

1

Introdução

Sistemas físicos são de natureza não-linear. Os problemas lineares são casos particulares dos não-lineares e, portanto, a aplicabilidade da solução nestes casos é limitada. Em engenharia, muitas vezes, essas condições particulares não se aplicam e o problema é então formulado para um caso mais geral, o que conduz a equações diferenciais não-lineares.

Em engenharia de estruturas, as não-linearidades podem ser de natureza física, quando o material não possui uma relação linear entre tensões e deformações, ou geométrica, quando o material se comporta linearmente mas os deslocamentos da estrutura não seguem uma lei linear. As não-linearidades podem ser de origem elásticas, inerciais, ou dissipativas e geralmente são aproximadas por polinômios que podem conter termos quadráticos e cúbicos ou de ordem superior.

Em estruturas sujeitas a grandes deslocamentos e pequenas deformações, geralmente apenas os efeitos da não-linearidade geométrica são considerados. No estudo do movimento de uma viga plana, por exemplo, se a discretização contemplar um único grau de liberdade e considerando certas simplificações, se chega a uma equação de movimento do tipo Duffing,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = F(t) \quad (1-1)$$

Em vibrações, a análise da resposta permanente de sistemas sob a ação de cargas harmônicas recebe uma atenção especial. Sabe-se que sistemas não-lineares comportam-se diferentemente de sistemas lineares. Múltiplas soluções, pontos de bifurcação, onde a resposta qualitativamente sofre mudanças bruscas, respostas com período diferente ao da excitação, sensibilidade às condições iniciais, ressonâncias super e sub-harmônicas, são alguns dos fenômenos presentes em sistemas não-lineares que vêm sendo amplamente estudados nas últimas décadas.

Os fenômenos que ocorrem em sistemas não-lineares tornam-se mais fáceis de serem visualizados quando uma análise paramétrica é realizada. Na análise paramétrica um determinado parâmetro é escolhido como parâmetro

de controle. Geralmente adota-se a amplitude ou a frequência da excitação como parâmetros de controle, e os demais parâmetros do sistema são mantidos constantes enquanto que o parâmetro de controle é lentamente modificado. Isto fornece ao projetista um completo entendimento do que pode ocorrer com o sistema quando se varia determinado parâmetro. Se algumas propriedades do sistema forem utilizadas como parâmetro de controle, pode-se encontrar uma faixa segura em que a excitação, ao variar, não irá provocar uma resposta caótica ou com grandes deslocamentos. Sendo assim, a análise paramétrica busca revelar a faixa de valores que determinados parâmetros podem assumir, sem que o sistema apresente vibrações com amplitude excessiva ou sensibilidade às condições iniciais.

Segundo Ren (1995)[2], as análises paramétricas são comumente realizadas pela integração no tempo, que é menos atraente devido ao seu alto custo computacional. Para Lau e Yuen (1993)[3] a análise no tempo é ineficiente em estudos paramétricos e extremamente lenta para pequenos amortecimentos. Para Xu et. al. (2003)[4], ela consome muito tempo, principalmente quando a taxa de convergência é lenta.

Para uma equação diferencial não-linear, dificilmente é possível obter uma solução analítica exata. Segundo Mickens (1984)[5], exceto em casos especiais, soluções fechadas não existem. Geralmente, a única forma de obter a solução exata é através da integração numérica das equações diferenciais no tempo, mas apenas respostas estáveis são obtidas, e algoritmos especiais, tais como o método da continuação ([6],[7]), devem ser usados para se obter trajetórias instáveis.

Felizmente, existem vários métodos aproximados para resolver uma equação diferencial não-linear, que resultam em soluções analíticas aproximadas. Dispondo de uma solução analítica, a análise paramétrica torna-se mais simples e rápida. Segundo Lewandowski (1992)[8], os métodos mais populares são os métodos de perturbação e o método do Balanço Harmônico (Harmonic Balance Method - HBM). Dentre os métodos de perturbação pode-se considerar como mais populares os métodos de Lindstedt-Poincaré (LP), Krilov-Bogoliubov-Mitropolki (KBM) e Múltiplas Escalas (Method of Multiple Scales).

Uma outra razão para dar preferência a uma solução analítica frente a uma numérica é que, como mostrado por Tongue (1987)[9], uma escolha indevida do tamanho do passo de tempo na integração numérica pode conduzir a resultados espúrios. Através de mapas de Poincaré, Tongue mostra um exemplo em que o movimento pode ser erroneamente classificado como caótico quando se utiliza um determinado Δt e corretamente classificado como de período cinco quando se utiliza um Δt quatro vezes menor.

Apesar das vantagens dos métodos analíticos em relação aos métodos numéricos, eles não fornecem soluções caóticas ou quasi-periódicas, mas somente soluções periódicas.

O HBM é, sem dúvida, o método mais utilizado. Ele possui a forma mais simples de aplicação, e apresenta resultados precisos. Assim como no método de Galerkin-Urabe, escreve-se a solução permanente em uma série de Fourier. O único inconveniente é definir quantos termos são necessários para uma boa aproximação. Geralmente poucos termos são necessários. Porém, a quantidade de termos presentes altera qualitativamente a solução, como alertado por Leung (1991)[10]. De acordo com Leung (1990)[11], se um número insuficiente de harmônicos for utilizado, pode-se obter resultados incorretos, e, se um número excessivo for usado, o custo computacional é desnecessariamente aumentado. Leung afirma que o número de harmônicos presentes na solução aproximada deve atender a dois critérios: completabilidade e balanceabilidade. A condição de completabilidade obriga que todos os harmônicos da expansão de Fourier necessários sejam considerados. Assim, na análise de uma ressonância sub ou superharmônica de ordem p , a solução aproximada deve conter o termo constante e o p -ésimo harmônico, totalizando $p + 1$ termos. A condição de balanceabilidade diz respeito à importância dos harmônicos não considerados. Como a solução encontrada é aproximada, ela produz um resíduo quando inserida na equação diferencial do problema. Os resíduos dos harmônicos não considerados devem ser pequenos.

Segundo Hassan e Barton (1995)[12], encontrar a “mistura” de harmônicos que conduz a resultados qualitativamente corretos é algo complicado. Quando poucos harmônicos são utilizados, as seguintes falhas, que também são apontadas por Rapp e Mees (1977)[13], podem ocorrer:

- falha por não prever a existência de certas soluções periódicas;
- falha por prever soluções periódicas que não existem;

Uma crítica que é feita ao HBM é que é necessário conhecer a priori quais harmônicos devem ser incluídos na análise. O conhecimento a priori dos harmônicos que deverão estar contidos na solução aproximada é fornecido pelas não-linearidades do problema, pela excitação, e pela presença ou não do amortecimento. Lau et. al.(1990)[14] apontam que, para encontrar uma solução satisfatória, o resíduo correspondente aos harmônicos utilizados deve ser estimado, mas também o resíduo correspondente aos harmônicos de mais alta ordem não incluídos deve ser controlado.

