbolo que expressasse “para todo *x*” (**CN**, pp. 127-8).

183 De acordo com Chateaubriand, esta leitura indica que o quantificador deveria ser interpretado substitucionalmente: “Given Frege's characterization of argument and function, it seems that the quantifier should not be interpreted objectually but substitutionally – whatever substitution-instance we take, the content is a fact. If the predicate 'is a fact' is distinguished from the judgement sign, then Frege's formula indicates the judgement that every substitution-instance is a fact, or is true, or is the case” (2001, pág. 264).

> intact, and [2] if the German letter appears as a function symbol, this circumstance must be taken into account (**CN**, pág. 130).

Isto indica que a generalidade só pode ser aplicada a conteúdos judicáveis. Por exemplo, supondo que '$\Gamma + 2$' seja um nome de uma função na conceitografia, então

$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \mathfrak{a} + 2$$

não é bem-formado, porque para algumas substituições em '$\Gamma + 2$', nem sempre obtemos um conteúdo judicável: supondo que '2' seja um nome da conceitografia, '2+2' não expressa um conteúdo judicável.

Por outro lado, supondo que '$\Gamma + 2 \equiv \Gamma.2$' seja um nome de função em **BS**, a seguinte fórmula é bem-formada:

$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ (\mathfrak{a} + 2 \equiv \mathfrak{a}.2)$$

Percebamos que para todas substituições relevantes[184], '$\Gamma + 2 \equiv \Gamma.2$' sempre expressará um conteúdo judicável. Por exemplo, para o argumento '3', obtemos

$$3 + 2 \equiv 3.2$$

que é falso. Para o argumento '2', obtemos

$$2 + 2 \equiv 2.2$$

que é verdadeiro. Portanto, '$\Gamma + 2 \equiv \Gamma.2$' não é um fato para todo argumento. Assim, expressamos isto pela fórmula

$$\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ (\mathfrak{a} + 2 \equiv \mathfrak{a}.2)$$

E, consequentemente, podemos afirmá-la

$$\vdash\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ (\mathfrak{a} + 2 \equiv \mathfrak{a}.2)$$

Este fato é importante, porque o seguinte análogo do **Axioma V**

$$\epsilon' f(\epsilon) \equiv \epsilon' g(\epsilon) \equiv \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ (f(\mathfrak{a}) \equiv g(\mathfrak{a}))$$

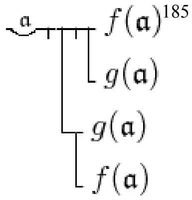
parece ser bem-formado na linguagem de **BS**, independentemente de se '$f\Gamma$' e '$g\Gamma$' são conceitos ou não (no nosso sentido explicado). Por outro lado, o seguinte análogo do **Axioma V**

$$\epsilon' f(\epsilon) \equiv \epsilon' g(\epsilon) \equiv \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ (f(\mathfrak{a}) \leftrightarrow g(\mathfrak{a}))$$

não é bem-formado para qualquer função, já que o lado direito da fórmula acima

184 No caso, deveríamos substituir por números. Em **BS**, Frege ainda não havia assumido a tese, segundo a qual a definição de uma função deve ser total, ou seja, deve ser determinado para todos os argumentos apropriados qual é o valor da função. No caso em questão, a função é de primeira ordem, portanto deveria ser determinado para todos os objetos qual é o seu valor. Em particular, deveria ser determinado qual seria o valor dessa função para o argumento “Sol”.

equivale à fórmula



Neste caso, '$f\Gamma$' e '$g\Gamma$' têm de ser conceitos para produzir uma fórmula bem-formada.

Em **BS**, temos o Axioma 54

(54BS): $\vdash c \equiv c$

Frege permite a regra de substituição para conteúdos conceituais. Assim, no lugar de '$c$', poderíamos introduzir '$f(a)$', obtendo

(54BS*) $\vdash f(a) \equiv f(a)$, onde '$f\Gamma$' não precisa expressar necessariamente um conceito.

Mas, disto, por meio de generalização universal, obtemos

(54BS**) $\vdash\!\smile^{\mathfrak{a}}\!- (f(\mathfrak{a}) \equiv f(\mathfrak{a}))$[186]

Mas, se

$$\epsilon' f(\epsilon) \equiv \epsilon' g(\epsilon) \equiv \smile^{\mathfrak{a}}\!- (f(\mathfrak{a}) \equiv g(\mathfrak{a}))$$

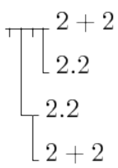
estiver no sistema, podemos obter a fórmula

$$\epsilon' f(\epsilon) \equiv \epsilon' f(\epsilon).$$

E daqui facilmente derivamos que existem extensões de conceitos[187] [188].

Como afirmamos no início, Frege usa as letras latinas para expressar generalidade. Portanto, qual seria a necessidade de um símbolo para expressar a generalidade? De acordo com ele:

185 Se '$f\Gamma$' e '$g\Gamma$' forem, respectivamente, as funções expressas pelas fórmulas '$\Gamma + 2$' e '$\Gamma.2$' (assumindo que são expressões da conceitografia), então logo percebemos que o seguinte é mal-formado:

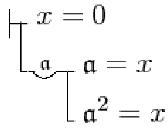


186 Parece-nos que esta fórmula é um possível teorema de **BS**.

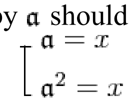
187 Novamente, a teoria obtida com a adição do **Axioma V** a **BS** é inconsistente, portanto não se trata de uma prova no sentido estrito.

188 Em **BS**, há uma prova trivial da existência de extensões, se introduzirmos no sistema nomes próprios para as mesmas, porque, devido ao axioma 54, o seguinte é provável no sistema: $\exists x(x \equiv c)$.

It is sometimes necessary to confine the generality to a part of the judgement. Then I make use of German instead of italic letters, as in

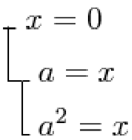


in words: if each square root of $x$ is $x$ itself, then $x$=0. Here the concavity with the $\mathfrak{a}$ signifies that the generality expressed by $\mathfrak{a}$ should be confined to the content of

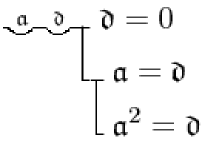


I consider this mode of notation one of the most important components of my "conceptual notation", through which it also has, as a mere presentation of logical forms, a considerable advantage over Boole's mode of notation (**CN**, pág. 99)[189].

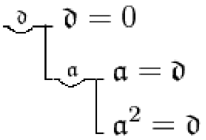
Ou seja, embora as letras latinas expressem a generalidade, devemos considerar o escopo inteiro do juízo como sendo generalizado. Portanto, a fórmula



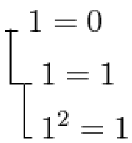
é equivalente a



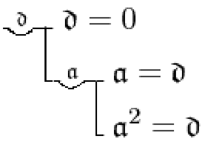
Porém, isto expressa um conteúdo conceitual diferente da fórmula



A primeira é falsa, porque se instanciarmos $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ para 1, obtemos a fórmula



cujo antecedente é verdadeiro, mas o consequente é falso. Por outro lado,



expressa um conteúdo judicável verdadeiro[190 191].

189 Veja também (**CN**, pp. 130-1).

190 O antecedente é falso, uma vez que nem toda raiz de um número é idêntica ao próprio número.

191 Às vezes, queremos expressar a negação de uma generalidade e não a generalidade de uma negação e, portanto, é necessário o símbolo para quantificação. Por exemplo, a fórmula $\top\,\Phi(a)$

Frege também permite quantificação sobre funções. Isto é observado nas definições do ancestral forte e fraco e nas provas decorrentes destes conceitos. Mas, há uma passagem em §11 que Frege já sugere este procedimento:

> Since a letter which is used as a function symbol, like *Φ* in *Φ*(*a*), can itself be considered as the argument of a function, it can be replaced by a German letter in the manner just specified.

