Daniel Wyllie Lacerda Rodrigues

O ensino de geometria com base na exploração de jogos e desafios: um experimento com alunos de design

TESE DE DOUTORADO

DEPARTAMENTO DE ARTES & DESIGN

Programa de Pós-Graduação em Design

Rio de Janeiro,

agosto de 2008

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Daniel Wyllie Lacerda Rodrigues

O ensino de geometria com base na exploração de jogos e desafios: um experimento com alunos de design

Tese de Doutorado

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Design da PUC-Rio.

Orientadora: Profa. Dra. Rita Maria de Souza Couto
Co-orientador: Prof. Dr. Celso Braga Wilmer

Rio de Janeiro, agosto de 2008

Daniel Wyllie Lacerda Rodrigues

O ensino de geometria com base na exploração de jogos e desafios: um experimento com alunos de design

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Design da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Profa. Dra. Rita Maria de Souza Couto
Presidente / Orientadora
PUC-Rio

Profa. Dra. Maria Apparecida Campos Mamede Neves
Membro - PUC-Rio

Prof. Claudio Cesar Pinto Soares
Membro - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Profa. Dra. Vania Ribas Ulbricht
Membro - Universidade Anhembi - Morumbi

Profa. Dra. Denise Berruezo Portinari
Membro - PUC-Rio

Profa. Dra. Luiza Novaes
Membro - PUC-Rio

Prof. Doutor Paulo Fernando Carneiro de Andrade
Coordenador(a) Setorial do Centro de Teologia e Ciências Humanas - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 29 de agosto de 2008

Daniel Wyllie Lacerda Rodrigues

Graduado em Engenharia de Computação pela PUC-Rio (1999), Mestre em Engenharia de Produção pela UFSC (2002) e Doutor em Design pela PUC-Rio (2008). No campo da representação gráfica, lecionou em cursos superiores na UERJ, UFRJ e PUC-Rio. Atualmente faz parte do corpo docente do Departamento de Desenho da UFPR. Sua produção acadêmica reflete o interesse em questões que envolvem lógica, geometria, criatividade e inovação.

Ficha Catalográfica

Rodrigues, Daniel Wyllie Lacerda

O ensino de geometria com base na exploração de jogos e desafios : um experimento com alunos de design / Daniel Wyllie Lacerda Rodrigues ; orientadora: Rita Maria de Souza Couto ; co-orientador: Celso Braga Wilmer. – 2008.

179 f. : il.(color.) ; 30 cm

Tese (Doutorado em Design)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

Inclui bibliografia

1. Artes – Teses. 2. Geometria. 3. Design. 4. Ensino. 5. Estrutura. 6. Gestalt. 7. Jogos. 8. Desafios. I. Couto, Rita Maria de Souza. II. Wilmer, Celso Braga. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Artes e Design. IV. Título.

CDD: 700

Para Rita Maria de Souza Couto, pela sabedoria, incentivo, confiança e amizade.

Agradecimentos

Aos meus pais, por todo o apoio.

Aos alunos participantes desta pesquisa, por suas valiosas contribuições.

Ao Dr. Celso Braga Wilmer, por revelar-me a importância do pensamento produtivo de Wertheimer.

À Dra. Maria Apparecida Mamede Neves, pelas aulas sobre Psicologia da Educação.

Às Dras. Denise Berruezo Portinari, Luiza Novaes e Vania Ribas Ulbricht, e ao Dr. Claudio Cesar Pinto Soares, por aceitarem participar da banca avaliadora.

Aos meus colegas acadêmicos, Ailton Santos Leite e Flavia Nizia da Fonseca Ribeiro, pela torcida.

