6 Revisitando Euclides com Hérigone e Legendre: a demonstração em obras históricas

O texto euclidiano é o modelo padrão a partir do qual será feita a análise da demonstração em outras obras. A comparação do teorema nas três obras históricas mostra a entrada de elementos novos mudando o estilo de escrita, fornecendo pontos de partida básicos para se prosseguir revisitando Euclides.

6.1 A demonstração nos *Elementos* de Euclides

A geometria demonstrativa de Euclides tem por base as cinco *Noções Comuns* ou *Axiomas* e os cinco *Postulados*. São eles,

> As cinco Noções Comuns de Euclides:
>
> N.C. 1: Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si.
> N.C. 2: Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais.
> N.C. 3: Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
> N.C. 4: Coisas que coincidem com uma outra são iguais entre si.
> N.C. 5: O todo é maior que a parte.
>
> Os cinco Postulados de Euclides:
>
> Post. 1- Desenhar uma linha reta de um ponto qualquer a um ponto qualquer.
> Post. 2- Produzir uma linha reta finita continuamente em uma linha reta.
> Post. 3- Descrever um círculo com um centro e um raio qualquer.
> Post. 4- Todos os ângulos retos são iguais entre si.
> Post. 5-Se uma linha reta caindo sobre duas linhas retas faz ângulos internos, do mesmo lado, menores que dois ângulos retos, as duas linhas retas, se produzidas indefinidamente, encontram-se do lado em que os ângulos são menores que dois ângulos retos. (Heath, 1956, p. 154-155)

Os *Postulados* enunciam a possibilidade das construções geométricas e as *Noções Comuns* ou *Axiomas* tratam das igualdades, permitindo comparar as grandezas e fundamentando o método da justaposição, idéia subentendida no conceito de congruência. As definições que abrem cada um dos livros dos *Elementos*, não têm caráter operatório, servindo basicamente para designar os objetos a partir das suas propriedades.

O livro I dos *Elementos*, onde se encontra o teorema de Pitágoras, "trata das construções geométricas elementares, teoremas de congruência, área de polígonos, teorema de Pitágoras" (Carvalho, 1994, p.14). O contexto teórico sob o qual a prova do teorema de Pitágoras foi desenvolvida, a equivalência de áreas das figuras planas, implica operar com igualdades, conforme prevêem as Noções Comuns, mediante o procedimento mais geral e característico em Euclides, a geometrização das grandezas em que não se usa números reais nem medida de distância[1].

A forma como se estrutura a organização do texto euclidiano torna-se importante. Proclo de Lícia no século V d. C., comentando o Livro I dos *Elementos*, disse que o texto euclidiano serve de modelo para a redação matemática, a qual consta de seis etapas:

1- *proposição* ou *enunciado*;

2- *exposição* ou *hipótese* em que se traduz com o uso de figuras o enunciado, expondo os elementos ou dados da questão;

3- *explicação* ou *determinação* em que consta a única frase com verbo na voz ativa enunciando a conclusão, ou seja, explicando claramente o que é pedido;

4- construção ou *preparação*, reunido o que ainda falta para se encontrar o que é pedido;

5- *demonstração*[2] ou prova;

6- *conclusão* da prova.

O desenvolvimento das demonstrações em Euclides está previsto dentro desse modelo. As partes mais essenciais e sempre presentes em toda demonstração são o *enunciado*, a *demonstração* e a *conclusão*. O teorema de Pitágoras é a Proposição 47 do Livro I dos *Elementos* de Euclides. O texto da demonstração, abaixo, contém um chaveamento feito por mim, à esquerda, destacando as etapas a que a redação do texto euclidiano obedece. Também a conjunção *portanto*, indicando inferências lógicas dos passos dedutivos, vem destacada pela borda retangular e o realce em cinza. Por mais duas vezes a conjunção *portanto* aparece na conclusão do teorema sem valor dedutivo e está

1 Sobre abordagens do conceito de congruência, ver Moise, 1964.

2 O termo demonstração, em itálico, indica a etapa da redação prevista pelo modelo euclidiano; nos outros casos tem um sentido mais amplo, indicando o texto completo do teorema.

destacada em itálico sublinhado. Uma série de passos dedutivos que vai da *construção* até a *demonstração* leva à conclusão final do teorema de Pitágoras.

PROPOSIÇÃO 47, Livro I dos *Elementos* de Euclides

proposição ou enunciado

Em triângulos retângulos o quadrado sobre o lado que subentende o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados contendo o ângulo reto.

exposição ou hipótese

Seja *ABC* um triângulo retângulo tendo o ângulo *BAC* reto;

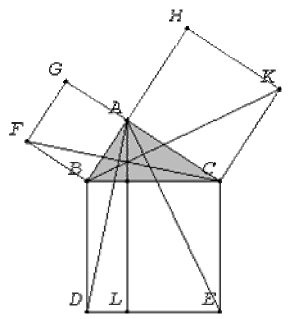


fig. 19

determinação ou explicação

Eu digo que o quadrado sobre BC é igual aos quadrados sobre *BA*, *AC*.

construção ou preparação

Pois sejam descritos sobre *BC* o quadrado *BDEC*, e sobre *BA,* AC os quadrados *GB;* *[I.46]*

por *A* seja *AL* traçada paralela a *BD* ou *CE,* e sejam unidas *AD,FC.*

Então, como cada um dos ângulos *BAC* e *BAG* é reto, segue que da linha reta *BA* e do ponto A sobre ela, as duas linhas retas *AC*, *AG* não ficam do mesmo lado, fazem os ângulos adjacentes iguais a dois ângulos retos;

portanto, *CA* está em linha reta com *AG*. *[I.14]*

Por essa mesma razão,

BA está também em linha reta com *AH*.

demonstração

método da equivalência de áreas

E, como o ângulo *DBC* é igual ao ângulo *FBA*, pois cada um deles é reto,
seja o ângulo *ABC* adicionado a cada um deles;

portanto, o ângulo *DBA* é igual ao ângulo *FBC*. *[N.C.2]*

E, como *DB* é igual a *BC* e *FB* à *BA*,
os dois lados *AB*, *BD* são iguais aos dois lados *FB*, *BC* respectivamente,
e o ângulo *ABD* é igual ao ângulo *FBC*;

portanto a base *AD* é igual à base *FC*;

e o triângulo *ABD* é igual ao triângulo *FBC*. *[I.4]*

Mas o paralelogramo *BL* é o dobro do triângulo *ABD*, pois eles têm a mesma base *BD* e estão entre as mesmas paralelas *BD* e *AL*. *[I.41]*

E o quadrado *GB* é o dobro do triângulo *FBC*, pois eles têm a mesma base *FB* e estão entre as mesmas paralelas *FB* e *GC*. *[I.41]*

[Mas o dobro de iguais são iguais entre si.]

Portanto o paralelogramo *BL* é também igual ao quadrado *GB*.

