

4 Formulação do modelo numérico do solo

4.1 Modelos constitutivos

Um dos maiores desafios para a engenharia é compreender, analisar e prever o comportamento dos materiais e das estruturas, face aos carregamentos e às solicitações impostas por sua utilização. Muito embora o conhecimento dos materiais e das estruturas seja cada vez maior, dificilmente ao proceder qualquer tipo de análise, o conjunto completo das características e das particularidades presentes na realidade é representado. Essa constatação é particularmente verdadeira para o caso da engenharia geotécnica, onde as condições de contorno e a heterogeneidade do subsolo são conhecidas em apenas algumas posições discretas onde são investigadas.

Esta representação completa é além de pouco usual, pouco desejada. O entendimento e a compreensão da realidade são simplificados na medida em que se reduzem as complexidades do mundo real, fazendo-se uma análise a partir de modelos simplificados.

Para a engenharia geotécnica, em particular, um dos aspectos de maior relevância refere-se à definição das relações entre as tensões e as deformações observadas. Assim, historicamente, uma diversidade de modelos e equações constitutivas vem sendo propostas com o objetivo de melhor representar as muitas variáveis e particularidades envolvidas no comportamento dos solos (Mendonça, H. M. 2005).

Os modelos propostos possibilitam representar matematicamente o comportamento dos solos, sendo que, em geral apenas o seu aspecto macroscópico é levado em conta. Portanto, características referentes à sua estrutura interna não são utilizadas de forma direta na construção dos modelos, ficando a atenção direcionada à similaridade entre as respostas oferecidas pelo solo modelado e o solo real.

De acordo com o que será descrito mais a frente, os primeiros modelos constitutivos empregados para representar a resposta tensão-deformação dos solos, foram praticamente os mesmos modelos usados para previsão da resposta tensão-deformação dos metais. A única distinção é a introdução do conceito de tensões efetivas, para o caso dos solos, em substituição às tensões totais, utilizadas para descrever o comportamento dos metais, de qualquer forma, para esse conjunto mais antigo de modelos constitutivos era suficiente considerar o comportamento dos solos em termos de tensões.

Conforme será apresentado nas seções subseqüentes deste capítulo, o solo, quando em regime elástico, apresenta comportamento bastante distinto, dependendo se está submetido a tensões de cisalhamento ou apenas à compressão isotrópica. Entretanto, deve-se observar que, no caso real, as respostas oferecidas por esses dois tipos de carregamento não são desacopladas, já que a aplicação de tensões de cisalhamento, além da distorção, causam, também, variação de volume.

4.2 Comportamento dos solos

Baseando-se, principalmente, na observação do comportamento dos solos através de ensaios de laboratório e ensaios *in situ*, diversos avanços foram conquistados no campo da mecânica dos solos, e com isso uma série de características e propriedades, puderam ser enunciadas. Particularmente, através dos ensaios de adensamento (compressão edométrica) e ensaios triaxiais, os principais aspectos associados à rigidez e à resistência dos solos foram identificados.

Naturalmente, após esses primeiros avanços, o desafio da engenharia geotécnica foi estabelecer um modelo constitutivo que melhor representasse o comportamento observado dos solos.

Antes de identificar as principais propriedades dos solos que deverão ser satisfeitas pelos modelos constitutivos propostos, algumas definições complementares são necessárias.

Considerando um material com comportamento elástico linear, a relação tensão-deformação pode ser expressa por:

$$S = E\varepsilon \quad (4.1)$$

Se o material for, também, isotrópico, a equação acima pode ser reescrita, em termos das constantes elásticas K , módulo de rigidez volumétrica do material, e G , módulo de rigidez ao cisalhamento transversal conforme apresentado abaixo

Essas constantes podem ser definidas a partir do módulo de Young (ou de elasticidade) E e do coeficiente de Poisson, através das expressões:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (4.2)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.3)$$

Apesar das constantes E e ν serem suficientes para descrição da resposta elástica de materiais isotrópicos, a utilização de K e G apresenta-se como mais adequada para o estudo dos solos, uma vez que permitem separar a deformação elástica em suas parcelas associadas à variação de volume e à mudança de forma, respectivamente.

