

5 Aplicações

Uma informação de grande interesse para o Departamento de Operações de Mercado Aberto (Demab) do Banco Central do Brasil (Bacen) é a estrutura a termo das taxas de juros pré-fixada.

A estrutura a termo das taxas de juros pré-fixada reflete a expectativa do mercado em relação à economia brasileira como um todo e, em particular, reflete a expectativa do mercado em relação a algumas variáveis da economia.

Dado que não são negociadas no mercado brasileiro taxas de juros pré-fixadas para todos os prazos, um grupo de estudo do Demab implementou um modelo de interpolação que fornece a estrutura a termo das taxas de juros pré-fixada para todos os prazos a partir dos títulos negociados no mercado ((1)).

Através de análises dos erros de interpolação, o grupo de estudo do Demab concluiu que o método utilizado para a obtenção dos dados interpolados pode ser usado para explicar a estrutura a termo das taxas de juros pré-fixada brasileira.

Como veremos na Seção 5.4, o Bacen dispõe das séries temporais das Expectativas de Mercado, que são planilhas com os dados diários das expectativas de mercado para as principais variáveis da economia. Tais dados são, em teoria, usados pelas instituições financeiras para traçar seus cenários.

Apesar disso, não existe um estudo da estrutura de dependência entre as expectativas de mercado para as principais variáveis da economia e as taxas, interpoladas, para a estrutura a termo pré-fixada. O Bacen, em especial a sua área de Política Monetária, tem interesse em conhecer tal estrutura de dependência para avaliar possíveis cenários e necessidades de intervenções.

Na Seção 5.2 estudaremos a estrutura de dependência existente entre os log-retornos das taxas, interpoladas, para a estrutura a termo pré-fixada de 1 ano e de 2 anos; nas Seção 5.3 (Seção 5.4) estudaremos a estrutura de dependência existente entre os log-retornos das taxas, interpoladas, para a estrutura a termo pré-fixada de 1 ano e o log-retorno do índice Ibovespa (da taxa PTAX, 6 meses a frente). Em todas essas Seções, o estudo da estrutura de dependência será feito através do ajuste de uma cópula aos dados, como

descrito na Seção 5.1.

5.1

Descrição do modelo e estimação da cópula ajustada

Obter um modelo multivariado que descreva de modo adequado tanto o comportamento marginal das v.a.'s em análise quanto a estrutura de dependência envolvida é bastante difícil ((18)), principalmente quando há um grande número de parâmetros envolvido ((27)). Uma alternativa para superar esse problema é modelar, em separado, o comportamento marginal e a estrutura de dependência existente ((15)), o que nos permite considerar, dentre outras estruturas de dependência, a existência de dependência de cauda.

Com base na notação do Capítulo 2, para estimar a f.d.a. conjunta do vetor aleatório (X, Y) , que denotaremos por $\hat{\mathbf{H}}$, estimaremos, em separado, as f.d.a.'s marginais de X e Y , \hat{F}_X e \hat{F}_Y , respectivamente, e a cópula paramétrica associada \hat{C}_Θ e, então, aplicaremos o Teorema de Sklar ((18)).

O modelo semi-paramétrico GPD é adequado para modelar dados, simétricos ou assimétricos, que apresentam caudas pesadas; vale ressaltar a independência entre as modelagens das caudas inferior e superior, característica que confere uma grande flexibilidade ao modelo.

Assim, o primeiro objetivo deste trabalho é modelar as f.d.a.'s marginais dos log-retornos das variáveis citadas acima: taxas, interpoladas, para a estrutura a termo pré-fixada de 1 ano e de 2 anos, índice Ibovespa e PTAX, 6 meses a frente.

Os possíveis métodos para obter uma f.d.a. univariada estimada incluem:

- (i) Estimação paramétrica: um modelo paramétrico apropriado é escolhido e o ajuste é feito através da função de máxima verossimilhança ((15));
- (ii) Estimação não-paramétrica através do cálculo da função de distribuição empírica modificada: seja $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ uma amostra aleatória da distribuição F_X de tamanho n ; a função distribuição empírica modificada, $F_{X,n}^*(x)$, é dada por:

$$F_{X,n}^*(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n 1_{\{x_i \leq x\}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

e difere da distribuição empírica usual pelo uso do denominador $n+1$ no lugar de n . Adiante, veremos que tal variação é uma condição necessária para obtermos \hat{C}_Θ ; e

- (iii) Teoria de valores extremos para as caudas: a função de distribuição empírica não apresenta bons resultados para valores nas caudas da dis-

tribuição a ser estimada; uma alternativa é usar a teoria de valores extremos ((8)) para modelar as caudas da distribuição através da distribuição generalizada de Pareto (GPD).

Devido às características das distribuições das v.a.'s que analisaremos, usaremos o modelo semi-paramétrico GPD para modelar as f.d.a.'s marginais; este modelo é uma mescla dos itens (ii) e (iii) acima, isto é, ajustamos a distribuição generalizada de Pareto (GPD) para as caudas das distribuições, a partir de limiares pré-definidos, e calculamos a distribuição empírica para o centro da distribuição ((12)). O fato da GPD e da distribuição empírica serem paramétrica e não-paramétrica, respectivamente, sugere o nome do modelo empregado.

Dadas as distribuições estimadas \hat{F}_X e \hat{F}_Y e a amostra aleatória $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ de tamanho n da f.d.a. conjunta \mathbf{H} , definimos a pseudo-amostra da cópula C por $\{(\hat{u}_1, \hat{v}_1), (\hat{u}_2, \hat{v}_2), \dots, (\hat{u}_n, \hat{v}_n)\}$, onde $(\hat{u}_i, \hat{v}_i) = (\hat{F}_X(x_i), \hat{F}_Y(y_i))$, $i = 1, 2, \dots, n$, que é motivada pela Definição 2. Então, para uma cópula paramétrica específica C_Θ com f.d.p. c_Θ e parâmetros desconhecidos Θ , os estimadores de máxima verossimilhança (EMV) para Θ são obtidos maximizando a função

$$\ln L(\Theta; (\hat{u}_1, \hat{v}_1), (\hat{u}_2, \hat{v}_2), \dots, (\hat{u}_n, \hat{v}_n)) = \sum_{i=1}^n \ln c_\Theta((\hat{u}_i, \hat{v}_i)), \quad (5-1)$$

em Θ .

Podemos, agora, justificar o uso do denominador $n + 1$ na definição da função de distribuição empírica modificada dada no item (ii) acima: esta escolha garante que a pseudo-amostra da cópula C_Θ esteja no interior do quadrado unitário. Para implementar a função (5 – 1) é necessário calcular o valor da cópula densidade c_Θ em cada um dos pontos (\hat{u}_i, \hat{v}_i) e em muitos casos este valor é infinito na fronteira do quadrado unitário ((18)).

A escolha da f.d.a. conjunta que melhor se ajusta aos dados será feita através do critério de Akaike (AIC) ((15)) e da comparação entre os valores amostrais e ajustados das medidas tau de Kendall (τ_K) e rho de Spearman (ρ_S).

O valor do AIC é dado por $L - n_p$, onde L é o valor da função (5 – 1), para os valores dos parâmetros ajustados e para a pseudo-amostra, e n_p é o número de parâmetros da cópula C_Θ . Para o cálculo de τ_K e ρ_S amostrais precisamos da definição de cópula empírica.

Sejam $u_{(1)} \leq u_{(2)} \leq \dots \leq u_{(n)}$ e $v_{(1)} \leq v_{(2)} \leq \dots \leq v_{(n)}$ as estatísticas de ordem de uma amostra obtida de uma cópula C .

Definição 22. (Cópula Empírica). A cópula empírica C_n é definida nos pontos $\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$ por

$$C_n\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{\{u_k \leq u_{(i)}, v_k \leq v_{(j)}\}}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Deheuvels ((9)) provou que C_n converge uniformemente para C quando o tamanho da amostra tende ao infinito. Nelsen ((21)) mostrou que os estimadores amostrais para as medidas tau de Kendall, ($\hat{\tau}_K$), e rho de Spearman, ($\hat{\rho}_S$), para uma amostra de tamanho n podem ser computados a partir da cópula empírica:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_K &= \frac{2n}{n-1} \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n C_n\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) C_n\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j-1}{n}\right) \\ &\quad - \frac{2n}{n-1} \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n C_n\left(\frac{i}{n}, \frac{j-1}{n}\right) C_n\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j}{n}\right) \text{ e} \\ \hat{\rho}_S &= \frac{12}{n^2-1} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left[C_n\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) - \frac{i}{n} \cdot \frac{j}{n} \right] \end{aligned}$$

Os valores ajustados de τ_K e ρ_S são calculados a partir de \hat{C}_Θ ((15)).