Similarmente, se *AE*, *BK* forem unidos, pode também ser provado que o paralelogramo *CL* é igual ao quadrado *HC*;

portanto, o quadrado BDEC é igual aos dois quadrados *GB,HC.* *[C.N.2]*

conclusão

E o quadrado *BDEC* foi descrito sobre *BC,*
e os quadrados *GB, HC* sobre *BA, AC.*

Portanto o quadrado sobre o lado *BC* é igual aos quadrados sobre os lados *BA, AC.*

Portanto, etc. *Q.E.D*

Fig. 2 Teorema de Pitágoras, *Elementos* de Euclides, p. 349-350, v. 1

O texto da demonstração é marcado pelo encadeamento de dois passos dedutivos, com o uso dos termos de ligação que referem uma proposição de entrada que foi conclusão no passo antecedente. Entre outros exemplos possíveis, o termo *pois* e o termo *então,* sublinhados por mim no extrato, indicam uma retomada do que se disse antes para dar continuidade ao desenvolvimento da prova. Esses termos têm uma função recursiva, não uma função lógica. Ainda com sentido recursivo, por duas vezes consta da conclusão do teorema o uso da conjunção *portanto* (destacada em itálico sublinhado).

A redação do *enunciado* expressa o caráter geral dos objetos matemáticos com o uso do plural, "triângulos retângulos". A *exposição* e a *explicação* retomam e traduzem o enunciado usando a linguagem simbólica, nomeando objetos geométricos e relações que devem ser identificados na figura, como o triângulo *ABC*, o quadrado *BC* e assim por diante. Logo, o enunciado geral é tomado em particular, com respeito a uma figura específica, na qual os dados do problema agora aparecem referidos. A demonstração vai prosseguir com base nessa figura que permite observar visualmente objetos, propriedades e relações matemáticas.

As proposições nos *Elementos* de Euclides estão divididas em problemas e teoremas, havendo diferença quando são observadas as partes em que se estruturam a demonstração em cada um desses casos. Os *Elementos* de Euclides é um livro no padrão teorema-problema. Quanto aos problemas, que no Livro I são as proposições 1, 3, 9, 12, 22, 23, 31, 42 3 44-46 das quarenta e sete proposições aí reunidas, a *explicação* tem início com a frase 'Eu digo que...'; a *conclusão* não repete o *enunciado* e a frase final é 'Como foi pedido para fazer'.

A expressão verbal em Euclides se caracteriza pela impessoalidade, ela é atemporal e descontextualizada. Somente na *exposição* dos teoremas, o que é procurado consta em uma frase dita na primeira pessoa, 'Eu digo que o quadrado sobre BC é igual aos quadrados sobre BA, AC'. Exceto neste caso, os objetos matemáticos são sujeitos de frases na forma passiva e a forma verbal *seja*, *sejam*, refere-se às construções.

A *preparação* foi chaveada duas vezes. A primeira indica a construção geométrica da figura mencionada nas etapas anteriores e, a segunda, o traçado das linhas que completa as construções exigidas. Ainda na preparação aparece a primeira inferência dedutiva, marcada pela conjunção *portanto* concluindo a linearidade com base na referência [I, 14] – "Se em um ponto de uma linha reta qualquer, duas linhas retas que não repousam sobre o mesmo lado fazem ângulos adjacentes iguais a dois ângulos retos, as duas linhas retas estarão em linha reta entre si" (Heath, idem, p. 277). Esse passo dedutivo vai desaparecer posteriormente, pois a linearidade dos pontos passa a ser assumida.

A etapa da *demonstração* mostra o método usado na prova, a equivalência de áreas. Também mostra os passos dedutivos que levam à conclusão final do teorema, indicados pelo termo *portanto*. Observe que por duas vezes foi efetuado o procedimento operatório referenciado como [N.C.2] ou *Noção Comum 2* que prevê 'se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais'. Uma vez, logo no início dessa etapa e novamente, no final, quando a conjunção *portanto* (em realce cinza no extrato) indica o passo dedutivo conclusivo para a prova do teorema. Intermediariamente, há dois passos dedutivos marcados, envolvendo as proposições referenciadas [I, 4] e [I, 41].

Na demonstração acima consta a referência [I, 41], "se um paralelogramo tem a mesma base de um triângulo e estiver entre as mesmas paralelas, o paralelogramo é o dobro do triângulo" (idem, p. 338). Por essa propriedade do paralelogramo a conclusão final é obtida. Mas para chegar a esse ponto, foi preciso usar a Proposição 4 do Livro I, relativa a um dos casos de semelhança de triângulos, "Se dois triângulos têm, respectivamente, dois lados iguais e têm ângulos iguais contidos por linhas retas iguais, eles terão também as bases iguais entre si. O triângulo será igual ao outro e os ângulos restantes serão iguais entre si, respectivamente, a saber, aqueles que os lados iguais subentendem" (idem, p. 247).

Ainda observando a etapa final do modelo euclidiano de exposição, a *conclusão* mostra o procedimento de retornar à proposição do teorema por duas vezes, e Proclo comenta que esse procedimento vem da Grécia clássica porque "Eles estão acostumados a fazer a conclusão de um modo duplo. Eu quero dizer, provar um caso dado e então traçar uma inferência geral, passagem que é da conclusão parcial para a geral" (cf. Heath, idem, p. 131). Esse é um procedimento bem peculiar.

Inicialmente, a *conclusão* apresenta os dados do enunciado retomados em particular, nos termos da *explicação*, pois estes estão inscritos na figura e, logo depois, nos termos do enunciado geral. Essas duas retomadas ou recorrências estão marcadas pela conjunção *portanto* (destacada em itálico sublinhado) e usadas sem valor lógico. O etc. conforme aparece no extrato, remete ao *enunciado* nos termos que expressam o caráter geral da proposição, ao que segue a sentença típica que encerra todo teorema, 'Como foi pedido para provar', em seu formato abreviado Q. E. D.

Assim, no texto completo da demonstração euclidiana o que está para ser provado aparece por três vezes, a saber, em termos gerais no *enunciado*, em termos de um exemplo particular na *explicação* e de modo sumarizado na *conclusão*. Mueller (1981)[3] chama esse fato de redundância lógica, dizendo o seguinte, "a explicação para essa redundância lógica parece estar conectada com a dificuldade em entender a idéia de generalização" (p. 13). Ele explica que a história mostra passagens, nas quais a prova tem um papel explícito e o procedimento usado é dispor de um caso aparentemente particular e argumentar com base nisso. No entanto, ele acrescenta não conhecer nenhum modo de demonstrar ser essencial para o matemático proceder assim e que não existe motivo para se pensar que algum matemático grego pudesse imaginar uma alternativa genuína. Dessa forma, na demonstração grega, pelo menos a *exposição* representaria uma parte necessária, pois ela particulariza na figura o enunciado geral. E a repetição do que é para ser provado no corpo da demonstração, estaria refletindo justamente a percepção de uma complexidade: Como passar de um argumento baseado em um exemplo particular para uma conclusão geral, de um argumento sobre o triângulo ABC para uma conclusão sobre triângulos quaisquer?