Em uma passagem anterior, mencionamos a regra de generalização universal, que é uma regra de inferência assumida por Frege[192]. Se $\vdash \Phi(a)$ for um teorema de **BS**, poderemos derivar

$$\vdash\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\, \Phi(\mathfrak{a})$$

Esta regra também é assumida para funções. Portanto, se $\vdash f(a)$ é um teorema, podemos inferir

$$\vdash\!\!\smile^{\mathfrak{f}}\!\!-\, \mathfrak{f}(a)$$ [193]

Além disso, Frege assume a regra de inferência que chamamos de "regra de confinamento da generalidade ao consequente". De acordo com Frege

> It is also obvious that from
>
> $$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top \Phi(a) \\ \quad\llcorner A \end{array}$$
>
> we can derive
>
> $$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\, \Phi(\mathfrak{a}) \\ \quad\llcorner A \end{array}$$
>
> if *A* is an expression in which *a* does not occur and *a* stands only in argument places of $\Phi(a)$. If $\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\, \Phi(\mathfrak{a})$ is denied, then we must be able to specify a meaning for *a* such that $\Phi(a)$ is denied. Thus, if $\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\, \Phi(\mathfrak{a})$ were denied and *A* affirmed, then we should be able to specify a meaning for *a* such that *A* would be affirmed and $\Phi(a)$ denied. But because of
>
> $$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top \Phi(a) \\ \quad\llcorner A \end{array}$$

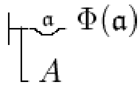
---

é equivalente à fórmula $\smile^{\mathfrak{a}}\!\!\top\, \Phi(\mathfrak{a})$. Mas isto não é equivalente à fórmula: $\top\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\, \Phi(\mathfrak{a})$. Na primeira, temos a generalidade de uma negação; na segunda, a negação de uma generalidade.

192 (**CN**, pág. 132).

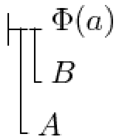
193 (**CN**, pp. 182, 184).

we cannot do this; for this [formula] means that, whatever *a* may be, the case in which $\Phi(a)$ would be denied and *A* affirmed is excluded.
Thus, we cannot deny $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \Phi(\mathfrak{a})$ and affirm A; that is:

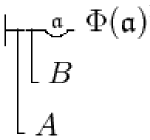


(**CN**, pp. 132-3).

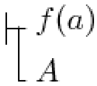
Esta regra pode ser generalizada para vários antecedentes. Assim, se a fórmula



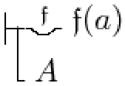
é um teorema de **BS** e se '*a*' não ocorre em *A* e *B*, então podemos inferir

[194]

Na parte 3 de **BS**, Frege usa esta regra para funções. Portanto, se a fórmula

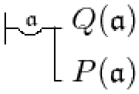


é um teorema de **BS**, podemos derivar

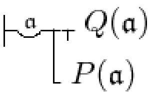


E, na verdade, nas provas da parte 3 de **BS**, Frege utiliza uma generalização da inferência acima em fórmulas com mais de um antecedente[195].

Como anteriormente, é possível mesclar a generalidade com os demais primitivos lógicos e obter conteúdos mais complexos. Assim, podemos expressar na conceitografia a sentença “Todo P é Q” da seguinte forma:

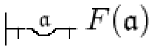
[196]

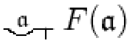
A sentença “Nenhum P é Q” é representada na conceitografia pela fórmula

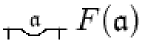
[197]

194 Veja (**CN**, pág. 133).
195 Veja (**CN**, pp. 182 e 184).
196 Para todo *x*, se *x* cai sob *P*, então *x* cai sob *Q*.
197 Para todo *x*, se *x* cai sob *P*, então *x* não cai sob *Q*.

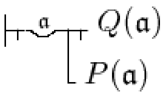
O quantificador existencial não foi definido por Frege, mas há uma fórmula da conceitografia que tem este significado. Assim, "existem *F*s" é representado por



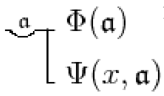
A fórmula  indica a circunstância que tudo não é *F*. Portanto, a fórmula

 indica a circunstância que nem tudo não é *F*, ou seja, algo é *F*.

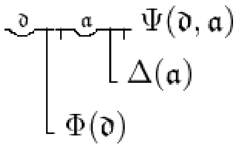
"Alguns P são Q" na conceitografia é

 [198]

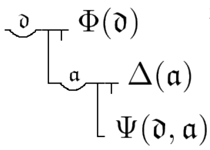
Na conceitografia, expressamos "para todo *a*, se *x* está na relação Ψ com *a*, então *a* tem a propriedade Φ" da seguinte forma:

 [199]

"Para todo *d*, se *d* é Φ, então existe *a* tal que *a* é Δ e *d* está na relação Ψ com *a*" é formulado na conceitografia assim:



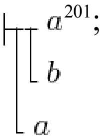
Esta fórmula é equivalente a

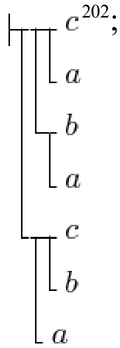
 [200]

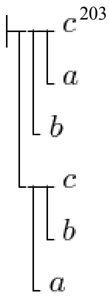
## 2.1.2
## As leis do pensamento, definições e derivações

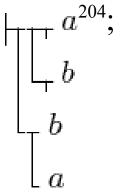
Na parte 2 de **BS**, Frege introduz seus nove axiomas lógicos, formulados por meio das letras latinas. Na conceitografia, estes axiomas são as fórmulas:

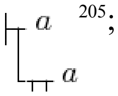
198 Nem tudo que é P não é Q.
199 Esta fórmula será usada na definição do ancestral.
200 No capítulo **3**, usamos esta fórmula na definição do conceito de correlação entre dois conceitos via uma relação. Ela afirma que para todo *a*, se para todo *b*, *a* está na relação Ψ com *b*, então *b* não é Δ, então *a* não é Φ.

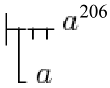
(1BS)  [201];

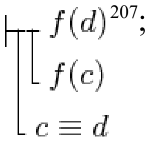
(2BS)  [202];

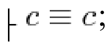
(8BS)  [203]

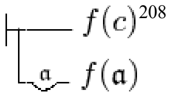
(28BS)  [204];

(31BS)  [205];

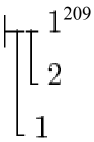
(41BS)  [206]

(52BS)  [207];

(54BS) ;

(58BS)  [208]

Nos seis primeiros axiomas, as letras latinas '*a*', '*b*', '*c*',… devem percorrer conteúdos judicáveis, caso contrário, eles seriam mal-formados. Assumindo que '1' e '2' sejam nomes da conceitografia, o seguinte, por exemplo, não seria uma fórmula bem-formada:

 [209]

Por outro lado, nos três últimos axiomas, as letras latinas *a*, *b*, *c*, *d*... não precisam necessariamente percorrer conteúdos judicáveis. Se '2' for um nome da

201 Na notação contemporânea: $(a \supset (b \supset a))$.
202 Na notação contemporânea: $(a \supset (b \supset (c)) \supset ((a \supset b) \supset (a \supset c))$.
203 Na notação contemporânea: $(a \supset (b \supset c)) \supset (b \supset (a \supset c))$. Este axioma não é independente dos demais axiomas de **BS**.
204 Na notação contemporânea: $(a \supset b) \supset (\neg b \supset \neg a)$.
205 Na notação contemporânea: $(\neg\neg a \supset a)$.
206 Na notação contemporânea: $(a \supset \neg\neg a)$.
207 Na notação contemporânea: $(c \equiv d) \supset (f(c) \supset f(d))$.
208 Na notação contemporânea: $\forall x f(x) \supset f(c)$.
209 Certamente, Frege introduzirá nomes que designem os números individuais (veja, **GLA**, §§ 75-7; **GGA** §§ 41-2). Em **GGA**, devido ao horizontal, esta fórmula seria bem-formada e verdadeira.

conceitografia, o seguinte será bem-formado:

$$\vdash (2 \equiv 2).$$

No caso dos axiomas 52BS e 58BS, o que é exigido é que '$f(a)$', '$f(b)$' e '$f(c)$' expressem conteúdos judicáveis[210]. Ou seja, '$f\Gamma$' deve ser necessariamente um conceito, se '*a*', '*b*', '*c*', '*d*',...forem conteúdos não-judicáveis. Caso contrário, teríamos fórmulas mal-formadas[211].