Lau et. al.(1983)[15] citam ainda que a formulação do HBM é muito tediosa se o sistema não-linear possuir muitos graus de liberdade e com

altos harmônicos sendo considerados. Segundo estes autores, uma alternativa para contornar estes problemas seria a formulação incremental do método do Balanço Harmônico (IHBM), que é mais simples e econômica porque apenas equações linearizadas são criadas e resolvidas em cada passo. Segundo Lau et. al.(1991)[16], sempre que houver necessidade de aumentar a precisão da solução, o sistema linearizado permite inserir mais harmônicos na aproximação em curso de uma forma bastante simples. Mas, segundo Ferri, [17], o IHBM é na verdade o HBM executado na ordem inversa. No HBM, a solução aproximada é inserida na equação diferencial e um sistema de equações algébricas não-lineares é obtido e resolvido, aplicando-se Newton-Raphson. No IHBM, o primeiro passo é a expansão da equação diferencial não-linear em séries de Taylor. Em seguida, os termos de mais alta ordem são desprezados e a solução aproximada é inserida na equação diferencial. Os harmônicos são coletados ou o método de Galerkin é aplicado para minimizar o resíduo. Assim, chega-se ao mesmo sistema linear que seria obtido ao se aplicar Newton-Raphson ao sistema não-linear obtido com o HBM.

Sistemas não-lineares sujeitos a cargas harmônicas podem apresentar diversas soluções estáveis para certos parâmetros. A resposta que o sistema irá apresentar depende das condições iniciais do problema. De acordo com Lewandowski (1997)[18], a parcela permanente dessas respostas pode ser harmônica, sub-harmônica, superharmônica, quase periódica ou caótica. Quando uma solução aproximada é encontrada, é necessário determinar sua estabilidade, pois os métodos aproximados, com exceção da integração numérica, fornecem tanto soluções estáveis quanto instáveis. Segundo Hassan (1996)[19], dependendo do grau de aproximação da solução aproximada, a análise da estabilidade pode conduzir a resultados incorretos ou interpretações erradas.

Para determinar a estabilidade de uma solução periódica, inicialmente aplica-se uma pequena perturbação a esta solução e em seguida a solução perturbada é inserida na equação não-linear do problema, o que conduz a uma nova equação, tendo agora como variável dependente a perturbação. Esta nova equação é linearizada para poder fazer uso da teoria de Floquet de sistemas lineares. Se a perturbação crescer exponencialmente ao longo do tempo, o sistema é instável. Se a perturbação tender a zero com o passar do tempo, então o sistema é assintoticamente estável. A equação diferencial linearizada apresenta coeficientes variáveis no tempo (equação de Hill). Transformando a equação de Hill em um sistema de equações de primeira ordem do tipo,

$$\dot{\delta} = A(t)\delta \quad (1-2)$$

Resolvendo o sistema (1-2) via integração numérica, ou por aplicação de qualquer método aproximado, para diferentes condições iniciais ortogonais, constrói-se uma matriz de soluções, cujos autovalores são chamados de multiplicadores de Floquet e identificam o comportamento da perturbação ao longo do tempo.

Vários autores já compararam métodos de soluções aproximados. Hamdan (2001)[20] comparou o MMS com o HBM. Ele mostra que o MMS falha para amplitudes relativamente pequenas nos casos de forte não-linearidade. Hassan (1995)[21] mostra que algumas soluções de segunda ordem determinadas pelo MMS na realidade não existem. Hamdam e Burton(1993)[22] apresentam duas deficiências dos métodos de perturbação em relação ao HBM. Uma delas é que os métodos de perturbação podem não convergir para certos valores dos parâmetros. Assim, adicionando mais termos à solução aproximada, pode-se piorar quantitativamente o resultado. A outra é que, ao adicionar mais termos à solução aproximada, o HBM acomoda mudanças qualitativas na resposta devido ao acoplamento das equações, enquanto que nos métodos de perturbação, o comportamento qualitativo das soluções de baixa ordem é mantido ao se adicionar mais termos.

Vários autores comentam que os métodos de perturbação só podem ser aplicados quando as não-linearidades são pequenas, [5, 3, 8, 12, 14, 22, 23, 4]. Porém, a definição de pequena não-linearidade não é algo simples, sendo preferível que estes métodos sejam evitados ou comparados com integração numérica, pois pode-se obter soluções quantitativamente e qualitativamente incorretas caso a não-linearidade seja na verdade uma não-linearidade moderada ou se a amplitude dos deslocamentos for relativamente grande. É preferível utilizar uma técnica geral e que apresente resultados precisos, tal como o HBM. Conforme Lau e Yuen (1993)[3], um engano comum é considerar a não-linearidade pequena quando de fato ela não é.

Os métodos mencionados anteriormente têm sido amplamente aplicados a análise de sistemas dinâmicos com não-linearidades quadráticas e cúbicas ([6], [24]). Entretanto, muitos sistemas físicos podem ser modelados de uma forma mais precisa por não-linearidades não-polinomiais, tais como não linearidades fracionárias e não-linearidades descritas por funções transcendentais tais como as funções trigonométricas e hiperbólicas. Entretanto, a aplicação dos métodos clássicos a estes sistemas é bastante complexa ([25], [1]), exigindo grande manipulação algébrica, ou mesmo impossível. Um dos objetivos desta tese é apresentar alguns métodos capazes de resolver esta classe de problemas.

1.1

Conceitos Básicos em Oscilações Não-Lineares

Uma equação diferencial e as condições iniciais associadas definem o que é chamado de problema de valor inicial (PVI). O número de condições iniciais necessárias para definir a unicidade da solução é igual à ordem da mais alta derivada presente na equação diferencial. Elas envolvem a função e suas $(n - 1)$ primeiras derivadas.

Ao contrário de sistemas lineares, sistemas não lineares geralmente não apresentam soluções analíticas exatas. O método aproximado mais utilizado para se resolver equações diferenciais não-lineares ainda é a integração numérica devido a sua precisão. Na integração numérica, cada PVI é resolvido separadamente ao se integrar as equações diferenciais numericamente no domínio do tempo. A integração numérica é realizada atribuindo-se um valor pequeno para o passo de tempo e novas configurações de deslocamento e velocidade são obtidas ao final de cada passo de tempo.

A não-linearidade mais simples é a cúbica, presente na equação de Duffing, (1-1). A presença do parâmetro β faz com que o sistema mude sua frequência natural em função da amplitude dos deslocamentos. Em problemas lineares, a frequência natural é uma característica do sistema, mas em problemas não-lineares ela depende da amplitude dos deslocamentos e do tipo de não-linearidade. A figura 1.1 exibe a relação entre a frequência da resposta e o deslocamento inicial para diferentes valores do parâmetro não-linear β em (1-1). É possível observar que, quando o parâmetro de não-linearidade é negativo, um acréscimo no deslocamento produz um decréscimo na frequência da resposta, conseqüentemente diz-se que ocorre uma diminuição na rigidez do sistema. Quando β é positivo, há um ganho no valor da rigidez e o conseqüente aumento na frequência natural toda vez que o deslocamento cresce.

