3 Análise do problema de Elasticidade Gradiente realizado por E. Amanatidou e N. Aravas.

Em Amanatidou e Aravas [18] foram desenvolvidas em detalhe as teorias de elasticidade gradiente elaboradas por Mindlin [2] para a formulação dos elementos finitos mistos. Como foi deduzido no capitulo anterior, quando o problema é formulado em termos de deslocamentos a equação diferencial que governa a solução é de quarta ordem.

Em Amanatidou e Aravas [18] a referência à densidade da energia de deformação apresentada por Mindlin é feita em três formas equivalentes:

$$W = \tilde{W}(\varepsilon, \tilde{\kappa}) = \hat{W}(\varepsilon, \hat{\kappa}) = \overline{W}(\varepsilon, \overline{\kappa}, \overline{\overline{\kappa}}) \qquad (3\text{-}1)$$

cujos argumentos e variáveis deriváveis são identificados como do Tipo I, Tipo II e Tipo III, respectivamente, e sempre no caso de materiais lineares e isotrópicos.

Utilizando a densidade da energia de deformação em três formas diferentes, define-se assim a tensão de Cauchy por:

$$\tau_{ij} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \overline{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \tau_{ji} \qquad (3\text{-}2)$$

onde $\tilde{W}, \hat{W}, \overline{W}$ representam a energia de deformação dos Tipos I, II e III respectivamente definidas em (3-1).

Abaixo se define diferentes expressões para as tensões duplas o de segunda ordem que determinam os diferentes tipos de energia de deformação:

$$\tilde{\mu}_{kij} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{\kappa}_{kij}} \;\; , \;\; \hat{\mu}_{kij} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{\kappa}_{kij}} \;\; , \;\; \overline{\mu}_{ij} = \frac{\partial \overline{W}}{\partial \overline{\kappa}_{ij}} \;\; , \;\; \overline{\overline{\mu}}_{kij} = \frac{\partial \overline{W}}{\partial \overline{\overline{\kappa}}_{kij}} \qquad (3\text{-}3)$$

cujas variáveis cinemáticas são definidas nas equações seguintes:

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)} = \tfrac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \text{ : Deformação} \qquad (3\text{-}4)$$

$$\psi_{ij} = u_{[i,j]} = \tfrac{1}{2}\left(u_{i,j} - u_{j,i}\right) \text{ : Tensor rotacional} \qquad (3\text{-}5)$$

$\omega_i = \frac{1}{2} e_{ijk} u_{k,j}$ Vetor rotacional (3-6)

$\bar{\kappa}_{ij} = \omega_{j,i}$ Gradiente rotacional (3-7)

$\tilde{\kappa}_{ijk} = u_{k,ij} = \tilde{\kappa}_{jik}$ Segundo gradiente de deslocamentos (3-8)

$\hat{\kappa}_{ijk} = \frac{1}{2}\left(u_{j,ki} + u_{k,ji}\right) = \varepsilon_{jk.i}$ Gradiente de deformação (3-9)

$\bar{\bar{\kappa}}_{ijk} = \frac{1}{3}\left(u_{i,jk} + u_{k,ji} + u_{j,ki}\right) = \bar{\bar{\kappa}}_{jik} = \bar{\bar{\kappa}}_{ikj} = \bar{\bar{\kappa}}_{kji}$ Parte simétrica de $\tilde{\kappa}_{ijk}$ e $\hat{\kappa}_{jik}$.
(3-10)

