2
Hiperbolicidade e estabilidade

Neste capítulo serão apresentados dois novos conceitos que são centrais neste trabalho: Estabilidade estrutural e difeomordfismos Morse-Smale. Para isso, será necessário introduzir dois igredientes fundamentais: Hiperbolicidade e conjugação topológica.

Iniciaremos com uma breve análise do que acontece com as iterações de uma aplicação numa vizinhança de um ponto fixo ou ponto periódico. Estes pontos podem ser de dois tipos : hiperbólicos ou não-hiperbólicos. Veremos mais adiante que a estabilidade de um difeomorfismo está muito relacionada a hiperbolicidade de seus pontos fixos ou periódicos.

Definição 2.1 *Seja f um difeomorfismo e x um ponto fixo de f. Dizemos que x é um ponto fixo* hiperbólico *se $|f\,'(x)| \neq 1$. Se $|f\,'(x)| < 1$ dizemos que este ponto fixo é um* atrator*, e se $|f\,'(x)| > 1$ dizemos que é um ponto fixo* repulsor*. Se x é um ponto periódico de período n, dizemos que x é ponto periódico hiperbólico (atrator ou repulsor) se x é ponto fixo hiperbólico (atrator ou repulsor) de f^n. Um ponto fixo (ou periódico) com derivada igual a 1 ou -1 é dito* não-hiperbólico.

Definição 2.2 *Usualmente falaremos sobre pontos periódicos* isolados*. Estará sempre subentendido nesta denominação que este ponto é isolado relativo ao conjunto $Per(f)$.*

Assim como classificamos os pontos fixos hiperbólicos em dois tipos (repulsores e atratores), podemos também classificar os pontos fixos não-hiperbólicos isolados de maneira semelhante.

Definição 2.3 *Dizemos que um ponto fixo p não-hiperbólico de um difeomorfismo f que preserva orientação é* atrator fraco *se existe uma vizinhança V de p tal que, para todo $x \in V$, temos: $f(x) > x$ se $x < p$, e $f(x) < x$ se $x > p$. Se p é um atrator fraco de f^{-1} dizemos que p é um* repulsor fraco *de f.*

Pode acontecer também de numa vizinhança do ponto fixo p termos $f(x) < f(p)$ para todo x nesta vizinhança (exceto em p). Isso significa que o *gráfico de f está localmente todo (exceto em p) abaixo do gráfico da identidade. Neste caso o ponto p é chamado* repulsor-atrator fraco. *Outra possibilidade é existir uma vizinhança do ponto p onde o gráfico fique todo acima do gráfico da identidade (exceto em p). Neste caso p é chamado* atrator-repulsor fraco.

Para um difeomorfismo que inverte orientação, chamamos um ponto fixo não-hiperbólico p de atrator (repulsor, atrator-repulsor ou repulsor-atrator) fraco se p o for para f^2.

Observe que nem todo ponto fixo não-hiperbólico é isolado (tome como exemplo a identidade). Assim, podemos ter pontos que não se enquadram em nenhuma das quatro descrições acima.

Os nomes "atrator" e "repulsor" atribuídos aparentemente sem nenhum motivo nas definições acima, são justificados pelas proposições seguintes. Estes nomes já prenunciam como deve ser o comportamento da aplicação numa vizinhança próxima de um ponto fixo isolado.

Proposição 2.4 *Seja $f : [a,b] \to [a,b]$ um homeomorfismo de um intervalo da reta nele mesmo, tal que os únicos pontos fixos são a e b. Suponha que $f(x) - x > 0$ para todo $x \in (a,b)$. Então dado qualquer ponto $x \in (a,b)$ vale:*

$$\lim_{n\to\infty} f^{\,n}(x) = b \quad e \quad \lim_{n\to\infty} f^{\,-n}(x) = a$$

Prova. Como $f(z) > z$ para todo $z \in (a,b)$, dado $x \in (a,b)$ a seqüência $\{f^{\,n}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e limitada por b . Portanto tal seqüência converge para algum ponto q em $[a,b]$. Porém, por continuidade de f o ponto q tem que ser um ponto fixo. Como $f^n(x) > x > a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o ponto fixo q só pode ser b. Um argumento análogo mostra que $\lim_{n\to\infty} f^{\,-n}(x) = a$.