Nesta segunda parte de **BS**, implicitamente Frege argumenta que seus axiomas são analíticos no sentido Kantiano. Em **CRP**, Kant formula os seguintes critérios por meio dos quais poderíamos julgar se um juízo é analítico:

> Em todos os juízos, nos quais se pensa a relação entre um sujeito e um predicado (apenas considero os juízos afirmativos, porque é fácil depois a aplicação aos negativos), esta relação é possível de dois modos. Ou o predicado B pertence ao sujeito A como algo que está contido (implicitamente) nesse conceito A, ou B está totalmente fora do conceito A, embora em ligação com ele. No primeiro caso chamo *analítico* ao juízo, no segundo *sintético*. Portanto, os juízos (os afirmativos) são analíticos, quando a ligação do sujeito com o predicado é pensada por identidade; aqueles, porém, em que essa ligação é pensada sem identidade, deverão chamar-se juízos sintéticos. Os primeiros poderiam igualmente denominar-se juízos explicativos; os segundos, juízos extensivos; porque naqueles o predicado nada acrescenta ao conceito do sujeito e apenas pela análise o decompõe nos conceitos parciais, que jé nele estavam pensados (embora confusamente) (**CRP**, A 6-7; B 10-11)
>
> Ora a proposição: A coisa alguma convém um predicado que o contradiga, denomina-se princípio de contradição e é um critério universal, embora apenas negativo, de toda a verdade; mas pertence unicamente à lógica, porque vale só para conhecimentos considerados simplesmente como conhecimentos em geral,

---

210 Existe uma diferença entre a lógica de **BS** (e de **GGA**) e a lógica de predicados contemporânea. Nesta última, '*fx*', '*fy*', etc. seriam fórmulas (sentenças abertas), porque '*x*', '*y*' seriam variáveis livres. Em **BS** e **GGA**, '*fx*', '*fy*', etc. são termos designando (de fato, em **GGA**, Frege usa o termo indicar), respectivamente, conteúdos conceituais (e dependendo da fórmula, eles designam conteúdos judicáveis) e objetos.

211 O seguinte seria mal-formado, substituindo-se, '*c*' por '2', '*d*' por '3' e '*f*Γ' por 'Γ+1' em 52BS:

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} 3+1 \\ 2+1 \\ 2 \equiv 3 \end{array}$$

Por outro lado, se substituíssemos '*f*Γ' por ''Γ é par' ('*P*Γ'), obteríamos uma fórmula bem-formada:

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} P(3) \\ P(2) \\ 2 \equiv 3 \end{array}$$

E, certamente, poderíamos mostrar que $\vdash\!\top\,(2 \equiv 3)$, porque 2 é par, mas 3 não é.

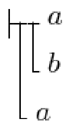
independentemente do seu conteúdo, e afirma que a contradição os destrói totalmente.
Contudo, este critério pode também servir para um uso positivo, isto é, não só para banir a falsidade e o erro (na medida em que assentam na contradição), mas ainda para reconhecer a verdade. Porque, se o juízo é *analítico*, quer seja negativo ou afirmativo, a sua verdade deverá sempre poder ser suficientemente reconhecida pelo princípio de contradição. Com efeito, o contrário do que se encontra já como conceito e que é pensado no conhecimento do objeto, é sempre negado com razão, enquanto o próprio conceito terá de ser necessariamente afirmado, porquanto o seu contrário estaria em contradição com o objeto (**CRP**, A 151-2; B 190-1).

Na doutrina Kantiana, os dois critérios acima têm uma íntima ligação, já que um juízo analítico no primeiro sentido expressa que uma identidade ocorre entre o conceito do sujeito e o de predicado. Portanto, negar um juízo analítico no primeiro sentido é o mesmo que afirmar que uma coisa é e não é ao mesmo tempo, isto é, cometer uma contradição.

Contudo, no sistema lógico de Frege, não é claro como aplicar o primeiro critério de Kant, porque a distinção entre sujeito e predicado não desempenha qualquer papel[212].

Não obstante, o segundo critério parece ser bastante adequado. E, de fato, quando Frege argumenta a favor da verdade de seus axiomas, ele menciona implicitamente que os negar implicaria em uma contradição. Por exemplo, sobre 1BS, é escrito o seguinte:

§14




says: "The case in which *a* is denied, *b* is affirmed and *a* is affirmed is excluded". This is obvious since *a* cannot be denied and affirmed at the same time (**CN**, pág. 137)[213]



---

212 "Kant obviously -as a result, no doubt, of defining them too narrowly – underestimated the value of analytic judgements, though it seems that he did have some inkling of the wider sense in which I have used the term*. On the basis of his definition, the division of judgements into analytic and synthetic is not exhaustive. What he is thinking of is the universal affirmative judgement; there, we can speak of a subject concept and ask – as his definition requires – whether the predicate is contained in it or not. But how can we do this, if the subject is an individual object? Or if the judgement is an existential one? In these cases there can simply be no question of a subject concept in Kant's sense.
*On p. 43 [B14] he says that a synthetic proposition can only be seen to be true by the law of contradiction, if another synthetic proposition is presupposed" (**FA**, pp. 99-100).

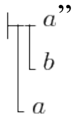
213 Em **GGA**, a justificativa de seus axiomas (exceto o **Axioma V**) é similar a de **BS**: "Now we shall set up, in Roman letters, some general laws that we shall require later. By §12,

Os nove axiomas seriam, na visão de Frege, analíticos (no sentido Kantiano). Ademais, para Frege, suas regras de inferência (explícitas e implícitas), a saber, *modus ponens*, regra de substituição para conteúdos conceituais[214] e para funções[215], generalização universal e confinamento da generalidade ao consequente, preservariam a propriedade de "ser analítico". Disto se seguiria que todos os teoremas prováveis na parte 2 de **BS** seriam analíticos.

Não obstante, há problemas relacionados com os axiomas 52 e 58 e com o teorema 57. Primeiro, iremos tratar de 52BS e de 57BS. Como mencionamos anteriormente, estas fórmulas são usadas para se obter das definições Fregeanas que

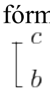
---

could be the False only if both Γ and Δ were the True while Γ was not the True. This is impossible; therefore

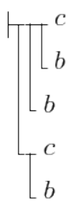


(**BLA**, pág. 69)

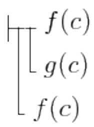
214 Qualquer substituição de letras latinas (ou fórmulas contendo letras latinas) que se faça nos axiomas ou teoremas provados, as fórmulas obtidas continuam sendo sempre verdadeiras. Por exemplo, podemos substituir em 1BS '*a*' pela fórmula



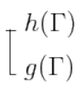
E, assim, obteríamos a fórmula:



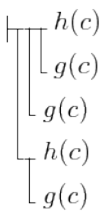
que é verdadeira (e analítica). Poderíamos substituir também '*a*' por '*f*(*c*)' e '*b*' por '*g*(*c*)' em 1BS, obtendo a fórmula



215 A regra de substituição para funções é provavelmente equivalente ao axioma de compreensão para funções. Na última fórmula da nota anterior, poderíamos substituir a função '*f*Γ' pela função



obtendo, portanto, a fórmula



têm a forma

$$\Vdash (A \equiv B),$$

as fórmulas condicionalizadas

$$\vdash\!\!\!\top \begin{array}{l} B \\ A \end{array}$$

e

$$\vdash\!\!\!\top \begin{array}{l} A \\ B \end{array}$$

A atitude de Frege com relação às definições é axiomática, elas não são meros estratagemas metalinguísticos. Embora ele não seja claro em **BS** do porquê desta atitude em relação às definições, em **GLA** Frege sustenta a tese segundo a qual definições devem ser frutíferas. Por isto, devemos entender que as definições têm de participar do processo de provas[216] [217] [218].