A seguir são apresentadas as principais propriedades dos solos, conforme destacado por Atkinson (1993) e Wu (1976), que devem ser contempladas pelos modelos constitutivos:

- Com aumento da tensão (tensão média efetiva p') e, conseqüente, redução do índice de vazios do solo, há aumento da rigidez, seguido de aumento do módulo de rigidez volumétrica K e também, do módulo de rigidez ao cisalhamento transversal G (figura 4.1a e 4.1b). Adotam-se como positivas as tensões de compressão;
- Os solos sofrem redução na rigidez ao cisalhamento transversal quando submetidos a tensões cisalhantes. Esse comportamento dos solos, que é altamente não-linear, implica numa redução substancial do módulo de rigidez ao cisalhamento quando o solo se aproxima da ruptura. Em caso de descarregamento, para um novo carregamento, o

valor de G volta a crescer (figura 4.1b). Essa consideração indica que o solo pode sofrer aumento significativo de rigidez com uma alteração na trajetória de tensões a que está submetido. Esse aumento de rigidez é tanto maior, quanto mais expressiva for essa mudança na direção da trajetória de tensões, como no descarregamento, por exemplo. Utilizando-se os critérios de resistência, pode-se definir uma superfície de ruptura para os solos, a partir da qual não é mais possível aumentar as tensões antiesféricas. De um modo geral, o critério de Mohr-Coulomb é um dos mais utilizados na definição dessa superfície;

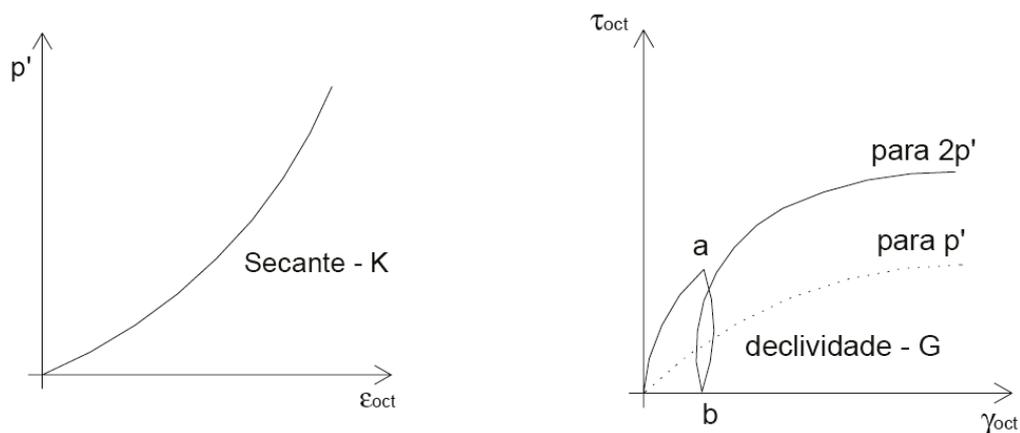


Figura 4.1 - a) Variação de K com p' , b) Variação de G com p' e com τ_{oct} .

- Os solos, de um modo geral, apresentam comportamentos diferenciados conforme a direção em que são solicitados. Isso significa que há uma tendência de se comportarem anisotropicamente;
- Conforme pode ser observado a partir dos ensaios de compressão isotrópica ou ainda no ensaio de compressão edométrica, os solos sobreadensados apresentam redução de rigidez quando atingem a tensão de pré-adensamento. Essa tensão de pré-adensamento pode ser considerada como a tensão de escoamento do solo, que nada mais é do que a fronteira entre a região de comportamento elástico e a região de comportamento plástico.

De qualquer forma, a existência de deformações irreversíveis, comprovada por diversos ensaios de laboratório (compressão isotrópica, edométrica e ensaio triaxial convencional, sem variação da tensão de confinamento), sugere a adoção de modelos elasto-plásticos para definição de modelos matemáticos para os solos.

A bibliografia disponível sobre as propriedades dos solos reais é bastante ampla, não se restringindo apenas aos aspectos acima discutidos. Por outro lado, tratar de outros aspectos que não aqueles já apontados, consiste em tarefa suplementar e específica, que se afasta dos propósitos deste trabalho.

Acredita-se, porém, que a abrangência dos assuntos discutidos já é suficiente para os objetivos que ora buscamos, bem como, para resolução dos problemas mais complexos da engenharia geotécnica.

4.3 Resumo dos principais modelos constitutivos para solos

A seguir são apresentadas as características dos principais grupos de modelos constitutivos disponíveis na literatura para representar o comportamento dos solos.