O mesmo fenômeno é ilustrado na figura 1.2, onde pode-se observar, através da resposta no tempo, a diminuição no período da resposta à medida em que crescem o parâmetro de não-linearidade e a condição inicial de deslocamento.

Como a resposta no tempo de um sistema não-linear sob vibração livre não pode ser representada por um único harmônico, mas sim, por uma série de Fourier que contém infinitos harmônicos, é de se esperar que em sistemas forçados pouco amortecidos, a curva de ressonância apresente diversos picos, pois a frequência da excitação pode ser igual a qualquer múltiplo de frequência presente na série de Fourier da resposta em vibração livre. Vale lembrar que no caso linear, só há um pico na curva de ressonância, que acontece quando

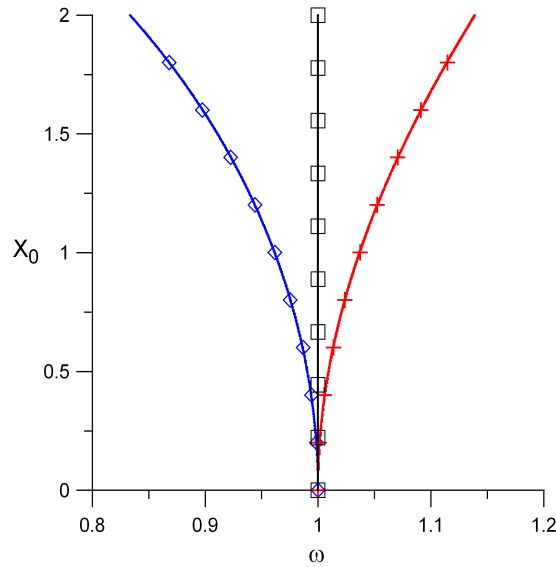


Figura 1.1: Relação frequência-deslocamento inicial, eq. (1-1), sendo $\omega_0 = 1$ e $F(t) = 0$. $\square$, $\beta = 0$; $+$, $\beta > 0$; $\diamond$, $\beta < 0$.

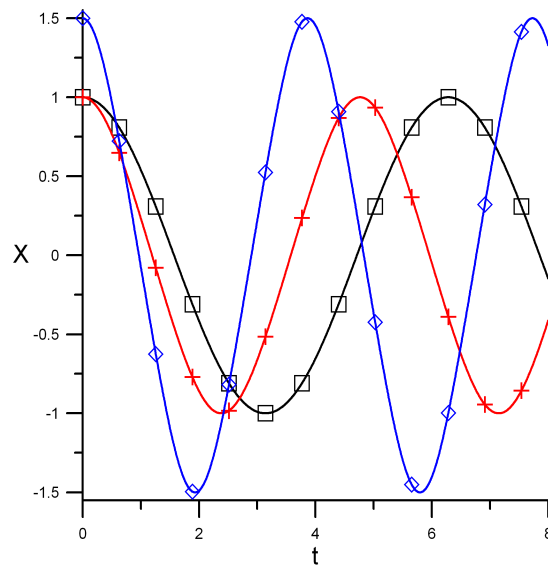


Figura 1.2: Oscilação livre não-amortecida, eq. (1-1), $\omega_0 = 1$ e $F(t) = 0$. $\square$, $x_0 = 1$ e $\beta = 0$; $+$, $x_0 = 1$ e $\beta = 1$; $\diamond$, $x_0 = 1,5$ e $\beta = 1$.

há igualdade entre as frequências excitadora e fundamental.

Na análise de sistemas não-lineares forçados, a curva de ressonância sofre um dobramento, fazendo com que seja possível se ter mais de uma solução para determinados parâmetros. Além disso, a ausência de amortecimento não implica em deslocamentos infinitos para frequências de excitação bem próximas à frequência natural. Considerando a equação de Duffing forçada, eq. (1-1), um β positivo provoca um comportamento do tipo hardening, em que há ganho de rigidez com o aumento dos deslocamentos, e β negativo faz com o sistema

perca rigidez à medida que os deslocamentos aumentam (softening), ou seja, é o mesmo comportamento do problema de vibração livre. Isto ocorre porque a excitação é, na verdade, uma perturbação imposta à solução livre. Portanto, a solução forçada deve ficar próxima à solução livre, como mostra a figura 1.3, onde três curvas de ressonância são apresentadas. Para os casos não-lineares, as respectivas soluções em vibração livre são exibidas em linha tracejada.

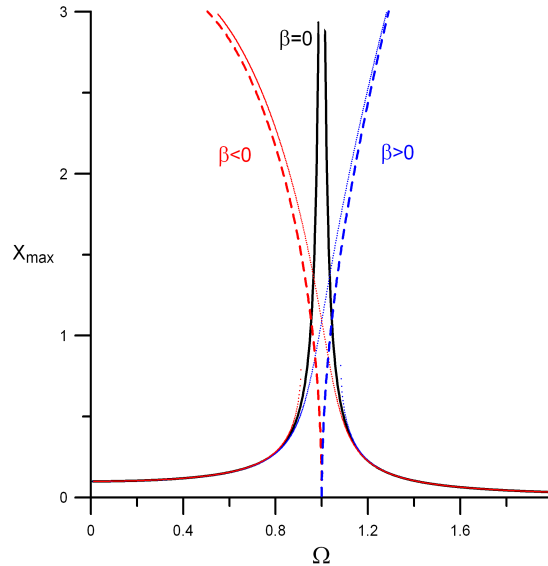


Figura 1.3: Curvas de ressonância para diferentes valores de não-linearidade do problema (1-1).

Uma ferramenta muito importante numa análise temporal foi desenvolvida por Henry Poincaré. Chamada de mapeamento de Poincaré, ela mostra o fluxo da solução no espaço de fase. Esta técnica consiste em verificar a posição e velocidade dos n graus de liberdade em intervalos de tempo igualmente espaçados. O intervalo de tempo corresponde ao período da excitação ou então a um múltiplo dela.

O número de pontos no mapa de Poincaré da solução permanente de um sistema forçado revela a periodicidade da resposta. Quando os pontos presentes no mapa de Poincaré se repetem, eles são chamados de pontos fixos e a resposta é periódica, quando há um número infinito deles, a resposta pode ser caótica ou quase-periódica.

Caos é o nome dado ao tipo de comportamento que alguns sistemas determinísticos não-lineares podem apresentar. Sistemas desse tipo apresentam uma grande sensibilidade a mudanças nas condições iniciais. Visto que erros em medições do estado inicial de um sistema sempre podem ocorrer, a previsibilidade destes sistemas é muito difícil. A figura 1.4 exibe um caso de sensibilidade às condições iniciais, onde a diferença entre as condições iniciais é $1e-5$ no deslocamento.