Usando as expressões (3-4)-(3-9) apresenta-se a variação do trabalho interno em três expressões diferentes para cada um dos tipos respectivamente:

$$\begin{aligned}\delta W^{\text{int}} &= \int_\Omega \delta W \mathrm{d}V = \int_\Omega \left(\bar{\sigma}_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + \tilde{\mu}_{ijk}\delta\tilde{\kappa}_{ijk}\right)\mathrm{d}\Omega \\ &= \int_\Omega \left(\bar{\sigma}_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + \hat{\mu}_{ijk}\delta\hat{\kappa}_{ijk}\right)\mathrm{d}\Omega \\ &= \int_\Omega \left(\bar{\sigma}_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + \bar{\mu}_{ij}\delta\bar{\kappa}_{ij} + \bar{\bar{\mu}}_{ijk}\delta\bar{\bar{\kappa}}_{ijk}\right)\mathrm{d}\Omega \qquad (3\text{-}11)\end{aligned}$$

Considerando-se Φ_{ij} como as "forças duplas de massa" por unidades de volume chega-se a seguinte relação da variação do trabalho realizado pelas forças externas:

$$\begin{aligned}\delta W^{ext} &= \int_\Omega (f_i\delta u_i + \Phi_{ij}\delta u_{j,i})\mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma [\tilde{P}_i\delta u_i + \tilde{R}_j D(\delta u_i)]\mathrm{d}\Gamma + \sum_\alpha \oint_{C^\alpha} \tilde{E}_i\delta u_i ds \\ &= \int_\Omega (f_i\delta u_i + \Phi_{ij}\delta u_{j,i})\mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma [\hat{P}_i\delta u_i + \hat{R}_i D(\delta u_i)]\mathrm{d}\Gamma + \sum_\alpha \oint_{C^\alpha} \hat{E}_i\delta u_i ds \\ &= \int_\Omega (f_i\delta u_i + \Phi_{[ij]}\delta\psi_{ji} + \Phi_{(ij)}\delta\varepsilon_{ji})\mathrm{d}\Omega \\ &+ \int_\Gamma [\bar{P}_i\delta u_i + \bar{Q}_i^t \ \delta\omega_i^t + \bar{R} \ D(\delta\varepsilon^n)]\mathrm{d}\Gamma \\ &+ \sum_\alpha \oint_{C^\alpha} \bar{E}_i\delta u_i ds\end{aligned}$$

(3-12)

A deformação $\varepsilon^n = n_i\varepsilon_{ij}n_j$ é a componente do tensor de deformação na direção normal à superfície Γ e $\left(\tilde{\mathrm{P}}, \tilde{\mathrm{R}}, \tilde{\mathrm{E}}\right)$, $\left(\hat{\mathrm{P}}, \hat{\mathrm{R}}, \hat{\mathrm{E}}\right)$, $\left(\bar{\mathrm{P}}, \bar{\mathrm{R}}, \bar{\mathrm{E}}\right)$ representam as forças externas generalizadas dos tipos I, II e II, respectivamente. Cada curva C^{α} representa a superfície não suave de Γ discretizada em várias curvas suaves α.

A identidade $\delta W^{\text{int}} = \delta W^{ext}$ conduz às seguintes relações de equilíbrio e “forças externas”:

$$(\tau_{ji} - \mu_{kji,k} - \Phi_{ji})_{,j} + F_i = 0 \tag{3-13}$$

Tipo I

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_i &= n_j\bar{\sigma}_{ji} - n_j\tilde{\mu}_{kji,k} - n_j\Phi_{ji} - D_j(n_j\tilde{\mu}_{kji}) + (D_p n_p)(n_j\tilde{\mu}_{kji}) \\
\tilde{R}_i &= n_k n_j \tilde{\mu}_{kji} \\
\tilde{E}_i &= [\![\ell_j n_k \tilde{\mu}_{kji}]\!]
\end{aligned} \tag{3-14}$$

Tipo II

$$\begin{aligned}
\hat{P}_i &= n_j\bar{\sigma}_{ji} - n_j\hat{\mu}_{kji,k} - n_j\Phi_{ji} - D_j(n_j\hat{\mu}_{kji}) + (D_p n_p)(n_j\hat{\mu}_{kji}) \\
\hat{R}_i &= n_k n_j \hat{\mu}_{kji} \\
\hat{E}_i &= [\![\ell_j n_k \hat{\mu}_{kji}]\!]
\end{aligned} \tag{3-15}$$