- Os modelos mais conhecidos e utilizados são os modelos elásticos, devido à sua facilidade de implementação. Em contrapartida esses modelos não consideram as deformações permanentes. Pode-se mencionar o modelo elástico linear e elástico não linear nesse grupo.
- Outro grupo de modelos achados na literatura são os modelos hipoeásticos, que por sua vez, são capazes de reproduzir carregamentos com endurecimento e/ou amolecimento assim como descarregamento elástico. Esse grupo de modelos apresenta problemas na sua implementação devido ao grande número de parâmetros sem sentido físico a serem ajustados.
- Os modelos quase-lineares são caracterizados por representar o comportamento não linear do solo, com rigidez dependente da tensão, esses modelos não conseguem simular o amolecimento plástico.

- Outros modelos comumente usados na literatura são os modelos elasto-plásticos básicos, modelos que atendem a critérios de escoamento que incorporam dependência da tensão esférica e conseguem simular o endurecimento e amolecimento plástico. Destaca-se nesse grupo o modelo de Mohr-Coulomb e o modelo de Druker-Prager.
- Finalmente temos os modelos elasto-plásticos avançados, modelos que adotam uma superfície de plastificação com endurecimento e amolecimento isotrópicos, alguns modelos consideram fluxo não associado (modelo de Lade-Kim) enquanto outros são capazes de considerar fluxo associado (modelo Hierárquico).

4.4 Modelo Linear Equivalente

Conforme o visto no item 4.3 os modelos elasto-plásticos básicos e elasto-plásticos avançados possuem implementação complicada uma vez que requerem grande número de parâmetros sem sentido físico, são de difícil ajuste, além de carecer de experiência na sua utilização. Por essas razões adota-se no presente trabalho o Modelo Linear Equivalente para a modelagem do comportamento dinâmico do solo.

Nos anos 70 foram desenvolvidos procedimentos analíticos para avaliar a resposta dos solos a carregamentos sísmicos. Em casos específicos alguns procedimentos para determinar a resposta do solo foram bem sucedidos, sucesso que depende essencialmente da incorporação das propriedades corretas dos solos nas análises. Conseqüentemente grandes esforços foram direcionados para uma melhor determinação das propriedades do solo a serem usados nas análises.

No caso da resposta do solo envolvendo deslocamentos de solo residual, a resposta foi determinada principalmente pelo módulo cisalhante G e características de amortecimento do solo sob condições de carga cíclica simétricas.

Os solos geralmente têm uma relação tensão-deformação não linear como a mostrada na figura 4.2.

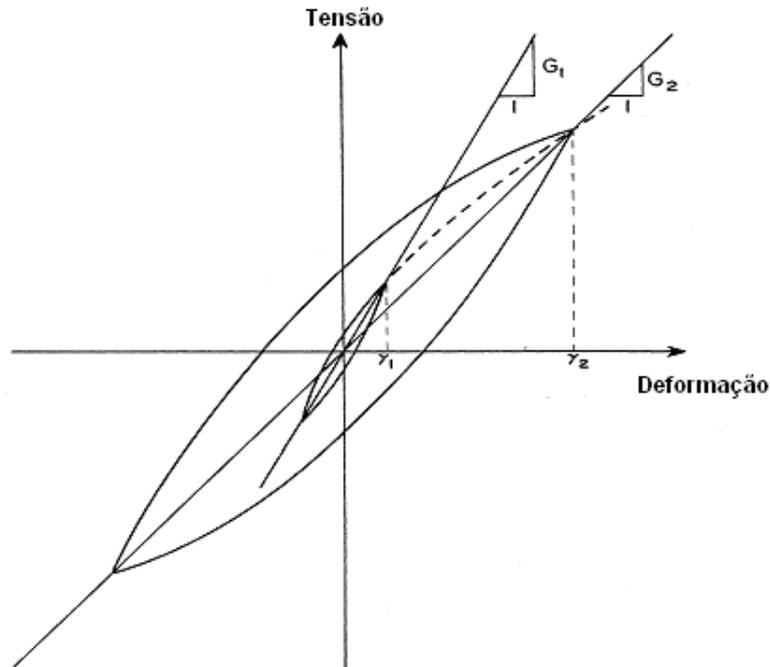


Figura 4.2 - Relação tensão - deformação para diferentes deformações. Report No EERC-70-10.

