



Carlos Andrés Aguilar Marón

**Comparação do desempenho computacional da
técnica de superposição modal avançada com
técnicas da transformada de Laplace**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio

Orientador: Prof. Ney Augusto Dumont

Rio de Janeiro
Agosto de 2008



Carlos Andrés Aguilar Marón

**Comparação do desempenho computacional da
técnica de superposição modal avançada com
técnicas da transformada de Laplace**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Ney Augusto Dumont

Orientador

Departamento de Engenharia Civil — PUC-Rio

Prof. João Luís Pascal Roehl

Departamento de Engenharia Civil — PUC-Rio

Prof. Raul Rosas e Silva

Departamento de Engenharia Civil — PUC-Rio

Prof. Alexandre Lopes

Tecgraf — PUC-Rio

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 7 de Agosto de 2008

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Carlos Andrés Aguilar Marón

Graduou-se em Engenharia Civil na Universidade Nacional San Antonio Abad do Cusco – Perú em 2005. Em 2006 iniciou o curso de Mestrado em Engenharia Civil na PUC–Rio, na área de Estruturas, atuando na linha de pesquisa de Métodos de Elementos de Contorno e Dinâmica das Estruturas.

Ficha Catalográfica

Aguilar Marón, Carlos A.

Comparação do desempenho computacional da técnica de superposição modal avançada com técnicas da transformada de Laplace / Carlos Andrés Aguilar Marón; orientador: Ney Augusto Dumont. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Engenharia Civil, 2008.

v., 79 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Civil – Tese. 2. Transformada de Laplace. 3. Transformada inversa numérica de Laplace. 4. Elementos finitos híbridos dinâmicos. 5. Análise modal avançada. I. Dumont, Ney Augusto. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. III. Título.

CDD: 624

Agradecimentos

Ao Prof. Ney Augusto Dumont, pela orientação, paciência, apoio e incentivo na realização deste trabalho. Obrigado professor.

Ao CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado, nem minha estada no Brasil teria sido possível.

Aos meus colegas da PUC-Rio, pelo apoio e companhia nos momentos difíceis; Fabricio, Gricel, Hyllttonn, Roberto, Paul, Carmen, Freddy, Pamela, Carolina.

Aos professores do departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio.

Ao pessoal administrativo do programa de pós-graduação em engenharia civil da PUC-Rio. Em especial à secretária Rita de Cassia.

Aos membros da banca, pelas diversas sugestões feitas na redação final da dissertação. João Luís Pascal Roehl, Raúl Rosas e Alexandre Lopes.

À minha família no Perú, pelo apoio incondicional em todos esses anos, meu Pai Carlos Aguilar e irmãos.

Finalmente, dedico este trabalho à memória da minha mae: Alejandrina.

Resumo

Aguilar Marón, Carlos A.; Dumont, Ney Augusto (orientador). **Comparação do desempenho computacional da técnica de superposição modal avançada com técnicas da transformada de Laplace**. Rio de Janeiro, 2008. 79p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Uma técnica bem conhecida para resolver problemas dependentes do tempo é a formulação, desses problemas, no domínio da frequência por meio da transformada de Laplace ou Fourier, com as conseqüentes expressões apropriadas desses resultados utilizando inversões numéricas. Embora de fácil implementação, tais inversões numéricas, são computacionalmente dispendiosas quando resultados mais exatos são desejados e suscetíveis a instabilidades numéricas. Para problemas de tipo difusão, o algoritmo de Gaver-Stehfest parece ser satisfatório. Problemas gerais de dinâmica demandam algoritmos mais robustos, usualmente baseados em expansões em séries de Fourier tal como foi proposto inicialmente por Dubner e Abate. Algoritmos de outros tipos já são implementados em softwares matemáticos tais como Matlab e Mathematica. A livreria de Fortran possui um algoritmo proposto por Crump e aperfeiçoado por de Hoog e colegas. Mais recentemente, foi proposto resolver problemas transientes de potencial e elasticidade pelo uso de uma técnica avançada de superposição modal que é aplicado a modelos de elementos finitos e elementos de contorno baseados em equilíbrio. O método começa com a formulação no domínio da frequência a qual leva a uma matriz de rigidez efetiva, simétrica-complexa (quando amortecimento viscoso é considerado), expressa como uma série de potências de frequência com matrizes generalizadas de rigidez, amortecimento e massa. Após a solução do problema de autovalor não linear associado, obtém-se uma solução modal avançada do problema, a qual permite uma rápida solução no domínio do tempo obtendo as expressões imediatamente de qualquer resultado de interesse. O objetivo deste trabalho é comparar o desempenho computacional da técnica de superposição modal avançada com as técnicas baseadas em transformadas inversas numéricas de Laplace como aplicações a problemas gerais de grande porte. A bibliografia relevante é revista e as principais diferenças conceituais desses métodos são brevemente tratados. Todos os algoritmos são implementados em Fortran com o intuito de garantir uma base comum de comparação. Alguns resultados iniciais são mostrados, conclusões mais definitivas so poderão ser obtidas após uma grande série de simulações numéricas.