Todavia, nas provas Fregeanas, apenas juízos (proposições ou pensamentos verdadeiros) participam. Logo, é necessário "transformar" a definição em um juízo, que acaba por se "tornar" um axioma do sistema[219]. Portanto, a partir da definição, obtemos o "axioma"

$$\vdash (A \equiv B)$$ [220]

216 "Definitions show their worth by proving fruitful. Those that could just as well be omitted and leave no link missing in the chain of our proofs should be rejected as completely worthless" (**FA**, pág. 81).

217 Além disso, as definições de Frege são extremamente complexas e delas obtemos resultados inesperados. Nesse sentido, elas também seriam frutíferas: "He [Kant] seems to think of concepts as defined by giving a simple list of characteristics in no special order; but all ways of forming concepts, that is one of the least fruitful. If we look through the definitions given in the course of this book, we shall scarcely find one that is of this description. The same is true of the really fruitful definitions in mathematics, such as that of the continuity. What we find in these is not a simple list of characteristics; every element in the definitions is intimately, I mighty say organically, connected with the others" (**FA**, pág. 100). Veja também Ruffino (1991).

218 Em **GLA**, Frege critica definições que não desempenham papel algum nas provas. Um exemplo é a definição de ponto nos "Elementos" de Euclides. De acordo com a definição, ponto é aquilo que não tem partes. Esta definição não desempenha qualquer papel nas provas dos teoremas geométricos. Frege diria que isto não é uma definição no sentido estrito, mas uma elucidação. Para Frege, a noção de ponto é um primitivo geométrico, regido por determinados axiomas que explicariam ou determinariam o seu significado. Da mesma forma, Frege é enfático que as explicações que ele tenta dar sobre as noções de função e objeto não podem ser consideradas como definições, justamente porque elas são primitivas.

219 Em **BS**, todos os juízos são ou axiomas lógicos ou "axiomas" obtidos das definições ou teoremas lógicos obtidos dos axiomas ou das definições (junto com outros teoremas lógicos).

220 De acordo com Frege, a fórmula obtida por meio da definição é analítica: "Although originally (69) is not a judgement still it is readily converted into one; for once the meaning of the new symbol is specified, it remains fixed from then on; and therefore formula (69) holds

Para chegar às formas condicionalizadas acima a partir da definição, Frege substitui nas fórmulas

$$\text{(52BS)} \begin{array}{l} \vdash\!\top\!\top\, f(d) \\ \quad\ \llcorner\, f(c) \\ \ \llcorner\, c \equiv d \end{array} \qquad\qquad \text{(57BS)} \begin{array}{l} \vdash\!\top\!\top\, f(c) \\ \quad\ \llcorner\, f(d) \\ \ \llcorner\, c \equiv d \end{array}$$

'c' por '*A*', '*d*' por '*B*', e '*f*Γ' por 'Γ', obtendo assim

$$\text{(52BS*)} \begin{array}{l} \vdash\!\top\!\top\, B \\ \quad\ \llcorner\, A \\ \ \llcorner\, A \equiv B \end{array} \qquad\qquad \text{(57BS*)} \begin{array}{l} \vdash\!\top\!\top\, A \\ \quad\ \llcorner\, B \\ \ \llcorner\, A \equiv B \end{array}$$

Ora, uma vez que temos $\vdash (A \equiv B)$, obtemos as fórmulas desejadas por meio de *modus ponens*.

Até onde podemos ver, há uma questão com a substituição da função '*f*Γ' por 'Γ'. Estritamente falando, o que Frege deseja com esta substituição é eliminar '*f*' das fórmulas 52BS e 57BS. Contudo, este tipo de substituição não pode ser universalmente aplicada. Se substituirmos '*c*' e '*d*', respectivamente, por conteúdos conceituais não-judicáveis '*x*' e '*y*' (variáveis objectuais ou nomes próprios) e fizermos a substituição funcional acima, obteremos fórmulas mal-formadas no sistema

$$\text{(52BS**)} \begin{array}{l} \vdash\!\top\!\top\, y \\ \quad\ \llcorner\, x \\ \ \llcorner\, x \equiv y \end{array} \qquad\qquad \text{(57BS**)} \begin{array}{l} \vdash\!\top\!\top\, x \\ \quad\ \llcorner\, y \\ \ \llcorner\, x \equiv y \end{array}$$

Isto é relevante, porque, em **GLA**, Frege define os números cardinais individuais 0 e 1 (objetos), e este tipo de substituição funcional não poderá ser permitida de forma completamente geral[221] [222].

also as a judgement, but as an analytic one, since we can only get out what was put into the new symbols [in the first place]" (**CN**, pág. 168).

221 Em **GLA**, Frege define, por exemplo, o número zero como sendo o número que pertence ao conceito *ser diferente de si mesmo*. Em símbolos:

$$\Vdash (\sharp_x(_\top\, x \equiv x) \equiv 0)$$

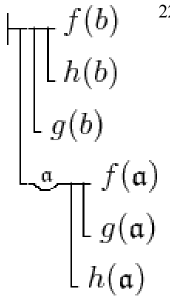
As substituições mencionadas resultariam nas seguintes fórmulas mal-formadas

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\!\top\, 0 \\ \quad\ \llcorner\, \sharp_x(_\top\, x \equiv x) \\ \ \llcorner\, (\sharp_x(_\top\, x \equiv x) \equiv 0) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \vdash\!\top\!\top\, \sharp_x(_\top\, x \equiv x) \\ \quad\ \llcorner\, 0 \\ \ \llcorner\, (\sharp_x(_\top\, x \equiv x) \equiv 0) \end{array}$$

222 Pode ser conjecturado que, em parte, a introdução do horizontal como um conceito foi

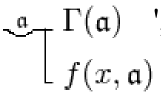
Com relação ao axioma 58, existe a seguinte questão, a saber, Frege parece supor que, através de substituições relevantes das letras latinas e góticas, podemos obter versões de segunda ordem de 58BS. Por exemplo, Frege prova o seguinte teorema usando 58BS:

(60BS)



[223]

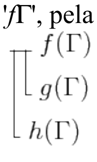
Para provar, por exemplo, 93BS, as seguintes substituições são feitas em 60BS: '$\mathfrak{a}$' é substituído por '$\mathfrak{F}$', '*f*Γ', por 'Γ(*y*)', '*g*Γ', por $Her_{\alpha,\beta}(\Gamma(\beta), f(\alpha,\beta))$[224],

'*b*' por '$\mathfrak{F}$' e, finalmente '*h*Γ', por '', obtendo a seguinte fórmula

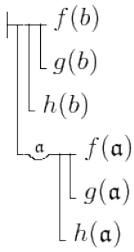


motivada por isto. De fato, não é claro que tipo de função 'Γ' representa. Em **GGA**, a substituição funcional nos axiomas IIIa (52BS) e IIIc (57BS), com respeito às definições e ao **Axioma V**, é geralmente '*f*ξ' por '—ξ'.

223 Em notação contemporânea: $(\forall x(h(x) \supset ((g(x) \supset f(x)). \supset .(g(b) \supset (h(b) \supset f(b))))$. 60BS é obtido substituindo-se em 58BS a função '*f*Γ', pela função

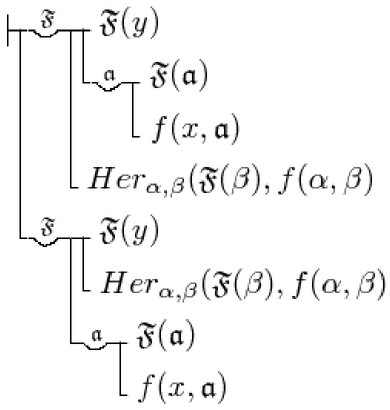


e '*c*' por '*b*', obtendo-se a fórmula



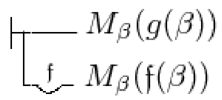
E, por meio de lógica proposicional, o teorema desejado é derivado.

