

4

Difeomorfismos estáveis são Morse-Smale

A demonstração de que todo difeomorfismo estável do círculo é Morse-Smale será dada via contra-positiva. Isto é, queremos mostrar que se um difeomorfismo não é Morse-Smale então ele não pode ser estável. Existem duas possibilidades para um difeomorfismo do círculo não ser Morse-Smale. A primeira é ter número de rotação irracional. A segunda, possuir um ponto fixo (ou periódico) não-hiperbólico. O *Closing Lemma* (provado a seguir) nos garante que toda função com número de rotação irracional não pode ser estável, portanto restará avaliar os casos em que o difeomorfismo f possui um ponto não-hiperbólico.

Vale observar que este problema poderia ser tratado com menos esforços se utilizarmos ferramentas mais sofisticadas como o teorema de Thom, transversalidade ou o teorema de Weierstrass sobre aproximações polinomiais adaptado às aplicações do círculo. No entanto um dos objetivos neste trabalho é apresentar as demonstrações da forma mais acessível possível, e portanto evitaremos o uso de ferramentas que fogem do domínio das matérias mais elementares.

O principal artifício utilizado neste capítulo é a construção de uma perturbação de f (que não é Morse-Smale) de forma a criar uma função que não é topologicamente conjugada a f , porém é tão próxima de f quanto se queira (na métrica C^1). Para construirmos tais perturbações utilizaremos uma função auxiliar denominada “bump function”, que possibilita alterar uma função apenas numa vizinhança de um ponto e ainda manter a suavidade da função (isto é, se f é C^r , a perturbação de f será C^r). Podemos fazer ainda com que esta perturbação seja localmente uma pequena translação. Isto é, para algum intervalo I , a função perturbada restrita a I será da forma $f + \epsilon$, onde ϵ é uma constante positiva. A seguir veremos passo a passo como fazer isto.

Consideremos a função $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$B(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Observe que $B'(0) = 0$, e $B^{(n)}(0) = 0$ (o que pode ser verificado

facilmente por indução). Portanto B é uma função de classe C^∞ . Essa é uma propriedade muito útil, já que a soma de funções C^r é também C^r , e portanto podemos usar a bump function para perturbar as funções sem nos preocuparmos com a perda de suavidade. Observe também que B é uma função limitada: $0 \leq B(x) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Dado um intervalo (a, b) , considere a função $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por: $C(x) = B(x-a) B(b-x)$. Esta função é claramente C^∞ e tal que $C(x) = 0$ se $x \leq a$ ou $x \geq b$, e $0 < C(x) < 1$ para $x \in (a, b)$. Seu gráfico está ilustrado na figura 4.2, onde foi considerado $a = 0$ e $b = 1$. Esta função está bem próxima do que queremos. Ela permite alterar localmente qualquer função sem perder suavidade. Mas para criar uma pequena translação local é preciso alguns passos a mais.

Seja $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida como:

$$D(x) = \frac{\int_{-\infty}^x C(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} C(t) dt}$$