O módulo cisalhante é usualmente expresso como o módulo secante determinado no ponto extremo da curva enquanto o fator de amortecimento é proporcional à área interna descrita pela curva. Verifica-se dessa forma que essas propriedades dependem fortemente da magnitude da deformação, e ambos, módulo cisalhante e fator de amortecimento podem ser determinados como funções da deformação induzida num depósito de solo.

Essas pesquisas e resultados foram apresentados no relatório 70-10 do Earthquake Engineering Research Center University of California – Berkeley, California, trabalho que estabelece os critérios e parâmetros para a adoção do método linear equivalente.

Atualmente o Método Linear Equivalente é o modelo utilizado na maioria das aplicações e implementado em grande parte dos programas computacionais elaborados para investigação da resposta dinâmica de maciços de solo.

O Método Linear Equivalente distingue-se pelas seguintes características:

- O método usa propriedades lineares nos elementos. Essas propriedades são estimadas segundo o nível de movimentação dinâmico. Observa-se neste modelo que para excitações dinâmicas leves os elementos podem ser superamortecidos enquanto para fortes excitações elementos podem ser sub amortecidos.

- Como o método é essencialmente elástico, não se têm como calcular deformações ou deslocamentos permanentes assim como mudanças que acompanham o fenômeno de liquificação, já que unicamente a movimentação oscilatória é modelada, sendo necessário aplicar uma técnica complementar desacopladamente (Newmark, 1965; Makdisi e Seed, 1978).
- É correto aceitar que durante o processo de fluxo plástico na teoria da plasticidade, o tensor incremental de deformações é associado a alguma função do tensor de tensões, originando uma regra de fluxo. Na teoria da elasticidade assim como usado no Método Linear Equivalente, as relações do tensor de deformações (não incremental) são associadas ao tensor de tensões.
- O modelo constitutivo do material é integrado no método por uma curva de tensão-deformação.
- Nos casos onde ondas P e S sejam propagadas simultaneamente num meio, o método linear equivalente trata essas ondas independentemente, conseqüentemente não é permitida a interação entre as duas componentes de movimento.

A relação tensão-deformação de solos sob carregamento cíclico exhibe normalmente um laço de histerese entre as trajetórias de carregamento e de descarregamento, fato que pode ser mecanicamente modelado descrevendo-se as trajetórias ou considerando-se parâmetros do material que possam representar de maneira aproximada a forma geral do laço. Na segunda alternativa, adotada no Modelo Linear Equivalente, a inclinação do laço de histerese, proporcional à rigidez do solo, é descrita pelo módulo de cisalhamento secante e a abertura do laço, com área proporcional à energia dissipada no ciclo, pela razão de amortecimento.

Ambos os parâmetros, referidos como parâmetros lineares equivalentes, são atualizados iterativamente em função dos níveis de deformação cisalhante induzidos na massa de solo. Para a seleção dos novos valores, utiliza-se uma distorção média ou efetiva empiricamente estimada como 2/3 da deformação cisalhante máxima (0,65 de acordo com Seed e Martin (1966), ou $(M-1)/10$, de acordo com Idriss e Sun (1992)) onde M é a magnitude do terremoto. A seleção

dos parâmetros lineares equivalentes é feita para cada elemento, de acordo com o procedimento descrito a seguir.

Os valores iniciais do módulo cisalhante (G_{\max}) e do amortecimento são estimados para cada elemento finito da malha. A resposta dinâmica do sistema é então determinada, calculando-se a deformação cisalhante máxima na história do tempo em cada elemento. A partir desses resultados, as amplitudes da deformação cisalhante efetiva em cada elemento são computadas, consultando-se as curvas do material correspondente para observar se o nível de deformação é compatível com os valores das propriedades dinâmicas utilizadas na avaliação da resposta. Se as propriedades do solo não forem compatíveis, as propriedades lineares equivalentes são atualizadas e o processo é repetido até atingir a convergência, o que ocorre geralmente após 3 a 5 iterações. Este modelo foi implementado em vários programas comerciais (GeoStudio 2004) e acadêmicos como os elaborados na Universidade da Califórnia, Berkeley - SHAKE (Schnabel et al., 1972), QUAD-4 (Idriss et al., 1973), FLUSH (Lysmer et al., 1975), dentre outros.