Se Euclides formula o *enunciado* sem letras, torna explícito o caráter geral do que está sendo provado. A *exposição* dá início ao desenvolvimento da prova e depois a *explicação* insiste na necessidade de somente estabelecer algum caso particular para estabelecer o *enunciado*. Mas quando o caso particular foi estabelecido, a conclusão repete a *explicação*. Naturalmente isso não se justifica pela insistência de que o argumento particular basta para estabelecer a generalização do enunciado, mas conta para firmar a regra em uso, isto é, provar o caso particular vale como provar a proposição geral.

A questão da generalização ficou resolvida quando "a lógica e a interpretação estrutural da matemática tornaram possível dar uma descrição clara e razoável do raciocínio matemático comum" (idem, p. 14), como exposto no

---

3 Esses destaques sobre a generalização em Euclides têm como base Mueller, 1981, p.1-56.

trabalho de Hilbert[4]. Isso justificou o desuso desse passo dedutivo na prova do teorema.

Na geometria de Hilbert os axiomas caracterizam um sistema de pontos, linhas retas, entre outros, dados como existentes, por exemplo, quando ele afirma a existência de três pontos colineares. A existência é inferida dos axiomas, enquanto na geometria euclidiana os objetos ponto, linha reta, círculo, etc., devem ser construídos, a ênfase na construção resulta da ausência de afirmativas sobre a existência. Note que a prova da linearidade dos três pontos em Euclides é um problema de construção geométrica que atendia à necessidade de provar a existência. Os objetos geométricos em Euclides são tratados como entidades isoladas com as quais se raciocina e a existência de um objeto é inferida da existência de um outro, por meio das construções geométricas.

O modelo de redação euclidiano vai desaparecendo dos livros sob críticas de ter texto extenso e ser de difícil entendimento. O procedimento de repetir no texto o que deve ser provado, por exemplo, contribui nesse sentido. Mas, no contexto teórico da sua época tornou-se necessário, podendo ser visto como uma exigência lógica ligada à generalização. Esse caso mostra que as modificações no texto demonstrativo vão ocorrendo e se justificando segundo correlações complexas.

Outro fato notável nos *Elementos* de Euclides, é que o teorema de Pitágoras é demonstrado também pela semelhança de figuras, em que a proporcionalidade permite fazer a comparação das áreas, sendo preciso considerar o texto do teorema em uma ordem mais global, no contexto dos outros capítulos ou Livros. Um modo de entender tais repetições é pela observação da estrutura interna da obra[5]. O que se verá, é novamente a questão da generalização se apresentando.

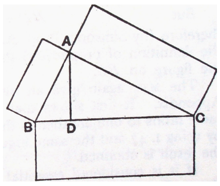
No Livro I consta a prova do teorema de Pitágoras baseada na equivalência de áreas, e no Livro VI o teorema é provado pela semelhança de figuras, constando como um caso geral em que a igualdade das áreas é provada com o uso da proporcionalidade, assunto introduzido apenas no Livro V.

4 Sobre comparações, do ponto de vista das estruturas dedutivas, entre a geometria euclidiana e a geometria axiomática de Hilbert ver Mueller, 1981.

5 Sobre esse assunto ver Mueller, 1981 e Heath, 1956.

A Proposição 31, do Livro VI é uma generalização do teorema de Pitágoras.

PROPOSIÇÃO 31, Livro VI dos *Elementos* de Euclides

proposição ou enunciado	*Em triângulos retângulos, a figura sobre o lado que subentende o ângulo reto é igual às figuras semelhantes, descritas similarmente sobre os lados que contêm o ângulo reto.*
exposição ou hipótese	Seja *ABC* um triângulo retângulo tendo o ângulo *BAC* reto; 
determinação explicação	Eu digo que a figura sobre *BC* é igual às figuras semelhantes descritas similarmente sobre *BA*, *AC*.
construção preparação	Seja traçada a perpendicular *AD*.
demonstração prova pela semelhança de figuras	Então como no triângulo retângulo ABC, a perpendicular *AD* foi traçada pelo ponto A, a partir do ângulo reto até a base BC, os triângulos *ABC*, *ADC*, adjacentes pela perpendicular, são semelhantes entre si e ao triângulo ABC. [VI, 8] E como *ABC* é similar a *ABD*, portanto, *CB* está para *BA* assim como *AB* está para *BD*. [VI, Def. I] E como as três linhas retas são proporcionais, a primeira está para a terceira, assim como a figura sobre a primeira está para a figura descrita similarmente sobre a segunda. [VI, 19, Por.]* Portanto, *CB* está para *BD* assim como a figura sobre *CB* está para a figura semelhante descrita similarmente sobre *BA*. Pela mesma razão também, *BC* está para *CD* assim como a figura sobre *BC* está para *CA*; de modo que, além disso, *BC* está para *BD*, *DC*, assim como a figura sobre *BC* está para as figuras semelhantes descritas similarmente sobre *BA*, *AC*. Mas *BC* é igual a *BD*, *DC*; portanto, a figura sobre *BC* é também igual às figuras semelhantes descritas similarmente sobre *BA*, *AC*.
conclusão	Portanto etc. Q. E. D.

* Porisma VI, 19.

Fig. 3 Teorema de Pitágoras, *Elementos* de Euclides, p. 269, v. 2.

O método de provar igualdades pela equivalência de áreas caracteriza o Livro I dos *Elementos* e os três livros subseqüentes. O Livro V trata da teoria das proporções, uma teoria geral das grandezas que vai permitir estabelecer semelhanças entre linhas e figuras. Além da equivalência de áreas, a semelhança de figuras é usada por Euclides para provar igualdades geométricas, sejam as grandezas comensuráveis ou incomensuráveis. E justamente a mudança metodológica que os dois teoremas mostram, é que vai permitir entender como, no desenvolvimento da demonstração do teorema, vão se fazendo presentes a aritmética e a álgebra. Com isso, os tradicionais livros de geometria dedutiva, *elementos de geometria*, no padrão euclidiano teorema-problema, vão se descaracterizando, tornando-se aritméticos e algébricos, incorporando características que serão encontradas no que será denominado posteriormente *livro de matemática*, cuja proposta é o estudo globalizado de geometria, aritmética e álgebra.

O próximo autor, Hérigone, em sua releitura de Euclides traz questões importantes, a presença da escrita concisa que se consolida com o desenvolvimento da notação algébrica e que também se relaciona com outra questão nova, a esquematização do texto demonstrativo.

6.2 O *Curso de Matemática I* de Hérigone

O livro de Hérigone, *Cours Mathématique*, Paris, 1634, tomo primeiro, é uma edição bilíngüe em francês e latim. Tem uma estrutura semelhante à dos *Elementos*, não se inserindo no conjunto crítico dos autores que inovam com respeito à ordem como os conteúdos se apresentam naquela obra. Sob a redação de Hérigone, o texto é disposto em duas colunas[6] e apresenta notações[7], procedimentos que ele defende como didaticamente adequados.