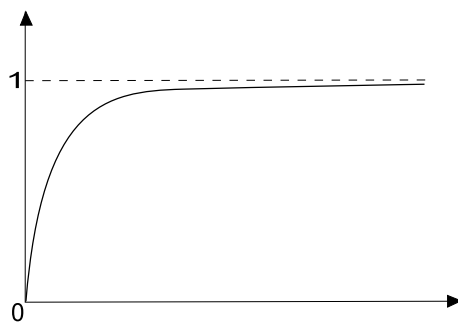
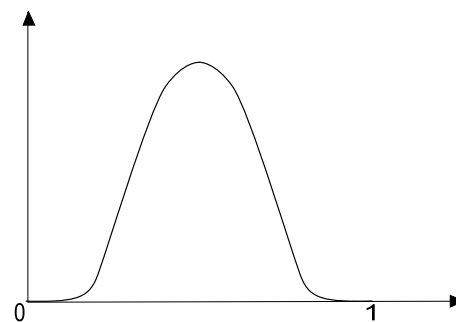
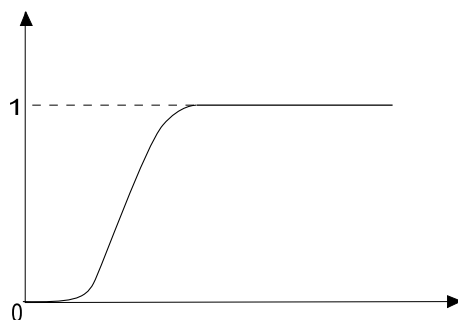
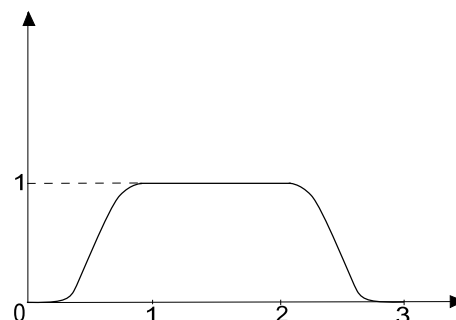
Sendo assim, $D(x) = 0$ para $x \leq a$ e $D(x) = 1$ para $x \geq b$ (veja figura 4.3). Repare que o denominador é uma constante, e portanto a função ao ser derivada resulta nesta constante multiplicada por $C(x)$. Isso nos mostra que D é uma função C^∞ tal que $D^{(r)}(a) = D^{(r)}(b) = 0$ para todo $r \in \mathbb{N}$. Este fato nos permite “emendar” uma função com uma função constante, como será mostrado a seguir.

Dado $c > b$, considere a função $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$\phi(x) = \begin{cases} D(x) & \text{se } x < b \\ 1 & \text{se } b \leq x \leq c \\ D(c+b-x) & \text{se } x > c \end{cases}$$

A função ϕ (figura 4.4) permite alterar um difeomorfismo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ apenas no intervalo $(a, a+c)$ colocando-se $f_\epsilon(x) = f(x) + \epsilon \cdot \phi(x)$. Em (b, c) a perturbação corresponde a uma translação. Observe que a função ϕ tal como foi definida é uma função C^∞ .

Se f é um difeomorfismo de S^1 , então seu levantamento F é um difeomorfismo de $\mathbb{R}$. Como $F'(x)$ é uma função periódica de período 1, $F'(x)$ atinge seu valor mínimo e máximo em $[0, 1]$. Sendo assim podemos tomar ϵ suficientemente pequeno de forma que, se $F'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $F'_\epsilon(x) = F'(x) + \epsilon \cdot \phi'(x) > 0$, e portanto F_ϵ será ainda um difeomorfismo de $\mathbb{R}$ (de forma análoga se $F'(x) < 0$). Daqui em diante sempre que falarmos em C^1 - ϵ -proximidade ficará subentendido que ϵ é suficientemente pequeno para que a perturbação seja ainda um difeomorfismo.

Figura 4.1: $B(x)$ Figura 4.2: $C(x)$ Figura 4.3: $D(x)$ Figura 4.4: $\phi(x)$

Observação: Não definimos bump functions no conjunto S^1 . Mas sua construção é análoga à construção de funções na reta. Basta considerar um levantamento F de f , construir uma bump function no levantamento F de forma idêntica em cada intervalo de $\pi^{-1}([a, b])$, e depois voltar para f pela projeção π .

Proposição 4.1 (Closing Lemma) *Dado $\epsilon > 0$ e uma aplicação $f \in \text{Diff}_+^k(S^1)$, existe um difeomorfismo C^r - ϵ -próximo de f com número de rotação racional (isto é, que possui pelo menos um ponto periódico).*

Prova. Se f tem número de rotação racional a proposição é trivial, já que o difeomorfismo a que se refere o enunciado pode ser a própria f . O caso interessante é tomando a hipótese do número de rotação irracional.

Neste caso, podemos escolher um ponto recorrente $\theta \in S^1$ de f (veja corolário 1.24). Pela recorrência de θ , sabemos que $O^+(\theta)$ se acumula em θ pela direita ou pela esquerda (possivelmente ambos). Vamos supor que ela se acumule pela esquerda (o outro caso segue de forma semelhante) e tomemos uma sequência $f^{n_i}(\theta) \rightarrow \theta_-$.