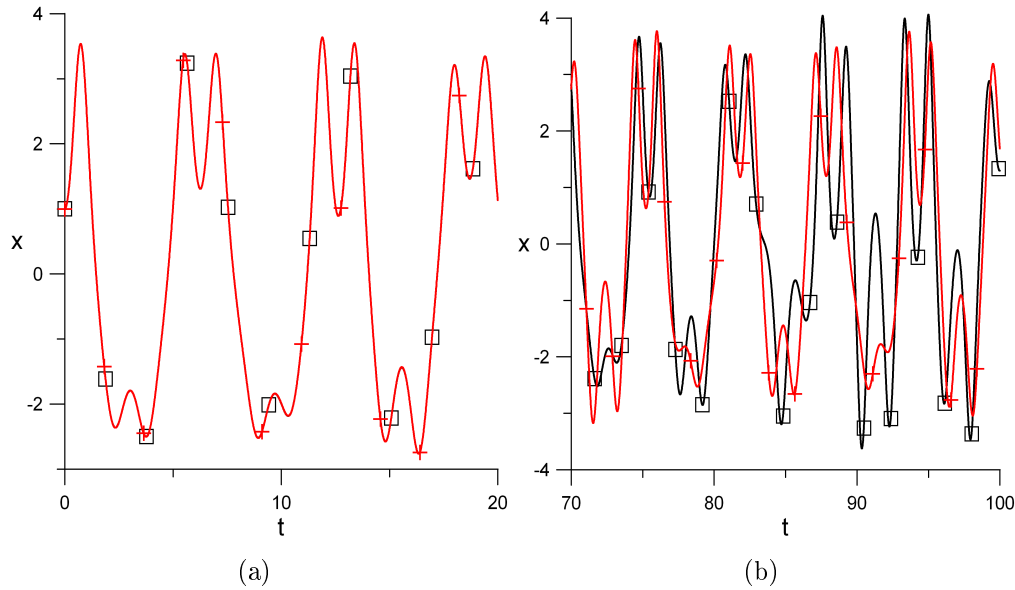


Figura 1.4: Respostas caóticas. Condições iniciais: $\square$, $(1; 0)$; $+$, $(0, 99999; 0)$. (a) Instantes iniciais; (b) Intervalo de tempo mais distante do instante inicial.

O mapeamento de Poincaré obtido por integração numérica fornece apenas os pontos fixos associados às trajetórias estáveis, já que as trajetórias instáveis não são soluções possíveis na integração numérica. Como mostrado por Gonçalves e Machado (1995)[26], através de um mapeamento do espaço de condições iniciais associado ao método de Newton-Raphson e integração numérica, é possível obter os pontos fixos associados a trajetórias estáveis e instáveis. Os pontos fixos instáveis são importantes pois suas variedades estáveis definem as fronteiras das bacias de atração das respostas estáveis. A classificação da estabilidade de um ponto fixo pode ser feita utilizando integração numérica: se um possível ponto fixo estável for tomado como condição inicial, após um certo número de períodos, a resposta deve retornar a este mesmo ponto, caso contrário o ponto fixo é na verdade instável.

A medida que um parâmetro do problema é variado, mudanças qualitativas no comportamento do sistema podem ocorrer. Quando isto acontece diz-se que o sistema sofreu uma bifurcação. Se o parâmetro de controle for a amplitude do carregamento, por exemplo, o valor da carga que faz o sistema atingir o ponto de bifurcação é chamado de carga crítica dinâmica. A figura 1.5(a) apresenta um diagrama de bifurcação, onde o eixo vertical contém a coordenada de deslocamento do ponto fixo, tal como apresentado por Van Dooren e Janssen(1996)[27], enquanto que na figura 1.5(b) têm-se a amplitude máxima dos deslocamentos. A figura 1.6 exhibe o diagrama de bifurcação em 3d, o que dá uma idéia de como ocorre a variação da posição dos pontos fixos no mapa de Poincaré.

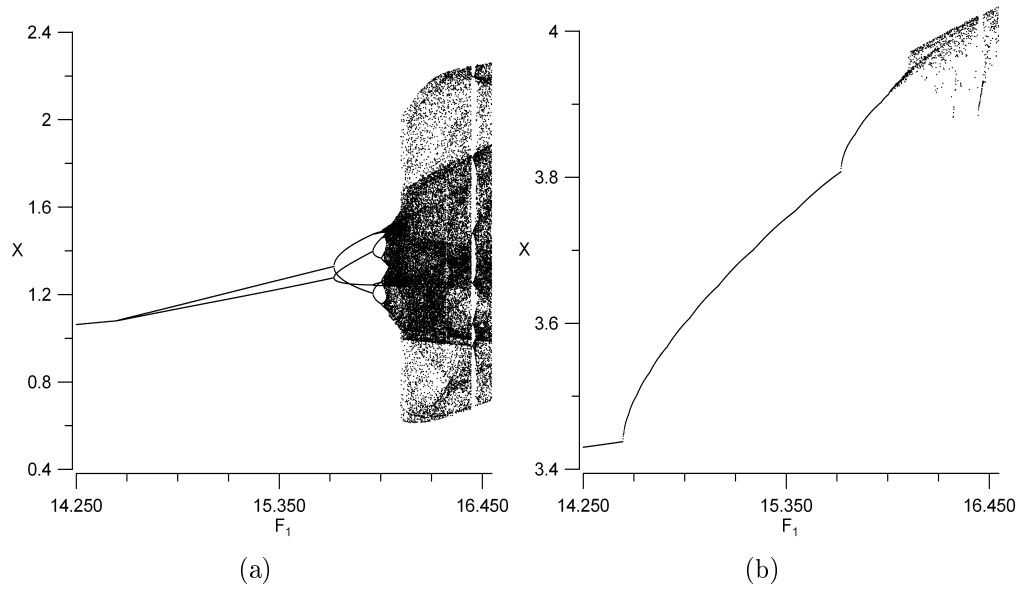


Figura 1.5: $\ddot{x} + x + x^3 = 3 + F_1 \cos t$: (a) Diagrama de Bifurcação; (b) Amplitude máxima.

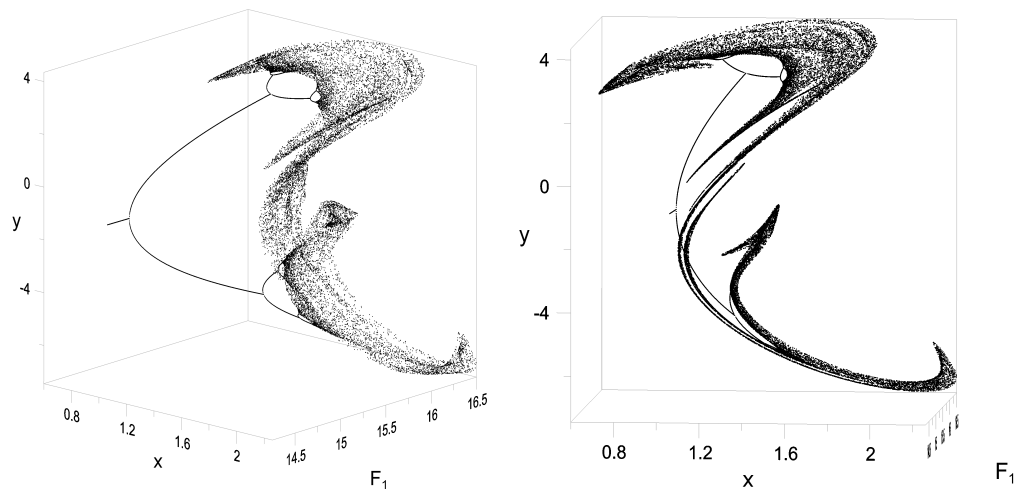


Figura 1.6: Diagrama de Bifurcação em 3d.

