

3

Dependência homogênea e heterogênea de cauda

Neste trabalho, usaremos o conceito de dependência homogênea de cauda, introduzido na década de 60, em conjunto com o conceito de dependência heterogênea de cauda, introduzido por Zhang ((26)), que amplia o escopo de utilização da dependência de cauda na análise de dados. A motivação para o estudo desses coeficientes está no fato de representarem medidas para dependências extremas ou, em outras palavras, medidas de dependência nas caudas de uma distribuição bivariada. No caso de um par de v.a.'s contínuas, os coeficientes de dependência de cauda podem ser expressos somente em função da cópula associada.

Na Seção 3.1 estudaremos as dependência homogênea e heterogênea de cauda; as expressões para os coeficientes de dependência heterogênea de cauda a partir das f.d.a.'s condicionais são obtidas. Nas Seções 3.2 e 3.3 calculamos os coeficientes de dependência de cauda das cópulas Gaussiana e t de Student, respectivamente.

3.1

Dependência de cauda

Nas definições abaixo, consideramos as v.a.'s X e Y , cujas f.d.a.'s contínuas são dadas por F_X e F_Y , respectivamente.

Definição 13. (*Dependência homogênea de cauda: λ_{UU} e λ_{LL}*). *O coeficiente de dependência de cauda superior-superior, que denotaremos por λ_{UU} , onde a letra U é usada como abreviatura da palavra inglesa upper, é definido por*

$$\lambda_{UU} := \lim_{q \nearrow 1} \mathbb{P} \left(Y > F_Y^{(-1)}(q) \mid X > F_X^{(-1)}(q) \right), \quad (3-1)$$

se $\lambda_{UU} \in [0, 1]$ existe. Se $\lambda_{UU} \in (0, 1]$, X e Y são ditas assintoticamente dependentes na cauda superior. O coeficiente da dependência de cauda inferior-inferior, λ_{LL} , onde L refere-se a palavra low, é definido por

$$\lambda_{LL} := \lim_{q \nearrow 1} \mathbb{P} \left(Y \leq F_Y^{(-1)}(1 - q) \mid X \leq F_X^{(-1)}(1 - q) \right), \quad (3-2)$$

se o limite existe. Se $\lambda_{\mathbf{LL}} \in (0, 1]$ as v.a.'s são ditas assintoticamente dependentes na cauda inferior.

Como outros conceitos de dependência, por exemplo o τ de Kendall e a dependência quadrantal ((21)), a dependência homogênea de cauda foi definida para quantificar a ocorrência simultânea de valores grandes (ou pequenos) das v.a.'s X e Y . Porém, na prática, eventos com dependência de cauda associados ao vetor aleatório (X, Y) não ocorrem apenas nas regiões $[x, +\infty) \times [y, +\infty)$ (cauda superior-superior) e $(-\infty, x^*] \times (-\infty, y^*]$ (cauda inferior-inferior). Eles ocorrem também nas regiões $[x, +\infty) \times (-\infty, y^*]$ (cauda superior-inferior) e $(-\infty, x^*] \times [y, +\infty)$ (cauda inferior-superior).

Assim, Zang ((26)) estendeu o conceito de dependência de cauda através da definição de coeficientes que medem, de modo preciso, a dependência de duas v.a.'s nas caudas superior-inferior e inferior-superior; nesse mesmo trabalho, Zang denominou dependência heterogênea de cauda a dependência nessas regiões.

A dependência heterogênea de cauda é caracterizada pelo cálculo dos coeficientes $\lambda_{\mathbf{UL}}$ e $\lambda_{\mathbf{LU}}$, definidos abaixo. A dependência homogênea de cauda ocorre sobre a diagonal principal do quadrado $[0, 1]^2$, enquanto que a dependência heterogênea de cauda é calculada sobre a diagonal secundária; esses fatos ficarão mais claros quando da definição dos coeficientes de dependência de cauda através da cópula associada a (X, Y) .

Definição 14. (*Dependência heterogênea de cauda: $\lambda_{\mathbf{UL}}$ e $\lambda_{\mathbf{LU}}$*). O coeficiente da dependência de cauda superior-inferior é definido por

$$\lambda_{\mathbf{UL}} := \lim_{q \nearrow 1} \mathbb{P}(Y < F_Y^{(-1)}(1 - q) \mid X > F_X^{(-1)}(q)), \quad (3-3)$$

se este limite existe. Finalmente, o coeficiente da dependência de cauda inferior-superior é definido por

$$\lambda_{\mathbf{LU}} := \lim_{q \nearrow 1} \mathbb{P}(Y > F_Y^{(-1)}(q) \mid X < F_X^{(-1)}(1 - q)), \quad (3-4)$$

se este limite existe.