Tipo III

$$\begin{aligned}
\bar{P}_i &= n_j\bar{\sigma}_{ji} - 1/2\, n_j\bar{\mu}_{pk,p} e_{jik} - n_j\bar{\bar{\mu}}_{kji,k} - n_j\Phi_{ji} - D_j(n_j\bar{\bar{\mu}}_{kji}) + \\
&\qquad (D_p n_p)(n_j\tilde{\mu}_{kji} + n_i n_q n_p \bar{\bar{\mu}}_{pqj}) \\
\bar{R} &= n_i n_j n_k \bar{\bar{\mu}}_{kji} \\
\bar{Q}_i^t &= n_j \bar{\mu}_{ji}^t + 2 n_q n_k n_j \bar{\bar{\mu}}_{kjp} e_{qpi} \\
\tilde{E}_i &= [\![1/2\, s_i \mu^n + \ell_j n_k (\bar{\bar{\mu}}_{kji} + n_i n_p \bar{\bar{\mu}}_{pkj})]\!]
\end{aligned} \tag{3-16}$$

onde $\bar{\mu}^n = n_i \bar{\mu}_{ij} n_j$ é a tensão normal de segunda ordem. O símbolo [[ ]] em (3-16) representam as descontinuidades geométricas das curvas C^{α}.

Nas expressões (3-13)-(3-16) utilizas-se o gradiente direcional de superfície:

$$D_j n_i = (\nabla_S \hat{\mathrm{n}})_{ij} = (\delta_{ik} - n_i n_k) n_{j,k} = n_{i,j} - n_{j,k} n_i n_k \tag{3-17}$$

e também a expressão com subscrito mudo:

$$D_p n_p = \nabla_S \cdot \hat{\mathrm{n}} == n_{p,p} - n_{p,q} n_q n_p \tag{3-18}$$

Destes três tipos de representação de grandezas, Polyzos utiliza na formulação do método de elementos de contorno o Tipo I, além da expressão utilizada por Aifantis para a definição da tensão dupla, $\tilde{\mu}_{kij} = g^2\bar{\sigma}_{ij,k} = g^2\tilde{\tau}_{ij,k}$.

Assim, representa-se na implementação numérica do método de elementos de contorno as grandezas $\tilde{P}^*_{im}, \tilde{Q}^*_{im}, \tilde{R}^*_{im}$, etc. de forma indicial utilizando para isso as grandezas fundamentais da tensão de Cauchy $\tilde{\tau}_{jim} = \mu(\tilde{U}^*_{im,j} + \tilde{U}^*_{jm,i}) + \lambda\tilde{U}^*_{km,k}\delta_{im}$. Também se admite Φ_{ij}=0, obtendo-se de maneira relativamente compacta as expressões seguintes:

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{Q}^*_{im} = \tilde{U}^*_{im,k} n_k \\
&\tilde{R}_i = n_k n_j \tilde{\tau}_{jim,k} \\
&\tilde{P}_{im} = n_j \tilde{\tau}_{jim} - n_j \tilde{\tau}_{jim,k} - D_j(n_j \tilde{\tau}_{jim,k}) + (D_p n_p)(n_j \tilde{\tau}_{jim,k}) \\
&\left(\frac{\partial \tilde{\mathrm{U}}^*}{\partial \hat{\mathrm{n}}^{\mathrm{x}}}\right)_{im} = \tilde{U}^*_{im,k} n^{\mathbf{x}}_k \\
&\left(\frac{\partial \tilde{\mathrm{Q}}^*}{\partial \hat{\mathrm{n}}^{\mathrm{x}}}\right)_{im} = \tilde{Q}^*_{im,k} n^{\mathbf{x}}_k \\
&\left(\frac{\partial \tilde{\mathrm{R}}^*}{\partial \hat{\mathrm{n}}^{\mathrm{x}}}\right)_{im} = \tilde{R}^*_{im,k} n^{\mathbf{x}}_k \\
&\left(\frac{\partial \tilde{\mathrm{P}}^*}{\partial \hat{\mathrm{n}}^{\mathrm{x}}}\right)_{im} = \tilde{P}^*_{im,k} n^{\mathbf{x}}_k
\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}19)$$