1.2 Objetivos

No estudo de oscilações não-lineares de sistema dinâmicos descritos por equações diferenciais ordinárias no tempo, ou se obtém uma resposta por integração direta das equações diferenciais, ou se usam métodos aproximados que permitam obter soluções analíticas para as equações de movimento.

O objetivo deste trabalho é o de comparar os métodos aproximados mais utilizados e propor duas novas metodologias para análise de sistemas dinâmicos não-lineares que permitem a análise de sistemas com não-linearidades mais

gerais, diferentemente dos métodos clássicos que são preferencialmente utilizados nas análises de sistemas com não-linearidades polinomiais. Para comparar os métodos aproximados, tomou-se a equação de Duffing por ser esta, muito utilizada para representar de forma aproximada estruturas tais como pórticos, vigas, arcos, placas, etc.

Como um segundo objetivo deste trabalho, tem-se a automação dos métodos clássicos mais utilizados, o que permite obter aproximações de ordem elevada para problemas que apresentem um alto grau de não-linearidade. De forma um pouco diferente da automação em álgebra simbólica em Maple apresentada por Nayfeh e Chin (1999), [28], alguns dos métodos automatizados em Maple possuem a finalidade de gerar um arquivo de saída em linguagem C++, para que a solução do problema faça parte de um programa independente que faz a análise paramétrica a partir de um arquivo de entrada de dados. Assim, nos programas em Maple os únicos dados de entrada são a equação e a ordem da solução desejada, enquanto que nos programas em C++ os dados são os valores dos parâmetros e a faixa de valores e o incrementos dos parâmetros que serão variados na análise. No anexo A tem-se a automatização do método de Lindsted-Poincaré modificado.

1.3

Novos Métodos Propostos

No primeiro método proposto, a solução aproximada da equação de movimento é escrita em uma série de potências de t . Os coeficientes da série são determinados igualando as derivadas da solução em série, avaliadas no instante inicial, com a solução exata desconhecida e suas derivadas, também avaliadas no instante inicial. Isto faz com que a solução em série de potências assuma a forma da série de Taylor da solução exata, com centro em torno do instante inicial, onde os dois primeiros coeficientes são as condições iniciais do problema. Os demais termos da série contêm derivadas de mais alta ordem da solução, que são obtidas a partir da equação diferencial.

À medida que mais termos são adicionados à série, maior é o intervalo de tempo em que a aproximação e a solução exata são coincidentes, pois após um determinado instante, as potências de t presentes na solução em série fazem com que a aproximação divirja. Se a solução em série possuir um número de termos que garanta a convergência dentro de um intervalo, no mínimo, igual ao período da solução exata, então se pode utilizar a solução em série para escrever que as condições iniciais de deslocamento e velocidade se repetem

após um período de tempo T , ou seja,

$$x(0) = x(T)$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}(T)$$

permitindo se determinar a frequência da resposta, no caso de vibração livre, ou, no caso de vibração forçada, as coordenadas do ponto fixo, associado ao instante inicial, da solução periódica.

Geralmente as energias cinética e potencial, utilizadas para se escrever as equações de movimento, apresentam alguma simetria. Esta simetria é refletida no espaço de fase da solução, o que permite se avaliar as soluções em série em instantes menores que T , o que aumenta a precisão dos resultados obtidos para a frequência da resposta, no caso de vibração livre, e coordenadas do ponto fixo, no caso de vibração forçada, além do que, diminui o número de termos necessários na série, já que não é mais necessário que a solução em série seja coincidente com a solução exata ao menos durante um período da resposta.

No segundo método, a solução aproximada é escrita em série de Fourier e as equações são obtidas da mesma forma com que são obtidas as equações utilizadas para determinar os coeficientes da série de potências do primeiro método. Isto é, a solução exata desconhecida e suas primeiras derivadas, avaliadas no instante inicial, são igualadas com a solução aproximada e suas primeiras derivadas, também avaliadas no instante inicial. As n primeiras equações são utilizadas para escrever um sistema linear que fornece as n amplitudes dos harmônicos. A frequência da resposta, no caso de vibração livre, ou as coordenadas do ponto fixo, no caso de vibração forçada, são obtidas resolvendo as equações restantes, isto é, a partir da equação $n + 1$ em diante. Estas equações adicionais também são não-lineares e por isso são resolvidas iterativamente.

1.4

Histórico

Nesta seção apresenta-se um histórico das pesquisas em métodos de soluções analíticas para sistemas não-lineares com ênfase nas contribuições que foram consultadas durante este trabalho.

Os métodos aproximados permitem obter soluções analíticas para as equações de movimento que podem ser usadas com eficiência em uma análise paramétrica. Quanto aos métodos aproximados, temos basicamente duas grandes famílias: (1) os métodos de perturbação, tais como o MMS, LP, KBM,

dentre outros, e (2) métodos que independem de um parâmetro de perturbação, como, por exemplo, o HBM e de Galerkin-Urabe.

Segundo Sanchez (1996)[29], os primeiros esforços para determinação de uma solução analítica para uma equação não linear foram feitos por Euler em 1772, descritos em um trabalho de 775 páginas sobre o movimento lunar (§0). Ele expandiu as coordenadas da lua numa série de potências de excentricidades da órbita da lua em torno do sol e da inclinação de sua órbita (§1).

Segundo Hagedorn(1984)[32], foi na mecânica celeste onde os métodos de perturbação foram utilizados pela primeira vez. As soluções continham termos que cresciam indefinidamente com o tempo, e esses termos passaram a ser chamados de termos seculares. Giorgilli (1998)[33] comenta que os termos que possuem coeficientes t , t^2 ,..., são tradicionalmente chamados de termos seculares porque nos movimentos dos planetas eles corresponderiam às diferenças das órbitas e da posição dos eixos, que são observados pela medição ao longo de alguns poucos séculos, em relação à teoria de Kepler. Em 1882, o astrônomo Lindstedt desenvolveu uma técnica que evitava o surgimento de termos seculares na solução. Ele percebeu que a frequência do sistema era afetada pela amplitude do movimento e então resolveu escrevê-la em um série de potências da perturbação. Mais tarde, Poincaré (1892) provou que a expansão obtida por Lindstedt era assintótica e hoje o método geralmente é chamado de Lindstedt-Poincaré. Segundo Nayfeh (1973)[34], Bohlin (1889) e Gylden (1893) também desenvolveram técnicas para evitar o surgimento de termos seculares.

