6
Integridade de sistemas não-lineares

A avaliação da integridade de uma solução estável (estática ou dinâmica) de um sistema dinâmico não-linear consiste no conhecimento do seu comportamento quando o submetemos a diferentes perturbações, ou seja, na determinação de sua bacia de atração. Sendo o espaço de fase infinito, é necessário inicialmente definir a região do espaço de fase em que se deve pesquisar a evolução da bacia de atração. Porém a determinação da área de interesse para a construção das bacias nem sempre é fácil e imediata, principalmente nos casos com múltiplos graus-de-liberdade.

Uma vez determinada a região de interesse, estuda-se, em função de um dado parâmetro de controle, o fenômeno de erosão de uma dada bacia provocado pela presença de outros atratores, e pelas características da fronteira da bacia que pode ser suave ou fractal.

Assim, a integridade do sistema dinâmico não-linear é definida como a região de interesse da bacia de atração que não sofre erosão com a variação do parâmetro de controle da análise, isto é a região de segurança da bacia de atração. Desta maneira, o conceito de integridade de um sistema dinâmico é no sentido da topologia da bacia de atração. O que se procura, então, em uma análise da integridade de sistemas dinâmicos, é estabelecer um critério de segurança para projeto capaz de reunir o maior número de perturbações pertencentes a essa região segura da bacia de atração.

Neste capítulo avalia-se, sem perda de generalidade, a integridade das soluções contidas no vale potencial pré-flambagem da casca cilíndrica vazia e da casca completamente cheia, submetidas a um carregamento axial periódico. Para uma maior simplicidade na definição dos conceitos de integridade do sistema dinâmico, é estudada, inicialmente, a integridade do sistema dinâmico a partir do modelo reduzido com 1 GDL, equação (4.34). Em seguida, avalia-se a integridade do sistema dinâmico através de um modelo com vários graus de liberdade obtido a partir do modelo reduzido com 3 POMs, equação (4.35).

6.1. Integridade do sistema dinâmico com um grau de liberdade

6.1.1. Vibração livre não-amortecida

A Figura 6.1 ilustra a variação da coordenada modal ζ_{11} em função do parâmetro de carga estática Γ_0. A solução fundamental da casca cilíndrica torna-se instável em um ponto de bifurcação subcrítica (Γ_{cr}=1,0). As duas novas soluções são instáveis até o mínimo pós-critico (Γ_{min}≅0,32) e, a partir desse valor, voltam a ser estáveis. Estes resultados mostram que, para valores de carregamento menores que o valor crítico, a casca cilíndrica pode perder a estabilidade na presença de perturbações finitas.

De fato, para valores de carga axial entre o mínimo pós-crítico e o valor crítico ($\Gamma_{min} < \Gamma < \Gamma_{cr}$) o sistema apresenta cinco soluções, três estáveis e duas instáveis. Estão assinaladas na Figura 6.1, para um carregamento de 40% da carga crítica, as cinco soluções do sistema. As coordenadas dessas soluções e os respectivos autovalores são apresentados na Tabela 6.1. Como observado, há duas selas e três centros. Para valores de pré-carregamento estático inferiores ao valor mínimo pós-crítico ($\Gamma < \Gamma_{min}$) o sistema apresenta apenas uma solução, um centro, e, para $\Gamma > \Gamma_{cr}$, têm-se três soluções, dois centros e uma sela.

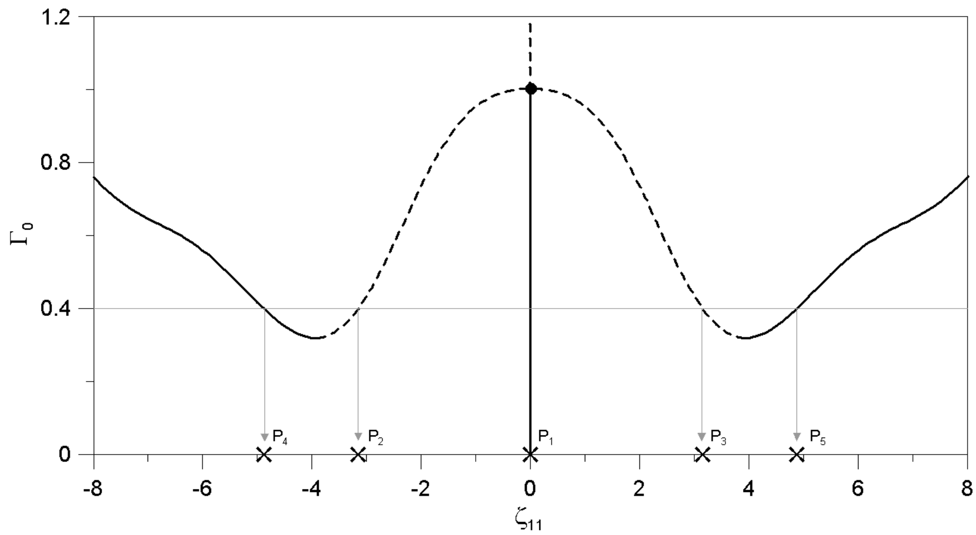


Figura 6.1 – Caminho pós-crítico da casca cilíndrica. Modelo com 1 GDL.