onde $\hat{\mathbf{n}}^{\mathbf{x}}$ á e vetor normal no ponto fonte **x**.

A segunda alternativa para o cálculo das grandezas $\tilde{P}^*_{im}, \tilde{Q}^*_{im}, \tilde{R}^*_{im}$, etc. consiste em uma implementação numérica estruturada sequencialmente que foi desenvolvida por Polyzos apresentada no Capítulo 5.

A diferença entre ambas alternativas fica na visualização do seguimento de cálculo computacional. Para a montagem de um programa protótipo no Maple utiliza-se essa aplicação mais compacta e a comprovação de exemplos simples de caráter acadêmico resulta fácil. No entanto, para a implementação de um programa mais complexo onde os números de graus de liberdade seriam grandes, não é possível regularmente efetuar derivações algébricas diretamente dentro do programa e as expressões subministradas por Polyzos permitem fazer uma implementação eficiente em programas de grande poder de processamento como Fortran ou C+.

No presente trabalho, foram feitas ambas as alternativas com a finalidade de comprovação de resultados e eficiência computacional.

3.1. Campo de Deslocamentos Polinomiais

É possível utilizar um campo de deslocamentos e em função dele fazer um cálculo versátil das grandezas descritas na expressão (3-19) para diferentes condições de contorno. No trabalho de Amanatidou e Aravas [18] foram utilizados os campos de deslocamentos polinomiais para calcular alternativamente as forças de massa em diferentes tipos de elementos finitos.

$$u_i = A_i + B_i x + C_i y + D_i xy + E_i x^2 + F_i y^2 + G_i xy^2 + H_i x^2 y + K_i x^2 y^2 \tag{3-20}$$

Utilizando-se as equações de equilíbrio (2-41), ou seja $f_i = -\sigma_{ji.j}$, obtém-se as forças de massa:

$$\begin{aligned} f_i = {} & (4K_1 g^2 - D_2 - 2E_1)\lambda + (12K_1 g^2 - D_2 - 2F_1 - 4E_1)\mu - 2[H_2(\lambda+\mu) + G_1\mu]x \\ & - 2[G_2(\lambda+\mu) + H_1(\lambda+2\mu)]y - 4K_2(\lambda+\mu)xy - 2K_1(\lambda+2\mu)y^2 - 2K_1\mu x^2 \end{aligned} \tag{3-21}$$

$$\begin{aligned} f_2 = {} & (4K_2 g^2 - D_1 - 2F_2)\lambda + (12K_2 g^2 - D_1 - 2E_2 - 4F_2)\mu - 2[G_2(\lambda+\mu) + H_1\mu]x \\ & - 2[G_1(\lambda+\mu) + H_2(\lambda+2\mu)]y - 4K_1(\lambda+\mu)xy - 2K_2(\lambda+2\mu)x^2 - 2K_2\mu y^2 \end{aligned} \tag{3-22}$$

Se estas forças de massa são nulas então se pode simplificar o problema. Assim, os coeficientes do campo de deslocamentos assumem os seguintes valores:

$$G_1 = H_1 = K_1 = G_2 = H_2 = K_2 = 0 \tag{3-23}$$

$$F_1 = -\tfrac{1}{2\mu}[(2\lambda + 4\mu)E_1 + (\lambda+\mu)D_2] \tag{3-24}$$

$$E_2 = -\tfrac{1}{2\mu}[(2\lambda + 4\mu)F_2 + (\lambda+\mu)D_1] \tag{3-25}$$

Em função das expressões (3-23)-(3-25) é possível também fazer o cálculo das forças de superfície por meio da equação (3-19), as quais são mostradas a seguir:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & d_7 & d_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ C_1 \\ C_2 \\ E_1 \\ D_1 \\ D_2 \\ F_2 \end{Bmatrix} \tag{3-26}$$