Palavras-chave

Transformada de Laplace. Transformada inversa numérica de Laplace.
Elementos finitos híbridos dinâmicos. Análise modal avançada.

Abstract

Aguilar Marón, Carlos A.; Dumont, Ney Augusto (advisor). **Efficiency assessment of advanced modal analysis as compared to techniques based on numerical inverse transforms.** Rio de Janeiro, 2008. 79p. MsC Thesis — Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

An established technique to solve time-dependent problems is the formulation of a complete frequency-domain analysis via Laplace or Fourier transforms, with subsequent ad hoc expression of results by numerical inversion. Although usually easy to implement, such a transform inversion is computationally intensive, if accurate results are desired, and liable to numerical instabilities. For diffusion-type problems, the Gaver-Stehfest algorithm seems well suited. General dynamics problems demand more robust algorithms usually based on Fourier series expansions, as firstly proposed by Dubner and Abate. Algorithms of either kind are already implemented in mathematical languages such as Matlab and Mathematica. The Fortran library has a Fourier-series algorithm proposed by Crump and improved by de Hoog et al. More recently, it has been proposed to solve transient problems of potential and elasticity by using an advanced mode superposition technique that applies to equilibrium-based finite element and boundary element models. One starts with a frequency-domain formulation that leads to a complex-symmetric (if viscous damping is included), effective stiffness matrix expressed as a frequency power series with generalized stiffness, damping and mass matrices. After solution of the associated complex-symmetric, non-linear eigenvalue problem, one arrives at an advanced modal solution of the problem, which leads to the straightforward solution in the time domain and the immediate expression of any results of interest. Aim of the present research work is to compare the computational efficiency of the proposed advanced modal analysis with the techniques based on numerical inverse transforms, as applied to general, large scale problems. The relevant literature is reviewed and the main conceptual differences of the investigated methods are briefly outlined. All algorithms are implemented in Fortran so as to assure a common basis of comparison. Some initial results are displayed, as more definitive conclusions can only be expected after a large series of numerical simulations.

Keywords

Laplace transform. Numerical inverse of Laplace transform. Finite hybrid dynamical elements . Advanced modal analysis.

Sumário

1	Introdução	13
1.1	Colocação do problema	13
1.2	Objetivos	14
1.3	Organização do texto	15
2	Transformada inversa numérica de Laplace	16
2.1	Transformada de Laplace	16
2.2	Transformada inversa de Laplace	17
2.3	Teorema de inversão de Bromwich	17
2.4	Métodos de transformada inversa numérica de Laplace	20
3	O Método híbrido dos elementos finitos dinâmicos	28
3.1	Conceitos básicos da elasticidade linear	28
3.2	Formulação do problema	30
3.3	Formulação no domínio da frequência	31
3.4	Formulação do método híbrido dos elementos finitos	33
3.5	Técnica da transformada de Laplace	35
3.6	Técnica de superposição modal avançada	35
4	Análise de elementos unidimensionais	39
4.1	Elemento de treliça	39
4.2	Viga de Timoshenko sobre base elástica e com amortecimento	43
5	Exemplos numéricos	52
5.1	Barra elástica sem amortecimento	52
5.2	Barra elástica com amortecimento	65
5.3	Modelo para representação da ferrovia	68
6	Conclusões	75
	Referências Bibliográficas	75