Definição 15. A medida de dependência de cauda total do vetor aleatório $\mathbf{Z}$ é dada pela matriz

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{\mathbf{LU}} & \lambda_{\mathbf{UU}} \\ \lambda_{\mathbf{LL}} & \lambda_{\mathbf{UL}} \end{pmatrix},$$

supondo que esses limites existem.

Se supomos F_X e F_Y contínuas temos a unicidade da cópula C associada a (X, Y) , o que nos permite obter uma expressão para os coeficientes acima somente em função de C :

Teorema 12. Se F_X e F_Y são contínuas e os limites (3-1), (3-2), (3-3) e (3-4) existem então

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 - \lim_{q \nearrow 1} \frac{C(1-q, q)}{1-q} & 2 - \lim_{q \nearrow 1} \frac{1-C(q, q)}{1-q} \\ \lim_{q \nearrow 1} \frac{C(1-q, 1-q)}{1-q} & 1 - \lim_{q \nearrow 1} \frac{C(q, 1-q)}{1-q} \end{pmatrix},$$

onde C é a cópula associada a (X, Y) .

Dem.: Vamos demonstrar o resultado para λ_{UU} :

$$\begin{aligned} \lambda_{UU} &= \lim_{q \nearrow 1} \mathbb{P} \left(Y > F_Y^{(-1)}(q) \mid X > F_X^{(-1)}(q) \right) \\ &= \lim_{q \nearrow 1} \mathbb{P} (F_Y(Y) > q \mid F_X(X) > q) \\ &= \lim_{q \nearrow 1} \frac{\mathbb{P} (F_Y(Y) > q, F_X(X) > q)}{\mathbb{P} (F_X(X) > q)} \\ &= \lim_{q \nearrow 1} \frac{1 - \mathbb{P} (F_X(X) \leq q) - \mathbb{P} (F_Y(Y) \leq q) + \mathbb{P} (F_X(X) \leq q, F_Y(Y) \leq q)}{1 - \mathbb{P} (F_X(X) \leq q)} \\ &= \lim_{q \nearrow 1} \frac{1 - 2q + C(q, q)}{1 - q} \end{aligned}$$

e o resultado segue. ■

Definição 16. Sejam as v.a.'s X e Y como acima. Se os coeficientes de dependência de cauda são todos iguais a zero, então dizemos X e Y são assintoticamente independentes.

O resultado abaixo será útil para simplificar os cálculos para a obtenção dos coeficientes de dependência de cauda das distribuições normal e t simétricas.

Corolário 2. Se $C = \hat{C}$ então $\lambda_{UU} = \lambda_{LL}$. Se C é uma cópula simétrica então $\lambda_{LU} = \lambda_{UL}$.

Dem.: De fato, a cópula de sobrevivência é dada por $\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v)$. ■

O Teorema 12 nos dá a expressão dos coeficientes de dependência de cauda em função da cópula C , que sabemos ser invariante por transformações estritamente crescentes q.c. das v.a.'s envolvidas; assim, segue o

Corolário 3. Os coeficientes de dependência de cauda são invariantes por transformações estritamente crescentes (quase-certamente) de X e Y .

Após enunciar o próximo Teorema, ficará clara a importância do Corolário 3 no cálculo dos coeficientes de dependência de cauda.

Exemplo 12. (Coeficientes de dependência de cauda da cópula FGM). Do Teorema 12 é simples ver que todos os coeficientes de dependência de cauda são iguais a zero. Por exemplo, como a cópula FGM é simétrica, então $\lambda_{UL} = \lambda_{LU}$ e

$$\begin{aligned}\lambda_{UL} = \lambda_{LU} &= 1 - \lim_{q \searrow 1} \frac{q(1-q) + \theta q^2(1-q)^2}{1-q} \\ &= 1 - \lim_{q \searrow 1} (q + \theta q(1-q)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

■

Exemplo 13. (Coeficientes de dependência de cauda da cópula AMH). Do Teorema 12 é simples ver que todos os coeficientes de dependência de cauda são iguais a zero. Por exemplo, como a cópula AMH é simétrica, então $\lambda_{UL} = \lambda_{LU}$ e

$$\begin{aligned}\lambda_{UL} = \lambda_{LU} &= 1 - \lim_{q \nearrow 1} \frac{q(1-q)}{(1-q)(1-\theta q(1-q))} \\ &= 0.\end{aligned}$$

■

Exemplo 14. (Coeficientes de dependência de cauda da cópula M). Do Teorema 12 é imediato que $\lambda_{UU} = \lambda_{LL} = 1$ e $\lambda_{UL} = \lambda_{LU} = 0$. ■

Os resultados apresentados nos exemplos acima são esperados: as cópulas FGM e AMH são empregadas para modelar distribuições entre as quais exista pequena dependência entre as v.a.'s envolvidas e a cópula M está associada às v.a.'s relacionadas por uma função estritamente crescente quase-certamente.