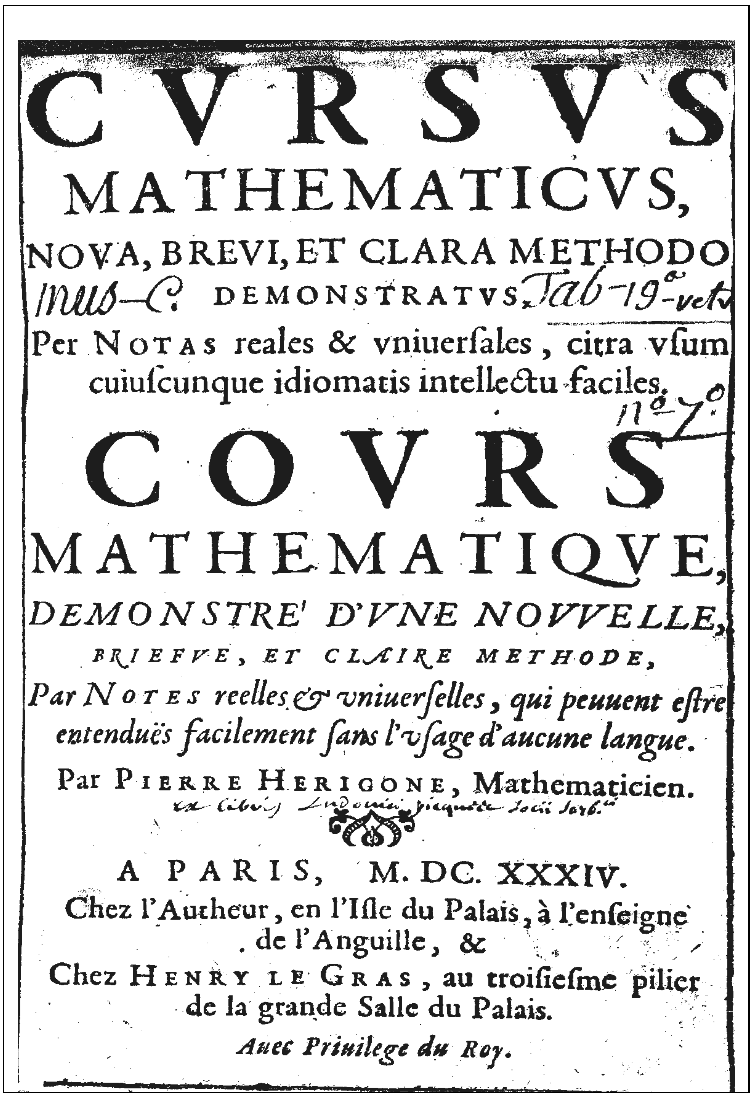
Mas observe o nome do livro, *Cours Mathématique*. Isso leva a inferir que, se não pelo padrão tradicional teorema-problema dos livros tipo *elementos de geometria*, o fator que justifica a mudança no nome do livro para curso de matemática seja, justamente, o uso de uma linguagem mais concisa, como a da álgebra, que é o correspondente para a notação proposta por Hérigone.

Se Prestet em 1675 lançou o seu *Nouveaux Elemens des Mathematiques* , "o primeiro tratado que se dedicou exclusivamente à álgebra e nada continha de geometria" (Schubring, 2003, p. 51) e, conforme esse mesmo autor, "isso também explica o título do livro: como a álgebra fornece a base para toda a matemática,

6 Ver: Herbst, 2002; Barbin, 2001.
7 Ver: Heefer, 2007; Mahoney, s. d.; Goldstein, 2000; Kvasz, 1998.

um livro didático de álgebra é chamado corretamente de elementos de matemática" (idem, p. 51), com Hérigone se constata um indício do que seria o livro de matemática, a geometria em uma linguagem universal, facilmente entendida, como a capa do livro mostra. E essa questão não se restringe à época de Arnauld e Prestet, ao século XVII. Pelo contrário, ela é recorrente, reaparece internacionalmente na virada do século XX e, nos anos 30, de modo particular no Brasil.

Observe a capa do livro de Hérigone,



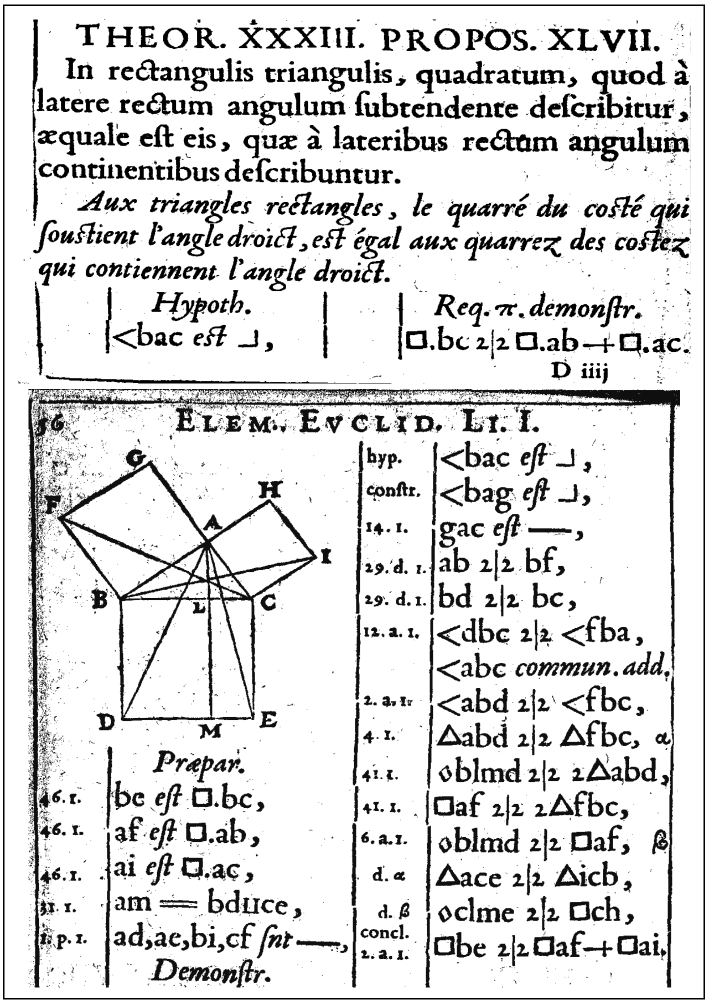
CVRSVS
MATHEMATICVS,
NOVA, BREVI, ET CLARA METHODO
DEMONSTRATVS,
Per NOTAS reales & vniuerſales, citra vſum
cuiuſcunque idiomatis intellectu faciles.
COVRS
MATHEMATIQVE,
DEMONSTRE' D'VNE NOVVELLE,
BRIEFVE, ET CLAIRE METHODE,
Par NOTES reelles & vniuerſelles, qui peuuent eſtre
entenduës facilement ſans l'vſage d'aucune langue.
Par PIERRE HERIGONE, Mathematicien.
A PARIS, M. DC. XXXIV.
Chez l'Autheur, en l'Iſle du Palais, à l'enſeigne
de l'Anguille, &
Chez HENRY LE GRAS, au troiſieſme pilier
de la grande Salle du Palais.
Auec Priuilege du Roy.