224 O significado deste símbolo será explicado mais adiante.

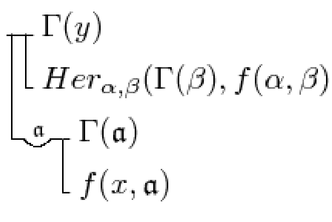


Há algumas coisas extraordinárias sendo feitas aqui. Em primeiro lugar, Frege substitui funções de primeira ordem por funções de segunda ordem. Em segundo, ele generaliza universalmente (segunda ordem), substituindo '*b*' por '$\mathfrak{F}$', enquanto a substituição normal deveria ser '*b*' por '$\mathfrak{a}$'. Além de substituir '$\mathfrak{a}$' por '$\mathfrak{F}$'[225].

Em **GGA**, Frege explicitamente assume o axioma IIb

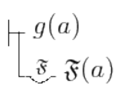


Aqui, '$M_\beta(T(\beta))$'[226] poderá ser substituída por qualquer função de segunda ordem. Em particular, para produzirmos a fórmula em questão, teríamos de tomar o seguinte conceito de segunda ordem

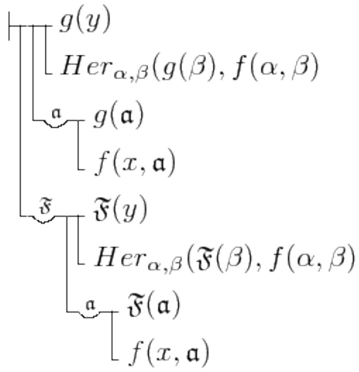


Assim, obteríamos a fórmula

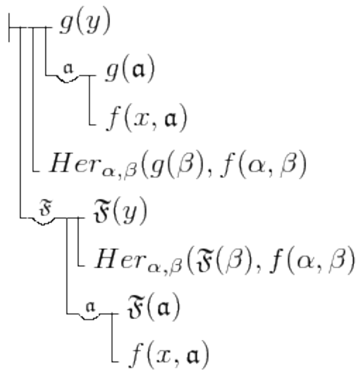
225 Um exemplo mais simples seria substituir '$f\Gamma$' por '$\Gamma(a)$', '$\mathfrak{a}$' por '$\mathfrak{F}$ e '*c*' por '*g*' no axioma 58, obtendo



226 'T' representa o lugar do argumento.



Depois, por lógica proposicional, derivaríamos

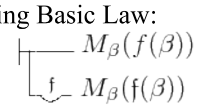


E, desta fórmula, generalizando universalmente sobre '*g*' e confinando a generalidade ao consequente, chegaríamos à fórmula desejada.

Portanto, há uma certa ambiguidade em **BS** no tratamento de funções de primeira ordem e de segunda e no tratamento de funções e objetos[227]. Entretanto, parece que Frege logo percebeu este problema, porque na carta a Marty, ele escreveu o seguinte:

> But I wanted to tell you something about my conceptual notation. You emphasize the division between the function of judgement and the matter judged. The distinction between individual and concept seems to me even more important. In the language the two merge into each other. The proper name 'sun' becomes a concept name when one speaks of suns, and a concept name with a demonstrative serves to designate an individual. In logic, too, this distinction has not always been observed (for Boole only concepts really exist). The relation of subordination of a

227 Embora, em **GGA**, Frege não confunda funções de primeira ordem com funções de segunda e tenha conhecimento de que não é possível obter instâncias de segunda ordem do axioma 58BS (IIa de **GGA**), ao explicar o axioma IIb, ele escreve o seguinte: "We avail ourselves of this expression of generality in the following Basic Law:



Obviously this Basic Law is for our second-level functions what (IIa) is for first-level functions. "$M_\beta$" here corresponds to the letter "*f*" in (IIa); "*f*" here corresponds to the "*a*" in (IIa); and "$\mathfrak{f}$" here corresponds to "$\mathfrak{a}$" in (IIa)" (BLA, pág. 80).

concept under a concept is quite different from that of an individual falling under a concept.... In general I represent the falling of an individual under a concept by *F*(*x*), where *x* is the subject (argument) and *F*( ) the predicate (function), and where the empty place in the parentheses after *F* indicates non-saturation. The subordination of a concept *Ψ*( ) under a concept *Φ*( ) is expressed by

$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\begin{array}{l}\Phi(\mathfrak{a})\\ \llcorner\,\Psi(\mathfrak{a})\end{array}$$

which makes obvious the difference between subordination and an individual falling under a concept. Without the strict distinction between individual and concept it is impossible to express particular and existential judgements accurately and in such a way as to make their close relationship obvious (Frege, 1980, pp. 101-2).

Provavelmente, já em 1882, quando ele enviou a carta, Frege poderia ter o axioma IIb no sistema. De fato, se estiver correta a nossa hipótese de que, no livro mencionado a Marty, os axiomas de Peano poderiam ter sido provados a partir de **PH**, Frege precisaria também do seguinte axioma que nomearemos de IIb*

$$\vdash\!\!\top\begin{array}{l}M_{\alpha\beta}(f(\alpha,\beta))\\ \llcorner\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, M_{\alpha\beta}(\mathfrak{f}(\alpha,\beta))\end{array}$$ [228]

Existe outra diferença fundamental entre 58BS e IIb, já que do primeiro podemos obter as seguintes fórmulas

$$\vdash\!\!\top\begin{array}{l}f(d,a)\\ \llcorner\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\, f(\mathfrak{d},\mathfrak{a})\end{array}$$ [229], $$\vdash\!\!\top\begin{array}{l}f(d,a,e)\\ \llcorner\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\, f(\mathfrak{d},\mathfrak{a},\mathfrak{e})\end{array}$$ , etc..

Por outro lado, a partir de IIb, não podemos obter IIb*, porque o primeiro é um axioma que é válido para conceitos de primeira ordem, enquanto o segundo é válido para relações binárias de primeira ordem[230]. Em geral, para qualquer rela-

228 Veja em **3** o uso deste axioma.

229 A prova é bastante simples: considere a seguinte instância de 58BS

$$\vdash\!\!\top\begin{array}{l}f(d,a)\\ \llcorner\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\, f(\mathfrak{d},a)\end{array}$$

Considere agora a seguinte instância de 58BS

$$\vdash\!\!\top\begin{array}{l}\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\, f(\mathfrak{d},a)\\ \llcorner\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\, f(\mathfrak{d},\mathfrak{a})\end{array}$$

Por lógica proposicional (transitividade do condicional), obtemos a fórmula desejada.

230 Em **GGA**, Frege escreveu: "Further, those argument-places that may admit names of first-level functions of two arguments. Accordingly, we distinguish:
*arguments of type 1:* objects;
*arguments of type 2:* first-level functions of one argument;
*arguments of type 3:* first-level functions of two arguments.

ção eneária, seria necessário introduzir um novo axioma IIb[231].