Para a escolha das cópulas a serem ajustadas, o critério adotado foi a estrutura de dependência de cauda que modelam:

- (i) *Cópula normal*: os seus coeficientes de dependência de cauda são iguais a zero. As cópulas quota superior de Fréchet (cópula M), quota inferior de Fréchet (cópula W) e independente (cópula Π) são casos especiais da cópula normal e, então, a cópula normal pode ser pensada como a estrutura de dependência que varia entre a dependência positiva perfeita e a dependência negativa perfeita;
- (iii) *Cópula Clayton*: é uma cópula Arquimediana que possui coeficiente de dependência de cauda inferior-inferior distinto de zero e os demais coeficientes de dependência de cauda iguais a zero;
- (iv) *Cópula Gumbel*: é uma cópula Arquimediana que possui coeficiente de dependência de cauda superior-superior distinto de zero e os demais coeficientes de dependência de cauda iguais a zero;
- (ii) *Cópula BB7*: essa cópula possui 2 parâmetros, θ e δ , o que possibilita uma maior flexibilidade para a modelagem de uma distribuição. O parâmetro θ determina o coeficiente de dependência de cauda superior-superior e o parâmetro δ , o coeficiente de dependência de cauda inferior-inferior;

- (v) *Cópula t de Student*: essa cópula possui 2 parâmetros, o número de graus de liberdade e ρ . Todos os coeficientes de dependência de cauda são determinados por ambos os parâmetros; e
- (vi) *Cópula FGM*: é empregada em modelos onde exista uma pequena dependência entre as variáveis aleatórias envolvidas. Assim, será ajustada apenas na Seção 5.4. Todos os coeficientes de cauda da cópula FGM são iguais a zero.

5.2

Modelagem da distribuição conjunta dos log-retornos das taxas para a estrutura a termo pré-fixada de 1 (um) ano e de 2 (dois) anos

Os gráficos das séries temporais das taxas, interpoladas, para a estrutura a termo pré-fixada de 1 ano e de 2 anos, no período de 02/01/2003 a 17/04/2008, são dados nas Figuras 5.1 e 5.3, respectivamente; as Figuras 5.2 e 5.4 trazem os gráficos das séries temporais dos log-retornos dessas taxas no período de 03/01/2003 a 17/04/2008.

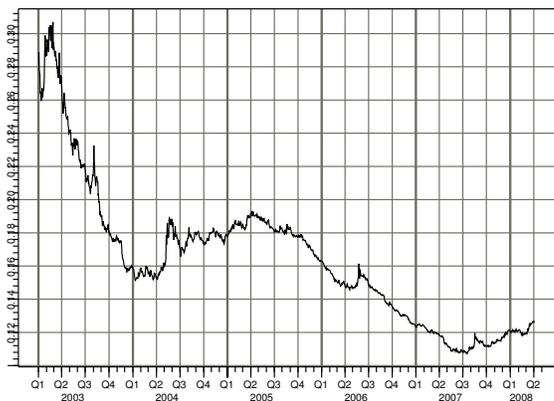


Figura 5.1: Taxas de 1 ano, de 02/01/2003 a 17/04/2008.

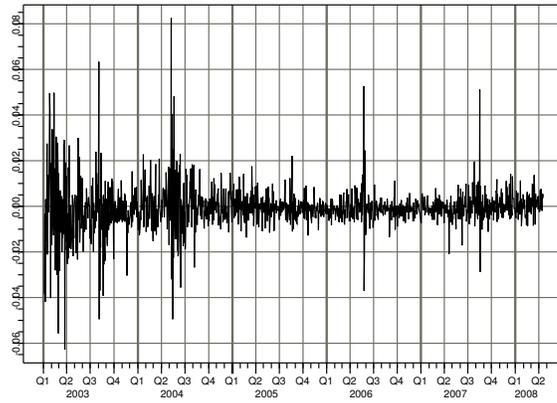


Figura 5.2: Log-retornos das taxas de 1 ano, de 03/01/2003 a 17/04/2008.

A correlação linear amostral dos log-retornos é igual a 0,8979, o que denota uma elevada correlação linear positiva dos dados.



Figura 5.3: Taxas de 2 anos, de 02/01/2003 a 17/04/2008.

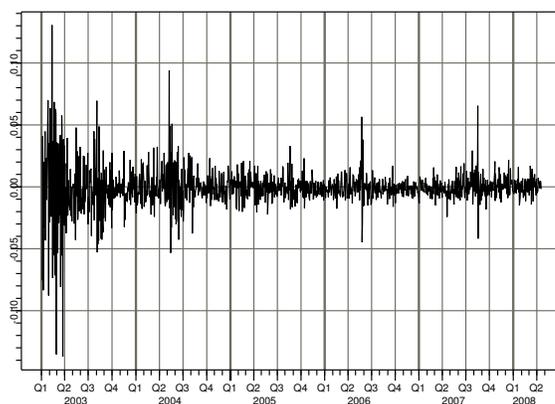


Figura 5.4: Log-retornos das taxas de 2 anos, de 03/01/2003 a 17/04/2008.

Antes de seguir o modelo descrito na Seção 5.1, vamos supor que a f.d.a. conjunta dos log-retornos pode ser modelada por uma distribuição normal bivariada.

De modo natural, para obter a f.d.a. ajustada bivariada normal usaremos como estimadores para as médias e para os elementos da matriz de variância populacionais os valores obtidos para as médias e variâncias amostrais. Sabemos que, nesse caso, as f.d.a.'s marginais são distribuições normais, o que, como veremos, não condiz com as características apresentadas pelos dados.

Na Figura 5.5 vemos o gráfico de dispersão dos dados simulados a partir de uma distribuição normal bivariada - ajustada pelas média e matriz de variância amostrais - e o gráfico de dispersão dos log-retornos reais. Ambos os gráficos possuem iguais número de pontos.

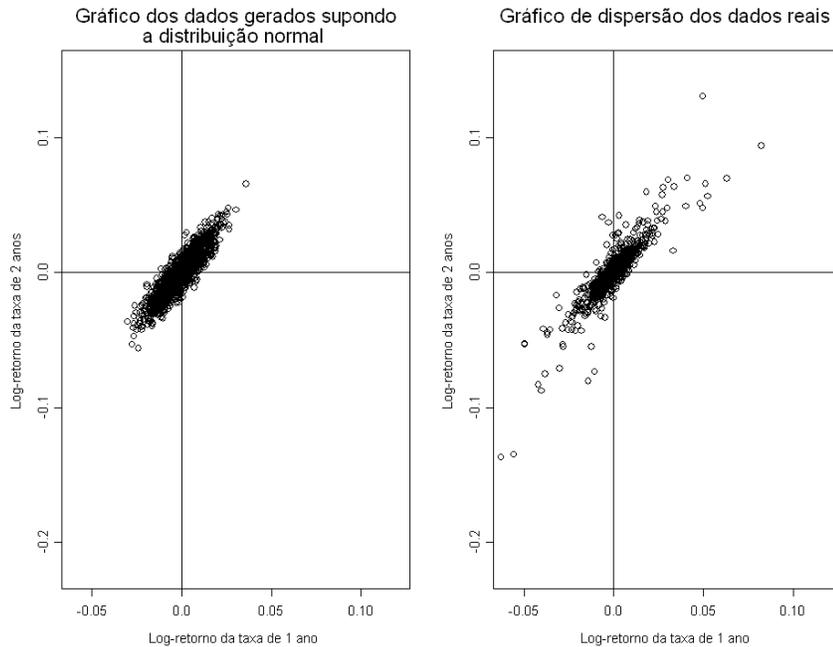


Figura 5.5: Gráficos de dispersão dos dados simulados a partir de uma distribuição normal bivariada e dos dados dos log-retornos das taxas de 1 e de 2 anos.