Tabela 6.1 – Pontos de equilíbrio e seus respectivos autovalores. Modelo reduzido com 1 GDL. Γ_0 = 0,40.

Pontos de equilíbrio	Coordenada modal (ζ_{11})	Autovalores	Classificação
P_1 (pré-flambagem)	0,00	± 6,89i	Centro
P_2, P_3 (sela)	± 3,15	± 8,82	Sela
P_4, P_5 (pós-flambagem)	± 4,88	± 11,12i	Centro

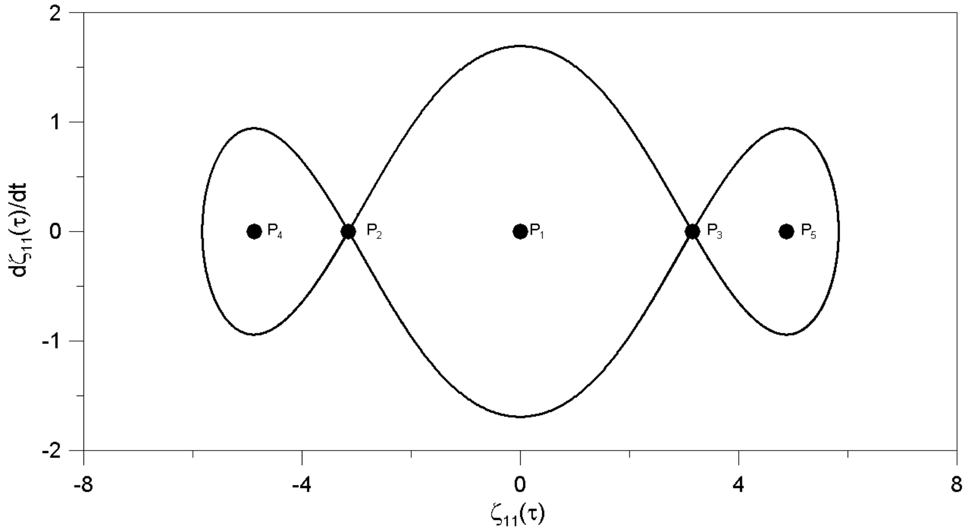


Figura 6.2 – Órbitas heteroclínicas e homoclínicas da casca cilíndrica, modelo com 1 GDL. (Γ_0 = 0,40).

A Figura 6.2 apresenta as duas órbitas heteroclínicas que conectam os dois pontos de sela simétricos (P_2 e P_3). Essa região delimita o conjunto de condições iniciais que levam a soluções limitadas em torno da configuração pré-flambagem (P_1). Observam-se também duas órbitas homoclínicas que delimitam o espaço de condições iniciais que levam a soluções permanentes contidas em um dos vales potenciais pós-críticos, levando a soluções em torno de uma configuração pós-flambagem (P_4 ou P_5). Condições iniciais fora destas regiões levam a soluções de grande amplitude que percorrem os três vales potenciais.

Em um sistema conservativo, a solução para um dado conjunto de condições iniciais é obtida em termos das variáveis do espaço de fase através do princípio da conservação de energia. Ao longo de uma órbita definida por um conjunto de condições iniciais a soma da energia cinética e potencial permanece constante. Assim, qualquer condição inicial pertencente às órbitas heteroclínicas e homoclínicas da Figura 6.2 apresentam o mesmo nível de energia total. Conhecendo as coordenadas de um dos pontos de sela do sistema (P_2 ou P_3), pode-se escrever a seguinte equação:

$$T\left(\dot{\zeta}_{11}\right)+V\left(\zeta_{11}\right)=C_{sela} \tag{6.1}$$

onde C_{sela} é o valor da energia total no ponto de sela, T é a energia cinética do sistema e V é a energia potencial total do sistema que é definida como a soma da energia de deformação com o potencial das forças externas.

Se o objetivo é que a casca não perca sua estabilidade, as perturbações possíveis são as delimitadas pelas duas órbitas heteroclínicas. Esta região é aqui denominada *bacia de atração conservativa* (Gonçalves et al., 2007b).