As expressôoes de b_i e d_i são:

$$b_1 = n_1\lambda + 2n_1\mu$$

$$b_2 = n_2\mu$$

$$b_3 = n_2\mu$$

$$b_4 = n_1\lambda$$

$$\begin{aligned} b_5 = {} & 2g^2 n_{1,1}\lambda + 4n_1 x\mu + 4g^2 n_{1,1}\mu - 2g^2 D_p n_p n_2^2\lambda - 4g^2 n_{1,1} n_1^2\mu + 4g^2 n_{2,1} n_2 n_1\mu + 2n_1 x\lambda + \\ & + 2g^2 D_p n_p n_1^2\lambda - 4g^2 n_{1,2} n_1 n_2\mu - 2g^2 n_{1,2} n_1 n_2\lambda + 4g^2 D_p n_p n_1^2\mu - 4g^2 D_p n_p n_2^2\mu - 4g^2 n_{2,2}\mu \\ & - 2g^2 n_{2,2}\lambda - 2g^2 n_{1,1} n_1^2\lambda - 2n_2 y\lambda - 4n_2 y\mu + 4g^2 n_{2,2} n_2^2\mu + 2g^2 n_{2,2} n_2^2\lambda + 2g^2 n_{2,1} n_2 n_1\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_6 = {} & -g^2 n_{1,2}\lambda + 2g^2 n_{2,1}\mu + 2n_1\mu y - n_2 x\lambda + n_1\lambda y - 2g^2 n_{2,1} n_1^2\mu - g^2 n_{2,1}\lambda + 2g^2 D_p n_p n_2 n_1\mu \\ & - 2g^2 n_{2,2} n_1 n_2\mu - g^2 n_{2,2} n_1 n_2\lambda + g^2 n_{1,2} n_2^2\lambda + g^2 n_{1,1} n_1 n_2\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_7 = {} & g^2 n_{1,1}\lambda + n_1 x\lambda - g^2 n_{2,2}\lambda + g^2 D_p n_p n_1^2\lambda - n_2 y\lambda - g^2 n_{1,1} n_1^2\lambda - g^2 n_{1,2} n_1 n_2\lambda - g^2 D_p n_p n_2^2\lambda + \\ & g^2 n_{2,1} n_2 n_1\lambda + g^2 n_{2,2} n_2^2\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_8 = {} & -2g^2 n_{2,1} n_1^2\lambda + 2g^2 n_{2,1}\lambda - 4n_2 x\mu + 2n_1\lambda y - 2n_2 x\lambda + 4g^2 n_{1,2} n_2^2\mu + 4g^2 n_{1,1} n_2 n_1\mu - 4g^2 n_{1,2}\mu \\ & + 2g^2 n_{1,2} n_2^2\lambda - 2g^2 n_{1,2}\lambda - 2g^2 n_{2,2} n_1 n_2\lambda - 4g^2 D_p n_p n_1 n_2\mu + 2g^2 n_{1,1} n_1\lambda \end{aligned}$$