Exemplo 15. (Coeficientes de dependência de cauda da cópula Π). Os coeficientes de dependência de cauda de Π são todos iguais a zero.

Como esperado, todas as distribuições às quais está associada a cópula Π são assintoticamente independentes.

O Teorema 12 é usado no cálculo dos coeficientes de dependência de cauda quando dispomos de uma expressão “fechada” para a cópula C associada a (X, Y) , o que nem sempre ocorre, como no caso das cópulas Gaussiana e t .

Como demonstrado em (18), os coeficientes de dependência homogênea de cauda podem ser expressos a partir das f.d.a.'s condicionais de X e Y :

$$\lambda_{UU} = 2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y \leq x \mid X = x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X \leq x \mid Y = x) \quad (3-5)$$

e

$$\lambda_{LL} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{P}(Y \leq x \mid X = x) + \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{P}(X \leq x \mid Y = x). \quad (3-6)$$

O nosso objetivo é obter um resultado semelhante para expressar os coeficientes de dependência heterogênea de cauda, resultado inédito na literatura.

Sabemos que C é a f.d.a. conjunta de (U_1, U_2) , onde U_1 e U_2 são v.a.'s uniformemente distribuídas em $[0, 1]$ e com representação estocástica dada por $U_1 = F_X(X)$ e $U_2 = F_Y(Y)$. O resultado a seguir possibilita expressar os coeficientes de dependência de cauda através da distribuição condicional das variáveis U_1 e U_2 :

Lema 2. *Dadas a cópula C e as v.a.'s U_1 e U_2 definidas como acima, temos que:*

$$\frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2) \quad \text{é uma versão de} \quad \mathbb{P}(U_2 \leq u_2 \mid U_1) \quad (3-7)$$

$$\frac{\partial}{\partial u_2} C(u_1, u_2) \quad \text{é uma versão de} \quad \mathbb{P}(U_1 \leq u_1 \mid U_2) \quad (3-8)$$

Dem.: A demonstração de (3-7) é a seguinte:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U_2 \leq u_2 \mid U_1 = u_1) &= \lim_{h \searrow 0} \mathbb{P}(U_2 \leq u_2 \mid u_1 \leq U_1 \leq u_1 + h) \\ &= \lim_{h \searrow 0} \frac{C(u_1 + h, u_2) - C(u_1, u_2)}{h}, \end{aligned}$$

supondo que existe a derivada. ■

O Lema abaixo nos dá as expressões dos coeficientes de dependência heterogênea de cauda em função das distribuições condicionais $U_1 \mid U_2$ e $U_2 \mid U_1$.

Lema 3. *Se os limites (3-3) e (3-4) existem, então:*

$$\begin{aligned} \lambda_{UL} &= 1 + \lim_{q \nearrow 1} \mathbb{P}(V \leq 1 - q \mid U = q) - \lim_{q \nearrow 1} \mathbb{P}(U \leq q \mid V = 1 - q) \quad e \\ \lambda_{LU} &= 1 - \lim_{q \nearrow 1} \mathbb{P}(V \leq q \mid U = 1 - q) + \lim_{q \nearrow 1} \mathbb{P}(U \leq 1 - q \mid V = q). \end{aligned}$$

Dem.: Pela aplicação da Regra de l'Hôpital às expressões desses coeficientes dadas no Teorema 12 temos que:

$$\begin{aligned} \lambda_{UL} &= 1 + \lim_{q \nearrow 1} \frac{d}{dq} C(q, 1 - q) \\ &= 1 + \lim_{q \nearrow 1} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} C(u, 1 - q) \Big|_{u=q} - \frac{\partial}{\partial v} C(q, v) \Big|_{v=1-q} \right\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lambda_{LU} &= 1 + \lim_{q \nearrow 1} \frac{d}{dq} C(1-q, q) \\ &= 1 + \lim_{q \nearrow 1} \left\{ -\frac{\partial}{\partial u} C(u, q)|_{u=1-q} + \frac{\partial}{\partial v} C(1-q, v)|_{v=q} \right\}\end{aligned}$$

O resultado segue do Lema 2. ■

O resultado enunciado pelo Lema 3 tem pouca aplicação prática. Na verdade, sua importância reside no fato de ser usado na demonstração do próximo Teorema, que nos permite obter expressões para os coeficientes de dependência heterogênea de cauda a partir das distribuições condicionais de X e Y .

