

## 6 Modelo financeiro para os passivos

### 6.1. Premissas

O desenvolvimento de métodos e modelos para a alocação dos ativos de um fundo de pensão tem como principais objetivos o cumprimento das metas atuariais do passivo e a garantia de pagamento de todos os benefícios concedidos pela instituição.

Diferente de outras entidades, como seguradoras, resseguradoras, bancos e até mesmo traders de derivativos, onde o passivo é uma variável de decisão, os fundos de pensão não controlam ativamente seus desembolsos. Neste caso, os fluxos do passivo são usados apenas como fatores de risco na escolha da política de investimentos da instituição.

O cálculo da alocação ótima via ALM depende da existência dos dados dos participantes do fundo. Na falta de dados reais, a base de dados utilizada neste trabalho foi criada artificialmente respeitando algumas premissas.

Planos BD deixaram de ser oferecidos por fundos de pensão devido aos riscos envolvidos. Sendo assim, este exemplo considera um número fixo de participantes com único decremento (morte). Os 110200 participantes do fundo estão divididos em:

- 45000 ativos
- 60000 aposentados
- 3600 pensionistas cônjuges
- 1600 pensionistas filhos

Os participantes ativos encontram-se, no máximo, a vinte anos de sua aposentaria. Destes indivíduos 55% são homens e 45% mulheres. A modelagem dos futuros pensionistas (cônjuges e filhos) é baseada no conceito de “Família Padrão” (Marinha do Brasil). O homem é casado e tem o primeiro filho aos 27 e o segundo aos 29. Os pensionistas cônjuges apresentam um percentual invertido

com 55% de mulheres. Os pensionistas filhos por sua vez são 50% do sexo masculino e 50% do feminino.

Os participantes ativos são agrupados em cinco faixas salariais.

- 30% dos ativos: R\$ 1000,00 – R\$ 3000,00;
- 40% dos ativos: R\$ 3000,01 – R\$ 5000,00;
- 20% dos ativos: R\$ 5000,01 – R\$ 7000,00;
- 8% dos ativos: R\$ 7000,01 – R\$ 9000,00;
- 2% dos ativos: R\$ 9000,01 – R\$ 15000,00;

A proporção dos aposentados também é de 55% de homens e 45% de mulheres. A idade de aposentaria é fixa: 65 anos para homens e 60 para mulheres. Dentro do grupo de atuais pensionistas indiretos, 60% são cônjuges e 40% são filhos do beneficiário original.

Da mesma forma que os participantes ativos, os aposentados e pensionistas também são divididos por faixas de benefícios. São elas:

- 30% dos aposentados e pensionistas: R\$ 1000,00 – R\$ 3000,00;
- 40% dos aposentados e pensionistas: R\$ 3000,01 – R\$ 5000,00;
- 20% dos aposentados e pensionistas: R\$ 5000,01 – R\$ 7000,00;
- 8% dos aposentados e pensionistas: R\$ 7000,01 – R\$ 9000,00;
- 2% dos aposentados e pensionistas: R\$ 9000,01 – R\$ 15000,00;

É através da base de dados descrita que serão calculados os benefícios e as contribuições, ou seja, os fluxos atuariais utilizados no modelo de ALM via programação estocástica. O fator de risco considerado nesse cálculo é a probabilidade de morte. Para isso, é utilizada a tábua de mortalidade AT-83, determinada por lei.

### 6.1.1. Contribuições e benefícios

As contribuições para o fundo são de 16% do salário do participante ativo, sendo 8% pagos pelo indivíduo e 8% pagos pela instituição patrocinadora. A evolução salarial dos membros ativos é dada por um dissídio real de 2% ao ano. Os pagamentos são feitos até o funcionário completar a idade de aposentaria. A partir desta data, o participante passa a ser beneficiário de 90% de seu último salário como ativo. Este benefício, por sua vez, é corrigido pela inflação (IGP-M) anualmente.

Após a morte do participante, seu benefício é repassado para seu cônjuge. O falecimento do cônjuge tem como consequência o repasse do benefício para os filhos. Assim, o pagamento é dividido igualmente entre os filhos vivos de até 21 anos.