No caso de termos $f(x) < x$ para todo ponto $x \in (a,b)$, segue que $f^{\,-1}(x) > x$, e basta aplicar o mesmo raciocínio anterior à função f^{-1} para obtermos:

Corolário 2.5 *Seja $f : [a,b] \to [a,b]$ um homeomorfismo de um intervalo da reta nele mesmo, tal que os únicos pontos fixos são a e b. Suponha que $f(x) - x < 0$ para todo $x \in (a,b)$. Então dado qualquer ponto $x \in (a,b)$ vale:*

$$\lim_{n\to\infty} f^{\,n}(x) = a \quad e \quad \lim_{n\to\infty} f^{\,-n}(x) = b$$

A diferença entre os nomes atrator fraco e atrator se dá ao fato que atratores atraem em velocidade exponencial (como mostra a próxima proposição),

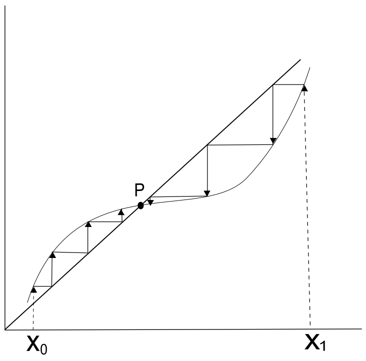

Figura 2.1: P é ponto hiperbólico atrator

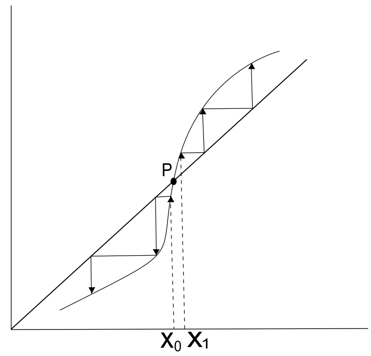

Figura 2.2: P é ponto hiperbólico repulsor

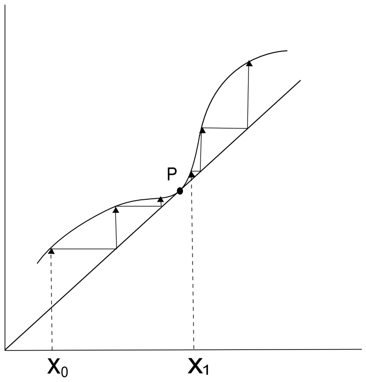

Figura 2.3: P é ponto atrator-repulsor fraco

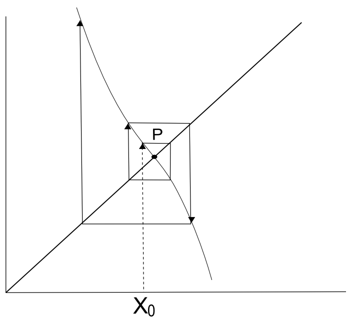

Figura 2.4: P é ponto repulsor de uma função que inverte orientação

enquanto que atratores fracos em geral podem atrair de forma muito mais lenta para o ponto fixo.

No caso em que a função inverte orientação, a propriedade de atração e repulsão local se mantém. No entanto a dinâmica é um pouco mais complicada, já que a órbita do ponto oscila entre o lado direito e esquerdo de uma vizinhança do ponto fixo. Uma forma de avaliar mais facilmente este caso é considerar f^2, que preserva orientação, e ao qual se aplica o que foi dito até aqui.

Proposição 2.6 *Seja $f : S^1 \to S^1$ um difeomorfismo C^1, e x um ponto fixo atrator de f com $|f\,'(x)| < \lambda < 1$. Dado $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança U_ϵ de x tal que $f(U_\epsilon) \subset U_\epsilon$ e $d(f^n(y), x) < (\lambda + \epsilon)^n.d(x, y)$ para todo $y \in U_\epsilon$.*

Prova. Basta mostrar para $0 < \epsilon < 1 - \lambda$. Pela continuidade de $f\,'$ podemos tomar um intervalo U_ϵ pequeno suficiente de forma a termos $|f\,'(z)| < \lambda+\epsilon < 1$ para todo $z \in U_\epsilon$. Dado $y \in U_\epsilon$, pelo Teorema do Valor Médio existe algum

c entre x e y satisfazendo:

$$d(f(x), f(y)) = |f'(c)|\, d(x, y) < (\lambda + \epsilon)\, d(x, y)$$

Como $\lambda + \epsilon < 1$, temos que $f(U_\epsilon) \subset U_\epsilon$. Como x é um ponto fixo, aplicando n vezes a desigualdade acima obtemos:

$$d(f^n(y), x) = d(f^n(y), f^n(x)) < (\lambda + \epsilon)^n\, d(x, y)$$

Observe que esta proposição nos dá uma convergência exponencial. Apesar de não termos uma velocidade de decaimento exatamente igual a λ, podemos aproximar tanto quanto se queira de λ esta velocidade (aproximação pela direita).