Teorema 13. *Sejam F_X , F_Y e C como acima. Suponha (X, Y) um vetor aleatório contínuo. Os coeficientes de dependência heterogêneos de cauda podem ser obtidos a partir das distribuições condicionais de $X | Y$ e de $Y | X$ através das seguintes igualdades:*

$$\lambda_{UL} = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y \leq -x | X = x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X \leq x | Y = -x) \quad (3-9)$$

$$\lambda_{LU} = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y \leq x | X = -x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X \leq -x | Y = x) \quad (3-10)$$

Dem.: Como $X = F_X^{-1}(U)$ e $Y = F_Y^{-1}(V)$, a partir das expressões de λ_{UL} e λ_{LU} dadas no Lema 3 temos que:

$$\begin{aligned}\lambda_{UL} &= 1 + \lim_{q \nearrow 1} \mathbb{P}\left(F_Y^{(-1)}(V) \leq F_Y^{(-1)}(1-q) | F_X^{(-1)}(U) = F_X^{(-1)}(q)\right) \\ &\quad - \lim_{q \nearrow 1} \mathbb{P}\left(F_X^{(-1)}(U) \leq F_X^{(-1)}(q) | F_Y^{(-1)}(V) = F_Y^{(-1)}(1-q)\right) \\ &= 1 + \lim_{q \nearrow 1} \mathbb{P}\left(Y \leq F_Y^{(-1)}(1-q) | X = F_X^{(-1)}(q)\right) \\ &\quad - \lim_{q \nearrow 1} \mathbb{P}\left(X \leq F_X^{(-1)}(q) | Y = F_Y^{(-1)}(1-q)\right) \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y \leq -x | X = x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X \leq x | Y = -x)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\lambda_{LU} &= 1 - \lim_{q \nearrow 1} \mathbb{P} \left(F_Y^{(-1)}(V) \leq F_Y^{(-1)}(q) \mid F_X^{(-1)}(U) = F_X^{(-1)}(1-q) \right) \\
&\quad + \lim_{q \nearrow 1} \mathbb{P} \left(F_X^{(-1)}(U) \leq F_X^{(-1)}(1-q) \mid F_Y^{(-1)}(V) = F_Y^{(-1)}(q) \right) \\
&= 1 - \lim_{q \nearrow 1} \mathbb{P} \left(Y \leq F_Y^{(-1)}(q) \mid X = F_X^{(-1)}(1-q) \right) \\
&\quad + \lim_{q \nearrow 1} \mathbb{P} \left(X \leq F_X^{(-1)}(1-q) \mid Y = F_Y^{(-1)}(q) \right) \\
&= 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y \leq x \mid X = -x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X \leq -x \mid Y = x).
\end{aligned}$$

■

O Teorema 13 será útil no cálculo dos coeficientes de dependência de cauda associados às distribuições Gaussiana e t , que são fechadas por condicionamento.

O Teorema 13 em conjunto com o Corolário 3 torna possível a aplicação de transformações estritamente crescentes q.c. às v.a.'s X e Y para calcular os coeficientes de dependência de cauda a partir da distribuição condicional das normalizações (padronizações) de X e Y .

Sempre que a cópula associada a X e a Y for simétrica e igual à sua cópula de sobrevivência obteremos expressões mais simples para os coeficientes de dependência de cauda.

Corolário 4. *Se C é simétrica e $C = \hat{C}$ então:*

$$\lambda_{UU} = \lambda_{LL} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y > x \mid X = x) \quad (3-11)$$

$$\lambda_{UL} = \lambda_{LU} = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y \leq -x \mid X = x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y \leq x \mid X = -x) \quad (3-12)$$

Dem.: Do Corolário 2 temos que $\lambda_{UU} = \lambda_{LL}$ e $\lambda_{UL} = \lambda_{LU}$. ■

3.2

Cálculo dos coeficientes de dependência de cauda das cópulas Arquimedianas

Os coeficientes de dependência homogênea de cauda das cópulas Arquimedianas são expressos em função dos limites que envolvem a função geradora e sua respectiva função pseudo-inversa:

$$\lambda_{UU} = 2 - \lim_{x \searrow 0} \frac{1 - \varphi^{[-1]}(2x)}{1 - \varphi^{[-1]}(x)} \quad (3-13)$$

$$\lambda_{LL} = \lim_{q \nearrow 1} \frac{\varphi^{[-1]}(2\varphi(1-q))}{\varphi^{[-1]}(\varphi(1-q))} \quad (3-14)$$

se $\varphi(0) = \infty$, então $\lambda_{LL} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{[-1]}(2x)}{\varphi^{[-1]}(x)} ((21))$.