Considerando todas as premissas descritas, é possível representar o cálculo das contribuições e benefícios usando variáveis indicadoras que caracterizam o estado do participante. Definem-se as variáveis indicadoras.

$$I_{morto}(p) = \begin{cases} 1, & \text{participante } p \text{ morto} \\ 0, & \text{participante } p \text{ vivo} \end{cases}$$

$$I_{conj\_morto}(p) = \begin{cases} 1, & \text{cônjuge do participante } p \text{ morto} \\ 0, & \text{cônjuge do participante } p \text{ vivo} \end{cases}$$

$$I_{f1\_morto}(p) = \begin{cases} 1, & 1^{\circ} \text{ filho do participante } p \text{ morto} \\ 0, & 1^{\circ} \text{ filho do participante } p \text{ vivo} \end{cases}$$

$$I_{f2\_morto}(p) = \begin{cases} 1, & 2^{\circ} \text{ filho do participante } p \text{ morto} \\ 0, & 2^{\circ} \text{ filho do participante } p \text{ vivo} \end{cases}$$

$$I_{f1\_maior}(p) = \begin{cases} 1, & 1^{\circ} \text{ filho do participante } p \text{ com mais de 21 anos} \\ 0, & 1^{\circ} \text{ filho do participante } p \text{ vivo com até 21 anos} \end{cases}$$

$$I_{f2\_maior}(p) = \begin{cases} 1, & 2^{\circ} \text{ filho do participante } p \text{ morto com mais de 21 anos} \\ 0, & 2^{\circ} \text{ filho do participante } p \text{ vivo com até 21 anos} \end{cases}$$

$$I_{aposentado}(p) = \begin{cases} 1, & \text{participante } p \text{ aposentado} \\ 0, & \text{participante } p \text{ ativo} \end{cases}$$

Outras definições:

- $salário(p,k)$  = salário do participante  $p$  no ano  $k$
- $último\_salário(p)$  = último salário como ativo do participante  $p$

Utilizando tais definições, é possível formular o valor anual dos fluxos atuariais reais de interesse. A contribuição do participante  $p$  no instante  $k$  é:

$$contribuição(p,k) = 0,16 \cdot salário(p,k) \cdot (1 - I_{morte}(p)) \cdot (1 - I_{aposentado}(p))$$

O cenário médio das contribuições é computado como o valor esperado da expressão anterior. Considerando que a variável indicadora de aposentadoria é determinística, a esperança é obtida substituindo a indicadora de morte pela probabilidade de morte  $q_x$  da tábua AT-83.

$$E[contribuição(p,k)] = 0,16 \cdot salário(p,k) \cdot (1 - q_{idade\_participante}) \cdot (1 - I_{aposentado}(p))$$

A contribuição total esperada será a soma das contribuições médias de todos os NP participantes no instante  $k$ .

$$E[contribuição\_total(k)] = \sum_{p=1}^{NP} E[contribuição(p,k)]$$

Os benefícios são divididos em três componentes relacionadas às três possíveis condições de recebimento. A primeira delas é o pagamento direto ao participante titular  $p$  quando este se encontra vivo e aposentado. Da mesma forma que a contribuição, são calculados os valores esperados de cada componente substituindo a indicadora de morte por  $q_x$ .

$$benefício1(p,k) = 0,90 \cdot último\_salário(p) \cdot (1 - I_{morte}(p)) \cdot I_{aposentado}(p)$$

$$E[benefício1(p,k)] = 0,90 \cdot último\_salário(p) \cdot (1 - q_{idade\_participante}) \cdot I_{aposentado}(p)$$

A segunda componente é caracterizada pela morte do participante titular  $p$  com seu respectivo cônjuge ainda em vida. Neste caso, o benefício é repassado integralmente ao seu dependente direto.

$$\begin{aligned} \text{benefício } 2(p, k) &= 0,90 \cdot \text{último\_salário}(p) \cdot I_{\text{morto}}(p) \cdot (1 - I_{\text{conj\_morto}}(p)) \\ E[\text{benefício } 2(p, k)] &= 0,90 \cdot \text{último\_salário}(p) \cdot q_{\text{idade\_participante}} \cdot (1 - q_{\text{idade\_conj}}) \end{aligned}$$