Escolhamos um levantamento F de f de forma a termos $F(x) > x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Isto é, o levantamento F está estritamente acima da identidade.

Queremos alterar a nossa função de forma que a órbita de um ponto x_0 (onde $\pi(x_0) = \theta$) seja uma órbita periódica.

Considere a perturbação $G_\epsilon(x) = F(x) + \epsilon$ dada por uma pequena translação do gráfico de F por um valor positivo ϵ . Ou seja, G_ϵ é o levantamento de uma função g_ϵ dada pela composição de f com uma rotação. Assim, temos:

$$\begin{aligned} G_\epsilon(x_0) &= F(x_0) + \epsilon \\ G_\epsilon^2(x_0) &= F(F(x_0) + \epsilon) + \epsilon > F^2(x_0) + \epsilon \\ G_\epsilon^3(x_0) &> F(F^2(x_0) + \epsilon) + \epsilon > F^3(x_0) + \epsilon \\ &\vdots \\ G_\epsilon^n(x_0) &> F^n(x_0) + \epsilon \end{aligned}$$

Pela recorrência do ponto θ , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que: $0 < \theta - f^{n_k}(\theta) < \epsilon$. Conseqüentemente, existe um inteiro m tal que $0 < (x_0 + m) - F^{n_k}(x_0) < \epsilon$. Segue então:

$$G_\epsilon^{n_k}(x_0) > F^{n_k}(x_0) + \epsilon > x_0 + m$$

De forma resumida, temos:

$$G_\epsilon^{n_k}(x_0) > x_0 + m > F^{n_k}(x_0) = G_0^{n_k}(x_0)$$

Este n_k está fixo, e a função G_ϵ (e conseqüentemente $G_\epsilon^{n_k}$) depende continuamente de ϵ . Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, existe algum $0 < \epsilon_0 < \epsilon$ com $G_{\epsilon_0}^{n_k}(x_0) = x_0 + m$. Assim, teremos que G_{ϵ_0} é o levantamento de uma função g_{ϵ_0} C^r - ϵ -próxima de f com $g_{\epsilon_0}^{n_k}(\theta) = \theta$.

O *Closing-Lemma* mostra que apenas transformações com número de rotação racional podem ser estruturalmente estáveis. Logo, toda transformação estruturalmente estável terá que ter pontos fixos ou periódicos. Para concluirmos que estas transformações são de fato Morse-Smale temos que mostrar que todo ponto fixo ou periódico é hiperbólico. Vamos então considerar a partir de agora apenas transformações f que possuem pelo menos um ponto fixo ou periódico não-hiperbólico e construiremos perturbações arbitrariamente pequenas que não são conjugadas a f . Isso é suficiente para concluirmos que a existência de pontos não-hiperbólicos impossibilita a estabilidade estrutural, e portanto apenas os Morse-Smale poderão ser estruturalmente estáveis.

A primeira possibilidade a ser considerada é o caso de f ser localmente igual a identidade. Isto é, existe um intervalo $I \subset S^1$ tal que $f(x) = x$ se $x \in I$.

Proposição 4.2 *Seja $f \in \text{Diff}^1(S^1)$ tal que $f(x) = x$ para todo $x \in J = (a, b)$. Dado $\epsilon > 0$ existe uma perturbação $\tilde{f}$ C^1 - ϵ -próxima de f , tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in J$ e $\tilde{f}(x) = f(x)$ se $x \notin J$.*

Prova. Seja $\phi : S^1 \rightarrow S^1$ uma bump function tal que $0 < \phi(x) < 1$ para $x \in J$, e $\phi(x) = 0$ se $x \notin J$. Seja M tal que $|\phi'(x)| \leq M$ para todo $x \in S^1$. Podemos assumir que $M > 1$. Defina $\tilde{f} : S^1 \rightarrow S^1$ dada por:

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \frac{\epsilon \cdot \phi(x)}{M}$$

Logo:

$$|\tilde{f}(x) - f(x)| \leq \left| \frac{\epsilon \cdot \phi(x)}{M} \right| \leq \frac{\epsilon}{M} \leq \epsilon$$

$$|\tilde{f}'(x) - f'(x)| \leq \left| \frac{\epsilon \cdot \phi'(x)}{M} \right| \leq \epsilon$$

Se $x \notin J$ temos $\phi(x) = 0$, e portanto $\tilde{f}(x) = f(x)$.