Teorema 14. *Seja C uma cópula Arquimediana, cujas funções geradora e pseudo-inversa são dadas por φ e $\varphi^{[-1]}$, conforme a Definição 9. Do Teorema 12 temos que:*

$$\lambda_{UL} = \lambda_{LU} = 1 - \lim_{x \nearrow 1} \frac{\varphi^{[-1]}(\varphi(x) + \varphi(1-x))}{\varphi^{[-1]}(\varphi(1-x))}. \quad (3-15)$$

Dem.: Como toda cópula Arquimediana é simétrica, segue do Corolário 4 que $\lambda_{UL} = \lambda_{LU}$, cuja expressão segue diretamente de (2 – 21). ■

Exemplo 16. (Coeficientes de dependência de cauda da cópula W). *Do Exemplo 9, do fato de $W = \widehat{W}$ e das expressões para os coeficientes de cauda de uma cópula arquimediana segue que*

$$\begin{aligned} \lambda_{LL} = \lambda_{UU} &= 2 - \lim_{x \searrow 0} \frac{1-(1-2x)}{1-(1-x)} = 0; \text{ e} \\ \lambda_{UL} = \lambda_{LU} &= 1 - \lim_{x \nearrow 1} \frac{\varphi^{[-1]}(1)}{\varphi^{[-1]}(\varphi(x))} = 1. \end{aligned}$$

■

O resultado acima é esperado porque a cópula W é sempre associada a v.a.'s que se relacionam por uma função estritamente decrescente q.c., como visto no Teorema 3.

No Apêndice A temos os cálculos dos coeficientes de dependência de cauda das cópulas Gumbel, BB7 e Clayton.

3.3

Cálculo dos coeficientes de dependência de cauda da cópula Gaussiana

Suponha que as v.a.'s X e Y tenham distribuição normal (Gaussiana) com médias μ_X e μ_Y , e variâncias σ_X^2 e σ_Y^2 , respectivamente; usaremos a notação tradicional $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.

Sabemos que se o vetor aleatório (X, Y) tem distribuição normal (Gaussiana) bivariada com coeficiente de correlação linear igual a ρ , $-1 < \rho < 1$, então a sua f.d.p. conjunta é dada por

$$\begin{aligned} & f_{(X,Y)}(x, y) \\ & \parallel \\ & \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X} \right) \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y} \right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Como as transformações $X \mapsto \frac{X-\mu_X}{\sigma_X}$ e $Y \mapsto \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}$ são estritamente crescentes, o Teorema 3 nos afirma que para a determinação da cópula

associada a (X, Y) , chamada de cópula Gaussiana, podemos supor $\mu_X = 0 = \mu_Y$ e $\sigma_X = 1 = \sigma_Y$, ou seja, podemos supor que X e Y têm distribuição normal padrão, $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$, e coeficiente de correlação linear igual a $\rho < 1$.

Pelo Teorema de Sklar, a cópula Gaussiana, que denotaremos por C_ρ^{Ga} , é dada por

$$C_\rho^{Ga}(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \exp \left[\frac{-(s^2 - 2\rho st + t^2)}{2(1-\rho^2)} \right] ds dt, \quad (3-16)$$

$\forall (u, v) \in I^2$, onde Φ e Φ^{-1} representam a f.d.a e a respectiva função inversa associada à distribuição $\mathcal{N}(0, 1)$.

É fácil ver que a cópula C_ρ^{Ga} é simétrica. Além disso, $C_\rho^{Ga} = \widehat{C}_\rho^{Ga}$ pois está associada a uma distribuição de um vetor aleatório bidimensional e radialmente simétrico em relação ao ponto $(0, 0)$, cujas marginais são simétricas em relação à origem.

De (3 – 16) vemos que a aplicação do Teorema 12 não é viável. Porém, sabemos que se $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ então $Y \mid X = x \sim \mathcal{N}(\rho x, 1 - \rho^2)$ e, assim, com base nos Corolários 3 e 4 temos

$$\begin{aligned} \lambda_{UU} = \lambda_{LL} &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\frac{Y - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}} > \frac{x(1 - \rho)}{\sqrt{1 - \rho^2}} \mid X = x \right) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{\Phi} \left(\frac{x\sqrt{1 - \rho}}{\sqrt{1 + \rho}} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lambda_{UL} = \lambda_{LU} &= 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\frac{Y - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}} \leq \frac{-x(1 + \rho)}{\sqrt{1 - \rho^2}} \mid X = x \right) \\ &\quad - \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\frac{Y + \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}} \leq \frac{x(1 - \rho)}{\sqrt{1 - \rho^2}} \mid X = -x \right) \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi \left(\frac{-x\sqrt{1 + \rho}}{\sqrt{1 - \rho}} \right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi \left(\frac{x\sqrt{1 + \rho}}{\sqrt{1 - \rho}} \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde $\bar{\Phi}(z) = 1 - \Phi(z)$, $\forall z \in \mathbb{R}$.