Como já mencionado, na parte 3 de **BS** são introduzidas quatro definições de conceitos aritméticos, sendo estes

(**a**) Conceito de uma propriedade *F* ser hereditária em uma sequência *f* (fórmula **69** de BS)

$$\Vdash \left( \left( \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{b}}{\smile}\!\!-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!\top\, F(\mathfrak{a}) \\ \qquad\quad \llcorner\, f(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) \\ \quad \llcorner\, F(\mathfrak{b}) \end{array} \right) \equiv Her_{\alpha\beta}(F(\beta), f(\alpha, \beta)) \right)$$ [232] [233]

O conceito de hereditariedade é um conceito de segunda ordem sob o qual caem propriedades (unárias) e relações (binárias) de primeira ordem. Se considerarmos '**Φ**' e '**Ψ**' como lugares de argumento, o conceito de hereditariedade é

$$\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{b}}{\smile}\!\!-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!\top\, \Phi(\mathfrak{a}) \\ \qquad\quad \llcorner\, \Psi(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) \\ \quad \llcorner\, \Phi(\mathfrak{b}) \end{array}$$

O conceito de hereditariedade será usado na definição do próximo conceito,

---

In the same way we distinguished:
*argument-places of type 1*, which are appropriate to admit proper names;
*argument-places of type 2*, which are appropriate to admit names of first-level functions of one argument;
*argument-place of type 3*, which are appropriate to admit names of first-level functions of two arguments.
Proper names and object-letters are *fitting* for the argument-place of type 1; names of first-level functions of one argument are *fitting* for the argument-places of type 2; names of first-level functions of two arguments are *fitting* for the argument-places of type 3" (BLA, pp. 77-8). Logo após esta passagem, Frege escreveu: "We have herewith introduced two third-level functions, whose names may be written thus:

"$\overset{\mathfrak{f}}{\smile} \mu_{\beta}(\mathfrak{f}(\beta))$" and "$\overset{\mathfrak{f}}{\smile} \mu_{\beta\gamma}(\mathfrak{f}(\beta, \gamma))$"

in which we render the argument-places recognizable here with "$\mu_\beta$" and "$\mu_{\beta\gamma}$", just as we render the argument-places of types 2 and 3 recognizable with "$\phi$" and "$\psi$", and of type 1 with "$\xi$" and "$\zeta$"" (**BLA**, pp. 78-9).

231 Com as mudanças feitas na conceitografia a partir da introdução dos valores de verdade como objetos e da identidade, Frege pode provar o seu teorema 1 de **GGA**. Com isso, Frege pode descartar todos estes axiomas IIb, exceto aquele válido para conceitos, pois ele é necessário para provar o próprio teorema 1.

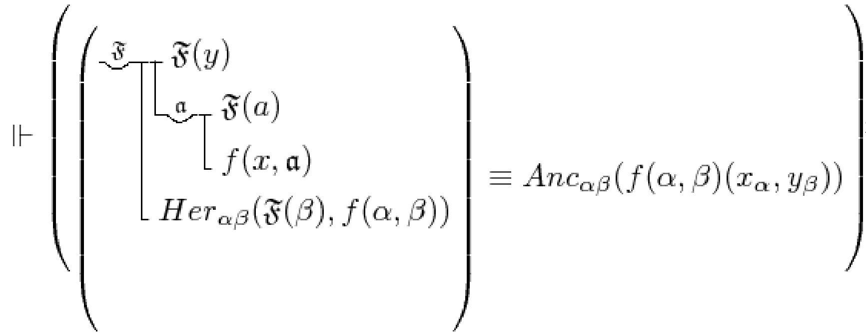
232 Na notação contemporânea: $Her_{\alpha\beta}(F(\beta), f(\alpha, \beta)) \equiv_{def} \forall x(Fx \supset (\forall y(f(x, y) \supset Fy)))$

233 Devido à complexidade do símbolo utilizado por Frege, preferimos usar:

"$Her_{\alpha\beta}(F(\beta), f(\alpha, \beta))$"

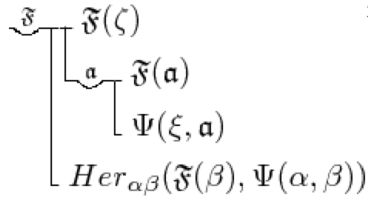
a saber

(**b**) Conceito do ancestral forte de uma relação (fórmula 76)



[234] [235]

O ancestral forte é um conceito de segunda ordem sob o qual caem relações binárias de primeira ordem e objetos. Se admitirmos que 'ξ', 'ζ' e 'Ψ' como lugares do argumento, então este conceito é



[236]

De acordo com Frege, o ancestral forte de uma relação *f* pode ser referido pela expressão "*y* segue-se após *x* na relação *f*"[237]. Embora, a expressão 'seguir-se

234 Novamente, modificamos ligeiramente a definição. Em **4**, na definição do ancestral forte, usamos o símbolo 'S*(a,b)' para facilitar a escrita.

235 Na notação contemporânea:

$Anc_{\alpha\beta}(f(\alpha,\beta))(x,y) \equiv_{def} \forall F\{Her_{\alpha\beta}(F(\beta), f(\alpha,\beta)) \supset (\forall z(f(x,z) \supset Fz) \supset F(y))\}$

ou equivalentemente

$Anc_{\alpha\beta}(f(\alpha,\beta))(x,y) \equiv_{def} \forall F\{[Her_{\alpha\beta}(F(\beta), f(\alpha,\beta)) \wedge \forall z(f(x,z) \supset F(z))] \supset F(y)\}$

236 Em GGA, Frege chama este tipo de conceito de "*unequal-leveled function*": "In order to have an example from analysis, let us consider the first derivative of a function. We regard the function as argument. If we take a particular function, for example $\xi^2$, as argument, then we obtain first another first-level function $2.\xi$; and only if we take an object as argument of this function – for example, the number 3 – do obtain as value an object: the number 6. The first derivative is accordingly to be regarded as a function of two arguments, the first of which must be a first-level function of one argument, the second of which must be an object. On this account we may call it an *unequal-leveled* function of two arguments. From it we obtain a second-level function of one argument if we saturate it with an object-argument, for example, the number 3, I. e., if we determine that the first derivative is to be formed for the argument 3". Em **GGA**, este conceito é "transformado" em um conceito de primeira ordem.

237 "Accordingly, in words (76) can be expressed something like this:
*"If from the two proposiitions, that every result of an application of the procedure f to x has the property F, and that the property F is hereditary in the f-sequence, it can be inferred, whatever F may be, that y has the property F*;
*then I say*:
'*y follows x in the f-sequence*' *or* '*x precedes y in the f-sequence*' '" (**CN**, pág. 174).

após na relação *f*" pareça depender da noção de tempo e, portanto, da intuição temporal, ela é totalmente definível por meio dos primitivos lógicos de **BS**.

A partir da definição ancestral forte, Frege prova o teorema 81 de **BS** que expressa uma indução matemática geral, a partir da qual é possível obter a indução matemática para os números naturais[238 239]:

$$\vdash \begin{array}{l} F(y) \\ Anc_{\alpha\beta}(f(\alpha,\beta)(x_\alpha, y_\beta)) \\ Her_{\alpha\beta}(F(\beta), f(\alpha,\beta)) \\ F(x) \end{array}$$

Outro teorema importante de **BS** é o que afirma a transitividade do ancestral forte de uma relação (teorema 98)[240]:

$$\vdash \begin{array}{l} Anc_{\alpha\beta}(f(\alpha,\beta)(x_\alpha, z_\beta))^{241} \\ Anc_{\alpha\beta}(f(\alpha,\beta)(y_\alpha, z_\beta)) \\ Anc_{\alpha\beta}(f(\alpha,\beta)(x_\alpha, y_\beta)) \end{array}$$

Na definição do ancestral forte, se instanciarmos a relação *f* para a relação

---

238 A indução matemática era considerada como uma inferência puramente matemática, mas, para Frege, sua derivação dentro da conceitografia mostraria seu caráter lógico: "Only by means of this definition of following in a series it is possible to reduce the argument from *n* to (*n*+1), which on face of it is peculiar to mathematics, to the general laws of logic" (**FA**, pág. 93).

239 É necessário instanciar '*x*' para '0' e '*f*' para 'Pred'. Ou seja, Frege precisa dar definições lógicas de '0' e 'Pred'.