Notamos em ambos os gráficos o reflexo do elevado valor do coeficiente de correlação linear presente na amostra: os dados apresentam-se distribuídos em torno de uma reta com coeficiente angular positivo.

Os dados simulados normais seguem o comportamento conjunto dos retornos no centro da distribuição, mas não capturaram a observada dependência homogênea de cauda existente. Portanto, o coeficiente de correlação linear não descreve a estrutura de dependência existente. Assim, temos uma motivação para ajustar cópulas aos dados com o objetivo de obter um modelo que capture não somente a dependência linear, mas também outras estruturas de dependência existentes, em particular, a dependência de cauda.

O teste de Jarque-Bera rejeita a normalidade para as distribuições do log-retorno das taxas de 1 e de 2 anos; na Figura 5.6 vemos que os qq-plots (distribuição normal) sugerem que as f.d.a.'s marginais possuem caudas mais pesadas do que as apresentadas pela distribuição normal.

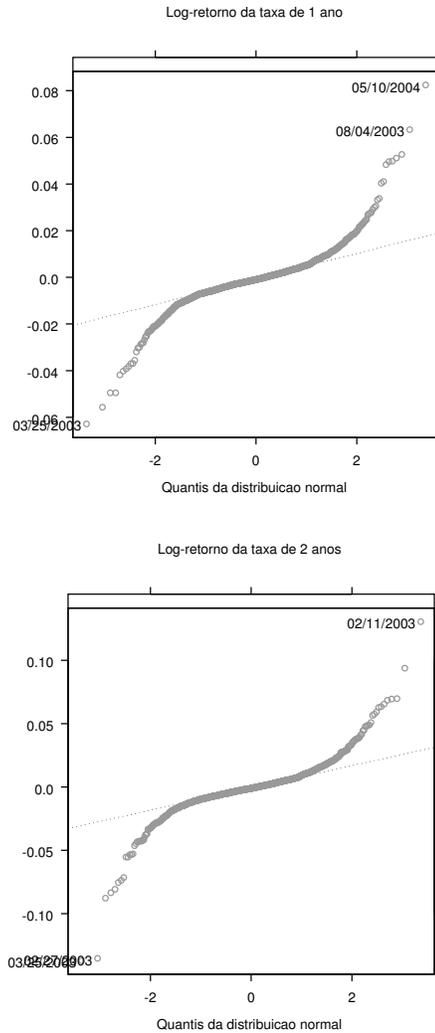


Figura 5.6: QQ plot (distribuição normal) para os log-retornos das taxas de 1 e de 2 anos

Para o ajuste de um modelo semi-paramétrico GPD aos dados, os limiares serão determinados a partir da análise dos gráficos das médias dos excessos para as caudas superior e inferior das séries dos log-retornos das taxas de 1 ano e de 2 anos, que são dados na Figura 5.7.

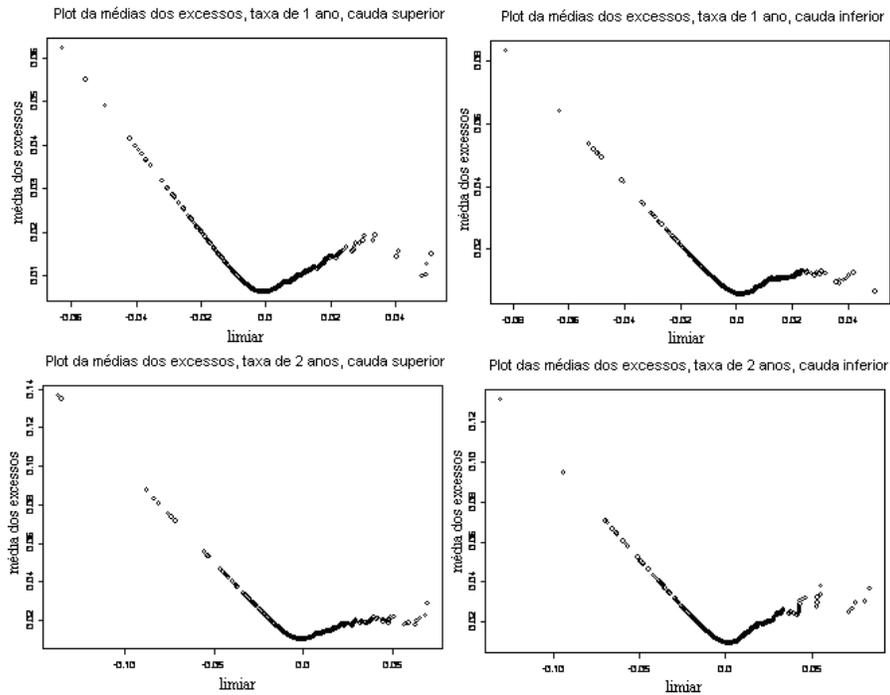


Figura 5.7: Gráfico das médias dos excesso das caudas inferior e superior do log-retorno das taxas de 1 ano e de 2 anos.

Os modelos semi-paramétricos ajustados caracterizam-se pelos valores dos limiares usados na modelagem, pelos percentuais dos dados que excedem os limiares, superior e inferior, e pelas estimativas dos parâmetros da distribuição GPD. Todos esses valores estão expressos na Tabela 5.1.

	Log-retorno	
	1 ano	2 anos
limiar superior	0,015	0,010
limiar inferior	-0,018	-0,010
porcentagem dos dados que excedem o limiar superior	3,9%	14,9%
porcentagem dos dados que excedem o limiar inferior	3,1%	15,1%
parâmetro ξ para a cauda superior	0,19368	0,27187
parâmetro ξ para a cauda inferior	0,02318	0,38127
parâmetro β para a cauda superior	0,00980	0,00931
parâmetro β para a cauda inferior	0,01050	0,00804

Tabela 5.1: Características dos modelos semi-paramétricos GPD ajustados para os log-retornos das taxas de 1 e de 2 anos.

Para verificar se a distribuição GPD, ajustada como acima, é adequada para modelar as caudas da distribuição dos log-retornos, devemos analisar os qq-plots dos excessos em relação aos limiares superior e inferior versus os quantis dos modelos ajustados dados nas Figuras 5.8 e 5.9. Tais qq-plots indicam que as distribuições GPD adotadas modelam adequadamente os comportamentos das distribuições marginais dos log-retornos em suas caudas inferior e superior

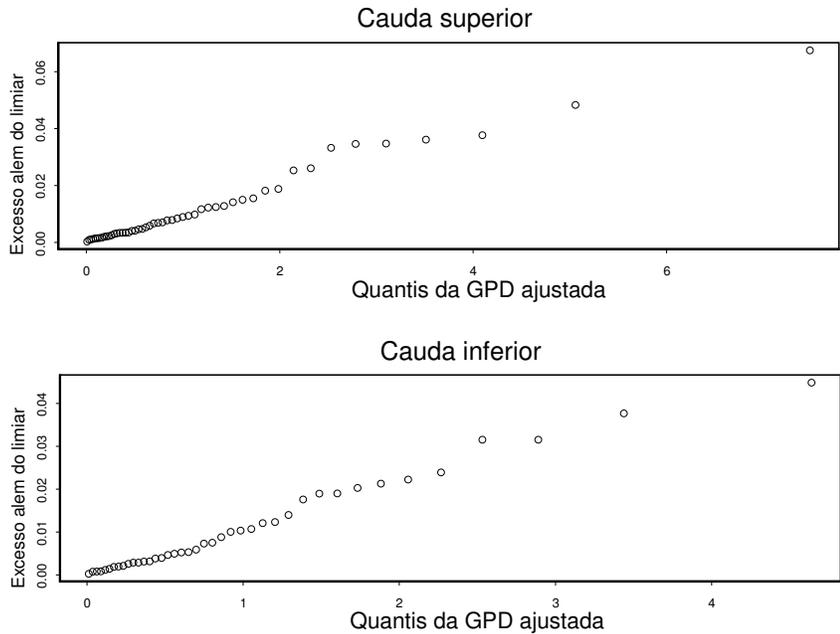


Figura 5.8: QQ plots dos excessos em relação aos limiares superior e inferior, especificados, versus os quantis do modelo ajustado para o log-retorno da taxa de 1 ano.