Fig. 4 *Cours Mathématique I,* Hérigone.

A seção de abertura do livro de Hérigone intitulada, *Ao Leitor*[8], informa que o entendimento das demonstrações depende do conhecimento de todas as outras partes da matemática, gerando então grandes dificuldades. Para isso, "foi inventado um novo método de fazer demonstrações, breve, inteligível e sem o uso de qualquer língua, à parte a abertura do livro".

O próprio nome, como consta da capa do livro reproduzida acima, anuncia isso, *Curso de Matemática, demonstração de um novo, breve e claro método. Por notas reais e universais que podem ser entendidas facilmente sem o uso de qualquer língua.*

A seguir, o extrato do teorema de Pitágoras conforme o livro de Hérigone e a explicação das abreviações usadas no desenvolvimento da prova do teorema.



THEOR. XXXIII. PROPOS. XLVII.

In rectangulis triangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

Aux triangles rectangles, le quarré du costé qui soustient l'angle droict, est égal aux quarrez des costez qui contiennent l'angle droict.

Hypoth. <bac est ⅃,

Req. π. demonstr. □.bc 2|2 □.ab ╌+ □.ac.

D iiij

56 ELEM. EVCLID. LI. I.

Præpar.

46.1. be *est* □.bc,
46.1. af *est* □.ab,
46.1. ai *est* □.ac,
31.1. am ═ bduce,
14.p.1. ad,ae,bi,cf *snt* ──,
Demonstr.

hyp. <bac *est* ⅃,
constr. <bag *est* ⅃,
14.1. gac *est* ──,
29.d.1. ab 2|2 bf,
29.d.1. bd 2|2 bc,
12.a.1. <dbc 2|2 <fba,
<abc *commun.add.*
2.a.1. <abd 2|2 <fbc,
4.1. △abd 2|2 △fbc, α
41.1. ▱blmd 2|2 2△abd,
41.1. □af 2|2 2△fbc,
6.a.1. ▱blmd 2|2 □af, β
d.α △ace 2|2 △icb,
d.β ▱clme 2|2 □ch,
concl. 2.a.1. □be 2|2 □af ╌+ □ai,

Fig. 5 Teorema de Pitágoras, Hérigone, p. 55-56.

[8] As páginas dessa seção foram numeradas por mim.

Observe na lista complementar do texto acima, as explicações da notação usada no teorema:

Req .π.. *demonstr.:* o exigido para demonstrar
Prepar.: preparação
est: é
snt: *são*
2/2: igual
—+ : mais
==== : paralela
u: ou (Por exemplo, am == bd u ce, significa am é paralela a bd ou a ce.)

□ : quadrado
< : ângulo
▱: paralelogramo
comm. add.: comum adicionado
constr.: por construção
concl.: conclusão
1. p. I : postulado 1 do Livro I
2.a.I: axioma 2 do Livro I

O simbolismo algébrico, introduzido a partir do século XVI, é uma questão presente no procedimento de Hérigone. Sua proposta é reescrever de modo mais claro e conciso o texto dos *Elementos*. É importante notar que a crítica ao uso da linguagem discursiva foi sendo feita ao ‘modo ordinário’ de demonstrar, leia-se modelo euclidiano, também em correlação com o avanço e o uso do simbolismo matemático.

No geral, a estrutura da prova está em conformidade com o desenvolvimento demonstrativo euclidiano, só que Hérigone esquematiza o texto pondo em destaque, sob o nome *demonstração*, as etapas do modelo euclidiano que vêm nomeadas, a saber, *hipótese*, *construção*, *preparação*, *demonstração* e a *conclusão*. A redação é outra, pelo uso do simbolismo e pela forma esquematizada. Barbin (2001) comenta que essa codificação do texto, que põe em evidência a hipótese e o que é pedido, se aproxima do que se encontra em livros-texto mais atuais que propõem estratégias para o ensino da demonstração, com o uso de organogramas[9].

Hérigone destaca, na seção de abertura do livro, *Ao leitor*, que não deixa o leitor sem a explicação necessária para o entendimento das demonstrações, pois procede com mais rigor que outros autores,

> Ora, Euclides não explicou em seus Elementos todos os princípios geométricos, assim há muitos outros axiomas dos quais Euclides e seus intérpretes se servem sem os ter explicado, os quais não sendo concedidos, suas demonstrações não provariam nada.

[9] Sobre o uso de organogramas ver Duval, 1996.

(...) não há dúvida de que esse método é mais inteligível que o método ordinário, nem que nesse método nada se afirme que não seja confirmado por alguma citação, o que os outros autores não oferecem. Mas cada um mede a necessidade das citações pelo que lhe é evidente, ou óbvio. Eles usam muitas conseqüências sem citações que, contudo, serão necessárias àqueles menos avançados. (p.11)

Mas veja também que a proposta de Hérigone é referenciar todas as proposições com uma numeração adequada como acontece em outros *elementos de geometria*. Esse trabalho de enumerar todas as proposições e as citar em cada uma das colunas é gigantesco, comenta Barbin (2001). Observe, na figura acima que as duas colunas mais estreitas contêm a série de referências.

E se o texto torna-se mais inteligível por conter referências a todas as proposições que estão na base do desenvolvimento dedutivo da prova, por outro lado esse quesito é reconhecido também como subjetivo por Hérigone. Sim, é subjetivo e Arsac (1996) vai dizer que o nível de explicitação de uma demonstração depende do público a que ela se destina. E colocar ou não em evidência no texto os enunciados que são utilizados implicitamente, leva a um grande número deles, num processo que se torna incontrolável. Nesse sentido é possível afirmar que os livros geométricos dos *Elementos* de Euclides tacitamente admitem, pelo uso da figura, todas as propriedades cuja demonstração exige a axiomática de Hilbert, os axiomas da ordem e uma parte dos axiomas da incidência.