Se $x \in J$ temos $\phi(x) > 0$ e $f(x) = x$. Logo $\tilde{f}(x) = x + \frac{\phi(x)}{M} \neq x$.

Proposição 4.3 *Seja $f \in \text{Diff}_+^1(S^1)$. Dado $\epsilon > 0$, Existe uma perturbação $\tilde{f}$ C^1 - ϵ -próxima de f , tal que $\tilde{f}$ não possui nenhum intervalo de pontos fixos.*

Prova. Se f não possui intervalos de pontos fixos nada há para demonstrar. Observe que na proposição anterior consideramos um intervalo $J \subset S^1$ com $f|_J = \text{id}$. Porém essa condição pode ocorrer em vários outros intervalos de S^1 . Seja M o conjunto de intervalos de pontos fixos não degenerados mutuamente disjuntos da aplicação f . Como podemos associar a cada intervalo de pontos fixos um racional em seu interior, isso induz uma injeção entre M e $\mathbb{Q}$. Na pior das hipóteses teremos então uma quantidade enumerável de intervalos de pontos fixos, digamos $M = \{I_1, I_2, I_3, \dots\}$. Queremos alterar nossa aplicação original em todos os intervalos de M e obter no final uma aplicação C^1 - ϵ -próxima de f . Se alterarmos passo a passo cada intervalo I_k usando a C^1 - ϵ -proximidade dada pela proposição anterior, teremos uma convergência pontual para uma função a qual não podemos garantir ser C^1 . Portanto, usaremos um artifício adicional para garantir uma convergência uniforme.

Seja f_1 uma aplicação C^1 - ϵ -próxima à f dada pela proposição anterior, onde alteramos apenas no intervalo I_1 . Seja f_2 uma aplicação C^1 -($\epsilon/2$)-próxima à f_1 dada pela proposição anterior, onde alteramos apenas no intervalo I_2 (observe que f_2 será ainda C^1 - ϵ -próxima à f , pois I_1 e I_2 são disjuntos). Seja f_3 uma função C^1 -($\epsilon/3$)-próxima à f_2 dada pela proposição anterior, onde

alteramos apenas no intervalo I_3 (observe que f_3 será ainda C^1 - ϵ -próxima à f , pois I_1 , I_2 e I_3 são disjuntos).

Continuamos essa construção obtendo uma seqüência de aplicações $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$, de forma que f_k corresponde a alteração C^1 - (ϵ/k) -próxima à f_{k-1} no intervalo I_k dada pela proposição anterior. Observe que para todo ponto $x \in S^1$ existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que $f_k(x) = f_{k+1}(x)$ para todo $k \geq N$. Portanto temos convergência pontual: isto é, podemos definir $\tilde{f}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ para todo $x \in S^1$. Pela forma como foram definidos os f_k 's, tal convergência é também uniforme na norma C^1 . Sendo assim, $\tilde{f}$ é uma aplicação C^1 e C^1 - ϵ -próxima à f . Claramente, $\tilde{f}$ não possui intervalos de pontos fixos.

Assim como foi possível “destruir” os intervalos de pontos fixos com pequenas perturbações, mostraremos a seguir que para qualquer transformação que possui um ponto fixo não-hiperbólico podemos “criar” intervalos de pontos fixos com pequenas perturbações. Isso nos mostra o quão flexível é a estrutura do conjunto de pontos fixos para transformações que possuem pontos fixos não-hiperbólicos.

