8
Conclusões

Neste trabalho foram apresentados os principais métodos aproximados e suas variantes para a resolução de equações não-lineares de movimento. Todos os métodos foram descritos em detalhes, tendo a equação de Duffing como exemplo de aplicação. Esta equação foi escolhida por representar de forma aproximada, através de modelos de dimensão reduzida, o movimento de vários sistemas estruturais tais como vigas, placas e pórticos simétricos, como ilustrado no capítulo 2.

Os métodos encontrados na literatura se dividem em duas classes, os métodos de perturbação, como o método de Lindstedt-Poincaré, o método das múltiplas escalas, e os métodos baseados em expansões de harmônicos, como o método do Balanço Harmônico e o método de Galerkin-Urabe. Na literatura técnica comenta-se sobre as vantagens e desvantagens de cada método. As análises mostram que em todos os métodos existem casos onde a solução diverge ou se obtém respostas inconsistentes. Tem-se também que a dificuldade de aplicação dos métodos cresce à medida que cresce a não-linearidade. Os exemplos apresentados na tese ilustram vários destes casos.

A principal desvantagem dos métodos de perturbação é que estes são bastante trabalhosos, envolvendo a solução de uma série de equações diferenciais, e só podem ser aplicados para não-linearidades pequenas ou moderadas.

O método do Balanço Harmônico, que é o método aproximado mais utilizado na literatura, pode ser aplicado para qualquer grau de não-lienaridade. Porém, à medida que cresce a não-linearidade, são necessários mais harmônicos para se garantir a precisão da resposta. Para a obtenção das amplitudes modais, necessita-se resolver um sistema de equações não-lineares cuja solução apresenta em geral dificuldades em virtude da sensibilidade do método de Newton-Raphson aos valores escolhidos para o início do processo iterativo, podendo levar a soluções divergentes ou fisicamente inexistentes. Em casos onde há pontos limite, é necessário o uso de métodos de continuação. Também, neste método, não se obtém uma expressão analítica para as amplitudes modais, o que dificulta a análise paramétrica. O método de Galerkin-Urabe tem as mesmas características que o método do Balanço Harmônico.

Estes métodos foram desenvolvidos para equações envolvendo não-linearidades polinomiais, em particular equações com não-linearidades cúbicas e quadráticas. A extensão destes métodos a problemas envolvendo outros tipos de não-linearidade é usualmente impossível ou exige um grande número de manipulações matemáticas que são específicas para cada tipo de problema.

Nesta tese são apresentadas duas metodologias alternativas para análise de sistemas dinâmicos não-lineares que podem ser usadas para problemas envolvendo diversos tipos de não-linearidade e que são de fácil aplicação prática.

O primeiro método consiste em escrever a solução do problema não-linear em séries de Taylor para, através da utilização das propriedades de simetria da resposta no espaço de fase, se obter a relação freqüência-amplitude em problemas de vibração livre ou os pontos fixos da resposta permanente em problemas de vibração forçada, permitindo desta forma se obter as curvas de ressonância. Os coeficientes da série de Taylor são obtidos de forma recursiva, sendo escritos em função das condições iniciais. Mostra-se, para o caso de vibração livre, a correspondência que existe entre este método, aqui denominado método de Taylor, com o método de Lindstedt-Poincaré. O desenvolvimento teórico mostra que a não-linearidade de uma dada resposta pode ser mensurada por um único parâmetro, envolvendo a freqüência natural, o deslocamento máximo e o coeficiente do termo não-linear.

Exemplos envolvendo a equação de Duffing com elevada não-linearidade, mostram que o método pode fornecer soluções analíticas precisas, quando comparadas com a solução obtida por integração numérica, com um pequeno número de termos. Estas soluções analíticas permitem a identificação da influência de cada parâmetro na resposta do sistema, facilitando a análise paramétrica.

O segundo método consiste no uso de séries de Taylor e séries de Fourier, sendo aqui denominado método de Fourier-Taylor. Neste método iguala-se cada termo da solução expandida em série de Taylor ao termo correspondente da série de Taylor de uma série de Fourier com um dado número de harmônicos. Outra alternativa consiste em simplesmente escrever diretamente a solução em série de Fourier e obter os coeficientes da série avaliando as derivadas da resposta no instante inicial. Para a determinação das amplitudes modais, obtém-se um sistema de equações lineares, o que é uma vantagem com relação ao método do Balanço Harmônico, onde as amplitudes são obtidas a partir da solução de um sistema não-linear. Assim, pode-se obter, usando-se programas de álgebra simbólica, uma solução analítica para as amplitudes modais, facilitando a análise paramétrica.

Este método não utiliza as propriedades de simetria do espaço de fase. A vantagem sobre a primeira metodologia é que neste caso obtém-se uma solução capaz de representar com exatidão a resposta periódica em qualquer instante de tempo. Com isto, supera-se o principal problema da série de Taylor que é a divergência da resposta após um certo instante de tempo. Assim, nos casos em que a série de Taylor não possui um número suficiente de termos para convergir até um dado ponto de simetria, a correspondente solução em série de Fourier desta série de Taylor permite sempre encontrar resultados para a freqüência da resposta ou coordenadas dos pontos fixos.

Uma forma de melhorar os resultados mantendo fixo o número de harmônicos é a utilização do método de Galerkin para minimizar o resíduo provocado pela solução aproximada. Desta forma são alteradas as equações que permitem obter o ponto fixo ou a freqüência da resposta. Diversos exemplos envolvendo comparações com métodos existentes e com os resultados obtidos por integração numérica, demonstram a convergência das soluções e a qualidade dos resultados obtidos.

Vários exemplos envolvendo não-linearidades não-polinomiais, em particular não-linearidades descritas por funções transcendentais e por expoentes fracionários, demonstram que os métodos propostos permitem a obtenção de soluções analíticas precisas, inclusive em problemas envolvendo alto grau de não-linearidade e problemas de instabilidade.

Em resumo, como principais vantagens em relações aos demais métodos, pode-se citar que os métodos de Taylor e Fourier-Taylor são aplicáveis para diversos tipos de não-linearidade, como demonstrado no capítulo anterior, e fornecem soluções em série de Fourier analíticas, a partir da resolução de um sistema linear.

Como continuação do presente projeto de pesquisa, sugere-se:

Aprofundar a comparação entre os métodos existentes e os métodos propostos nesta tese, o que pode levar a aprimoramentos nas metodologias, em particular nos problemas envolvendo vibração forçada amortecida.

Usar as ferramentas desenvolvidas neste trabalho para a análise de diversos problemas não-lineares encontrados na área de estruturas, em particular aqueles envolvendo não-linearidades não-polinomiais.

A aplicação dos métodos propostos a sistemas com vários graus de liberdade.