240 Além disso, Frege prova a seguinte fórmula (teorema 91):

$$\vdash \begin{array}{l} Anc_{\alpha\beta}(f(\alpha,\beta)(x_\alpha, y_\beta)). \\ f(x,y) \end{array}$$

Ou seja, se *x* encontra-se na relação *f* com *y*, então *y* segue-se após *x* na relação *f*.

241 Na notação contemporânea, o esboço de prova seria assumir que *b* segue-se após *a* na relação *f* e *c* segue-se após *b* na relação *f*, ou seja, para qualquer *F* arbitrária, temos

(1) $(\forall x \forall y(F(x) \wedge f(x,y) \supset F(y)) \wedge \forall x(f(a,x) \supset F(x))) \supset F(b)$

(2) $(\forall x \forall y(F(x) \wedge f(x,y) \supset F(y)) \wedge \forall x(f(b,x) \supset F(x))) \supset F(c)$

Além disso, devemos assumir por hipótese que

(3) $\forall x \forall y(F(x) \wedge f(x,y) \supset F(y)) \wedge \forall x(f(a,x) \supset F(x))$

E devemos mostrar que *F*(*c*). De (1) e (3), derivamos (4) *F*(*b*). De (3), obtemos

(5) $\forall x \forall y(F(x) \wedge f(x,y) \supset F(y))$

Instanciando, obtemos

(6) $F(b) \wedge f(b,y). \supset .F(y)$

Mas, uma vez que temos *F*(*b*), então de (4) e (6), obtemos

(7) $f(b,y). \supset .F(y)$

Generalizando universalmente, obtemos

(8) $\forall x(f(b,x). \supset .F(x))$

De (5), (8) e (2), derivamos *F*(*c*).

de sucessor (entre os números naturais), obtemos o conceito de 'ser maior que' (entre naturais) para o qual a transitividade vale[242].

Com auxílio do ancestral forte, Frege foi capaz de definir

(**c**) Conceito do ancestral fraco de uma relação (fórmula 99)

$$\Vdash \left( \begin{array}{l} \top\, y \equiv x \\ \llcorner\, Anc_{\alpha\beta}(f(\alpha,\beta)(x_\alpha, y_\beta)) \end{array} \right) \equiv Anc^{=}_{\alpha\beta}(f(\alpha,\beta)(x_\alpha, y_\beta))$$

O ancestral fraco também é um conceito de segunda ordem sob o qual caem relações binárias de primeira ordem e objetos. Assumindo que 'ξ', 'ζ' e 'Ψ são lugares de argumento, o conceito é

$$\begin{array}{l} \top\, \zeta \equiv \xi \\ \llcorner\, Anc_{\alpha\beta}(\Psi(\alpha,\beta)(\xi_\alpha, \zeta_\beta)) \end{array}$$ [243]

De acordo com Frege, podemos traduzir o ancestral fraco na linguagem natural por "*y* pertence à série *f* iniciada por *x*"[244]

O ancestral fraco é extremamente importante, pois é a partir deste conceito que Frege irá definir o conceito de número natural. Um objeto *x* qualquer será um número natural se ele pertencer a Pred-série iniciada por 0.

De fato, há indícios que, já em 1879, Frege tinha em mente definir os

---

242 Dados quaisquer três números naturais *x*, *y* e *z*, temos que se *x*<*y* e *y*<*z*, então *x*<*z*.

243 Sem abreviação, isto seria

$$\begin{array}{l} \top\, \zeta \equiv \xi \\ \llcorner \smile^{\mathfrak{F}} \top\, \mathfrak{F}(\zeta) \\ \qquad \llcorner \smile^{\mathfrak{a}} \top\, \mathfrak{F}(a) \\ \qquad\qquad \llcorner\, f(\xi, \mathfrak{a}) \\ \qquad \llcorner\, Her_{\alpha\beta}(\mathfrak{F}(\beta), \Psi(\alpha,\beta)) \end{array}$$

De fato, eliminando '$Her_{\alpha\beta}(F(\beta), f(\alpha,\beta))$', o conceito é

$$\begin{array}{l} \top\, \zeta \equiv \xi \\ \llcorner \smile^{\mathfrak{F}} \top\, \mathfrak{F}(\zeta) \\ \qquad \llcorner \smile^{\mathfrak{a}} \top\, \mathfrak{F}(a) \\ \qquad\qquad \llcorner\, \Psi(\xi, \mathfrak{a}) \\ \qquad \llcorner \smile^{\mathfrak{b}} \smile^{\mathfrak{a}} \top\, \mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \\ \qquad\qquad\qquad \llcorner\, \Psi(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) \\ \qquad\qquad \llcorner\, \mathfrak{F}(\mathfrak{b}) \end{array}$$

244 Ou, então, poderíamos dizer que "ou *y* segue-se após *x* na relação *f* ou *y* é igual a *x*".

naturais desta forma. Por exemplo, no artigo "*Applications of the Conceptual Notation*" (1879), ele escreveu:

> By
>
> $$Anc^{=}_{\gamma\beta}(f(\gamma,\beta)(x_\gamma,y_\beta))$$[245]
>
> I signify that *y* belongs to the *f*-sequence beginning with *x*. According to the more general conception of function that I took as a basis [for my "conceptual notation"], we can read
>
> $$u+1=v$$
>
> as a function of *u* and *v* and can therefore view it as a particular case of *f*(*u*,*v*). Accordingly
>
> $$Anc^{=}_{\gamma\beta}(0_\gamma+1=a_\beta)$$
>
> means that *a* belongs to the sequence which begins with 0 and arises from a constant increase by 1, namely
>
> 0,1,2,3,4,....
>
> Hence, *a* is a positive whole number.
>
> $$Anc^{=}_{\gamma\beta}(0_\gamma+1=a_\beta)$$
>
> is therefore the expression for the circumstance that *a* is a positive whole number (**CN**, pp. 204-5)[246].

Como mencionamos, há uma relação entre **MC** e **BS**. A passagem acima confirma isto. Não obstante, Frege não poderia ser bem-sucedido no seu projeto se ele não pudesse mostrar que '0' e '*x*+1=*y*' são definidos sem recurso a intuição (de forma lógica).

Ademais, o pensamento de Frege sofreu mudanças entre 1874 e 1879. Se Frege tivesse seguido o seu projeto inicial, os números naturais seriam todos os objetos que pertenceriam à Pred-série iniciada pelo número 1. Contudo, neste caso, Frege seria incapaz de provar o teorema que todo número natural tem um sucessor[247]. A mudança na definição é significativa.

Finalmente, Frege define

(**d**) o conceito de uma relação ser funcional ou muitos-para-um (fórmula 115)

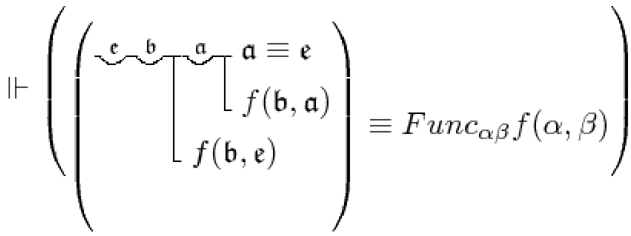
---

245 Modificamos o símbolo de Frege aqui.

246 Em Frege (1979, pág. 22), há a seguinte passagem: "4 is a positive whole number (including 0). That is, 4 belongs to the series beginning with 0, in which the immediate successor of any member is obtained by adding 1*.

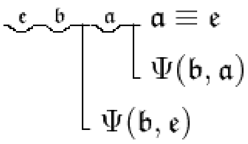
$$\vdash Anc^{=}_{\gamma\beta}(0_\gamma+1=4_\beta)$$"

247 Na verdade, Frege teria problemas em encontrar um conceito puramente lógico a partir do qual 1 seria o número deste conceito. Certamente, ele teria problemas para definir a relação de sucessor também.