Resumo

Rodrigues, Daniel Wyllie Lacerda; Couto, Rita Maria de Souza. **O ensino de geometria com base na exploração de jogos e desafios: um experimento com alunos de design.** Rio de Janeiro, 2008. 179 p. Tese de Doutorado - Departamento de Artes & Design, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho propõe uma abordagem original para o ensino de fundamentos de geometria e matemática direcionado a alunos de design. Com base na exploração de jogos e desafios, foi planejada uma série de atividades em que questões, estratégias de resolução e conceitos geométricos deveriam estar relacionados de modo integrado. Tal estrutura foi explorada e analisada em duas etapas. Na primeira, os desafios foram interpretados do ponto de vista do professor, aqui representado pelo autor da tese. Nesta fase, buscaram-se respostas para as seguintes questões: Que estratégias de raciocínio estão em jogo? Como os conteúdos podem ser trabalhados? Quais são as soluções dos desafios e como obtê-las? Na segunda, os desafios foram apresentados aos alunos, que interagiram com o professor, de maneira individual. A partir de então, novas relações foram descobertas pelos estudantes. Suas expectativas, reações e estratégias de raciocínio foram observadas ao longo de cinco encontros com aproximadamente duas horas de duração cada, procedendo-se à sua análise. Três alunos de design da PUC-Rio participaram do experimento, sendo filmados enquanto dialogavam com o professor e tentavam desvendar os problemas. A investigação começou com forte influência do modelo van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Neste caso, notou-se a presença dos três primeiros dentre os cinco níveis de pensamento por ele propostos: visualização, análise e dedução informal. No que se refere às tentativas de agrupamento e reorganização não apenas das partes nas estruturas dos exercícios propostos mas também deles próprios (considerando-os como partes de um corpo maior), recebeu destaque a ótica estruturalista da gestalt, sendo Max Wertheimer a fonte principal. Outra referência foi George Polya, por ter mostrado a importância do traçado de figuras, do uso de problemas auxiliares e do raciocínio heurístico na resolução das questões.

Palavras-chave

Geometria; Design; Ensino; Estrutura; Gestalt; Jogos; Desafios

Abstract

Rodrigues, Daniel Wyllie Lacerda; Couto, Rita Maria de Souza (advisor). **The teaching of geometry based on the exploration of games and puzzles: an experiment with design students.** Rio de Janeiro, 2008. 179 p. PhD, Thesis - Departamento de Artes & Design, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The present research presents a unique strategy for the teaching of the fundamentals of geometry and mathematics for design students. It was possible to plan a series of activities in which puzzles, problem-solving strategies and geometrical concepts were to be related in a structurally integrated fashion. This structure, which was planned to allow the reconstruction of knowledge on geometry by design students, went through two stages of exploration and analysis. Initially, the challenges were interpreted according to the instructor´s viewpoint, hereby represented by the author. In this first stage, the author tried to answer the following questions: What thinking strategies are at play? In what way can the contents be explored? What are the solutions to the challenges and how can they be obtained ? Secondly, the challenges were presented to the students, who interacted with the instructor in an individual manner. From then on, the students were able to discover new relationships. Their expectations, reactions and thinking strategies were observed by the author along five two-hour meetings and then analyzed. Three PUC-Rio design students took part in the research, which involved taping of their dialogues with the instructor while attempting to solve the problems presented to them. In terms of theoretical framework, one can say that the investigation was, at first, strongly influenced by van Hiele's model for the development of geometrical thinking. In this case, the first three of the five thinking levels proposed by van Hiele (visualization, analysis and informal deduction) were noticeable. As to the grouping and reorganization attempts, not only of the parts in the proposed exercise structures but also of the exercises themselves (considering these as parts of a bigger structure), they were mostly based on the gestalt structuralist viewpoint, having Max Wertheimer as the main theoretician. Another essential reference was George Polya, for having shown the importance of figure sketching, of the use of auxiliary problems as well as of the heuristic thinking involved in the process of problem resolution.

Keywords

Geometry; Design; Teaching; Structure; Gestalt; Puzzles; Challenges

Sumário

1 Introdução 17
1.1. Reflexões Iniciais 17
1.2. Dando forma ao objeto de estudo 18
1.3. Relevância do Estudo 20
1.4. Procedimentos metodológicos 21
1.5. Organização dos capítulos 21

2 Subsídios teóricos 22
2.1. Pensamento Geométrico 22
2.2. Pensamento Produtivo 29

3 Atividades Preliminares 37
3.1. Os desafios dos quadrados na figura e do corte estranho 37
3.1.1. Sobre o desafio dos quadrados na figura 37
3.1.2. Sobre o desafio do corte estranho 38
3.1.3. Experimento com alunos 40
3.1.4. Idéias ingênuas, resultados inusitados 44
3.2. O desafio dos dominós e o tabuleiro de xadrez mutilado 49
3.2.1. Sobre o desafio dos dominós 49
3.2.2. A abordagem científica e a matemática 49
3.2.3. Experimento com alunos 50
3.3. O desafio dos tetraminós e o retângulo 4 x 5 54
3.3.1. Sobre o desafio dos tetraminós 54
3.3.2. Relação com o desafio anterior 55
3.3.3. Experimento com alunos 56
3.4. O jogo *Blokus* e suas peças: do monominó aos pentaminós 63
3.4.1. Sobre o *Blokus* 63
3.4.2. Bloqueios e passagens 67
3.4.3. Por uma ocupação racional do espaço 69
3.4.4. Relato de uma situação vivenciada com alunos de design 73