Proposição 4.4 *Dado um ponto fixo p não-hiperbólico de um difeomorfismo $f \in \text{Diff}_+^1(S^1)$, podemos perturbar f de forma a termos localmente (numa vizinhança de p) a identidade ($f(x) = x$).*

Prova. Considere os intervalos $I_\alpha = [p - \alpha, p + \alpha] \subset I_\beta = [p - \beta, p + \beta]$. Defina uma bump function $\phi : S^1 \rightarrow S^1$ tal que $\phi(x) = 1$ se $x \in I_\alpha$ e $\phi(x) = 0$ se $x \notin I_\beta$. Seja M tal que $|\phi'(x)| \leq M$ para todo $x \in S^1$. Dado $\delta > 0$, considere o intervalo $I_\delta = [p - \delta, p + \delta]$ e a função linear $L_\delta : I_\delta \rightarrow I_\beta$ dada por:

$$L_\delta(x) = \frac{(x - p) \cdot \beta}{\delta} + p$$

Defina agora $\phi_\delta : I_\delta \rightarrow S^1$ como: $\phi_\delta(x) = \phi \circ L_\delta(x)$.

Esta função satisfaz as seguintes propriedades:

1. $|\phi_\delta(x)| \leq 1$.
2. $|\phi'_\delta(x)| \leq \frac{M \cdot \beta}{\delta}$ para todo $x \in I_\delta$.
3. Para todo $x \in L_\delta^{-1}(I_\alpha)$ teremos $\phi_\delta(x) = 1$.
4. $\phi_\delta(p - \delta) = \phi_\delta(p + \delta) = 0$
5. $\phi'_\delta(p - \delta) = \phi'_\delta(p + \delta) = 0$

Agora usaremos ϕ_δ para criar uma perturbação $\tilde{f}$ de f da seguinte forma:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) + (x - f(x)) \phi_\delta(x) & \text{se } x \in I_\delta \\ f(x) & \text{se } x \notin I_\delta \end{cases}$$

Segue das propriedades 4) e 5) que $\tilde{f}$ e $\tilde{f}'$ são contínuas.

Como $f'(p) = 1$ e $f(p) = p$, dado $\epsilon > 0$ podemos escolher δ suficientemente pequeno satisfazendo:

$$|f'(x) - 1| < \epsilon/2 \quad \text{e} \quad |f(x) - x| < \epsilon/2 \quad \text{para todo } x \in I_\delta.$$

Portanto $|\tilde{f}(x) - f(x)| = (x - f(x)) \phi_\delta(x) \leq \epsilon/2$ para todo $x \in S^1$.

Da fórmula de Taylor temos que:

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x - p) + r(x) = x + r(x) \quad \text{onde} \quad \lim_{x \rightarrow p} \frac{r(x)}{x - p} = 0$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - x}{x - p} = 0$$

Escolhendo δ suficientemente pequeno teremos ainda:

$$\frac{f(x) - x}{x - p} < \frac{\epsilon}{2M\beta} \quad \text{para todo } x \in I_\delta$$

Pela propriedade 2), para todo $x \in I_\delta$ vale:

$$|(x - f(x)) \phi_\delta'(x)| \leq \left| \frac{(x - f(x))M\beta}{\delta} \right| \leq \left| \frac{(x - f(x))M\beta}{x - p} \right| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad (*)$$

Claramente $\tilde{f}'(x) = f'(x)$ para todo $x \notin I_\delta$. Derivando $\tilde{f}$ em I_δ temos:

$$\tilde{f}'(x) = f'(x) + (x - f(x)) \cdot \phi_\delta'(x) + (1 - f'(x)) \phi_\delta(x)$$

Consequentemente,

$$|\tilde{f}'(x) - f'(x)| \leq |(x - f(x)) \phi_\delta'(x)| + |(1 - f'(x)) \phi_\delta(x)| \leq \epsilon$$

Assim, $\tilde{f}$ é uma aplicação C^1 - ϵ -próxima à f .

Como $\phi_\delta(x) = 1$ para todo $x \in L_\delta^{-1}(I_\alpha)$, teremos neste intervalo $\tilde{f}(x) = x$.