A fronteira desta região, definida pela equação (6.1), pode ser facilmente obtida para qualquer sistema estrutural, bastando para isto que se tenha os funcionais de energia e as coordenadas do ponto de sela.

Em certas aplicações práticas as máximas perturbações permitidas podem ser menores que as obtidas a partir de (6.1) em função de critérios de projeto baseados em valores máximos de, por exemplo, tensões, deslocamentos, acelerações, etc.

Tabela 6.2 – Autovalores reais da sela e seus respectivos autovetores. (Γ_0 = 0,40)

Autovalores Reais (P_2 e P_3)	Autovetor
8,82	$\{0,0750; 0,6615\}^T$
-8,82	$\{-0,0750; 0,6615\}^T$

6.1.2. Vibração livre amortecida

A Figura 6.3 apresenta, juntamente com as órbitas homoclínicas e heteroclínicas, quatro planos de fase para diferentes condições iniciais (C.I.) de uma casca cilíndrica submetida a uma carga estática de compressão axial. As linhas tracejadas representam os planos de fase de um sistema conservativo, enquanto que as curvas contínuas que convergem para os pontos de equilíbrio estável (P_1, P_4 e P_5) são os planos de fase representativos de um sistema amortecido para as mesmas condições iniciais.

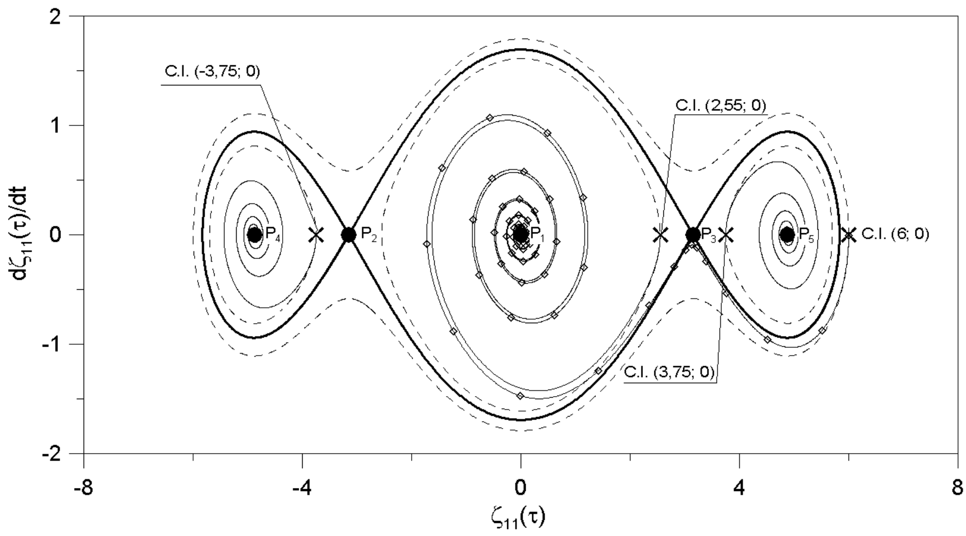


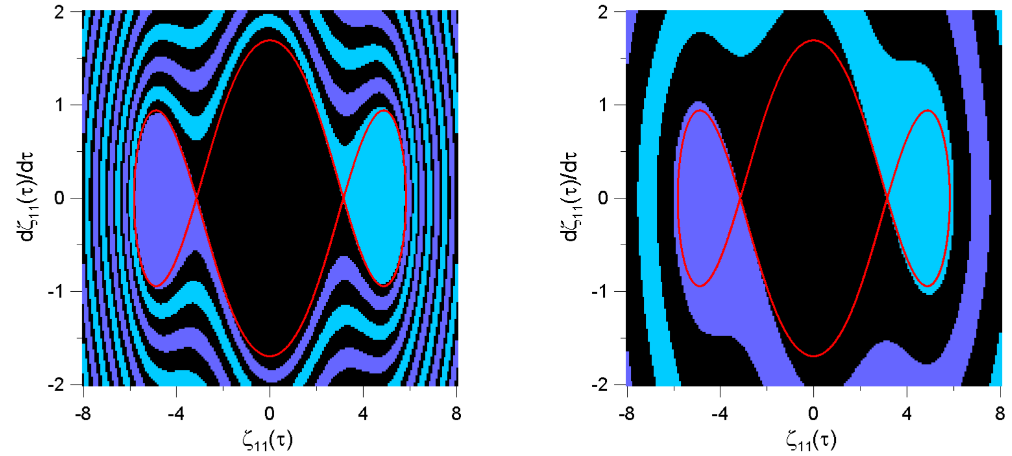
Figura 6.3 – Plano de fase com diferentes condições iniciais de um sistema conservativo e de um amortecido. (Γ_0=0,40).