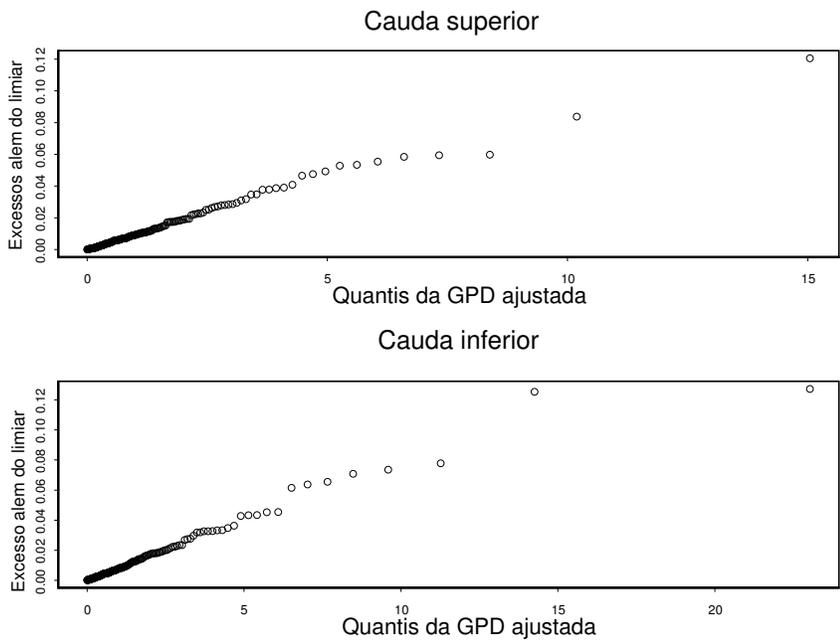


Figura 5.9: QQ plots dos excessos em relação aos limiares superior e inferior, especificados, versus os quantis do modelo ajustado para o log-retorno da taxa de 2 anos.

Na Figura 5.10 são dados os qq plots dos log-retornos reais versus os log-retornos simulados a partir da distribuição marginal ajustada. A aproximada linearidade dos qq plots dessa figura constata que o modelo semi-paramétrico GPD ajustado aos dados é uma boa descrição das f.d.a.'s marginais dos log-retornos das taxas pré-fixadas de 1 ano e de 2 anos.

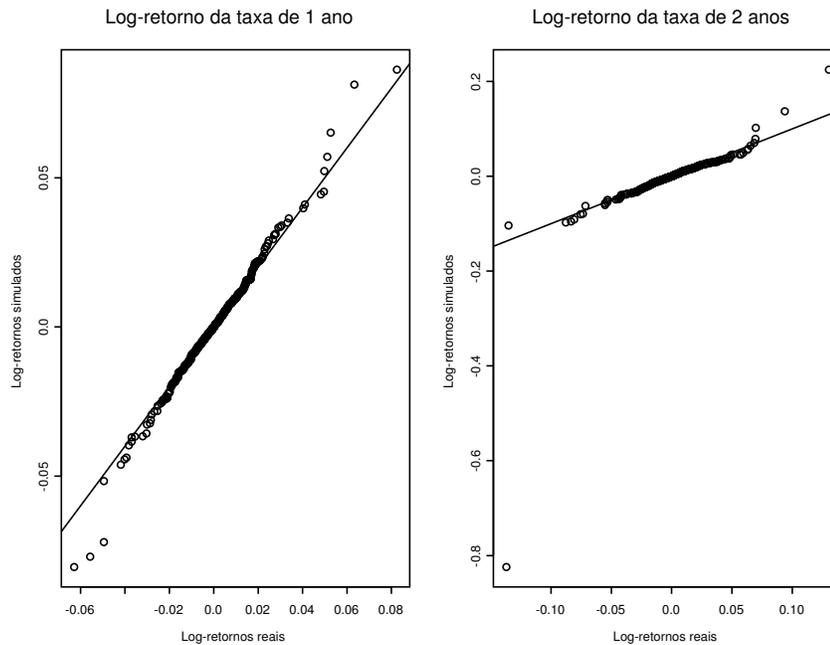


Figura 5.10: Gráfico dos dados dos log-retornos simulados versus os log-retornos reais das taxas de 1 e de 2 anos.

Os log-retornos simulados a partir dos modelos semi-paramétricos GPD capturam o comportamento marginal dos log-retornos reais, mas não o comportamento conjunto, o que é esperado pois as variáveis uniformes usadas para simular cada um dos log-retornos são independentes.

O gráfico da dispersão dos retornos gerados a partir dos modelos semi-paramétricos GPD ajustados para as distribuições marginais e o gráfico dos log-retornos reais são dados na Figura 5.11.

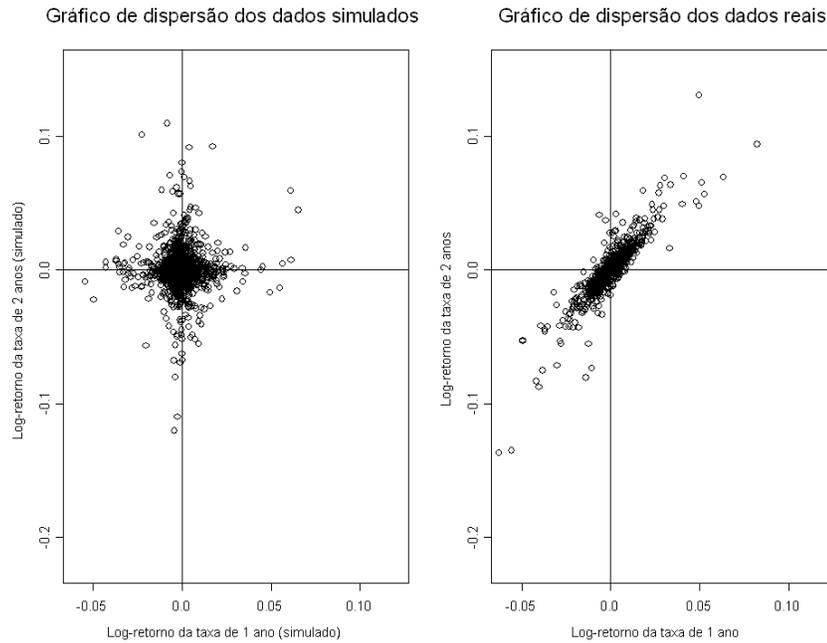


Figura 5.11: Gráficos de dispersão dos log-retornos simulados (após os ajustes das f.d.a.'s marginais) e reais das taxas de 1 e de 2 anos .

Assim, quando comparamos o gráfico descrito acima com o gráfico dos log-retornos reais vemos que além da modelagem marginal, é necessário modelar a distribuição bivariada. Tal modelagem será feita através do ajuste de uma cópula.

A partir dos ajustes das f.d.a.'s marginais, obtemos a pseudo-amostra, também conhecida como conjunto suporte da cópula, cujo gráfico de dispersão é dado na Figura 5.12.

Vale notar que os pontos plotados na Figura 5.12 parecem distribuir-se em torno da diagonal principal do quadrado $[0,1]$, o que é esperado dado o elevado valor do coeficiente de correlação linear dos dados.

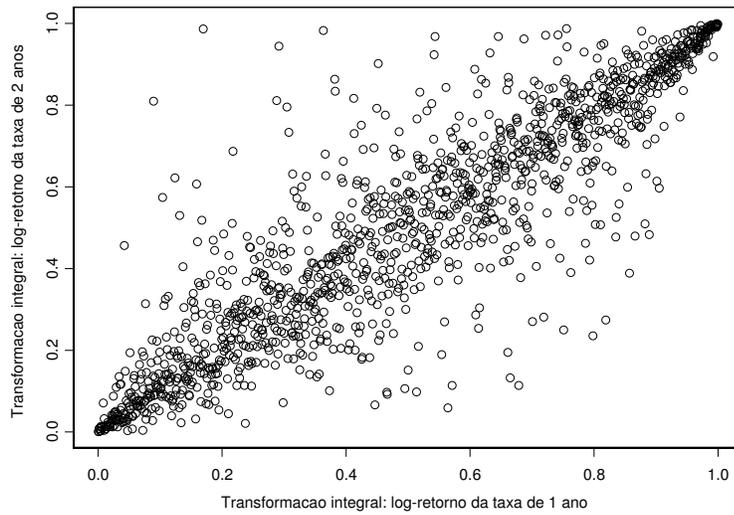


Figura 5.12: Gráfico da pseudo amostra obtida (ou conjunto suporte da cópula) para os log-retornos das taxas de 1 e de 2 anos.