De acordo com Bray et al. (1995), o programa SHAKE91 (Idriss e Sun, 1992), em virtude da incorporação do modelo linear equivalente, somente deve ser empregado para movimentos com PHArocha de 0,35g. De acordo com informações da literatura, o modelo linear equivalente não produz resultados confiáveis para situações onde PHAsolo é maior do que 0,4g (Ishihara, 1996).

A relação entre a variação dos parâmetros lineares equivalentes com o nível das deformações cisalhantes foi estudada por vários autores. Até vinte anos atrás, as reduções de módulo para solos coesivos e granulares eram tratadas separadamente (Seed e Idriss, 1970), conforme mostra a figura 4.3 para o caso das areias. Para as areias, Seed e Idriss propuseram a seguinte expressão para cálculo do máximo valor do módulo de cisalhamento G_{\max} .

$$G_{\max} = 1000K_{2\max} (\sigma'_m)^{1/2} \text{ em psf} \quad (4.4)$$

$$G_{\max} = 21,7K_{2\max} P_a \left(\frac{\sigma'_m}{P_a} \right)^{1/2} \text{ em Pa} \quad (4.5)$$

Nessa expressão σ'_m e a tensão efetiva principal média, P_a a pressão atmosférica e o coeficiente adimensional $K_{2\max}$ (no intervalo entre 30 a 70) é obtido de tabelas (Seed e Idriss, 1970) em função do índice de vazios ou densidade relativa da areia.

Para pedregulhos, Seed et al. (1984) indicaram valores de $K_{2\max}$ no intervalo entre 80 a 180 enquanto que para solos coesivos estimativas preliminares de G são obtidas com base no índice de plasticidade IP, razão de pré-adensamento OCR e da resistência ao cisalhamento não-drenada.

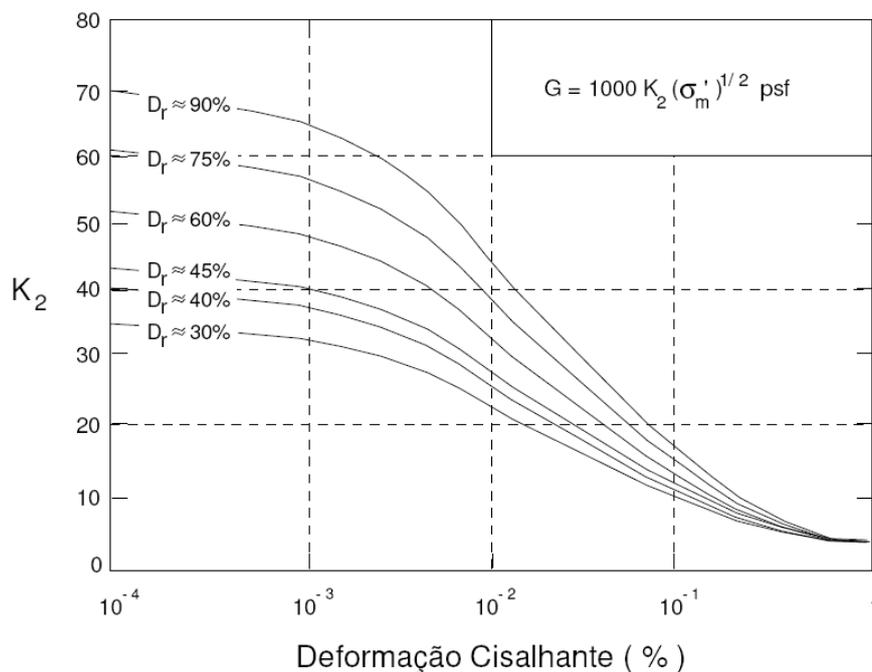


Figura 4.3 - Curvas de variação do módulo de cisalhamento para areias sob diferentes densidades relativas – Seed e Idriss (1970).

A partir da década de 1980, estudos de Dobry e Vucetic (1987), Sun et al. (1988), Vucetic e Dobry (1991), entre outros, concluíram que há uma transição gradual entre o comportamento de materiais granulares e coesivos, sendo que a forma das curvas de redução de módulo de cisalhamento é mais afetada pelo índice de plasticidade do que pelo índice de vazios.