Corolário 2.7 *Todo ponto periódico hiperbólico de um homeomorfismo de S^1 é isolado.*

Prova. Se f preserva orientação e possui um ponto fixo atrator x, o corolário anterior nos diz que existe uma vizinhança de x que é toda atraída para x, e portanto não pode haver outro ponto fixo nesta vizinhança. Se x for ponto repulsor, então x é ponto atrator de f^{-1} e portanto também não pode haver outro ponto fixo em uma vizinhança pequena de x. Neste caso $Per(f) = Fix(f)$ e segue que todo ponto periódico hiperbólico é isolado.

Para os homeomorfismos que possuem pontos periódicos de período n temos $Per(f) = Fix(f^n)$ (isso vale tanto para os que preservam quanto para os que invertem orientação, estes últimos com $n = 2$) e aplicamos o mesmo raciocínio anterior à aplicação f^n.

Proposição 2.8 *Se um difeomorfismo $f : S^1 \to S^1$ possui uma quantidade infinita de pontos periódicos, então existe ao menos um ponto periódico não-hiperbólico.*

Prova. Pela continuidade da função f^n, se um ponto x_0 é acumulado por pontos fixos de f^n, então x_0 é também um ponto fixo de f^n. De fato, considere a função continua $f^n(x) - x$. Tomando o limite desta função para $x \to x_0$ por pontos fixos de f^n, segue da continuidade em x_0 que $f^n(x_0) - x_0 = 0$.

O teorema de Bolzano-Weierstrass nos garante que toda seqüência de pontos em um conjunto compacto se acumula em pelo menos um ponto. Assim, o conjunto de pontos fixos terá que se acumular em pelo menos algum ponto fixo, que pelo corolário anterior não pode ser hiperbólico.

Para introduzir o conceito de estabilidade é preciso antes discutir o conceito de distância entre transformações do círculo. A idéia intuitiva que temos de uma dinâmica estável é a de que as principais características são mantidas ao se modificar levemente o nosso objeto de estudo. Dentro de nossos objetivos, estas características a serem mantidas são do ponto de vista topológico e "modificar levemente" tem um sentido bem preciso que é dado por uma distância no espaço de funções.

Definição 2.9 *A distância C^r entre duas funções $f : X \to X$ e $g : X \to X$ (onde $X = \mathbb{R}$ ou $X = S^1$ com sua métrica usual d) é dada por:*

$$d_r(f,g) = sup_{x \in X} \ max\{d(f(x), g(x)), |f'(x) - g'(x)|, ..., |f^{(r)}(x) - g^{(r)}(x)|\}$$

Dizemos que f é C^r-ϵ-próxima a g se $d_r(f,g) < \epsilon$. Neste contexto, a função g é usualmente chamada de uma perturbação *da função f.*

Observe que no caso de $X = \mathbb{R}$, d_r não é propriamente uma métrica no espaço de funções contínuas, já que $d(f(x), g(x))$ pode assumir valores arbitrariamente grandes ao variarmos $x \in X$. Porém, para o uso ao qual faremos (especialmente para a noção de C^r-ϵ-proximidade) esta definição é satisfatória.

O que entendemos por duas aplicações f e g possuir a mesma dinâmica do ponto de vista topológico, de maneira informal, é as propriedades da dinâmica de f, tais como: transitividade, minimalidade, número de rotação, quantidade de pontos fixos e periódicos (e seus períodos), assim como a estrutura topológica do conjunto $Fix(f)$ ou $Per(f)$ etc, serem idênticas às respectivas propriedades da dinâmica de g. Formalmente, o conceito que estabelece esta identificação entre duas dinâmicas do círculo é o conceito de conjugação topológica.

Definição 2.10 *Duas aplicações contínuas $f : X \to X$ e $g : Y \to Y$ são ditas* topologicamente conjugadas *se existe um homeomorfismo $h : X \to Y$ satisfazendo $h \circ f = g \circ h$. Em outras palavras, queremos que o diagrama da figura 2.5 comute.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Figura 2.5: Diagrama comutativo

Como veremos a seguir, duas aplicações topologicamente conjugadas possuem a "mesma dinâmica" do ponto de vista topológico.