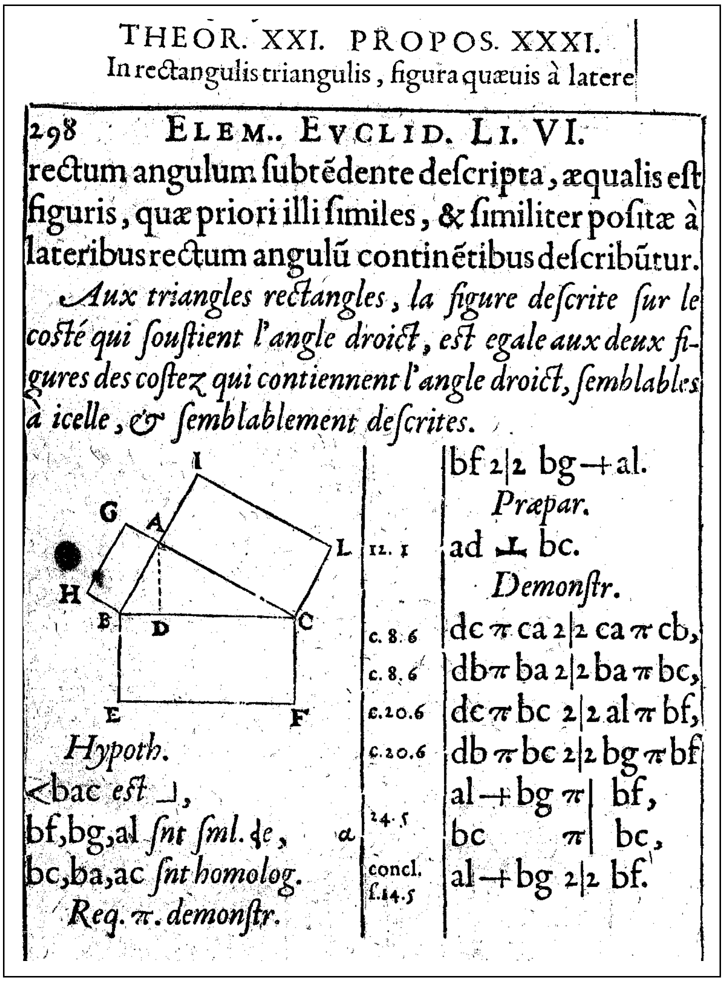
Hérigone enfatiza as vantagens de esquematizar o texto e de pôr em destaque as etapas da demonstração, deixando explícito o caráter didático da esquematização,

E porque cada conseqüência depende imediatamente da proposição citada, a demonstração se mantém desde o seu começo até a sua conclusão, com base em uma série contínua de conseqüências legítimas, necessárias e imediatas, contidas cada uma em uma pequena linha, das quais se podem resolver os silogismos em razão de que a proposição citada e na que corresponde à citação, se acham todas as partes do silogismo. (p. 11)

A distinção da proposição em seus membros, a saber, hipótese, explicação do que é pedido, construção ou preparação e a demonstração, alivia também a memória e serve grandemente para o entendimento da demonstração. (idem)

Também o 'alivia a memória' revela que a memorização do que está escrito e do que se deve ler, tem peso para o bom ou o mal entendimento da demonstração. Assim, deve ser reconhecido o caráter didático implícito na esquematização do texto. Por sua vez, a memorização, no sentido de repetir, está na base do ensino-aprendizagem. Isso caracteriza os *elementos de geometria* como livros-texto com a estrutura básica de apresentação da geometria, o padrão euclidiano teorema-problema. Mas com a entrada de elementos novos, como os exercícios, por exemplo, os livros se afastam do modelo tradicional pelo pressuposto de que é um sujeito ativo que deve resolver questões.

A prova do teorema de Pitágoras usando a semelhança de figuras apresenta as mesmas características textuais ressaltadas antes.


THEOR. XXI. PROPOS. XXXI.
In rectangulis triangulis, figura quæuis à latere

298 ELEM. EVCLID. LI. VI.

rectum angulum ſubtẽdente deſcripta, æqualis eſt figuris, quæ priori illi ſimiles, & ſimiliter poſitæ à lateribus rectum angulũ continẽtibus deſcribũtur.

Aux triangles rectangles, la figure deſcrite ſur le coſté qui ſouſtient l'angle droict, eſt egale aux deux figures des coſtez qui contiennent l'angle droict, ſemblables à icelle, & ſemblablement deſcrites.

Hypoth.
<bac *eſt* ⊥,
bf,bg,al *ſnt ſml.* ⌇e,
bc,ba,ac *ſnt homolog.*
Req. π. *demonſtr.*

bf 2|2 bg + al.
Præpar.
12. 1 — ad ⊥ bc.
Demonſtr.
c. 8. 6 — dc π ca 2|2 ca π cb,
c. 8. 6 — db π ba 2|2 ba π bc,
c. 20. 6 — dc π bc 2|2 al π bf,
c. 20. 6 — db π bc 2|2 bg π bf
24. 5 — al + bg π | bf,
bc π | bc,
concl. f. 14. 5 — al + bg 2|2 bf.

Fig. 6 Teorema de Pitágoras, Hérigone, p. 297-298

Complementando o teorema acima, segue a explicação das notações usadas,

ad ⊥ bc, ou seja, ad é perpendicular a bc
ad π| db, ou seja, ad está para db
dc πca 2|2 ca πcb, ou seja, dc está para ca assim como ca está para cb
bc, ba, ac *snt homolog.*, ou seja, bc, ba, ac são homólogos

A redação de Hérigone suprime os termos que marcam os passos dedutivos que constam no texto de Euclides, como mostram os dois teoremas apresentados. Essa possibilidade se estabelece porque o texto está compactado de tal forma que as proposições estão escritas em uma linha, o que só é possível pelo uso das notações. Conforme Barbin (2001), a disposição bidimensional pode servir para exprimir relações internas de modo mais solto do que a disposição unidimensional, mas tal disposição não convém ao discurso demonstrativo, porque na ausência de um simbolismo indicando como se ordenam dedutivamente as proposições, o fio dedutivo não pode ser seguido (p. 41).

6.3 Os *Elementos de geometria* de Legendre como referencial

Se Hérigone trouxe a esquematização do texto e o uso da notação, Legendre traz o último texto histórico que completa o primeiro grupo de análises, apresenta novidades como inserir a igualdade algébrica na demonstração do teorema de Pitágoras. Sua obra ocupa uma posição de grande marco na historiografia da matemática escolar, representando todas as outras que, como a dele, são releituras de Euclides que se aproximam do padrão euclidiano de matemática e das áreas da aritmética e da álgebra.

O livro-texto de Legendre está dentro da tradição de texto elementar proposta por Arnauld, surge no contexto da Revolução Francesa como um empreendimento que reavivou o gosto pelo rigor (Schubring, 2004) e é um marco na história da literatura escolar. Já foi discutido na primeira parte da Tese, uma demonstração que consta da edição original de Legendre, de 1794, e que aparece adulterada na 29ª edição, por Blanchet. O método de prova usado é que distingue as duas provas e a opção de Legendre pelo método da redução ao absurdo, ele mesmo justificou ter sido feita porque o procedimento era mais rigoroso. O aspecto do rigor em Legendre liga-se ao modo de proceder para tratar as grandezas incomensuráveis, embora ele tenha usado também os números reais no tratamento das grandezas.