Portanto, vemos que a cópula empírica capturou a dependência linear existente entre os dados ($\hat{\rho}_S = 0,8936$); tal conclusão também é obtida da análise do gráfico das curvas de nível da f.d.p. determinada a partir da cópula empírica, Figura 5.13.

$\rho = 0,9167$ e $\nu = 2,2309$, é a que melhor se ajusta aos dados.

O resultado da simulação de dados a partir da distribuição bivariada obtida através da combinação das distribuições marginais semi-paramétricas GPD, ajustadas para os log-retornos, e da cópula t-Student, ajustada como acima, é apresentado no gráfico de dispersão dado na Figura 5.14. É, também, apresentado o gráfico de dispersão dos log-retornos reais.

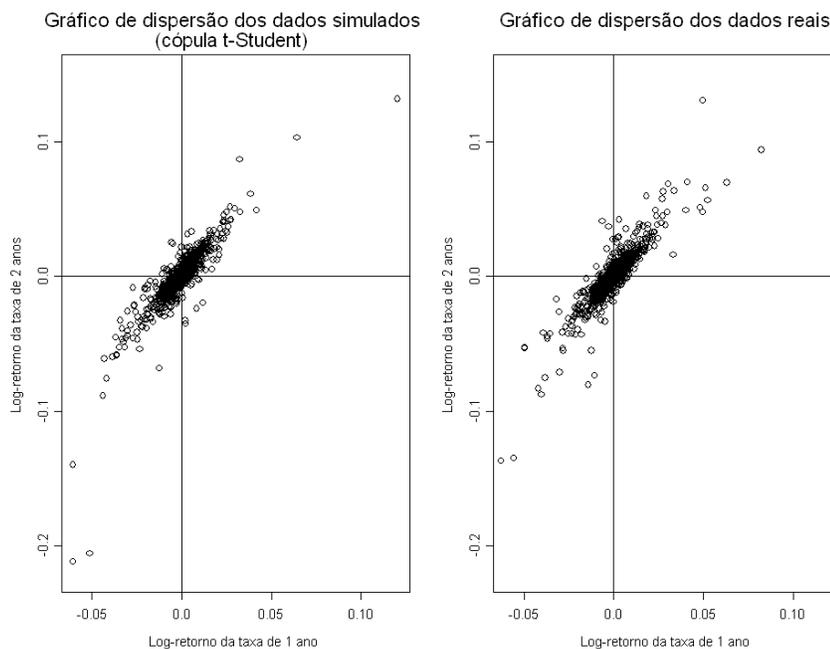


Figura 5.14: Gráficos de dispersão dos dados simulados a partir da cópula t-Student ajustada e dos dados dos log-retornos das taxas de 1 e de 2 anos.

Do exposto nos parágrafos anteriores, concluímos que as f.d.a.'s marginais dos log-retornos das taxas de 1 ano e de 2 anos podem ser modeladas com o emprego de modelos semi-paramétricos GPD.

Os valores obtidos para as medidas tau de Kendall e rho de Spearman para a cópula t-Student ajustada estão bem próximos dos valores amostrais obtidos a partir da pseudo-amostra. Em particular, o valor do rho de Spearman nos permite afirmar que a dependência linear existente nos dados foi capturada pelo modelo proposto.

O valor para o tau de Kendall ajustado ($\hat{\tau}_K = 0,7385$) indica que, de modo geral, aumentos (reduções) nos log-retornos das taxas de 1 ano são acompanhados de aumentos (reduções) nos log-retornos das taxas de 2 anos e vice-versa. O conceito de coeficientes de cauda nos permite estender essa relação de dependência entre os log-retornos das taxas de 1 ano e de 2 anos

quando consideramos valores fora dos intervalos determinados pelos limiares pré-estabelecidos, como vemos nos dois parágrafos seguintes.

Os valores dos coeficientes de dependência homogênea de cauda para a cópula t-Student ajustada, conforme (3 – 18), são dados por $\lambda_{UU} = \lambda_{LL} = 0,8097$ e, portanto, intuitivamente, esperamos que valores elevados (reduzidos) do log-retorno da taxa de 1 ano sejam acompanhados por valores elevados (reduzidos) do log-retorno da taxa de 2 anos e vice-versa.

A interpretação dos valores obtidos para os coeficientes de dependência heterogênea de cauda, $\lambda_{UL} = \lambda_{LU} = 0,0006$, a partir de (3 – 19), segue os passos do parágrafo anterior: esperamos que valores elevados (reduzidos) do log-retorno da taxa de 1 ano não sejam acompanhados por valores reduzidos (elevados) do log-retorno da taxa de 2 anos e vice-versa.

Não ajustamos uma cópula FGM aos dados. De fato, a cópula FGM é adequada para modelar v.a.'s que apresentam pequena dependência e o valor do coeficiente de correlação amostral é elevado.

5.3

Modelagem da distribuição conjunta do log-retorno das taxas para a estrutura a termo pré-fixada de 1 (um) ano e do log-retorno do índice do Ibovespa

O objetivo desta Seção é estudar a estrutura de dependência existente entre o log-retorno das taxas, interpoladas, para a estrutura a termo pré-fixada de 1 ano, e o log-retorno do índice do Ibovespa, no período de 03/01/2003 a 04/04/2008, através do ajuste de uma cópula aos dados. O gráfico da série temporal do log-retorno do índice Ibovespa é dado na Figura 5.15.

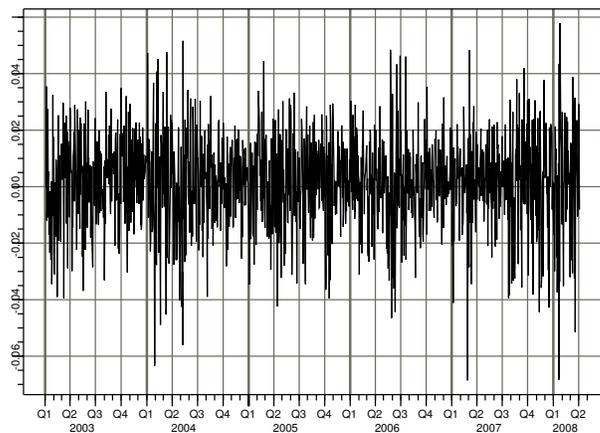


Figura 5.15: Log-retorno do índice Ibovespa, de 03/01/2003 a 04/04/2008.

A correlação linear amostral é igual a $-0,4175$, o que podemos classificar como uma correlação linear negativa moderada.

Na Figura 5.16 vemos o gráfico de dispersão dos dados simulados a partir de uma distribuição normal bivariada - ajustada pelas média e matriz de variância amostrais - e o gráfico de dispersão dos log-retornos reais. Ambos os gráficos possuem iguais número de pontos; em ambos os gráficos podemos notar a influência do coeficiente de correlação linear negativo. Vemos, também, que a distribuição normal bivariada não é um modelo adequado para a f.d.a. conjunta. O Teste de Jarque-Bera rejeita normalidade para ambas as v.a.'s em análise.

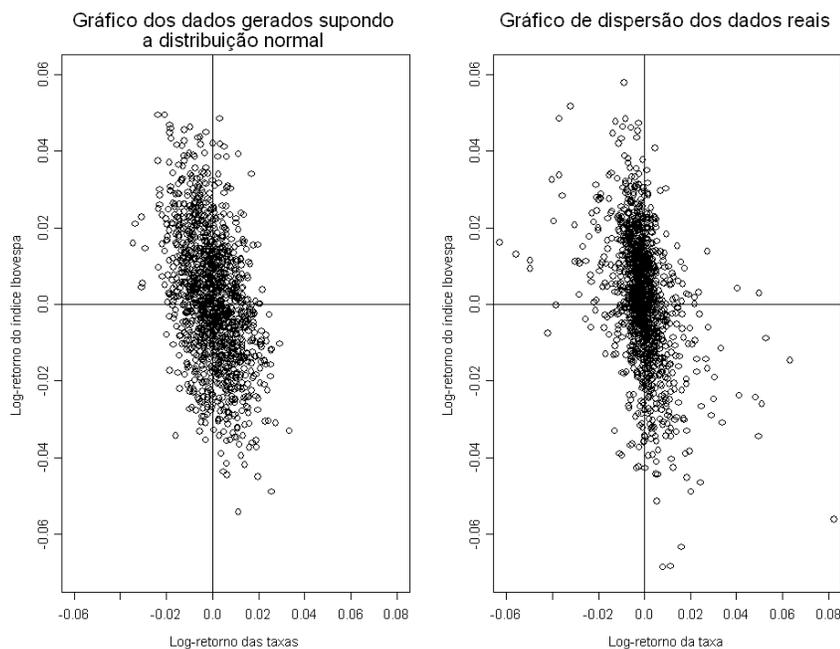


Figura 5.16: Gráficos de dispersão dos dados simulados a partir de uma distribuição normal bivariada e dos dados dos log-retornos da taxa de 1 ano e do índice Ibovespa.