Por exemplo, se x é ponto fixo de uma função f conjugada a g por h, então: $h(x) = h \circ f(x) = g \circ h(x)$. Logo $h(x)$ é um ponto fixo de g. Assim, h leva o conjunto de pontos fixos de f no conjunto de pontos fixos de g. Como h é homeomorfismo, ele preserva todas as propriedades topológicas do conjunto $Fix(f)$ para $Fix(g)$. O mesmo vale para o conjunto $Per(f)$, como conseqüência da seguinte proposição.

Proposição 2.11 *Se f é topologicamente conjugado a g pelo homeomorfismo h, então f^n é conjugado a g^n pelo homeomorfismo h para todo $n \in \mathbb{N}$ (e para todo $n \in \mathbb{Z}$ caso f seja invertível).*

Prova. Basta observar que $h \circ f^n \circ h^{-1} = (h \circ f \circ h^{-1}) \circ ... \circ (h \circ f \circ h^{-1})$ e $h \circ f \circ h^{-1} = g$. Portanto $h \circ f^n \circ h^{-1} = g^n$.

Além disso, se f e g são invertíveis então $f = h \circ g \circ h^{-1}$. Tomando a inversa temos $f^{-1} = h \circ g^{-1} \circ h^{-1}$, e portanto a proposição vale para $n \in \mathbb{Z}$.

No entanto, a recíproca desta proposição não é verdadeira. Podemos ter dois homeomorfismos f e g tais que f^n é conjugado a g^n, mas f e g não são conjugados. Por exemplo, $f(x) = x + 1/2(mod1)$ e $g(x) = x$ são tais que $f^2(x) = g^2(x)$ (e portanto são conjugados pela identidade). Porém, g possui uma infinidade de pontos fixos e f não possui pontos fixos.

Veremos mais adiante que, sob certas condições adicionais, a recíproca passa a ser verdadeira. Para isso, faremos uso do seguinte resultado.

Proposição 2.12 *Dado um homeomorfismo f de S^1 com $\rho(f) = p/q$ irredutível, existe $\epsilon > 0$ tal que se g é ϵ-próximo de f e $\rho(g^q) = 0$, então $\rho(g) = p/q$.*

Prova. Sendo $\rho(g^q) = 0$, segue que $\rho(g)$ é racional e o denominador é um divisor de q. A quantidade de frações irredutíveis com denominador menor que q num conjunto limitado é finita, e portanto existe $0 < \delta < 1/q$ tal que se r/s é uma fração irredutível com $|r/s - p/q| < \delta$, então $s \geq q$ (a igualdade só é possível se $r = p$) . Pela continuidade de ρ, existe $\epsilon > 0$ tal que se g é ϵ-próximo de f, então $|\rho(g) - \rho(f)| < \delta < 1/q$. Segue que $\rho(g) = r/s$ é tal que $s \geq q$, e s é divisor de q. Logo $s = q$ e consequentemente $r = p$.

Proposição 2.13 *Seja h um homeomorfismo que conjuga f e g, e sejam G e H os levantamentos de g e h respectivamente. Então $H \circ G \circ H^{-1}$ é um levantamento de f.*

Prova. Temos que $f(y) = h \circ g \circ h^{-1}(y)$ para todo $y \in S^1$. Segue que:

$$f(\pi(x)) = h \circ g \circ h^{-1}(\pi(x))$$

$$= h \circ g \circ (\pi \circ H^{-1}(x)) = h \circ \pi \circ G \circ H^{-1}(x)$$

$$= \pi \circ (H \circ G \circ H^{-1})(x)$$

Pela definição de levantamento, segue que $(H \circ G \circ H^{-1})$ é um levantamento de f.

Proposição 2.14 *Sejam f, g e h homeomorfismos que preservam orientação, tais que $f = h \circ g \circ h^{-1}$. Então $\rho(f) = \rho(g)$.*

Prova. Basta mostrar que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{F^n(x) - x}{n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{G^n(y) - y}{n}$ para alguma escolha de F, G, x e y.