Corolário 4.5 *Se $f \in \text{Diff}_+^1(S^1)$ possui um ponto fixo não-hiperbólico, então f não é C^1 -estruturalmente estável.*

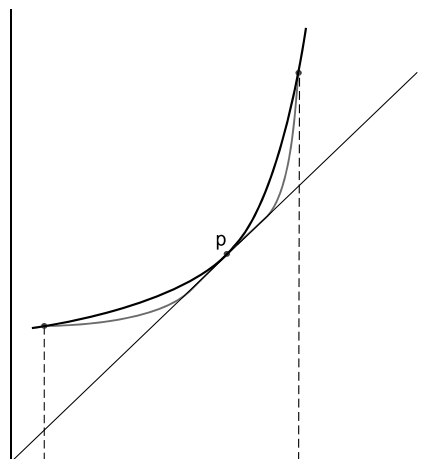


Figura 4.5: Perturbação localmente igual a identidade numa vizinhança de um ponto fixo não-hiperbólico.

Prova. Se $Fix(f)$ tem interior vazio, a proposição anterior nos diz que podemos obter uma aplicação arbitrariamente próxima à f e com um intervalo de pontos fixos. Se $Fix(f)$ não tem interior vazio a proposição 4.3 nos mostra como perturbarmos a f de forma a obtermos uma aplicação sem intervalos de pontos fixos (e portanto seu conjunto de pontos fixos terá interior vazio). Uma vez que conjugação topológica preserva a cardinalidade de $Fix(f)$, vemos que não existe ϵ tal que, para toda aplicação C^1 - ϵ -próxima de f temos conjugação topológica. Isto é, f não é estruturalmente estável.

Isso conclui nosso objetivo para o caso em que f possui pontos fixos e preserva orientação. Agora queremos generalizar este resultado para o caso em que nosso difeomorfismo possui pontos periódicos de período qualquer e preserva orientação. As demonstrações são semelhantes e muito do que já foi feito será aproveitado.

Se p é um ponto periódico de um difeomorfismo f , então $O(p)$ é um conjunto finito. Pela continuidade de f podemos escolher uma vizinhança U de p tal que $\{f^k(U)\}_{k \in \{0, \dots, n-1\}}$ sejam mutuamente disjuntos. Assim, se alterarmos f somente no intervalo $f^{n-1}(U)$ obtendo uma função $\tilde{f}$, teremos $\tilde{f}^n(x) = \tilde{f}(f^{n-1}(x))$ para todo ponto $x \in U$. Essa será a idéia central em todas as demonstrações, tanto neste capítulo como no capítulo 5, para abordar o caso de pontos periódicos.

Proposição 4.6 *Dado um ponto periódico p não-hiperbólico (de período $n > 1$) de um difeomorfismo $f \in Diff_+^1(S^1)$, podemos perturbar f de forma a*

termos localmente (numa vizinhança de p) um intervalo de pontos periódicos.

Prova. Seja I um intervalo aberto contendo p tal que $I, f(I), \dots, f^{n-1}(I)$ são mutuamente disjuntos. Seja ϕ uma perturbação C^1 de f^n tal que $\phi = f^n$ fora de I e $\phi(x) = x$ numa vizinhança de p (dada pela proposição 4.4).

Seja $\tilde{f}$ definida por:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f^{-n+1} \circ \phi(x) & \text{se } x \in I \\ f(x) & \text{se } x \notin I \end{cases}$$

Dado $\epsilon > 0$, se ϕ for suficientemente próximo a f^n teremos que $\tilde{f}$ é C^1 - ϵ -próximo a f .

Para todo ponto $x \in J$ temos :

$$\tilde{f}^n(x) = \tilde{f}^{n-1}(\tilde{f}^{-n+1}(\phi(x))) = \tilde{f}^{n-1}(f^{-n+1}(x))$$

Mas $f^k(x) \notin I$ para todo $k \in \{-n+1, -n+2, \dots, -1\}$, logo

$$\tilde{f}^{n-1}(f^{-n+1}(x)) = f^{n-1}(f^{-n+1}(x)) = x$$

Portanto J é um intervalo de pontos periódicos de $\tilde{f}$.