Para pedregulhos, apesar da dificuldade experimental da execução de ensaios em laboratório, algumas evidências indicam que a curva média de

degradação de G tem forma similar, porém mais achatada, do que a curva média das areias (Seed et al., 1986).

As características de plasticidade também influenciam a razão de amortecimento do solo, como também constatado em Kokushu et al. (1982), Dobry e Vucetic (1987), Sun et al. (1988), Vucetic e Dobry (1991), entre outros. A figura 3.3 mostra que a razão de amortecimento para solos coesivos altamente plásticos é menor do que para solos granulares, sendo a curva correspondente a $IP = 0$.

De acordo com Seed et al. (1984) o amortecimento em pedregulhos é muito similar ao das areias.

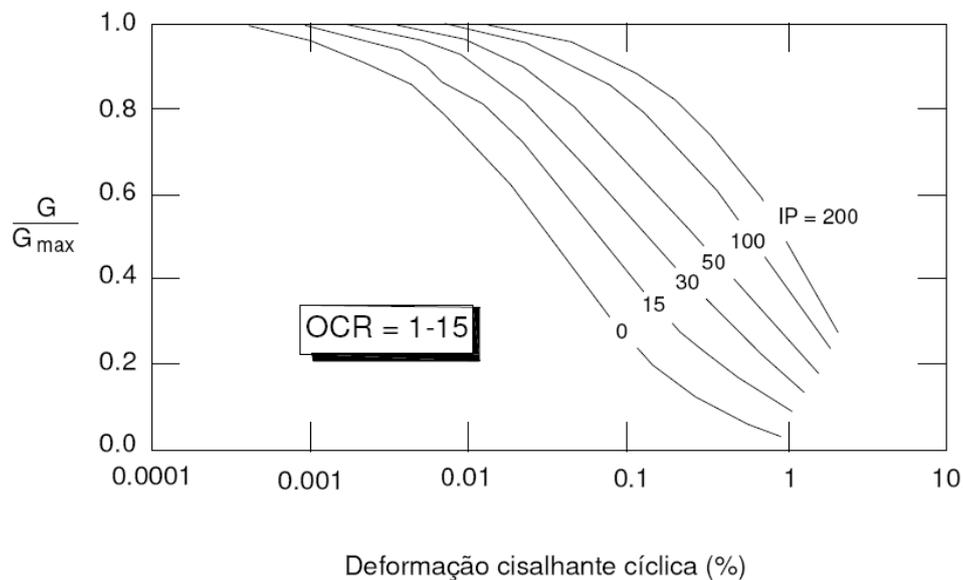


Figura 4.4 - Curvas de variação do módulo de cisalhamento para diferentes índices de plasticidade – Vucetic e Dobry (1991)

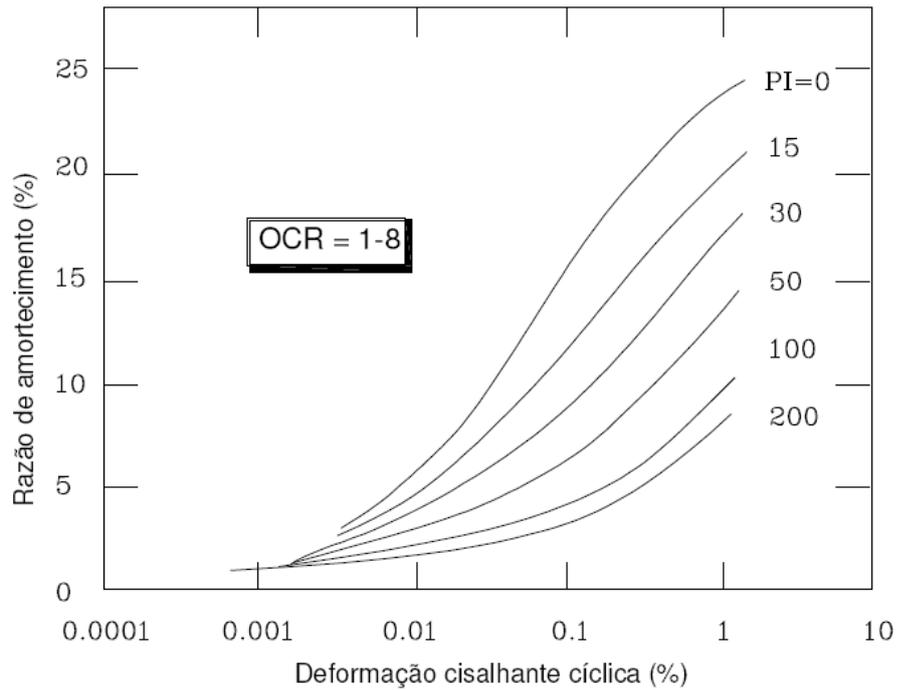


Figura 4.5 - Curvas de variação da razão de amortecimento para diferentes índices de plasticidade – Vucetic e Dobry (1991)