A terceira e última componente é marcada pelo falecimento do titular  $p$  e seu cônjuge, repassando a aposentadoria para os dois filhos (família padrão). O benefício é dividido igualmente entre os dependentes indiretos enquanto estes foram vivos e menores de 21 anos.

$$\begin{aligned} \text{benefício } 3(p, k) &= 0,90 \cdot \text{último\_salário}(p) \cdot I_{\text{morto}}(p) \cdot I_{\text{conj\_m}}(p) \cdot \\ &\cdot (1 - I_{\text{filho1\_morto}} \cdot I_{\text{filho2\_morto}}) \cdot (1 - I_{\text{filho1\_maior}} \cdot I_{\text{filho2\_maior}}) \\ E[\text{benefício } 3(p, k)] &= 0,90 \cdot \text{último\_salário}(p) \cdot q_{\text{idade\_participante}} \cdot q_{\text{idade\_conj}} \cdot \\ &\cdot (1 - q_{\text{idade\_filho1}} \cdot q_{\text{idade\_filho2}}) \cdot (1 - I_{\text{filho1\_maior}} \cdot I_{\text{filho2\_maior}}) \end{aligned}$$

Somando as médias das três componentes é obtido o valor do benefício esperado em  $k$  relacionado ao participante  $p$ .

$$E[\text{benefício}(p, k)] = E[\text{benefício } 1(p, k)] + E[\text{benefício } 2(p, k)] + E[\text{benefício } 3(p, k)]$$

O benefício total esperado é também em  $t$  calculado como a soma dos benefícios esperados de todos os NP participantes no mesmo instante  $k$ .

$$E[\text{benefício\_total}(k)] = \sum_{p=1}^{NP} E[\text{benefício}(p, k)]$$

Os fluxos atuariais reais FR, ou seja, sem inflação, são calculados como a diferença entre benefícios e contribuições totais.

$$FR(k) = E[\text{benefício\_total}(k)] - E[\text{contribuição\_total}(k)]$$

Esses fluxos reais são transformados em nominais usando os cenários de inflação acumulada da árvore de possibilidades para serem posteriormente utilizados como fatores de risco do modelo de programação estocástica.

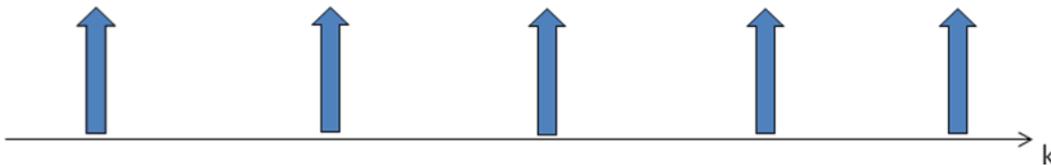
## 6.2.

### Geração de cenários em árvore para os passivos

Os fluxos líquidos do passivo são utilizados como um fator de risco no modelo de otimização da carteira de um fundo de pensão. Esses desembolsos são estruturados na forma de árvore de possibilidades representando assim os cenários condicionais necessários à formulação do problema de programação estocástica.

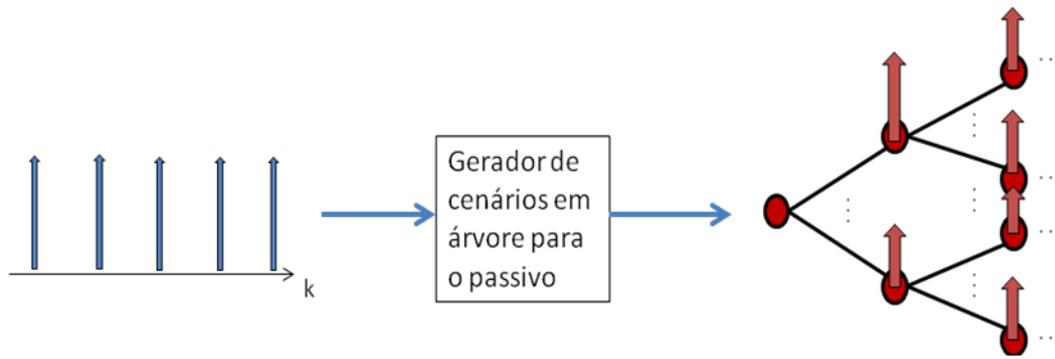
O modelo de PE utiliza todos os seus parâmetros e variáveis em termos nominais. Desta forma, torna-se necessário a transformação dos fluxos reais em desembolsos nominais. A transformação dos pagamentos reais em nominais é feita usando cenários de inflação acumulada do período em estudo.