Proposição 4.7 *Se $f \in \text{Diff}_+^1(S^1)$ possui um intervalo de pontos periódicos, então para todo $\epsilon > 0$ existe uma aplicação C^1 - ϵ -próxima à f sem intervalos de pontos periódicos.*

Prova. Suponha que f tenha um intervalo não degenerado $[a, b]$ de pontos periódicos de período $n > 1$. Vamos supor que $f([a, b]) \cap [a, b] = \emptyset$. Caso contrário ou $c = f(a) \in [a, b]$ ou $d = f(b) \in [a, b]$. Conforme for o caso tome $[a, c - \epsilon]$ ou $[d + \epsilon, b]$ com um ϵ arbitrariamente pequeno.

Sendo assim, os conjuntos $\{f^k([a, b])\}_{k \in \{0, \dots, n-1\}}$ são mutuamente disjuntos. Como visto anteriormente, podemos acrescentar uma bump function no intervalo $[a, b]$ de forma a obtermos uma nova função f_1 que seja um difeomorfismo C^1 - ϵ -próximo de f . Afirmamos agora que em (a, b) não existe nenhum ponto periódico para f_1 . De fato, dado $x \in (a, b)$ temos $f_1(x) > f(x)$. Observe que fora de (a, b) temos $f_1 = f$. Portanto $f_1^n(x) = f^{n-1}(f_1(x)) = f^{-1}(f_1(x))$ para todo $x \in [a, b]$. Como $f_1 > f$ em (a, b) , segue que $f^{-1}(f_1(x)) \neq x$ (caso contrário, aplicando f dos dois lados teríamos $f_1(x) = f(x)$). Portanto $f_1^n(x) \neq x$ para todo $x \in (a, b)$.

Agora afirmamos que todo intervalo fechado de pontos periódicos de f_1 , digamos I , é tal que $f(I) \cap I = \emptyset$. De fato, caso contrário teríamos $f^{k+1}(I) \cap f^k(I) \neq \emptyset$ para todo $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Logo, o conjunto

$J = \bigcup_{k=0}^{n-1} f^k(I)$ seria um intervalo fechado invariante por f . Mas $J \neq S^1$, pois todo ponto de J é periódico e em (a, b) não existem pontos periódicos. Portanto J é um intervalo próprio de S^1 e consequentemente deve existir algum ponto fixo de f em J , absurdo.

Assim, podemos repetir a demonstração para outros intervalos de pontos fixos de f_1 sem alterarmos seu tamanho.

Tal como argumentado para o caso de pontos fixos (veja a proposição 4.3) existe uma quantidade enumerável de intervalos de pontos periódicos não degenerados mutuamente disjuntos. Um argumento idêntico ao feito neste corolário nos permite concluir que existe uma função C^1 - ϵ -próxima à f sem intervalos de pontos periódicos.

Observação: Nesta proposição não apenas eliminamos os intervalos de pontos periódicos como também eliminamos todo ponto periódico em seu interior. Esse fato será importante mais adiante (proposição 5.5), onde queremos garantir que podemos obter uma perturbação que possui apenas uma quantidade finita de pontos periódicos não-hiperbólicos.

Proposição 4.8 *Se $f \in \text{Diff}_+^1(S^1)$ é um difeomorfismo estruturalmente estável então f é um difeomorfismo Morse-Smale.*

Prova. Pelo Closing Lemma, f tem que ser conjugado a uma aplicação com número de rotação racional. Portanto f possui pontos periódicos. Suponha que f possua algum ponto periódico não-hiperbólico. Se $\text{Per}(f)$ tem interior não vazio, então a proposição anterior nos diz que arbitrariamente próximo de f existem aplicações cujo conjunto de pontos periódicos tem interior vazio. Se $\text{Per}(f)$ tem interior vazio, a proposição 4.6 nos diz que arbitrariamente próximo de f existem aplicações com conjunto de pontos periódicos com interior não vazio. Qualquer que seja o caso chegamos num absurdo, pois conjugação topológica preserva a estrutura topológica do conjunto $\text{Per}(f)$. Portanto todo ponto periódico de f é hiperbólico. Como pontos hiperbólicos são isolados e S^1 é compacto, concluímos que existe apenas uma quantidade finita (e positiva) de pontos periódicos. Em suma, f é um difeomorfismo Morse-Smale.