Considerando F o levantamento de f dado pela proposição anterior e fixado $x \in S^1$ segue que $F^n(x) = H \circ G^n \circ H^{-1}(x)$. Assim, temos:

$$F^n(x) - x = H \circ G^n \circ H^{-1}(x) - x =$$

$$= (H \circ G^n \circ H^{-1}(x) - G^n \circ H^{-1}(x)) + (G^n \circ H^{-1}(x) - H^{-1}(x)) + (H^{-1}(x) - x)$$

Da proposição 1.12 (e suas consequências para o caso de aplicações de grau 1) sabemos que $H(z) - z$ e $H^{-1}(w) - w$ são funções periódicas (portanto limitadas), e ao dividirmos esta última expressão por n e passarmos o limite para $n \to \infty$, a primeira e última parcela resultarão em zero. Isto é:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{G^n \circ H^{-1}(x) - H^{-1}(x)}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{G^n(y) - y}{n} \quad \text{, onde} \quad y = H^{-1}(x)$$

Proposição 2.15 *Se $f : X \to X$ é conjugada a $g : Y \to Y$ e f é transitiva (sendo x um ponto de órbita densa em X), então g é transitiva tendo $h(x)$ com órbita densa em Y (onde h é o homeomorfismo conjugante: $h \circ f = g \circ h$). Conseqüentemente, se f é minimal então g é minimal.*

Prova. Primeiramente vamos mostrar que o homeomorfismo h leva conjuntos densos em conjuntos densos.

De fato, seja D um conjunto denso em X. Então, dado qualquer $a \in X$, existe uma sequência $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset D$ tal que $\lim_{i\to\infty} u_i = a$. Por continuidade de h, temos $\lim_{i\to\infty} h(u_i) = h(a)$.

Dado $b \in Y$ arbitrário, considere $a = h^{-1}(b) \in X$. Pelo o que acabamos de ver, existe uma seqüência em $h(D)$ convergindo para $h(a) = b$. Da arbitrariedade da escolha de b, temos que $h(D)$ é denso em Y.

Uma vez que o conjunto $O(x)$ é denso em X, segue que:

$h(O(x)) = \{h(f^n(x)) \mid n \in \mathbb{N}\} = \{g^n(h(x)) \mid n \in \mathbb{N}\}$ é denso em Y. Portanto $h(x)$ é um ponto de órbita densa para g.

Conjugação topológica é uma relação de equivalência. De fato, a reflexividade e simetria são imediatas. É transitiva, pois se $f = h \circ g \circ h^{-1}$ e $g = l \circ j \circ l^{-1}$ temos $f = h \circ (l \circ j \circ l^{-1}) \circ h^{-1} = (hl) \circ j \circ (hl)^{-1}$ e portanto hl conjuga f e j.

Com a noção de distância entre aplicações de S^1 e conjugação topológica, estamos munidos de conceitos suficientes para estabelecermos nosso critério de estabilidade.

Definição 2.16 *Dizemos que uma função $f : X \to X$ é C^r-estruturalmente estável se existe $\epsilon > 0$ tal que toda $g : X \to X$ C^r-ϵ-próxima de f é topologicamente conjugada a f.*

Será mostrado nos próximos capítulos que os difeomorfismos estruturalmente estáveis do círculo possuem propriedades muito bem definidas e que caracterizam o que chamamos de sistemas Morse-Smale.

Definição 2.17 *Dizemos que um difeomorfismo de S^1 é* Morse-Smale *se satisfaz:*

1. *f possui pontos periódicos.*

2. *Todo ponto periódico de f é hiperbólico.*

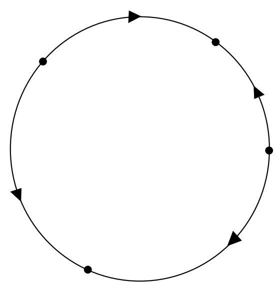

Figura 2.6: Exemplo de difeomorfismo Morse-Smale com pontos fixos.

Nesta figura, as bolinhas pretas representam os pontos fixos, e as setas mostram as direções em que os pontos de cada intervalo estão sendo levados pelo difeomorfismo.

Um difeomorfismo Morse-Smale tem uma quantidade finita de pontos periódicos (em decorrência da proposição 2.8). Este tipo de dinâmica é bem simples, e portanto o fato de podermos aproximar qualquer outro sistema por um sistema Morse-Smale é, além de surpreendente, muito valioso. A estabilidade dos difeomorfismos Morse-Smale será demonstrada no próximo capítulo.