Segundo Roy (1994)[35], o método devido a Krylov e Bogoliubov é na verdade, a forma moderna do método da média (Averaging Method). De acordo com Nayfeh [34], Krylov e Bogoliubov desenvolveram a técnica em 1947. Ela foi depois ampliada por Bogoliubov e Mitropolski em 1961 e estendida a soluções não estacionárias por Mitropolski em 1965, desde então o método é chamado de Krylov-Bogoliubov-Mitropolski (KBM).

O MMS [34, 36, 29] surgiu durante a década de 60. Nayfeh tem contribuição destacada no desenvolvimento do método. Em um de seus livros sobre métodos de perturbação (vide [34]), ele faz um apanhado contendo inúmeros problemas que foram tratados com o MMS. Hassan (1997)[37] mostra que os resultados obtidos pelo KBM e o MMS são idênticos para qualquer ordem de aproximação. Ele dá preferência ao KBM, por apresentar algumas vantagens na manipulação algébrica.

Urabe e Retter (1966)[38] apresentam vários exemplos numéricos resolvidos com o método hoje denominado Galerkin-Urabe. Eles afirmam que aproximações com 15 a 20 termos apresentam resultados suficientemente precisos e de-

envolvem um método para estimar o erro da solução aproximada. Utilizando a equação de Van Der Pol harmonicamente forçada, eles mostram que, para certos valores dos parâmetros, a primeira aproximação dada pelos métodos de perturbação não apresenta bons resultados mesmo para a determinação da existência e estabilidade da solução periódica.

Rapp e Mees em 1977[13] apresentam um exemplo em que o HBM apresenta soluções espúrias. Eles apontam que o HBM é provavelmente a técnica mais utilizada no estudo do comportamento de ciclos limites e também são citados alguns exemplos, de décadas anteriores, em que o HBM falha por não prever a existência de soluções periódicas.

Nayfeh (1983)[39] estudou a resposta de uma equação que governa um problema de uma bolha de gás imersa em um líquido, sujeita a um campo de som harmônico. A equação possui não-linearidades quadráticas e cúbicas. Utilizando uma aproximação de segunda ordem no MMS, ele encontra as soluções permanentes corretas e determina sua estabilidade.

Atadan e Huseyin (1984)[40] apresentaram um método de análise que é um misto de perturbação e balanço harmônico. A solução é escrita como um somatório de harmônicos em que a frequência e a amplitude são funções de um parâmetro de perturbação. Os autores afirmam que, com o método, evita-se o perigo de omitir qualquer contribuição importante dos vários harmônicos de uma aproximação e, para comprovar a eficiência do método, utilizam um exemplo bem conhecido em que a solução da equação de Duffing com não-linearidades quadrática e cúbica é inicialmente considerada como tendo um único harmônico.

Bajkowski e Szemplinska-Stupnicka (1986), [41], estudaram em sistemas de dois graus de liberdade os efeitos da ressonância interna, segunda frequência natural de vibração sendo três vezes maior que a primeira frequência natural ($\omega_02 = 3\omega_01$). Foram utilizados o método da média e o método de Ritz. Eles mostram que o método da média falha ao prever o comportamento do sistema, enquanto que o método de Ritz produz resultados precisos.

Bajkowski e Szemplinska-Stupnicka (1986), [42], estudaram respostas caóticas da equação de Duffing amortecida e com não-linearidades quadráticas e cúbicas. Eles mostram que o movimento caótico aparece na vizinhança da região próxima ao limite de estabilidade da primeira ressonância subharmônica. Eles utilizaram o HBM com um número mínimo de harmônicos na expansão.

Nayfeh e Zavodney (1986)[43] utilizaram o MMS para construir uma expansão de primeira ordem de um sistema de dois graus de liberdade com não-linearidades quadráticas. Eles estudaram a ressonância interna nos casos em que a segunda frequência natural é duas vezes maior que a primeira frequência

natural, sendo que a frequência da excitação era dada pela soma das duas frequências naturais e também igual a primeira frequência. Eles mostram que os resultados descrevem qualitativamente a resposta exata para os parâmetros escolhidos, porém quantitativamente ocorre um erro de 66% na amplitude do deslocamento da segunda coordenada.

Leung e Fung (1989)[44] aplicaram o IHBm para obter regiões caóticas. A estabilidade das soluções foi determinada através da aplicação da teoria de Floquet e os diagramas de bifurcação foram obtidos descartando-se os ramos instáveis. As regiões caóticas foram então determinadas como sendo os trechos com ausência de soluções periódicas estáveis de alto grau. O movimento caótico destas regiões foi então confirmado pela integração numérica. Uma vantagem de utilizar o critério da estabilidade das soluções periódicas obtidas pelo HBM para definir as regiões caóticas é que, como mostrado por Tongue (1987)[9], uma escolha indevida de um passo de tempo na integração numérica pode conduzir a resultados espúrios com respeito a existência ou não de soluções caóticas.

Nayfeh et. al. (1989)[45] estudaram a equação de Duffing com não-linearidades quadráticas e cúbicas. Uma expansão de segunda ordem foi utilizada e levou ao mesmo número de soluções estáveis obtidas por integração numérica. Como observado por eles, as soluções aproximadas tornavam-se mais imprecisas a medida em que se aumentava a não-linearidade.

Laurence e Cartee (1990)[46] estudaram o escape de um vale potencial da equação de Duffing com não-linearidade cúbica. Eles compararam os resultados dos métodos aproximados: MMS (aproximação de segunda ordem) e do HBM (aproximação de primeira ordem). Eles afirmam que, para propostas práticas, a solução contendo apenas um único harmônico no HBM conduz a uma boa estimativa do valor do parâmetro que causará o escape.

Lau et. al.(1990), [14], aplicaram o IHBm a sistemas tipo Duffing com não-linearidades cúbicas. Um método incremental de comprimento de arco foi utilizado para traçar as curvas de respostas automaticamente e a estabilidade das soluções periódicas encontradas foram determinadas através do método de Hsu.

Lau et. al.(1991)[16] analisaram um sistema de um grau de liberdade sujeito a uma excitação periódica com o IHBm. Todas as possíveis ressonâncias harmônicas, subharmônicas e superharmônicas foram encontradas. Os pontos de bifurcação também são encontrados e os resultados são comparados com a literatura.

Lewandowski (1992)[8] combinou elementos finitos e o HBM. Ele apresenta uma formulação baseada no Lagrangiano total para o comportamento elástico

de um elemento sujeito a grandes deslocamentos e pequenas deformações. As equações de movimento são obtidas seguindo a metodologia usual do Método dos Elementos Finitos e a solução no tempo é assumida ser uma série de Fourier. Então aplica-se o HBM para se obter o sistema de equações não-lineares. As potências e produtos trigonométricos são transformados em somatórios de harmônicos.