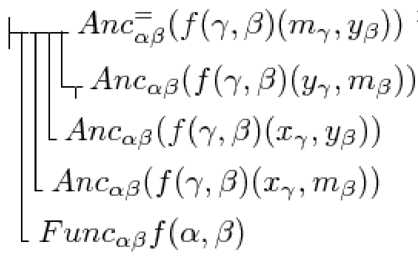
[248]

O conceito de ser funcional é de segunda ordem, sob o qual caem relações binárias de primeira ordem. Sendo 'Ψ' o lugar do argumento, o conceito é



Este conceito é importante, porque Frege deseja provar que a relação “sucessor” é funcional, isto que dizer que dado um número natural qualquer *a*, ele terá um e somente um sucessor[249].

A partir do conceito de ser funcional (junto com os demais conceitos), Frege prova em **BS**, por exemplo, a seguinte fórmula (133), que inicialmente poderia ser pensada como dependente da intuição



[250]

Se '*f*' for instanciada para a relação '*sucessor*', poderemos eliminar (*modus*

248 Fórmula 115.

249 O conceito de de uma relação ser funcional e também o conceito de uma função ser um-para-muitos desempenham um papel fundamental na prova que todo número natural tem um sucessor a partir de **PH** (veja **4**).

250 “It is impossible, therefore, for any premiss to creep into a proof without being noticed. In this way I have, without borrowing any axiom from intuition, given a proof of a proposition* which at sight be taken for synthetic, which I shall here formulate as follows:
If the relation of every member of a series to its successor is (one- or) many-one, and if *m* and *y* follows in that series after *x*, then either *y* comes in that series before *m*, or it coincides with *m*, or it follows after *m*” (**FA**, pág. 103).

*ponens*) o último antecedente, obtendo o seguinte: se *m* e *y* forem maiores que *x*, então *y* será maior que *m* ou *y* será igual a *m* ou *m* será maior *y*.

Há um último ponto que gostaríamos de mencionar. Em **BS**, Frege não tem uma teoria formal de definição[251], mas todas as definições de **BS** são explícitas e satisfazem os critérios de eliminabilidade[252] e não-criatividade[253]. Frege parecia ter consciência deste fato:

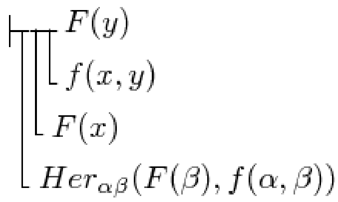
> Now if (69) were a synthetic judgement, the propositions derived from it would be synthetic. But we can do without the symbols introduced by the sentences, and thus the sentence itself as their definition: nothing follows from it which could not also be inferred without it. The only aim of such definitions is to bring about extrinsic simplification by the establishment of an abbreviation (**CN**, pág. 168).

O símbolo introduzido pela definição não deve conter símbolos cujos significados já sejam conhecidos:

> This sentence is different from those considered previously since symbols occur in it which have not been define before (**CN**, pág. 167).

Como mencionado, as definições de **BS** podem ser completamente eliminadas por meio de 58BS ou 27BS. Por exemplo, Frege prova a seguinte fórmula

(72BS)



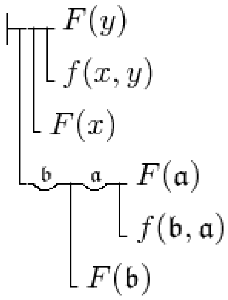

Eliminando o símbolo definido, isto é equivalente a (72BS*)

---

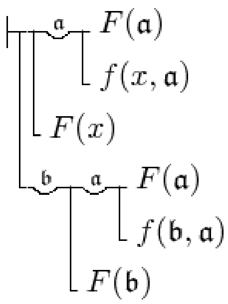
251 Cf. **BLA**, §§26-33.

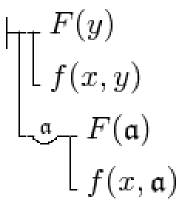
252 Critério da Eliminabilidade: Uma fórmula **P** que introduz um novo símbolo em uma teoria satisfaz o critério de eliminabilidade se e somente se sempre que $\mathbf{P_1}$ é uma fórmula na qual o novo símbolo ocorre, então há uma fórmula $\mathbf{P_2}$ na qual o novo símbolo não ocorre tal que $\mathbf{P \rightarrow (P_1 \leftrightarrow P_2)}$ é derivável dos axiomas e definições que já existiam na teoria

253 Critério da não-Criatividade: Uma fórmula **P** que introduz um novo símbolo em uma teoria satisfaz o critério de não-criatividade se e somente se não existe nenhuma fórmula **S** na qual o novo símbolo não ocorra tal que $\mathbf{P \rightarrow S}$ é derivável dos axiomas e definições dadas, mas **S** não é derivável.



Por meio das seguintes instâncias de 58BS

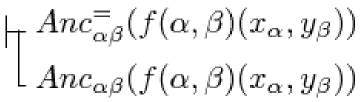




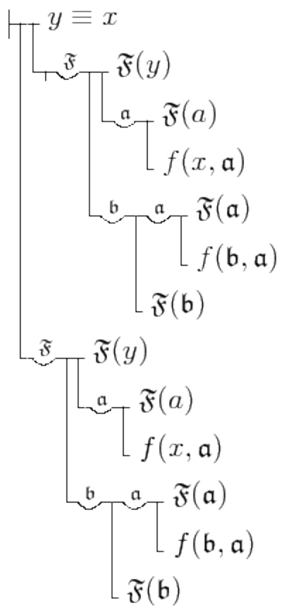
e transitividade do condicional, obtemos (72BS*).

27BS pode ser usado para eliminar os símbolos definidos na fórmula (106) de **BS**

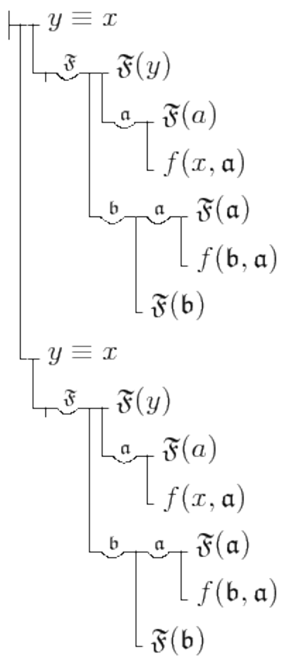
(106)



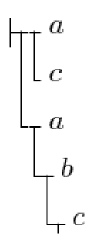
Eliminando os símbolos definidos, esta fórmula é equivalente a(106*)



Usando a seguinte instância de 27BS



e a seguinte fórmula (37BS),



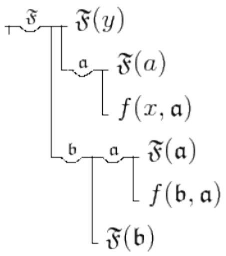
obtemos (106*)[254].

Esta pequena apresentação do caráter das definições de **BS** foi necessária, porque Frege parece considerar em **GLA** a possibilidade de introduzir definições que não são meramente estipulativas, que é o caso do **PH**[255]. E, se nossa hipótese estiver correta, este foi o procedimento de Frege no livro mencionado na carta a Marty.

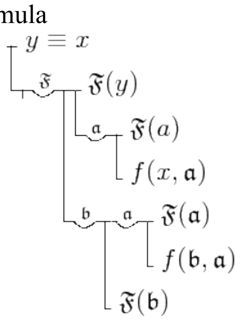


---

254 Substitua '*c*' pela fórmula



'*b*' pela fórmula '$y \equiv x$' e '*a*' pela fórmula



255 No escrito póstumo "*Logic*", há um sumário sobres os temas que seriam discutidos. Um destes é sobre a definição de objetos: "E. Definition of objects.
Indirect by means of concepts. *Direct. Judgements in which something is recognized as the same again*
Improper existential judgements" (Frege, 1979, pág. 1). A definição de objetos a partir de juízos nos quais algo é reconhecido como o mesmo novamente é o tipo de definição do qual **PH** é uma instância.