4 Atividades Intermediárias 76
4.1. O desafio dos quadrados no tabuleiro de xadrez 76
4.1.1. Sobre o desafio dos quadrados no tabuleiro de xadrez 76
4.1.2. O auxílio da geometria dinâmica 78
4.1.3. O somatório dos quadrados dos números naturais 80
4.1.4. Provas visuais do somatório dos quadrados 81
4.1.5. Somatório do quadrado dos números naturais por indução matemática 89
4.1.6. A geometria no design dos materiais concretos de apoio 93
4.1.7. Experimento com alunos 97
4.2. O desafio dos losangos em polígonos regulares 105
4.2.1. Sobre o desafio dos losangos 105
4.2.2. Sondagem prévia 106
4.2.3. Design de material concreto 107
4.2.4. O auxílio da geometria dinâmica 109
4.2.5. Indícios do somatório dos números naturais 109
4.2.6. Representações da fórmula de n em função de L 110
4.2.7. Metamorfose 112
4.2.8. Representações da fórmula de R em função de n 113
4.2.9. Determinação dos ângulos internos dos losangos 116
4.2.10. Um atalho curioso para se obter a fórmula 119
4.2.11. Um organismo em crescimento 122
4.2.12. Quebra-cabeças com losangos 123
4.2.13. Experimento com alunos 128

5 Atividades Finais 133
5.1. O jogo *Tantrix*, simetrias e arcos em concordância 133
5.1.1. Sobre o Tantrix 133
5.1.2. Voltas completas 134
5.1.3. Soluções simétricas e assimétricas 136
5.1.4. Concordância de arcos 140
5.1.5. Experimento com os alunos 143
5.2. Elemento de ligação entre as atividades 5.1 e 5.3 146
5.2.1. Sobre flexágonos 146
5.2.2. Hexaflexágonos 147
5.2.3. A flexão do hexaflexágono 149
5.2.4. Transformações observadas 150

5.2.5. Relações com outras atividades 151
5.2.6. “Releitura” de peças do *Tantrix* 152
5.2.7. Experimento com alunos 154
5.3. O quebra-cabeça *Frantic Fish* de livre-composição 158
5.3.1. Sobre o *Frantic Fish* 158
5.3.2. O auxílio da geometria dinâmica 162
5.3.3. Design de material concreto 164
5.3.4. Ladrilhamento variável 167
5.3.5. Experimento com alunos 170

6 Considerações Finais 172

7 Referências bibliográficas 176

Lista de figuras

Figura 1 - Determinação da área de um paralelogramo 32
Figura 2 - Opções para a repetição do exercício de cálculo da área 33
Figura 3 - Ilustração do desafio 34
Figura 4 - Respostas conscientes (tipo A) 34
Figura 5 - Respostas cegas (tipo B) 34
Figura 6 - Desenho com vários segmentos de reta e ângulos retos 37
Figura 7 - Os 11 quadrados presentes na figura 38
Figura 8 - Polígono a ser cortado em duas partes iguais 38
Figura 9 - Figura do prob. auxiliar, corte e comparação com a figura original 39
Figura 10 - Ajuste do corte em relação à figura original 39
Figura 11 - Descoberta do corte pelo raciocínio da malha de quadrados 40
Figura 12 - Corte preliminar efetuado do participante [1] 42
Figura 13 - Retomada do raciocínio pelo participante [1] 42
Figura 14 - As formas dos diferentes desafios 43
Figura 15 - Divisão em quadrados de diferentes tamanhos 44
Figura 16 - Logomarca da Construtora Castelo Branco 44
Figura 17 - Logo do banco HSBC 45
Figura 18 - Composições de tangram em diversos graus de abstração 45
Figura 19 - Outras montagens de tangram 45
Figura 20 - ichi-Gami: a principal peça do i-Gami 46
Figura 21 - Poliedro construído com 3 peças ichi-Gami 47
Figura 22 - Poliedro construído com 4 peças ichi-Gami 47
Figura 23 - Poliedros construídos com 6 peças ichi-Gami 48
Figura 24 - Poliedros construídos com 7 peças ichi-Gami 48
Figura 25 - O tabuleiro de xadrez sem as casas brancas das bordas 49
Figura 26 - O tabuleiro de xadrez e os 31 dominós empilhados 51
Figura 27 - Arranjos do participante [1] 52
Figura 28 - Divisão do tabuleiro em 3 partes segundo o participante [2] 53
Figura 29 - Arranjo inicial do participante [3] e mudanças sugeridas 54
Figura 30 - Retângulo 4 x 5 e os cinco tetraminós 54
Figura 31 - Retângulo 4 x 5 e os cinco tetraminós em padrão xadrez 55
Figura 32 - Frente e verso da superfície retangular 57
Figura 33 - Cinco tetraminós 57