Assim, temos o

Teorema 15. *As variáveis aleatórias normalmente distribuídas e com coeficiente de correlação linear $|\rho| < 1$ são assintoticamente independentes.*

Sabemos que se $\rho = 0$ então temos a independência para o caso de v.a.'s normalmente distribuídas; para $\rho = 1$ ($\rho = -1$), as v.a.'s X e Y apresentam

dependência linear perfeita positiva (negativa). Portanto, podemos afirmar que para os casos limites $\rho = 1$ e $\rho = -1$ temos $C_{\rho=1}^{Ga} = M$ e $C_{\rho=-1}^{Ga} = W$, respectivamente. Logo, a cópula normal pode ser pensada como a estrutura de dependência que varia entre a dependência positiva perfeita e a dependência negativa perfeita.

Na Figura 3.1 plotamos 2000 simulações de pontos da cópula e a distribuição Gaussianas para $\rho = 0$ e $\rho = 0,8$. Note que para $\rho = 0,8$ há uma grande concentração de pontos nos extremos inferior esquerdo e superior direito do quadrado $[0, 1]^2$, o que parece indicar a presença de dependências nas caudas inferior e superior. Na verdade, o que ocorre é que a cópula Gaussiana está capturando a grande dependência linear representada pelo elevado valor de ρ .

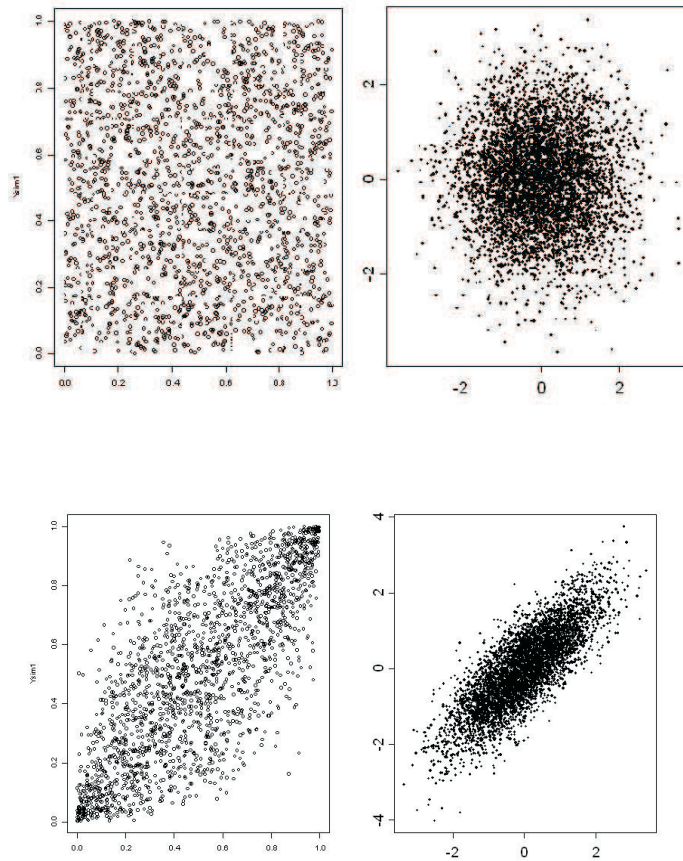


Figura 3.1: Plotagem de 2000 simulações da cópula e da distribuição Gaussianas para $\rho = 0$ e $\rho = 0,8$.

3.4

Cálculo dos coeficientes de dependência de cauda da cópula t de Student

Sabemos que o vetor aleatório (X, Y) tem distribuição t de Student bivariada com ν graus de liberdade, $\nu > 0$, se sua f.d.p. é dada por

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{(\pi\nu)^2 |\Omega|}} \left(1 + \frac{(x - \mu_X \ y - \mu_Y) \Omega^{-1} \begin{pmatrix} x - \mu_X \\ y - \mu_Y \end{pmatrix}}{\nu} \right)^{-\frac{\nu+2}{2}}, \quad (3-17)$$

onde μ_X e μ_Y são as médias de X e Y , respectivamente, e $\Omega = (\Omega_{ij})_{i,j \in \{1,2\}}$ é uma matriz positiva definida chamada de matriz de escala de (X, Y) . A matriz de variância de (X, Y) é dada por $\frac{\nu}{\nu-2} \Omega$ e está definida somente quando $\nu > 2$.