No conjunto das obras consideradas como uma reescrita dos *Elementos* de Euclides, a obra de Legendre é representativa por abordar a geometria plana com o uso da proporcionalidade. Conforme Carvalho (2000),

> Comparado a Clairaut e a Ramus, o livro de Legendre representa um recuo para a orientação de Euclides, embora apresente, com este, diferenças essenciais: 1º) no estilo, mais conexo e mais agradável, em contraposição à maneira de exposição euclidiana, que Klein classifica de desmembrada, quase diria despedaçada, ao mesmo tempo que cansativa na sua uniformidade; 2º) contrariamente a Euclides, Legendre faz uso consciente e propositado da Aritmética e da Álgebra do seu tempo, mostrando-se assim partidário da fusão da Aritmética e da Geometria, incluindo nessa fusão até a trigonometria que ele expunha na sua obra; 3º) quanto ao método, Legendre, ainda comparado a Euclides, desloca-se um pouco da lógica para a intuição: enquanto Euclides se esforça por conservar um encadeamento lógico inteiramente livre da mistura de recursos intuitivos, a não ser os que ele condensa nos axiomas previamente expostos, Legendre, sem essa preocupação rigorista, apela francamente para a intuição no decorrer de suas demonstrações. Assim, no estudo dos irracionais, ao passo que Euclides procura demonstrações suficientemente rigorosas (método de exaustão), Legendre toma os números racionais e irracionais como conhecidos da Aritmética e admite, sem mais explicações, como perfeitamente evidente, que um teorema, verdadeiro para os números racionais, também o é para os irracionais. Aliás, ele está, nisto, de acordo com todos os outros grandes matemáticos de seu tempo. (Carvalho, 2000, p. 66)

A prova do teorema de Pitágoras em Legendre, como em Hérigone, se baseia na equivalência de áreas e mostra um triângulo se transformando na metade da área do quadrado construído sobre cada cateto, e na metade da área do retângulo que compõe o quadrado construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo. A transitividade, prevista pela Noção Comum 1, coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si, permite concluir a demonstração.

Hoje em dia é usual na cultura matemática da escola elementar, associar o teorema de Pitágoras a uma igualdade do tipo $a^2 + b^2 = c^2$, indicando uma relação entre os lados do triângulo retângulo, que em geral é verificada numericamente. Essa propriedade era usada com fins práticos antes da Grécia antiga, sendo verificada de modo particular com tríades de números como 5, 4, 3, que indicam hipotenusa e catetos, respectivamente. A equação acima é o elemento novo que aparece na demonstração de Legendre, considerando o já visto em Euclides e Hérigone, embora este desenvolva a prova de modo correspondente ao que faz Euclides.

PROPOSIÇÃO XI.

THEOREMA.

O quadrado feito ſobre a hypoténuſa de hum triangulo rectangulo he igual á ſomma dos quadrados feitos ſobre os outro dois lados.

Seja ABC (fig. 109.) hum triangulo rectangulo em A; formando quadrados ſobre os tres lados, abaixe-ſe do angulo recto ſobre a hypotenuſa a perpendicular AD, a qual ſe prolongará até E; depois tirem-ſe as diagonaes AF, CH.

O angulo ABF he compoſto do angulo ABC mais o angulo recto CBF; o angulo CBH he compoſto do meſmo angulo ABC mais o angulo recto ABH; logo o angulo ABF = HBC. Mas AB = BH como lados do meſmo quadrado, e BF = BC pela meſma razão. Logo os triangulos ABF, HBC tem hum angulo igual comprehendido entre lados iguaes; logo são iguaes (6. 1.).

O triangulo ABF he metade do rectangulo BDEF, (ou por brevidade BE) que tem a meſma baſe BF e a meſma altura BD (pr. 2.). O triangulo HBC he igualmente a metade do quadrado AH, porque ſendo recto o angulo BAC aſſim como BAL, AC e AL fazem huma meſma linha recta parallela a HB; logo o triangulo HBC e o quadrado AH, que tem a baſe commum BH, tem tambem a altura commum AB. Logo o triangulo he a metade do quadrado.

Já provámos que o triangulo ABF he igual ao triangulo HBC; logo o rectangulo BDEF, duplo do triangulo ABF, he equivalente ao quadrado AH, duplo do triangulo HBC. Demonſtra-ſe do meſmo modo que o rectangulo CDEG he equivalente ao quadrado AI; mas os dois rectangulos BDEF, CDEG, tomados em ſomma, fazem o quadrado BCGF; logo o quadrado BCGF, feito ſobre a hypotenuſa, he igual á ſomma dos quadrados ABHL, ACIK, feitos ſobre os outros dois lados; ou, em outros termos, $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

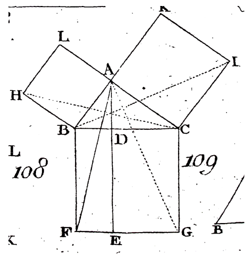


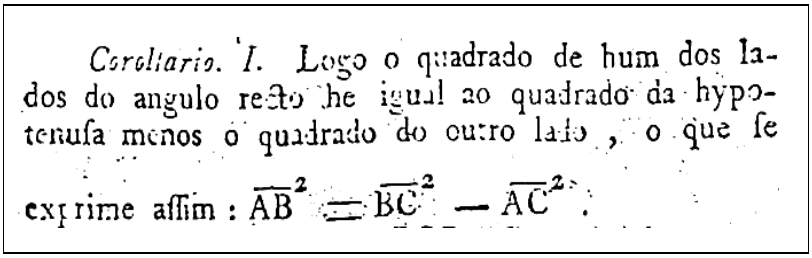
Fig. 7 Teorema de Pitágoras, Legendre, p.71

As etapas da redação do modelo euclidiano se reduzem. A *hipótese* e a *construção* formam um bloco, a *explicação* e a prova da linearidade dos três pontos desaparecem do texto. A linguagem pessoal em, “Já provamos que o triângulo...”, é usada para retomar a igualdade dos triângulos que estabelece a transitividade com a qual se chega à conclusão final. Legendre encerra a prova dizendo que, em outros termos $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, ou seja, ele traduz algebricamente essa propriedade geométrica do triângulo retângulo.

Arnauld, autor importante para a história do livro escolar, critica o procedimento de prova usado por Euclides na prova do teorema de Pitágoras, o uso da equivalência de áreas, quando defende que uma prova deve ser feita do modo mais conciso possível. Ele diz que Euclides introduz triângulos insignificantes enquanto a prova pode ser feita de outro modo, “porque a igualdade dos quadrados não depende dos triângulos que se toma como base dessa demonstração, mas da proporção das linhas” (cf. Coolidge, 1950, p. 108). Interessante é que Proclo, já no século V dizia ficar mais maravilhado com a prova do teorema que com o próprio fato da sua descoberta tempos antes (Heath, idem, v. I, p.350). Em Legendre o teorema de Pitágoras aparece no Livro III, intitulado *Proporções de figuras*. Isso indica que o autor considera as transformações de áreas no contexto das relações proporcionais e essa modificação é fundamental para se entender a demonstração nos livros-texto. Porque justamente a proporcionalidade entre os lados dos triângulos semelhantes é que permite estabelecer as relações métricas nos triângulos, que é um assunto presente nos livros-texto.

Legendre referencia a Proposição VI, Livro I, “Dois triângulos são iguais, quando tem hum ângulo igual comprehendido entre lados iguaes, cada hum a cada hum” (p. 10) e a Proposição II, Livro III, “todo triangulo BC he metade do parallelogrammo da mesma base e da mesma altura” (p. 63).