Figura 34 - Arranjos do participante [1] 58
Figura 35 - Exemplos de encaixes possíveis caso houvesse dois tetraminós T 60
Figura 36 - Exemplos de encaixes possíveis caso houvesse dois tetraminós L 61
Figura 37 - Espaços vazios com os formatos dos tetraminós 61
Figura 38 - As peças do *Blokus* são os poliminós de 1 a 5 quadrados 64
Figura 39 - A primeira jogada 65
Figura 40 - Exemplo das jogadas iniciais no *Blokus duo* 65
Figura 41 - Regra de conexão 66
Figura 42 - Tabuleiros do *Blokus* clássico e reduzido com peças 66
Figura 43 - Diversos exemplos de bloqueio 67
Figura 44 - Outros exemplos de bloqueio 68
Figura 45 - Monominó, dominó, triminós e tetraminós 71
Figura 46 - Pentaminós 72
Figura 47 - Tabuleiro de xadrez com 64 casas 76
Figura 48 - Alguns quadrados 2 x 2 localizados no tabuleiro de xadrez 77
Figura 49 - Expansão da malha 3 x 3 em quadrados 2 x 2 78
Figura 50 - Expansão da malha 5 x 5 em quadrados 3 x 3 79
Figura 51 - Quadrados de diversos tamanhos localizados por suas diagonais 80
Figura 52 - Prova visual proposta por Gardner (1973) e Kalman (1991) 83
Figura 53 - Uma estratégia para o cálculo do somatório de 1 a 10 85
Figura 54 - Um raciocínio análogo para solucionar o quadrado mágico 3 x 3 86
Figura 55 - Lajotas de uma escada em construção com 5 degraus 86
Figura 56 - Prova visual do somatório dos primeiros números naturais 87
Figura 57 - Prova visual proposta por Wermuth & Schuh (1999) 88
Figura 58 - Retorno à primeira prova visual 89
Figura 59 - Analogia da indução matemática com o efeito dominó 90
Figura 60 - Encaixes no sistema de montagem do Lego 94
Figura 61 - Encaixes no sistema de montagem do *LiveCube* 95
Figura 62 - Encaixes no sistema de montagem do*OmniFix Cube* 96
Figura 63 - Diagramas de conexões de peças *LiveCube* e *OmniFix Cube* 96
Figura 64 - Tabuleiro de xadrez e quatro quadrados amarelos 97
Figura 65 - Quadrados 2 x 2 contabilizados pela primeira vez 98
Figura 66 - Quatro quadrados 3 x 3 98
Figura 67 - Quadrados refletidos ou rotacionados, uns em relação aos outros 98
Figura 68 - Prova visual com peças imantadas criadas por mim 100
Figura 69 - Divisões de um quadrado de tamanho 8 x 8 em outros quadrados 101

Figura 70 - Um dos quadrados 2 x 2 não considerados pelo participante [2] 102
Figura 71 - Duas provas visuais para o somatório de inteiros ímpares 103
Figura 72 - Modificação do desenho referente ao desafio do item 3.1.1 104
Figura 73 - Diversas etapas de uso do material didático concreto 108
Figura 74 - Divisão em losangos por intermédio de sucessivas reflexões 109
Figura 75 - Divisão em losangos por intermédio de sucessivas rotações 109
Figura 76 - Divisão em losangos por intermédio de sucessivas translações 109
Figura 77 - Cálculo da quantidade de diagonais em destaque 110
Figura 78 - Cálculo dos arcos em destaque (ex. L = 12, n = 5) 111
Figura 79 - Vários polígonos regulares particionados em losangos 112
Figura 80 - Exemplo de metamorfose (ex. L = 12, n = 5) 113
Figura 81 - Exemplo de metamorfose (ex. L = 14, n = 6) 113
Figura 82 - Primeira representação da fórmula de R em função de n 114
Figura 83 - Segunda representação da fórmula de R em função de n 115
Figura 84 - Terceira representação da fórmula de R em função de n 116
Figura 85 - Faixa selecionada com simetria bilateral (ex: L = 12) 117
Figura 86 - Ângulos internos calculados a partir de 360º / L (ex: L = 12) 118
Figura 87 - Polígonos regulares com um número de lados divisível por 4 118
Figura 88 - Série numérica empilhada de 1 até n e ângulos internos 119
Figura 89 - Uma alternativa curiosa para visualizar a fórmula 120
Figura 90 - Triângulo de Pascal 122
Figura 91 - Visualização do padrão de crescimento da série 122
Figura 92 - Diversos arranjos de losangos internos ao dodecágono regular 123
Figura 93 - Soluções similares porém diferentes à primeira vista 123
Figura 94 - Transf. de um arranjo de losangos em um arranjo de linhas 124
Figura 95 - Embalagens do quebra-cabeça Fractiles – 7 125
Figura 96 - Geração dos lagartos e morcegos em apenas duas etapas 126
Figura 97 - Lagartos e morcegos do Batty Lizards 127
Figura 98 - Ladrilhamento com Eric e Ernestine 128
Figura 99 - Ladrilhamento com Orville e Ernestine 128
Figura 100 - Polígonos a serem preenchidos por losangos 129
Figura 101 - Polígonos preenchidos por losangos 130
Figura 102 - Duas estruturas com algumas características em comum 131
Figura 103 - Desenhos das peças do *Tantrix* 133
Figura 104 - Regra de vizinhança do *Tantrix* 134
Figura 105 - Critério para saber qual será a cor da volta completa 134