A modelagem do passivo real, descrita anteriormente, é responsável por um conjunto de fluxos anuais reais e determinísticos  $FR(k)$ .



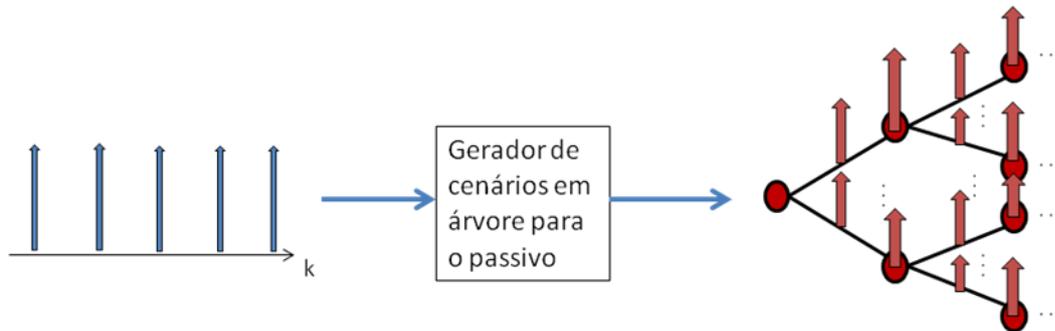
**Figura 18. Fluxos reais determinísticos do passivo**

Utilizando cenários de inflação acumulada sob a forma de árvore, os fluxos reais determinísticos tornam-se nominais estocásticos. Para uma árvore simplificada com estágios de duração de 1 ano, este processo é suficiente para a obtenção dos dados na forma do problema de otimização.



**Figura 19. Gerador de cenários em árvore para o passivo com estágios anuais**

O exemplo ilustrativo descrito neste trabalho é caracterizado por estágios com durações diferentes maiores ou iguais a um. Neste caso, os estágios com mais de um ano de duração apresentam mais de um fluxo relacionado.



**Figura 20. Gerador de cenários em árvore para o passivo genérico**

Os fluxos nominais estocásticos dependem dos cenários de inflação acumulada do instante 0 até o momento do desembolso. O cálculo da inflação acumulada é feito usando a variação percentual anualizada do índice geral de preços (IGP-M) no trimestre  $q$ , definida anteriormente na seção 5.3 como  $y_{3q}^t$ . Considerando esta variável relacionada ao nó  $n_t$ , ou seja,  $y_{3q}^t(n_t)$ , a inflação anual do ano  $k$  relacionado ao nó  $n_t$  é dada por:

$$inf\_anual(n_t, k) = \left[ \prod_{q=4k-3}^{4k} (1 + y_{3q}^t(n_t))^{1/4} \right] - 1$$

Logo, tem-se a inflação acumulada como:

$$inf\_acum(n_t, k) = \left[ 1 + inf\_acum\left(n_{t-1}, \frac{dur(t-1)}{4}\right) \right] \cdot \prod_{i=1}^k (1 + inf\_anual(n_t, i))$$

$\forall n_t, n_{t-1}$  interligados

Com isto, são calculados os fluxos nominais estocásticos:

$$FN(n_t, k) = (1 + inf\_acum(n_t, k)) \cdot FR(k)$$

Os fluxos relativos ao estágio t devem ser acumulados ao final do período com o objetivo de obter um único fluxo para cada nó da estrutura. Esta acumulação deveria ser feita utilizando a rentabilidade da carteira como taxa de desconto. Porém, o retorno do portfólio depende da decisão de alocação que por sua vez depende dos fluxos acumulados do passivo em cada nó da árvore. Para resolver este problema, é considerada a aproximação do retorno da carteira como a taxa básica de juros, representando 100% alocado em um único contrato de renda fixa. Os fluxos acumulados no nó  $n_t$  são:

$$l(n_t) = \sum_{k=1}^{dur(t)/4} FN(n_t, k) \cdot (1 + juros\_anual(n_t, k))^{(dur(t)/4) - k}$$