Vamos usar a notação $(X, Y) \sim t_{\nu, \underline{\mu}, \Omega}^{(2)}$, onde $\underline{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}$ é chamado de vetor média de $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Como na seção anterior, aplicamos às v.a.'s X e Y transformações estritamente crescentes para tornar mais simples o cálculo dos coeficientes de dependência de cauda.

A distribuição conjunta de $\left(\frac{X-\mu_X}{\sqrt{\Omega_{11}}}, \frac{Y-\mu_Y}{\sqrt{\Omega_{22}}}\right)$ é dada por $t_{\nu, \mathbf{0}, \mathbf{P}}^{(2)}$, onde $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{P}$ é a matriz de correlação obtida a partir de Ω .

A partir das considerações acima, o Teorema de Sklar nos dá que a cópula t de Student, $C_{\nu, \rho}^t$, associada à distribuição definida por (3-17) é dada por

$$C_{\nu, \rho}^t(u, v) = \int_{-\infty}^{T_{\nu}^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{T_{\nu}^{-1}(v)} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{(\pi\nu)^2 |\mathbf{P}|}} \left(1 + \frac{(s \ t) \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}}{\nu} \right)^{-\frac{\nu+2}{2}} ds dt,$$

onde ρ é o elemento da diagonal secundária de $\mathbf{P}$ e T_{ν}^{-1} representa a inversa da f.d.a. univariada T_{ν} da distribuição t de Student com ν graus de liberdade e parâmetros de localização e escala iguais a 0 e 1, respectivamente, que é definida por:

$$T_{\nu}(u) = \int_{-\infty}^u \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{x^2}{\nu}\right)\right)^{(\nu+1)/2}} dx.$$

Com idêntica argumentação àquela dada no cálculo dos coeficientes de dependência de cauda para a cópula Gaussiana, temos que C_t é simétrica e $C_{\nu, \rho}^t = \widehat{C}_{\nu, \rho}^t$.

Sabemos que se $(X, Y) \sim t_{\nu, 0, \mathbf{P}}^{(2)}$ então $\left(\frac{\nu+1}{\nu+x^2}\right)^{1/2} \frac{Y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}} \mid X=x \sim t_{\nu+1, 0, 1}^{(1)}$, onde $|\rho| < 1$ é o elemento da diagonal secundária de $\mathbf{P}$.

Com isso, a fórmula (3 – 11) nos dá a expressão de $\lambda_{UU} = \lambda_{LL}$:

$$\begin{aligned} & 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left(\frac{\nu+1}{\nu+x^2} \right)^{1/2} \frac{Y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}} > \left(\frac{\nu+1}{\nu+x^2} \right)^{1/2} \frac{x(1-\rho)}{\sqrt{1-\rho^2}} \mid X=x \right) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left(\frac{\nu+1}{\nu+x^2} \right)^{1/2} \frac{Y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}} > \frac{1}{x} \left(\frac{\nu+1}{\frac{\nu}{x^2}+1} \right)^{1/2} \frac{x\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}} \mid X=x \right) \\ &= 2T_{\nu+1} \left(-\frac{\sqrt{\nu+1}\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}} \right) \end{aligned}$$

e (3 – 12) nos dá a expressão de $\lambda_{UL} = \lambda_{LU}$:

$$\begin{aligned} & 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left(\frac{\nu+1}{\nu+x^2} \right)^{1/2} \frac{Y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}} \leq \frac{1}{x} \left(\frac{\nu+1}{\frac{\nu}{x^2}+1} \right)^{1/2} \frac{-x\sqrt{1+\rho}}{\sqrt{1-\rho}} \mid X=x \right) \\ & - \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left(\frac{\nu+1}{\nu+x^2} \right)^{1/2} \frac{Y+\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}} \leq \frac{1}{x} \left(\frac{\nu+1}{\frac{\nu}{x^2}+1} \right)^{1/2} \frac{x\sqrt{1+\rho}}{\sqrt{1-\rho}} \mid X=-x \right) \\ &= T_{\nu+1} \left(-\frac{\sqrt{\nu+1}\sqrt{1+\rho}}{\sqrt{1-\rho}} \right) + \bar{T}_{\nu+1} \left(\frac{\sqrt{\nu+1}\sqrt{1+\rho}}{\sqrt{1-\rho}} \right) \\ &= 2T_{\nu+1} \left(-\frac{\sqrt{\nu+1}\sqrt{1+\rho}}{\sqrt{1-\rho}} \right). \end{aligned}$$

Assim, com base na notação acima, temos o

Teorema 16. *As variáveis aleatórias com distribuição t de Student, onde $|\rho| < 1$ é o elemento da diagonal secundária da matriz $\mathbf{P}$, tem seus coeficientes de dependência de cauda dados por:*

$$\lambda_{UU} = \lambda_{LL} = 2T_{\nu+1} \left(-\frac{\sqrt{\nu+1}\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}} \right) \quad (3-18)$$

e

$$\lambda_{UL} = \lambda_{LU} = 2T_{\nu+1} \left(-\frac{\sqrt{\nu+1}\sqrt{1+\rho}}{\sqrt{1-\rho}} \right). \quad (3-19)$$