Figura 106 - Uma montagem inválida por apresentar lacunas 135
Figura 107 - Incompatibilidade de cores em caminhos secundários 136
Figura 108 - Rotações de 180º de duas peças 136
Figura 109 - Incoerência, troca de peças e solução final 136
Figura 110 - A impossibilidade do meio-giro para obter a imagem refletida 137
Figura 111 - Figura que parece não ter sido modificada após transformações 138
Figura 112 - Três soluções do quebra-cabeça com 8 peças 138
Figura 113 - Método para determinar soluções por rotação de 180º 139
Figura 114 - Doze arranjos válidos com 14 peças 140
Figura 115 - Análise das partes das peças 141
Figura 116 - Investigação dos centros dos arcos de círculo 141
Figura 117 - Malha da solução das sete primeiras peças 142
Figura 118 - Casos isolados de concordâncias 143
Figura 119 - Voltas com 3 a 7 peças de *Tantrix* 144
Figura 120 - Ovais no *Tantrix* e na perspectiva isométrica 144
Figura 121 - Arco incorreto e correção dos participantes [1] e [3] 145
Figura 122 - Malha do trihexaflexágono e passos para a montagem 148
Figura 123 - Trihexaflexágono, símbolo da reciclagem e a *Banda de Möbius I* 148
Figura 124 - Passos da sequência na passagem de um estado para outro 149
Figura 125 - Ciclo completo de 3 estados 150
Figura 126 - Losangos dos setores após uma flexão (frente → verso) 150
Figura 127 - Malhas com hexágonos, losangos e triângulos equiláteros 152
Figura 128 - Ciclo completo com desenhos de peças do *Tantrix* 153
Figura 129 - Um teste para averiguar o reconhecimento das transformações 154
Figura 130 - Diagramas de transformações do “trihexaflexágono de Tantrix“ 157
Figura 131 - Gabarito de imagens transformadas de um flexágono hipotético 157
Figura 132 - Peixes (peças) do quebra-cabeça *Frantic Fish* 158
Figura 133 - Mosaico 1 com os peixes 2A e 3B 159
Figura 134 - Mosaico 2 com os peixes 1A, 1B, 2A, 2B, 3A e 3B 159
Figura 135 - Mosaico 3 com os peixes 1B 160
Figura 136 - Mosaico 4 com os peixes 1A, 1B, 2A, 2B, 3A e 3B 160
Figura 137 - Mosaico 5 com os peixes 1A, 1B, 2A, 2B, 3A e 3B 160
Figura 138 - Peixes separados em cabeça e cauda 161
Figura 139 - Padrões periódicos de preenchimento do plano 161
Figura 140 - Polígono e arranjo relativos à cauda do peixe 1A 162
Figura 141 - Polígonos e arranjos relativos às caudas do peixe 1B e 1C 162

Figura 142 - Outras montagens com as caudas 162
Figura 143 - Diagrama representativo da linha de raciocínio adotada 163
Figura 144 - Revisão dos padrões de preenchimento do plano 164
Figura 145 - Material concreto que visa resgatar o processo de descoberta 166
Figura 146 - Encaixes das partes das caudas dos peixes 167
Figura 147 - Arranjo não periódico com diversas instâncias do tetraminó L 168
Figura 148 - Arranjos periódicos com diversas instâncias do tetraminó L 169
Figura 149 - Quebra-cabeça variável com 3 peças derivadas do tetraminó L 169

A imaginação é mais importante do que o conhecimento.
O conhecimento é limitado. A imaginação envolve o mundo.

Albert Einstein