A variação do módulo de cisalhamento G é definida pela expressão proposta por Ishibushi e Zhang (1993).

$$\frac{G}{G_{\max}} = K(\gamma, IP)(\sigma'_m)^{m(\gamma, IP) - m_0} \quad (4.6)$$

$$K(\gamma, IP) = 0,5 \left\{ 1 + \tanh \left[\ln \left(\frac{0,000102 + n(IP)}{\gamma} \right)^{0,492} \right] \right\} \quad (4.7)$$

$$m(\gamma, IP) - m_0 = 0,272 \left\{ 1 - \tanh \left[\ln \left(\frac{0,000556}{\gamma} \right)^{0,4} \right] \right\} e^{-0,145IP^{1,3}} \quad (4.8)$$

$$n(IP) = \begin{cases} 0,0 & IP = 0 \\ 3,37 * 10^{-6} IP^{1,404} & 0 < IP \leq 15 \\ 7,0 * 10^{-7} IP^{1,976} & 15 < IP \leq 70 \\ 2,7 * 10^{-5} IP^{1,115} & IP > 70 \end{cases} \quad (4.9)$$

A função que controla a variação da razão de amortecimento, dependente do índice de plasticidade IP , da redução do módulo de cisalhamento G/G_{\max} e

indiretamente da tensão normal octaédrica σ'_m , também foi apresentada por Ishibushi e Zhang (1993).

$$\zeta = 0,333 \frac{1 + e^{-0,0145/P^{1,3}}}{2} \left[0,586 \left(\frac{G}{G_{\max}} \right)^2 - 1,547 \frac{G}{G_{\max}} + 1 \right] \quad (4.10)$$

As deformações cisalhantes em cada ponto de Gauss são calculadas em todos os instantes de tempo em que se subdivide a duração total do terremoto e as normas destes vetores são computadas. A maior destas normas γ é utilizada para atualização dos parâmetros do Modelo Linear Equivalente.

O valor da razão de amortecimento pode ser informado como constante, caso no qual o programa utiliza a formulação de Rayleigh (equação 4.11) para construção da matriz de amortecimento.

No domínio do tempo a matriz de amortecimento pode ser construída com base na formulação de Rayleigh, através da combinação linear entre as matrizes de massa e de rigidez.

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (4.11)$$

onde α e β são os parâmetros de amortecimento de Rayleigh.

Como o amortecimento de solos depende do estado de deformações, conforme já discutido, Idriss (1973) sugeriu a aplicação da formulação de Rayleigh no nível de elemento como:

$$[C]_e = \alpha_e[M]_e + \beta_e[K]_e \quad (4.12)$$

onde os parâmetros de amortecimento para cada elemento são definidos com base na razão de amortecimento local (função das deformações cisalhantes efetivas no elemento) e da frequência natural fundamental do sistema ω_1 obtida a partir do cálculo dos autovalores em um problema de vibração livre não amortecida.

$$\begin{aligned}\alpha_e &= \xi_e \omega_1 \\ \beta_e &= \frac{\xi_e}{\omega_1}\end{aligned}\quad (4.13)$$

A matriz de amortecimento global [C] é obtida através do processo convencional de montagem de matrizes do método dos elementos finitos. A integração no tempo da equação do movimento é feita através do método de Newmark.

4.5 Discretização do elemento finito para o solo

Assim como no caso unidimensional, é mais conveniente trabalhar-se com um sistema de coordenadas naturais L, adimensionais, definido na figura 4.6.