A análise realizada para obter os modelos semi-paramétricos GPD para os log-retornos em tela segue os mesmos passos da Seção 5.2 e será omitida. Os valores constantes da Tabela 5.3 caracterizam os modelos ajustados para as f.d.a.'s marginais.

	Log-retorno	
	1 ano	Ibovespa
limiar superior	0,015	0,030
limiar inferior	-0,018	-0,030
porcentagem dos dados que excedem o limiar superior	3,9%	3,4%
porcentagem dos dados que excedem o limiar inferior	3,2%	4,5%
parâmetro ξ para a cauda superior	0,19368	0,12599
parâmetro ξ para a cauda inferior	0,02318	0,05541
parâmetro β para a cauda superior	0,00980	0,00639
parâmetro β para a cauda inferior	0,01050	0,00785

Tabela 5.3: Características dos modelos semi-paramétricos GPD ajustados para os log-retornos da taxa de 1 e do índice Ibovespa.

Na Figura 5.17 são dados os qq plots dos log-retornos reais versus os log-retornos simulados a partir da distribuição marginal ajustada. Como dito na Seção 5.2, a aproximada linearidade dos qq plots dessa figura constata que o modelo semi-paramétrico GPD ajustado é uma boa descrição das f.d.a.'s marginais.

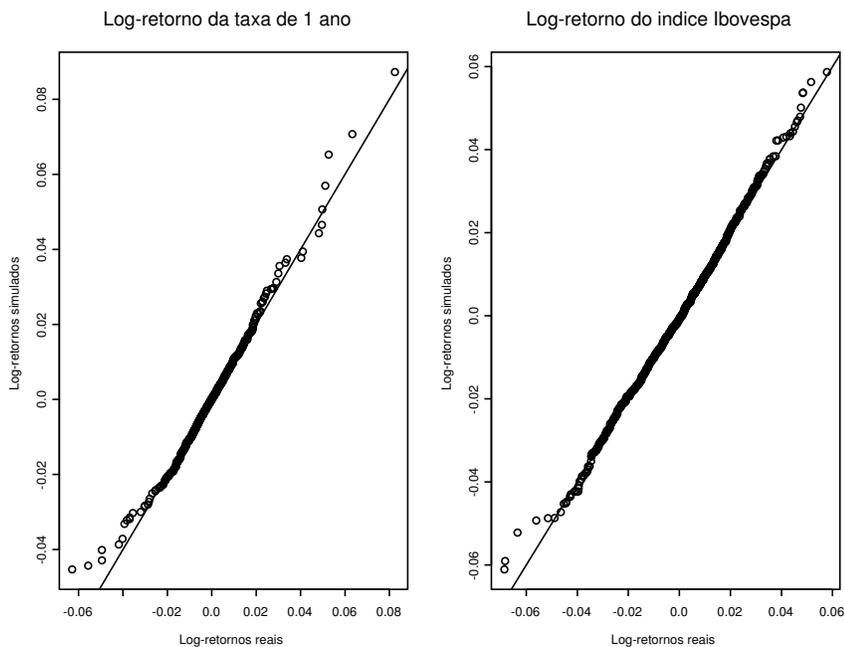


Figura 5.17: Gráfico dos dados dos log-retornos simulados versus os log-retornos reais para os log-retornos da taxa de 1 e do índice Ibovespa.

O gráfico da dispersão dos log-retornos gerados a partir dos modelos semi-paramétricos GPD ajustados para as f.d.a.'s marginais e o gráfico dos log-retornos reais são dados na Figura 5.18; quando comparamos tais gráficos, vemos que é necessário modelar a f.d.a. bivariada.

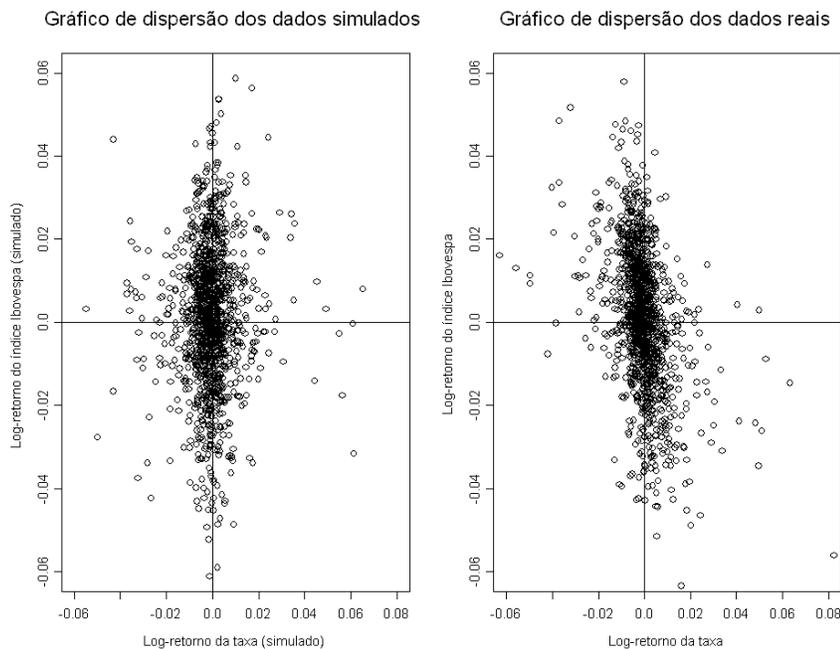


Figura 5.18: Gráficos de dispersão dos log-retornos da taxa de 1 ano e do índice do Ibovespa simulados e reais.

A partir dos ajustes das f.d.a.'s marginais, obtemos a pseudo-amostra, ou conjunto suporte da cópula, cujo gráfico de dispersão é dado na Figura 5.19.

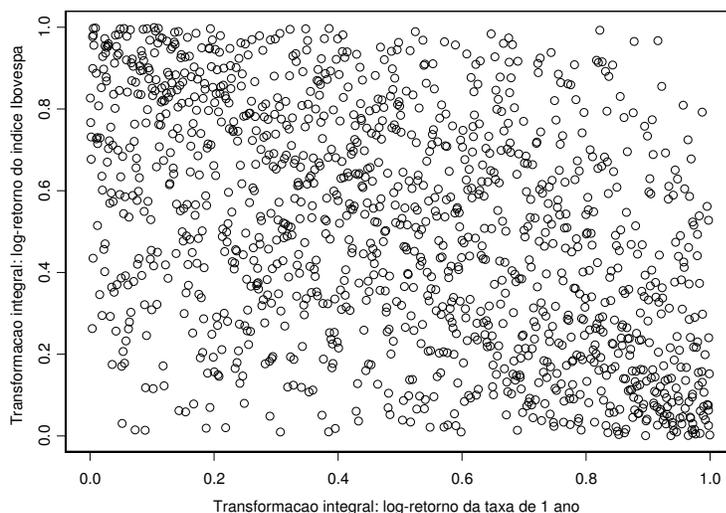


Figura 5.19: Gráfico da pseudo amostra obtida (ou conjunto suporte da cópula) para os log-retornos da taxa de 1 e do índice Ibovespa.

Notemos que a cópula empírica capturou o fato da amostra apresentar coeficiente de correlação linear negativo.

Na Tabela 5.4 encontramos os valores ajustados do tau de Kendall, ($\hat{\tau}_K$), do rho de Spearman, ($\hat{\rho}_S$) e de L , ($5 - 1$), para as cópulas Gaussiana, Clayton, Gumbel, BB7 e t-Student; os valores amostrais de τ_K e ρ_S também são dados.