Lista de figuras

2.1	<i>Funções $h(t)$ e $g_n(t)$</i>	22
3.1	<i>Corpo elástico em equilíbrio.</i>	29
4.1	<i>Elemento de treliça.</i>	39
4.2	<i>Sistemas de coordenadas de um elemento de treliça.</i>	42
4.3	<i>Equilíbrio de um elemento infinitesimal de viga de Timoshenko.</i>	45
4.4	<i>a) Sistema de coordenadas da matriz de rigidez, b) Convenção de esforços.</i>	49
5.1	<i>Barra com extremos fixo e livre, representada por 5 elementos de treliça</i>	53
5.2	<i>Deslocamentos em $x = 0.2L$, $x = 0.6L$ e $x = L$ da barra, aplicando o método de (Dubner-Abate-1968)</i>	54
5.3	<i>Deslocamentos em $x = 0.2L$, $x = 0.6L$ e $x = L$ da barra, aplicando o método de (Crump-1976)</i>	55
5.4	<i>Comparação da eficiência dos três métodos</i>	56
5.5	<i>Deslocamentos em $x = 0.2L$ (grau de liberdade 1), para $k = 500$ e $k = 1000$.</i>	57
5.6	<i>Deslocamentos em $x = L$ (grau de liberdade 5), para $k = 500$ e $k = 1000$.</i>	58
5.7	<i>Deslocamentos em $x = 0.2L$ e $x = L$ (graus de liberdade 1 e 5), com 2, 4 e 6 matrizes de massa.</i>	59
5.8	<i>Barra discretizada em 5 elementos de treliça.</i>	61
5.9	<i>Barra discretizada em 50 elementos de treliça.</i>	61
5.10	<i>Deslocamento em $x = 0.2L$ (grau de liberdade 1) aplicando superposição modal avançada.</i>	61
5.11	<i>Deslocamento em $x = 0.2L$ (grau de liberdade 1) aplicando transf. de Laplace.</i>	62
5.12	<i>Deslocamentos em $0.2L$ (grau de liberdade 1), aplicando superposição modal.</i>	62
5.13	<i>Deslocamentos em $0.2L$ (grau de liberdade 1), aplicando superposição modal avançada (3 matrizes de massa).</i>	62
5.14	<i>Deslocamentos em L (grau de liberdade 5), aplicando superposição modal (teoria clássica).</i>	63
5.15	<i>Deslocamentos em L (grau de liberdade 1), aplicando superposição modal avançada (3 matrizes de massa).</i>	63
5.16	<i>Deslocamentos em $0.2L$ e L, aplicando superposição modal avançada (2 matrizes de massa) e o método de Dubner-Abate ($k = 1000$).</i>	64
5.17	<i>Comparação dos tempos (em segundos).</i>	65
5.18	<i>Deslocamentos em $0.2L$, $0.6L$ e L, aplicando superposição modal avançada (2 matrizes de massa) e o método de Dubner-Abate ($k = 1000$).</i>	67
5.19	<i>Comparação dos tempos (em segundos).</i>	68
5.20	<i>Modelo representando um trecho de ferrovia.</i>	69
5.21	<i>Corte frontal das componentes estruturais do modelo de ferrovia.</i>	69
5.22	<i>Medidas geométricas da seção transversal do trilho UIC60 em mm (CORUS).</i>	70
5.23	<i>Medidas geométricas do dormente e palmilha (em metros).</i>	70
5.24	<i>Deslocamentos no grau de liberdade 64 do trecho de ferrovia aplicando o método de Dubner-Abate.</i>	72
5.25	<i>Deslocamentos no grau de liberdade 64 do trecho de ferrovia aplicando superposição modal avançada.</i>	73

5.26 *Comparação dos deslocamentos (no grau de liberdade 64) aplicando: superposição modal avançada, transformada de Laplace (Dubner-Abate) e superposição modal (clássica).*

73

Lista de tabelas

5.1	<i>Propriedades geométricas e mecânicas em unidades consistentes para a barra elástica sem amortecimento</i>	53
5.2	<i>Leituras do tempo de execução dos programas em segundos.</i>	56
5.3	<i>Propriedades geométricas e mecânicas em unidades consistentes para a barra elástica com amortecimento</i>	65
5.4	<i>Propriedades físicas e geométricas para o trilho UIC60. Fonte: (Zhai-2003).</i>	71
5.5	<i>Propriedades físicas e geométricas para o dormente. Fonte: (Zhai-2003)</i>	71
5.6	<i>Propriedades físicas e geométricas para a palmilha. Fonte: (Zhai-2003)</i>	71
5.7	<i>Comparação dos tempos de execução.</i>	74