$$d_1 = n_2\lambda$$

$$d_2 = n_1\mu$$

$$d_3 = n_1\mu$$

$$d_4 = 2n_2\mu + n_2\lambda$$

$$d_5 = -2g^2 n_{2,1}\lambda + 2g^2 n_{2,1} n_1^2 \lambda - 4n_1 \mu y - 4g^2 n_{2,1}\mu - 2n_1 \lambda y - 2g^2 n_{1,2} n_2^2 \lambda + 2g^2 n_{1,2}\lambda + 4g^2 n_{2,1} n_1^2 \mu$$
$$+ 2g^2 n_{2,2} n_1 n_2 \lambda + 2n_2 x\lambda - 2g^2 n_{1,1} n_1 n_2 \lambda + 4g^2 n_{2,2} n_1 n_2 \mu - 4g^2 D_p n_p n_2 n_1 \mu$$
$$d_6 = g^2 n_{2,2}\lambda + n_2 y\lambda + g^2 n_{1,2} n_1 n_2 \lambda - g^2 n_{2,1} n_1 n_2 \lambda + g^2 D_p n_p n_2^2 \lambda - g^2 n_{1,1}\lambda + g^2 n_{1,1} n_1^2 \lambda - g^2 D_p n_p n_1^2 \lambda$$
$$- g^2 n_{2,2} n_2^2 \lambda - n_1 x\lambda$$
$$d_7 = 2g^2 D_p n_p n_2 n_1 \mu - n_1 \lambda y - 2g^2 n_{1,1} n_2 n_1 \mu - g^2 n_{1,1} n_2 n_1 \lambda + g^2 n_{1,2}\lambda - g^2 n_{2,1}\lambda + g^2 n_{2,1} n_1^2 \lambda + 2g^2 n_{1,2}\mu$$
$$- g^2 n_{1,2} n_2^2 \lambda + g^2 n_{2,2} n_1 n_2 \lambda + 2n_2 x\mu - 2g^2 n_{1,2} n_2^2 \mu$$
$$d_8 = 2g^2 n_{1,1} n_1^2 \lambda - 2g^2 D_p n_p n_1^2 \lambda - 2n_1 x\lambda - 4n_1 x\mu + 2n_2 y\lambda + 2g^2 D_p n_p n_2^2 \lambda + 4n_2 y\mu + 4g^2 n_{1,1} n_1^2 \mu$$
$$- 4g^2 n_{2,1} n_2 n_1 \mu - 2g^2 n_{1,1}\lambda - 4g^2 n_{1,1}\mu - 2g^2 n_{2,1} n_2 n_1 \lambda - 4g^2 D_p n_p n_1^2 \mu + 2g^2 n_{1,2} n_1 n_2 \lambda + 2g^2 n_{2,2}\lambda$$
$$+ 4g^2 n_{2,2}\mu - 4g^2 n_{2,2} n_2^2 \mu - 2g^2 n_{2,2} n_2^2 \lambda + 4g^2 D_p n_p n_2^2 \mu + 4g^2 n_{1,2} n_1 n_2 \mu$$
(3-27)

De forma equivalente, para o campo de deslocamento definido, as forças de segunda ordem **R** são descritas pela seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ D_1 \\ D_2 \\ F_2 \end{Bmatrix} \tag{3-28}$$

onde j_i e k_i são:

$$j_1 = -g^2(-2n_1^2\lambda - 4n_1^2\mu + 4n_2^2\mu + 2n_2^2\lambda)$$
$$j_2 = 2g^2 n_2 n_1 \mu$$
$$j_3 = -g^2(-n_1^2\lambda + n_2^2\lambda)$$
$$j_4 = -4g^2 n_2 n_1 \mu$$
$$k_1 = -4g^2 n_2 n_1 \mu$$
$$k_2 = -g^2\left(n_1^2\lambda - n_2^2\lambda\right)$$
$$k_3 = 2g^2 n_1 n_2 \mu$$
$$k_4 = -g^2(2n_1^2\lambda + 4n_1^2\mu - 2n_2^2\lambda - 4n_2^2\mu)$$

$D_p n_p$ está definida na expressão (3-18) e

$n_{i,,j} = (\nabla \hat{n})_{ij}$ é o gradiente da normal.

As expressões para as forças de superfície P_i permitirão a construção das matrizes de rigidez dos diferentes tipos de elementos finitos.