Cópula	τ de Kendall	ρ de Spearman	Valor de L
Gaussiana	-0,3043	-0,4432	154,62
Clayton	-0,1047	-0,1558	61,81
Gumbel	-0,1003	-0,1205	50,72
BB7	0,0054	0,0081	-4,47
t-Student	-0,3061	-0,4457	156,22
Empírica	-0,3138	-0,4513	

Tabela 5.4: Dados das cópulas ajustadas e empírica para os log-retornos da taxa de 1 ano e do índice do Ibovespa.

Com base no valor do AIC, 154, 22, a cópula t-Student (com parâmetros $\rho = -0,4625$ e $\nu = 20,2046$) é aquela que nos dá o melhor ajuste; porém,

vale ressaltar o valor do AIC obtido para a cópula Gaussiana ajustada (com parâmetro $\rho = -0,4600$) foi igual a 153,62. Como esperado, os valores τ_K e ρ_S para essa duas cópulas também estão muito próximos.

O resultado da simulação de dados a partir da f.d.a. bivariada obtida através da combinação das distribuições marginais semi-paramétricas GPD, ajustadas para os log-retornos, e das cópulas t-Student e Gaussiana, ajustadas como acima, é apresentado no gráfico de dispersão dado na Figura 5.20. É, também, apresentado o gráfico de dispersão dos log-retornos reais.

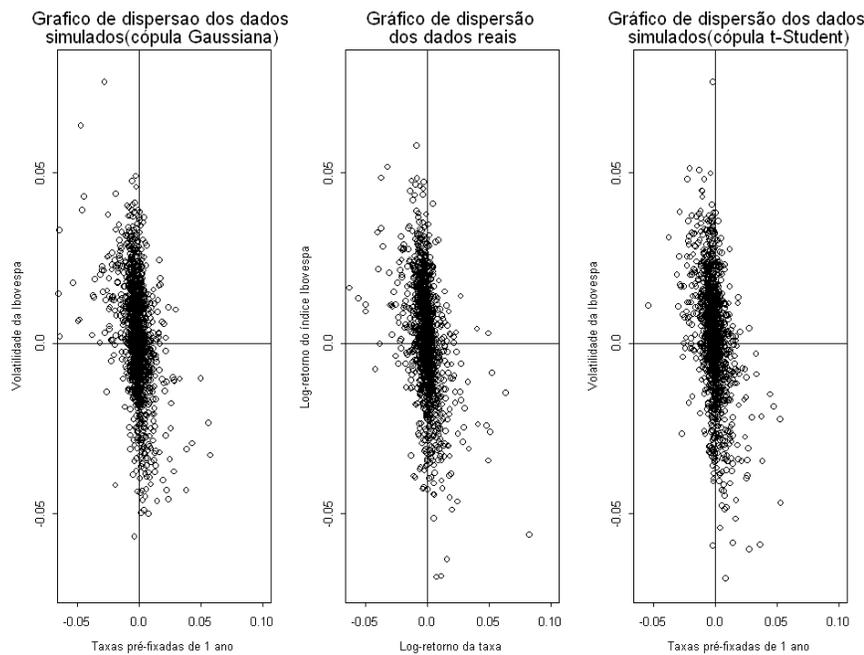


Figura 5.20: Gráficos de dispersão dos dados simulados a partir das cópulas t-Student e gaussianas ajustadas e dos dados dos log-retornos da taxa de 1 ano e do índice do Ibovespa.

Concluimos que as f.d.a.'s marginais dos log-retornos da taxa de 1 ano e do índice do Ibovespa podem ser modeladas com o emprego de modelos semi-paramétricos GPD.

Para a cópula t-Student ajustada, segue de (3 – 18) que $\lambda_{UU} = \lambda_{LL} = 1,5618 \times 10^{-9}$ e, portanto, intuitivamente, esperamos que a ocorrência de valores elevados (reduzidos) do log-retorno da taxa de 1 ano não seja acompanhada da ocorrência de valores elevados (reduzidos) do log-retorno do índice do Ibovespa e vice-versa.

Como $\lambda_{UL} = \lambda_{LU} = 0,0317$, (3 – 19), concluimos que é pouco provável que a ocorrência de valores elevados (reduzidos) do log-retorno da taxa de 1 ano

seja acompanhada da ocorrência de valores reduzidos (elevados) do log-retorno do índice Ibovespa.

Vale lembrar que os coeficientes de dependência de cauda da cópula Gaussiana são iguais a zero.

Com relação à f.d.a. bivariada, dada a pequena diferença entre os valores do AIC para as cópulas t-Student e Gaussiana, bem como os valores de τ_K , ρ_S e dos coeficientes de dependência de cauda obtidos, podemos afirmar que ambas as cópulas podem ser utilizadas para modelar a f.d.a. conjunta das v.a.'s em análise. De fato, a cópula Gaussiana é um caso limite da cópula t-Student, (10), e para $\nu > 20$ a distribuição bivariadas t-Student pode ser aproximada pela distribuição Gaussiana (normal).

Com base nos fundamentos econômicos, é esperado que uma elevação (redução) dos valores dos log-retornos das taxas de 1 ano seja acompanhada de uma redução (elevação) dos log-retornos do índice Ibovespa, fato que justifica a ocorrência de valor negativo para a correlação amostral. Os valores obtidos para as medidas tau de Kendall e rho de Spearman para as cópulas t-Student e Gaussiana ajustadas mostram que os modelos propostos capturam tal característica dos dados. Porém, como vimos acima, obtemos valores baixos para os coeficientes de dependência heterogênea de cauda para as cópulas ajustadas, na verdade esses coeficientes são iguais a zero no caso da cópula Gaussiana.

Os fatos listados no parágrafo acima parecem demonstrar uma inconsistência dos modelos propostos, mas, de fato, exprimem um resultado já conhecido da literatura econômica: as medidas de dependência entre dados econômicos não são mantidas quando da ocorrência de valores extremos.

A ocorrência de um valor moderado para a correlação linear amostral torna sem sentido o ajuste de uma cópula FGM aos dados.

5.4

Modelagem da distribuição conjunta do log-retorno das taxas para a estrutura a termo pré-fixada de 1 (um) ano e do log-retorno da taxa PTAX (Gerin), 6 meses a frente

A Gerência-Executiva de Relacionamento com Investidores (Gerin) do Bacen foi criada em abril de 1999, como parte do arcabouço do regime monetário de metas para a inflação. Seu objetivo é aperfeiçoar a comunicação entre o Bacen e o setor privado, com foco sobre os investidores domésticos e externos.

Dentre outras atribuições, a Gerin também produz seus próprios relatórios, dentre eles, as Séries Temporais das Expectativas de Mercado que

são planilhas atualizadas semanalmente, contendo os dados diários das expectativas de mercado para as principais variáveis da economia desde 2001.

A Pesquisa de Expectativas de Mercado foi iniciada em maio de 1999. Seu objetivo é monitorar a evolução do consenso de mercado para as principais variáveis macroeconômicas, de forma a gerar subsídios para o processo decisório da política monetária.

Atualmente, a pesquisa acompanha as expectativas de mercado para diferentes índices de preços, crescimento do PIB e da produção industrial, taxa de câmbio, taxa Selic, variáveis fiscais e indicadores do setor externo.

Dentre as possibilidades de consulta, a Gerin disponibiliza os dados fornecidos pelas instituições Top 5, isto é, os dados fornecidos pelas 5 (cinco) instituições com maior grau de acuidade em suas projeções de curto, médio e longo prazos; a classificação das instituições tem atualização mensal.

Dentre as expectativas citadas, vale ressaltar que a taxa de câmbio de referência do dólar dos Estados Unidos, conhecida no mercado como a taxa PTAX, é a média das taxas efetivas de transação no mercado interbancário, ponderada pelo volume de transações. As transações fechadas em taxas que mais se distanciam da média do mercado (outliers) e as transações evidenciando formação artificial de preço ou contrárias às práticas regulares do mercado são excluídas dos cálculos.

As expectativas para a PTAX usadas neste trabalho correspondem às medianas das expectativas das instituições Top 5 para o médio prazo (mediana das instituições classificadas como Top 5 para as projeções de médio prazo) para 6 meses a frente.