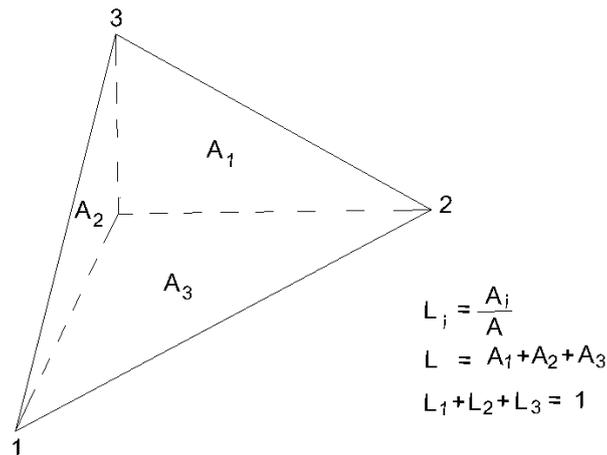


Figura 4.6 - Definição das coordenadas naturais de um triângulo.

A variação linear de u dentro do elemento pode ser expressa da forma:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (4.14a)$$

ou em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (4.14b)$$

onde α_1, α_2 e α_3 são parâmetros a determinar.

Invertendo a matriz acima, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2A_1^0 & 2A_2^0 & 2A_3^0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

onde, $a_i = x_k - x_j$, $b_i = x_j - x_k$, $2A_i^0 = x_j x_k - x_k y_j$, para $i = 1, 2, 3$; $j = 2, 3, 1$;

$k = 3, 1, 2$; A é a área do elemento.

Substituindo as expressões de α_1, α_2 e α_3 , e arrumando:

$$u = \begin{bmatrix} \frac{1}{2A} (2A_1^0 + b_1 x + a_1 y) u_1 + \frac{1}{2A} (2A_2^0 + b_2 x + a_2 y) u_2 + \\ \frac{1}{2A} (2A_3^0 + b_3 x + a_3 y) u_3 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

ou

$$u = [N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3] \quad (4.17)$$

Analogamente para v temos:

$$v = [N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3] \quad (4.18)$$

A relação entre as coordenadas cartesianas de um ponto qualquer são dadas por:

$$L_i = \frac{1}{2A} (2A_i^0 + b_i x + a_i y) \quad (4.19)$$

Isto significa que, para um elemento triangular linear, as funções de interpolação N_i são as próprias coordenadas naturais L_i . Pode-se verificar, facilmente, que estas funções atendem a um requisito básico para as funções de interpolação, que é o de assumir o valor 1 quando aplicada no nó associado, e o valor zero nos demais.

A seguir obtemos explicitamente a matriz B .

$$N = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [N] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [N] = [B] = \begin{bmatrix} L_{1,x} & 0 & L_{2,x} & 0 & L_{3,x} & 0 \\ 0 & L_{1,y} & 0 & L_{2,y} & 0 & L_{3,y} \\ L_{1,y,x} & L_{1,y,x} & L_{2,y,x} & L_{2,y,x} & L_{3,y,x} & L_{3,y,x} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{23} & 0 & b_{31} & 0 & b_{12} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{13} & 0 & a_{21} \\ a_{32} & b_{23} & a_{13} & b_{31} & a_{21} & b_{12} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

De posse dos dados acima, pode-se calcular explicitamente para o elemento de deformação constante as expressões das matrizes de rigidez e massa.

Para a matriz elementar de rigidez K^e , obtém-se:

$$K^e = tA [B]^T [E] [B] \quad (4.24)$$

Para obtenção da matriz de massa do elemento M^e , a expressão inicial é:

$$M^e = \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} [L_1 \quad L_2 \quad L_3] d\Omega \quad (4.25)$$

Considerando a expressão geral de integração de áreas, em coordenadas triangulares,

$$\int_{\Omega} L_1^i L_2^j L_3^k d\Omega = \frac{i!j!k!}{(i+j+k+2)} 2A \quad (4.26)$$

obtém-se:

$$M^e = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Uma análise dinâmica completa não dispensa a parcela correspondente ao amortecimento e inércia na análise. O amortecimento tem origem em forças que se opõem ao movimento do solo à medida que este se desloca.

Apos a aplicação do método da rigidez direta a equação de global considerando-se a parcela de amortecimento e inércia é dada por:

$$[M_{Solo}] \{ \ddot{u} \} + [C_{Solo}] \{ \dot{u} \} + [K_{Solo}] \{ u \} = \{ F_{ext} \} \quad (4.28)$$

Na equação acima, C_{solo} é a matriz de amortecimento do solo, a qual, em geral, será obtida segundo o item 4.4