Hamdan e Burton (1993), [22], utilizaram o HBM para estudar as respostas permanentes de um oscilador de Duffing. Através de diagramas de bifurcação, eles demonstram que assumir a solução aproximada com dois harmônicos produz resultados qualitativamente diferentes dos obtidos com uma solução contendo um único harmônico. Eles também comparam os resultados numéricos e da solução com dois harmônicos com a solução de segunda ordem dada pelo MMS modificado, apresentado por Burton e Rahman [47]. Eles afirmam que o MMS diverge do verdadeiro comportamento da resposta, e, além disso, apresenta resultados piores que os dados pela aproximação de primeira ordem deste mesmo método.

Hassan (1995)[21] comparou as aproximações de primeira e segunda ordem dadas pelo MMS e o método da expansão da frequência amortecida. Ele mostra que ambos os métodos apresentam soluções estranhas para a expansão de segunda ordem. Hassan ainda afirma que a razão pela qual o HBM apresenta resultados mais precisos para uma região bem maior dos parâmetros é que, ao se aumentar o número de termos, corrige-se automaticamente a contribuição dos termos de mais baixa ordem. Isto não ocorre nos métodos de perturbação, onde ao aumentar a ordem da solução, somente adiciona-se mais um termo à solução, sem alterar os termos já existentes.

Hassan e Barton (1995)[12] apresentam um exemplo em que algumas soluções periódicas existentes não são previstas pelo HBM, enquanto que algumas soluções previstas na realidade não existem. Eles afirmam que os resíduos dos harmônicos de ordem mais alta podem ser usados para estimar a importância dos harmônicos omitidos. Entretanto, isto é de pouca ou nenhuma ajuda quando deseja-se detectar uma falha qualitativa da aproximação. Portanto eles recomendam que, para evitar resultados errôneos, deve-se comparar com resultados numéricos ou aumentar a ordem da aproximação.

Sarma (1995)[48] estudou os casos de vibrações livres da equação de Duffing com não-linearidades quadráticas e cúbicas. Ele comparou os resultados obtidos com LP e HBM com os resultados provenientes de integração numérica. Ele comenta que, em todos os casos analisados, o HBM com quatro termos apresenta resultados muito próximos da solução exata e que a técnica de LP é trabalhosa e pode ser aplicada apenas para pequenas amplitudes.

Ao invés de utilizar funções trigonométricas como solução aproximada, alguns métodos utilizam funções elípticas. Chen e Cheung (1996)[49] citam o método do Balanço Harmônico elíptico, o Krylov-Bogoliubov elíptico, o Averaging elíptico, e o Galerkin elíptico. A maioria destes métodos dão apenas aproximações de primeira ordem e, para grandes amplitudes, podem produzir erros inaceitáveis. Chen e Cheung apresentam um método que usa funções elípticas Jacobianas. As soluções aproximadas são comparadas com a integração no tempo e com alguns outros métodos elípticos. Como o método proposto pode dar aproximações de segunda ordem, os resultados acabam sendo melhores que as aproximações de primeira ordem dos outros métodos.

Lewandowski (1997), [18], mostra uma formulação geral para análise de estruturas com não-linearidades geométricas sujeitas a carregamentos harmônicos. É mostrada a equivalência dos métodos de Galerkin, Ritz e Balanço Harmônico na montagem do sistema não-linear de equações, o que conduz a idênticas soluções quando os mesmos harmônicos são tomados na solução aproximada.

Blair et. al. (1997)[50] utilizaram Newton-Raphson com comprimento de arco para resolver o sistema algébrico não-linear obtido pelo HBM. Em seguida, a análise de Floquet foi utilizada para determinar a estabilidade da resposta. O método do comprimento de arco consiste em adicionar mais uma equação ao problema. Assim, para certos conjuntos de parâmetros em que o sistema original não converge, o parâmetro de controle passa a ser incógnita no sistema com a equação adicional (comprimento de arco) e é possível encontrar uma solução.

Franciosi e Tomasiello (1998)[51] apresentam um código automatizado no programa Mathematica que utiliza o LP modificado proposto por Chen e Cheung[52] para tratar problemas de dois graus de liberdade com não-linearidades cúbicas. Os exemplos numéricos comparados com outros resultados da literatura apresentaram bons resultados.

Khanin et. al. (2000)[53] apresentam uma implementação computacional geral do MMS usando o programa Mathematica.

Andrianov e Awrejcewicz (2000)[54] estudaram a equação de Duffing em vibração livre. Eles compararam resultados numéricos com os dados por Nayfeh [34], para o MMS e para o LP. Eles afirmam que o acréscimo no número de termos da aproximação pode levar a um decréscimo na precisão da resposta. Segundo Amore et al. (2004)[55], métodos de perturbação freqüentemente conduzem a séries assintoticamente divergentes.

Inúmeras modificações nos métodos clássicos, visando melhorar quantitativamente os resultados têm sido propostas. Hu (2004)[56] atenta para o fato de

que já existe um método de perturbação clássico que é válido para grandes não-linearidades (LP Modificado). Ele compara os resultados deste método com dois outros métodos propostos e com a solução exata na análise da equação de Duffing não amortecida e com apenas não-linearidade cúbica. O método apresentado por Hu é o que produz os melhores resultados.

Recentemente Mickens (2001)[57] estudou o problema de vibração livre com não-linearidade fracionária. Após isolar o termo que apresenta não-linearidade fracionária na equação diferencial, Mickens elevou ambos os lados da equação a uma potência de forma que a potência fracionária passa a ter valor unitário e então ele aplicou o HBM com um único harmônico na solução aproximada e obteve uma solução analítica geral para a relação frequência-deslocamento inicial para não-linearidades fracionárias onde ambos, numerador e denominador, são ímpares.

Através do HBM, Gottlieb (2003)[1] obteve uma solução de primeira ordem sem a manipulação prévia da equação diferencial realizada por Mickens, que, como mostrado por Gottlieb, altera o balanço dos harmônicos, piorando os resultados. Na solução obtida por Gottlieb, a frequência é dada em termos de uma função Gamma e obtém-se resultados mais precisos que a solução obtida por Mickens. Entretanto, se mais harmônicos são adicionados à aproximação da equação manipulada conforme Mickens, melhores resultados são obtidos, como mostrado por Mickens (2002)[58] na aproximação contendo dois harmônicos.

He (1999)[59] apresentou um novo método de perturbação baseado na técnica de Homotopia. A técnica da homotopia é originalmente utilizada na resolução de sistemas algébricos não-lineares, que podem apresentar múltiplas soluções e divergem rapidamente dependendo das condições iniciais. A dificuldade na convergência que pode ocorrer com certas condições iniciais é contornada com a técnica da homotopia. O procedimento consiste de inserir no problema um novo parâmetro, λ , que varia de 0 a 1, sendo que para $\lambda = 0$ tem-se um sistema simples, de fácil resolução e para $\lambda = 1$ tem-se o sistema original para qual deseja-se encontrar a solução. O parâmetro λ é então variado lentamente de 0 a 1 e para cada valor de λ a solução é obtida. Quando $\lambda = 1$, tem-se a solução desejada.