Nesta Seção, estudaremos a estrutura de dependência existente entre o log-retorno das taxas, interpolada, para a estrutura a termo pré-fixada de 1 ano, e o log-retorno da expectativa para a taxa PTAX, 6 meses a frente, no período de 03/01/2003 a 04/04/2008. O gráfico da série temporal do log-retorno da PTAX é dado na Figura 5.21.

O coeficiente de correlação amostral é igual a 0,0275. Os valores amostrais de τ_K e de ρ_S são iguais a 0,0304 e 0,0459, respectivamente.

Na Figura 5.22 vemos o gráfico de dispersão dos dados simulados a partir de uma distribuição normal bivariada - ajustada pelas média e matriz de variância amostrais - e o gráfico de dispersão dos log-retornos reais. Ambos os gráficos possuem iguais número de pontos.

Uma análise dos valores para as expectativas das taxas PTAX, no período considerado, nos mostra que diversas vezes as instituições financeiras informaram valores iguais para os dias de uma mesma semana; por isso, a série do log-retorno apresenta diversos aglomerados (*clusters*); uma abordagem mais

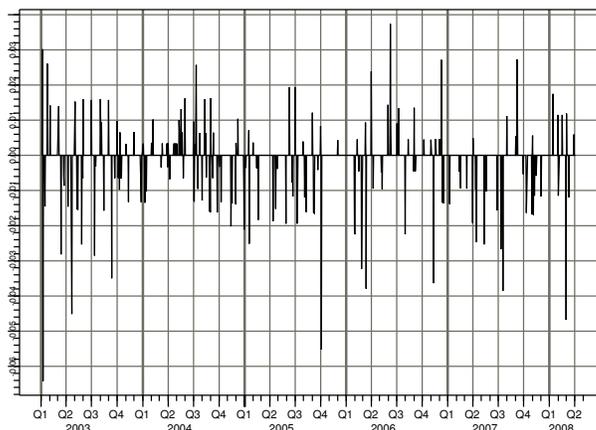


Figura 5.21: Log-retorno da taxa PTAX, de 03/01/2003 a 04/04/2008.

adequada seria considerar valores semanais, como mediana, valores máximos ou mínimos, para essas expectativas, porém, infelizmente, a escassez de dados não nos permite adotá-la. Apesar desse fato, podemos modelar a f.d.a do log-retorno da expectativa para a taxa PTAX através do modelo semi-paramétricos GPD.

A análise realizada para obter os modelos semi-paramétricos GPD para os log-retornos em tela segue os mesmos passos da Seção 5.2 e será omitida. Os valores constantes da Tabela 5.5 caracterizam os modelos ajustados para as f.d.a.'s marginais.

O gráfico da dispersão dos log-retornos gerados a partir dos modelos semi-paramétricos GPD ajustados para as f.d.a.'s marginais e o gráfico dos log-retornos reais são dados na Figura 5.23. Notemos a semelhança entre os gráficos.

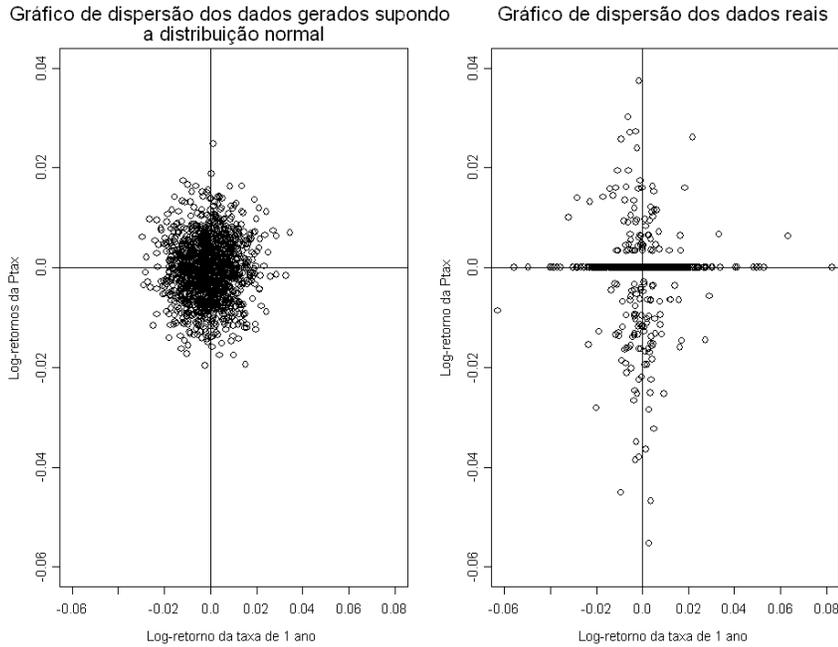


Figura 5.22: Gráficos de dispersão dos dados simulados a partir de uma distribuição normal bivariada e dos dados dos log-retornos da taxa de 1 e da taxa PTAX.

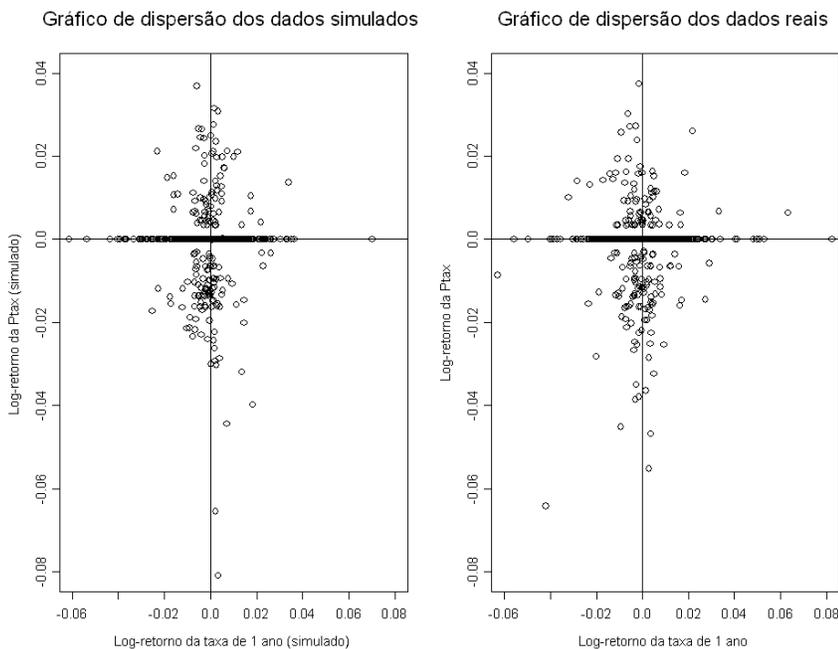


Figura 5.23: Gráficos de dispersão dos log-retornos da taxa de 1 ano e da taxa PTAX simulados e reais.

	Log-retorno	
	1 ano	PTAX
limiar superior	0,015	0,008
limiar inferior	-0,018	-0,018
porcentagem dos dados que excedem o limiar superior	3,9%	3,0%
porcentagem dos dados que excedem o limiar inferior	3,2%	2,0%
parâmetro ξ para a cauda superior	0,19368	-0,19435
parâmetro ξ para a cauda inferior	0,02318	-0,02895
parâmetro β para a cauda superior	0,00980	0,00936
parâmetro β para a cauda inferior	0,01050	0,01230

Tabela 5.5: Características dos modelos semi-paramétricos GPD ajustados para os log-retornos da taxa de 1 e da taxa PTAX.

Os valores do AIC para todas as cópulas ajustadas neste trabalho foram negativos; as cópulas Clayton (AIC= $-0,4587$) e t-Student (AIC= $-0,4957$) apresentaram os maiores valores.

Dados os valores negativos do AIC para as cópulas ajustadas neste trabalho e os valores próximos de zero obtidos para os valores amostrais do coeficiente de correlação linear, do tau de Kendall e do rho de Spearman, a cópula produto parece ser adequada para modelar a f.d.a conjunta. A semelhança entre os gráficos de dispersão dos log-retornos reais e dos log-retornos simulados somente com o ajuste das f.d.a.'s marginais corrobora com a decisão de supor a cópula produto como a mais adequada para o modelo.

Apesar da cópula FGM ser adequada para modelar variáveis aleatórias que apresentam pequena dependência, com base no valor do AIC, esta cópula teve o pior desempenho dentre aquelas ajustadas neste trabalho.