Após a demonstração do teorema de Pitágoras, seguem-se quatro corolários em que são deduzidas as igualdades a partir da fórmula acima.

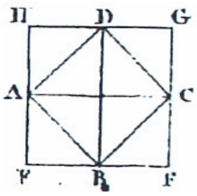


Corollario. I. Logo o quadrado de hum dos lados do angulo recto he igual ao quadrado da hypotenuſa menos o quadrado do outro lado, o que ſe exprime aſſim: $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$.

Fig. 8 Corolário, Legendre, p. 72

O Corolário II apresenta o número irracional $\sqrt{2}$.

Corollario II. Seja ABCD (fig. 118.) hum quadrado, AC a ſua diagonal; como o triangulo ABC



he rectangulo e iſoſceles, teremos $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AB}^2$. Logo o *quadrado feito ſobre a diagonal AC he duplo do quadrado feito ſobre o lado AB.*

Póde-ſe fazer ſenſivel eſta propriedade, tirando pelos pontos A e C parallelas a BD, e pelos pontos B e D parallelas a AC; formar-ſe-ha deſte modo hum novo quadrado EFGH que ſerá o quadrado de AC. Ora he claro que EFGH contém oito triangulos iguaes a ABE, e que ABCD contém quatro; logo o quadrado EFGH he duplo de ABCD.

Como $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 :: 2 : 1$, temos, extrahindo a raiz quadrada, $AC : AB :: \sqrt{2} : 1$. Logo a *diagonal do quadrado he incommenſuravel com o ſeu lado.*

O que ſe deſenvolverá melhor em outra occaſião.

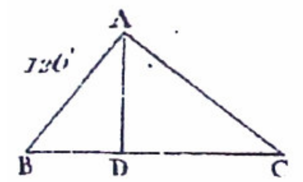
Fig. 9 Corolário, Legendre, p. 72-73

As relações de proporcionalidade entre os lados do triângulo retângulo constituem um meio para se chegar a igualdades que passam a ser traduzidas numericamente. Dessa forma, o livro-texto de geometria segue o sentido inverso do trabalho feito por Euclides, que foi justamente tratar a geometria das figuras planas sem que as grandezas estejam associadas a valores numéricos.

A proporcionalidade permite também generalizar a comparação de áreas e esse é o destaque feito por Arnauld conforme se viu um pouco acima.

A proposição XXII, Livro III de Legendre consta do encaminhamento da prova do teorema de Pitágoras pela semelhança de figuras.

> *Se do ângulo recto A (fig. 126) de hum triangulo rectangulo abaixarmos a perpendicular AD sobre a hypotenusa:*
>
> *1º Os dois triângulos parciaes ABC, ADC serão semelhantes entre si, e ao triangulo total ABC.*
>
> *2º Cada lado AB ou AC será meio proporcional entre a hipotenusa BC e o segmento adjacente BC ou DC.*
>
> *3º A perpendicular AD será meia proporcional entre os dois segmentos BC, DC.*



(p. 84-85)

Legendre apresenta um escólio para explicar que, pela comparação dos lados homólogos de triângulos semelhantes, chega-se à equação que traduz o teorema de Pitágoras que ele apresentou antes.

Scholio. A proporção BD : AB :: AB : BC, dá, igualando o producto dos extremos ao dos meios, $\overline{AB}^2 = BD \times BC$. Do meſmo modo temos $\overline{AC}^2 = DC \times BC$; logo $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BD \times DC + DC \times BC$; o ſegundo membro he o meſmo que $(BD + DC) \times BC$, e ſe reduz a $BC \times BC$ ou $\overline{BC}^2$; logo temos $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$; logo o quadrado feito ſobre a hypotenuſa BC he igual á ſomma dos quadrados feitos ſobre os outros dois lados AB, AC. Deſte modo vimos a cahir na propoſição do quadrado da hypotenuſa por hum caminho muito differente do que haviamos ſeguido; donde ſe vê que, propriamente fallando, a propoſição do quadrado da hypotenuſa he huma conſequencia da proporcionalidade dos lados nos triangulos equiangulos; aſſim as propoſições fundamentaes da Geometria ſe reduzem, para aſſim dizer, a eſta ſó, que os triangulos equiangulos tem os ſeus lados homologos proporcionaes.

Fig. 10 Escólio, Legendre, p. 85

A ênfase recai em que a proporcionalidade leva a uma proposição mais geral, sendo o teorema de Pitágoras um caso particular. Legendre realça, ainda, a possibilidade de se combinar os teoremas de muitas maneiras e de se chegar a resultados já demonstrados. Vale observar que esse fator é importante para entender as repetições de proposições presentes em um livro.

> Acontece muitas vezes, como acabamos de ver neſte exemplo, que tirando conſequencias de huma ou de muitas propoſições, ſe recahe em propoſições já demonſtradas. Em geral, o que caracteriza particularmente os theoremas da Geometria, e o que he huma prova invencivel da ſua certeza, he que combinando-os de qualquer maneira, com tanto que ſe diſcorra com acerto, ſempre ſe cahe em reſultados exactos. Não ſeria o meſmo ſe alguma propoſição foiſe falſa, ou ſó foſſe verdadeira pouco mais ou menos; aconteceria muitas vezes que, pela combinação das propoſições entre ſi, o erro creſceria, e ſe faria ſenſivel. Disto vimos exemplos em todas as demonſtrações em que nos ſervimos da *reducção a abſurdo*. Eſtas demonſtrações, nas quaes temos por fim provar que duas quantidades são iguaes, conſiſtem em moſtrar, que, ſe houveiſe entre ellas a menor deſigualdade, a continuação dos raciocinios nos conduziria a hum abſurdo manifeſto e palpavel, donde ſe conclue forçoſamente que eſtas duas quantidades são iguaes.

Fig. 11 Escólio, Legendre, p. 85

Pelo visto até agora, o conteúdo teórico das proposições presentes no desenvolvimento da prova do teorema de Pitágoras se modifica de modo radical, ou seja, as demonstrações baseadas em relações proporcionais que implicam nos casos de semelhança de triângulos vão substituindo as demonstrações baseadas na equivalência de áreas, em que a área do triângulo se transforma na área do paralelogramo se atendidas algumas condições geométricas.

No próximo capítulo, segue-se a análise do teorema de Pitágoras nos outros *elementos de geometria*, que são livros representativos entre aqueles que foram usados para o ensino da geometria dedutiva no Brasil, a partir do século XIX.

Os destaques relativos a modificações do texto demonstrativo, já feitos, são válidos para o livro tipo *elementos de geometria* usados no ensino da geometria dedutiva em nosso país. Além disso, mesmo mantendo essa função, por volta dos anos 30 do século passado, quando surge entre nós o livro tipo *livro de* *matemática*, os livros *tipo elementos de geometria* já incorporam novas características que mostram a existência de uma correlação entre os dois tipos de livro, havendo características que se apresentam nos textos mais atuais.