No método de He, chamado de Homotopy Perturbation Method (HPM), um novo parâmetro p , que por definição varia de 0 a 1, é inserido no problema e escreve-se a função de homotopia. Quando $p = 0$, tem-se o problema linear, e quando $p = 1$ tem-se o problema não-linear original. Em seguida, a solução é escrita como uma série de potências de p , e substituída na função de homotopia. Os termos de mesma potência em p são coletados e um sistema linear de equações diferenciais é obtido. O parâmetro p é feito igual a 1 e então tem-se

a solução desejada. Para um oscilador tipo Duffing, He (1999), [59], utilizou apenas uma solução de primeira ordem e determinou a frequência da resposta ao igualar a zero os coeficientes de $\cos t$ da segunda equação, o que impede o aparecimento de termos seculares na próxima iteração. Ele mostra que a aproximação para a frequência da resposta apresenta um erro menor de 5,4% para qualquer valor de não-linearidade.

Como apontado por He (2004), [60], soluções de alta ordem não são obtidas porque os termos seculares que surgem nestas soluções não podem ser retirados e então ele contorna esta limitação expandindo também a frequência da resposta em série de potências. Porém há duas formas de aplicar este método em que a frequência da resposta também é expandida em série, que são desprezando ou não a solução homogênea que surge em cada integração. He (2006), [61] obtém a solução da equação de Duffing igualando a zero as constantes de integração que surgem em cada passo. Desta forma ele obtém uma aproximação para a frequência da resposta que é pior que a obtida ao se aplicar o método de Lindsted-Poincaré modificado. Se as constantes de integração são determinadas de forma a atender as condições iniciais, conforme Belendez et al (2008) [62], onde a solução de uma equação de Duffing com termo linear nulo é obtida através do HPM, se obtém as mesmas soluções, para o deslocamento no tempo e frequência da resposta, dadas pelo método de LP modificado.

Uma forma diferente de aplicar o HPM da forma como é aplicada por He (1999)[59], na obtenção da solução da equação de Duffing, seria a de desprezar a solução homogênea e então determinar a frequência da resposta através da condição inicial de deslocamento. Ao se anular as constantes de integração, se evita o surgimento de termos seculares na solução seguinte. A frequência da resposta pode ser obtida através da condição inicial de deslocamento, mas as soluções de mais alta ordem acabam se tornando muito custosas de ser obtidas. Esta forma apresenta resultados levemente melhores que os obtidos por He porém piores que os obtidos com o LP modificado.

1.5

Descrição da tese

Esta tese apresenta alguns dos métodos clássicos de resolução de equações diferenciais não-lineares e propõem dois novos métodos. As soluções de cada método são validados através da comparação com as soluções obtidas a partir da integração numérica das equações de movimento. Por ser muito utilizado e

de fácil implementação, o Runge Kutta (RK) de quarta ordem foi o método de integração numérica escolhido para fornecer as soluções de referência. Detalhes da formulação deste método podem ser obtidos no livro de Craig ([3]).

O capítulo 2 apresenta a metodologia comumente usada no estudo da dinâmica não-linear de estruturas contínuas. Utilizando uma viga como exemplo, as equações de movimento dos casos linear e não-linear (Duffing) são obtidas.

Embora exista uma vasta literatura sobre métodos analíticos aproximados para solução de sistemas dinâmicos não-lineares, poucas são as obras que apresentam os diversos métodos de solução e suas variantes, permitindo assim uma comparação entre os diversos procedimentos. Assim, no Capítulo 3 são apresentados os métodos de perturbação de Lindstedt-Poincaré tradicional e modificado e múltiplas escalas. Os métodos são apresentados em exemplos de vibração livre, forçada e forçada amortecida.

No Capítulo 4 apresentam-se os métodos do Balanço Harmônico, Galerkin-Urabe e Balanço Harmônico Incremental, juntamente com exemplos de aplicação.

No capítulo 5, apresenta-se a teoria da estabilidade de soluções periódicas.

No capítulo 6 apresentam-se o método de Taylor e o método de Taylor escrito em séries de Fourier, propostas deste trabalho.

No capítulo 7, vários exemplos contendo não-linearidades não-polinômiais são apresentados e analisados usando-se as metodologias propostas neste trabalho.

O primeiro exemplo trata do problema envolvendo não-linearidade fracionária estudado recentemente por Mickens (2002), [8], Swamy et al (2003), [64], van Horssen (2003) e Gottlieb (2003), [1], entre outros. Os resultados apresentados por Gottlieb são comparados com os obtidos com os métodos propostos, onde se verifica que as aproximações em série de Taylor a partir de cinco termos já apresentam resultados melhores.

O segundo exemplo trata da não-linearidade devida à função trigonométrica presente na equação de movimento do pêndulo plano. A aplicação dos métodos tradicionais neste tipo de problema geralmente é feita após se substituir, na equação diferencial, a função trigonométrica por sua série de Taylor, o que resulta em uma equação com não-linearidades polinômiais e ímpares. A aplicação do método de Taylor permite se obter expressões analíticas para a frequência da resposta levando em conta a não-linearidade original dada pela função trigonométrica. Os resultados obtidos para vibração livre são comparados com integração numérica e verifica-se a proximidade das soluções, até mesmo para grandes ângulos sendo tomados como condições iniciais.

Também a influência dos parâmetros na frequência da resposta é estudada e comparada com a integração numérica.

Como terceiro exemplo tem-se um pêndulo elíptico, onde um pêndulo é preso a uma massa livre para se deslocar horizontalmente. As equações de movimento apresentadas por Ge e Lin (2007), [65], são obtidas aplicando o princípio de Hamilton e verifica-se a presença de não-linearidades inerciais. As relações frequência-amplitude são obtidas utilizando os métodos propostos e os resultados são comparados com integração numérica.

O quarto exemplo trata da equação com não-linearidades não-polinomiais que descreve o movimento de uma viga bi-apoiada. Esta equação é obtida na seção 2.5. A curva frequência-amplitude é traçada utilizando diferentes aproximações e comparada com integração numérica.

O quinto exemplo é o estudo do escape de um vale potencial de um arco abatido sujeito a um carregamento brusco, estudado por Lin e Bradford (2008), [66]. Através da curva frequência-amplitude obtida com os métodos propostos, é possível verificar a mudança de comportamento que ocorre quando a carga atinge o valor que provoca o escape do vale potencial.

Finalmente, no último exemplo, tem-se o estudo da estabilidade de soluções periódicas através da equação não-linear de Mathieu. Esta equação é obtida ao se aplicar uma perturbação ϵ à uma solução periódica $x(t)$ da equação de Duffing. Três soluções periódicas são analisadas e para a solução instável se obteve uma solução periódica para a perturbação coincidente com a integração numérica.

No capítulo 8, são apresentados as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Finalmente, apresenta-se a bibliografia consultada para o desenvolvimento desta pesquisa.