Corolário 5. *Para ν fixo, considerando os coeficientes de dependência de cauda como funções de ρ temos que: $\lambda_{UU} = \lambda_{LL}$ são funções estritamente crescentes e $\lambda_{UL} = \lambda_{LU}$ são funções estritamente decrescentes.*

Como ocorre com a cópula Gaussiana, se $\rho = 1$ então $C_\rho^t = M$. Entretanto, em contraste com o que ocorre com a cópula Gaussiana, se $\rho = 0$ não obtemos a cópula independente (para $\nu < +\infty$) pois v.a.'s não-correlacionadas e com distribuição t-Student não são independentes.

Na Figura 3.2 são plotadas 2000 simulações da cópula t para diversos valores de ρ . O Corolário acima explica o motivo pelo qual há uma maior

concentração de pontos nos vértices superior direito e inferior esquerdo, em detrimento dos outros 2 vértices. Vale a pena notar a maior concentração de pontos sobre a diagonal principal do quadrado $[0, 1]^2$ quando o valor de ρ aumenta; isso demonstra que, de fato, a cópula t captura o aumento da dependência linear traduzido pelo incremento no valor do coeficiente de correlação linear.

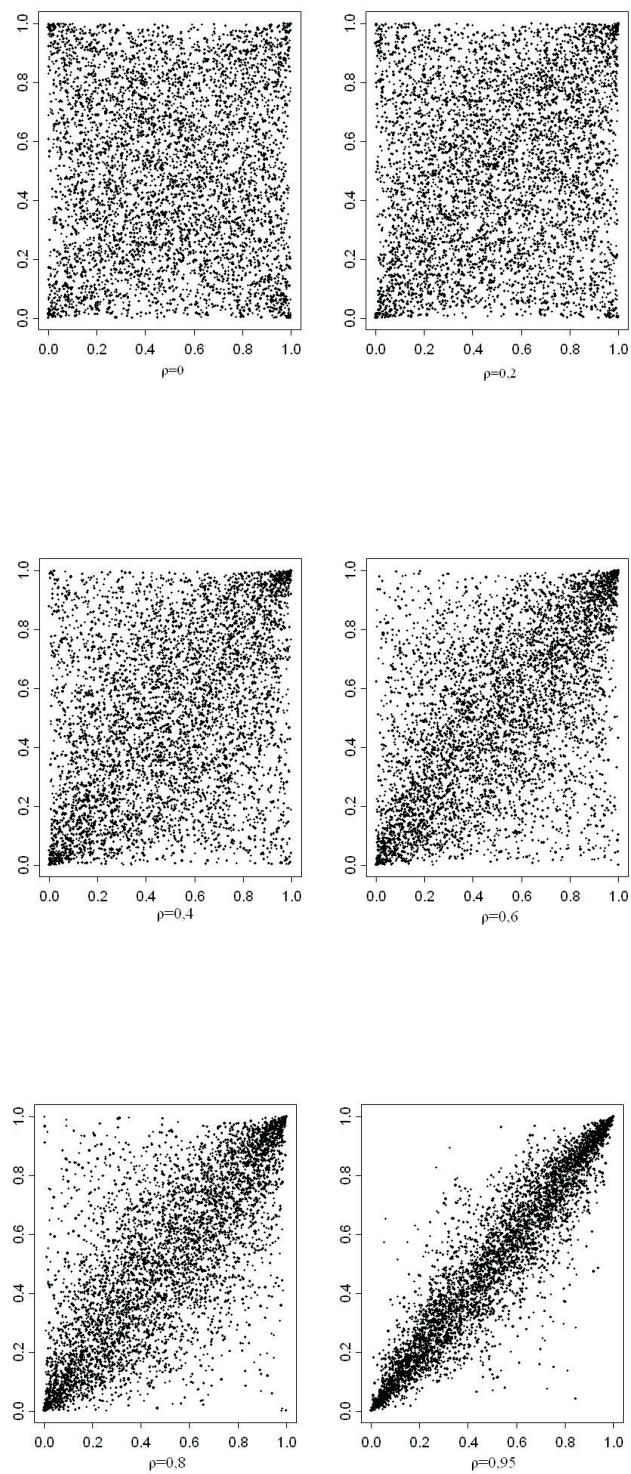


Figura 3.2: Dispersão de dados simulados da cópula t de Student com $\nu = 3$.