Em um sistema conservativo não há a presença de atratores. Dado um par de condições iniciais, tem-se uma órbita cuja forma depende apenas da região em que essas condições iniciais se encontrem.

Já em um sistema amortecido, tem-se atratores para os quais as respostas do sistema convergem. Neste caso, os atratores são os pontos correspondentes às soluções de equilíbrio estável (P_1, P_4 e P_5).

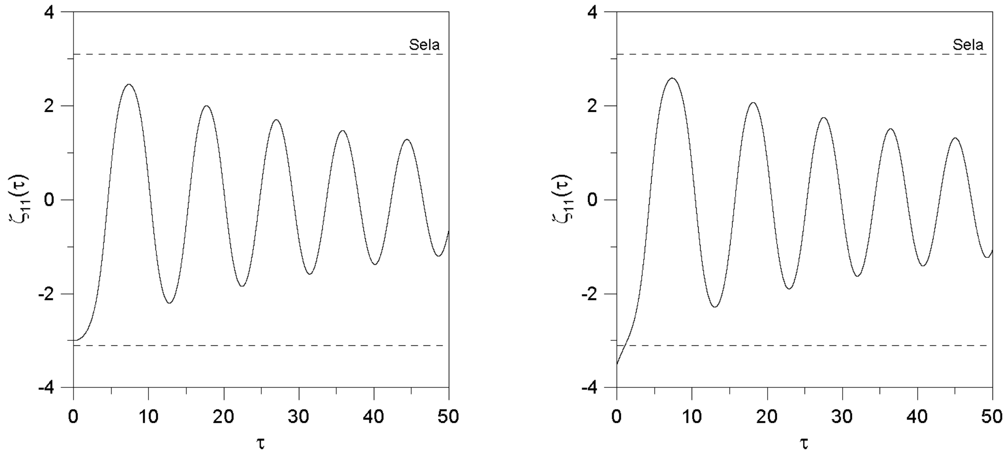
A Figura 6.4 apresenta as bacias de atração estática de um sistema levemente amortecido. Nota-se que, para um pequeno amortecimento, a região delimitada pela equação (6.1) pouco difere da região central de cada uma das bacias que corresponde ao conjunto de condições iniciais cujas respostas transientes e permanentes permanecem dentro de um certo vale potencial. Portanto, para valores usuais de amortecimento pode-se utilizar a superfície delimitada pelo sistema conservativo como uma aproximação para a região central da bacia de atração do sistema amortecido.

A Figura 6.5 apresenta os instantes iniciais da resposta no tempo para diversas perturbações iniciais pertencentes à bacia de atração estática da Figura 6.4a. A Figura 6.5a corresponde a condições iniciais dentro da região delimitada pelas órbitas heteroclínicas, enquanto as Figuras 6.5b-d corresponde a condições iniciais pertencentes à bacia de atração de P_1, mas fora da região definida por essas órbitas.

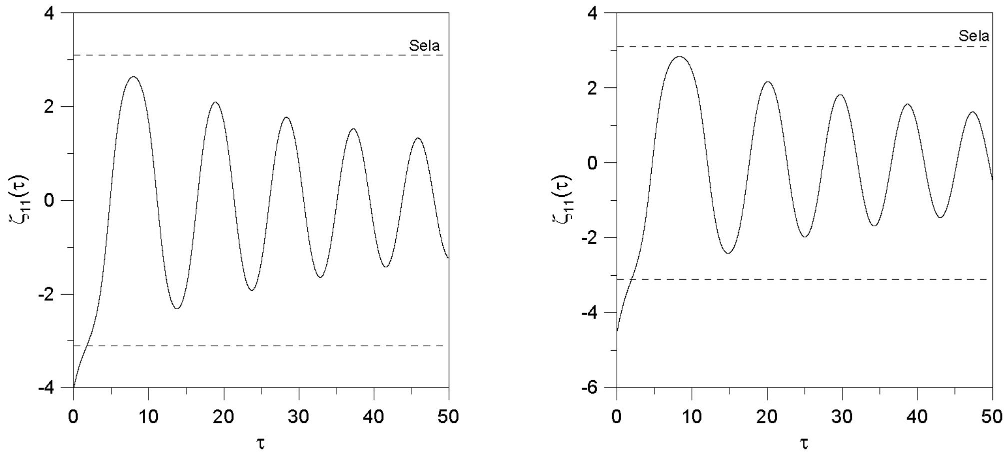


(a) η_1 = 0,0008 e η_2 = 0,00002 (b) η_1 = 0,0008 e η_2 = 0,0001

Figura 6.4 – Bacia de atração estática para um sistema levemente amortecido. Modelo com 1 GDL. (Γ_0 = 0,40).



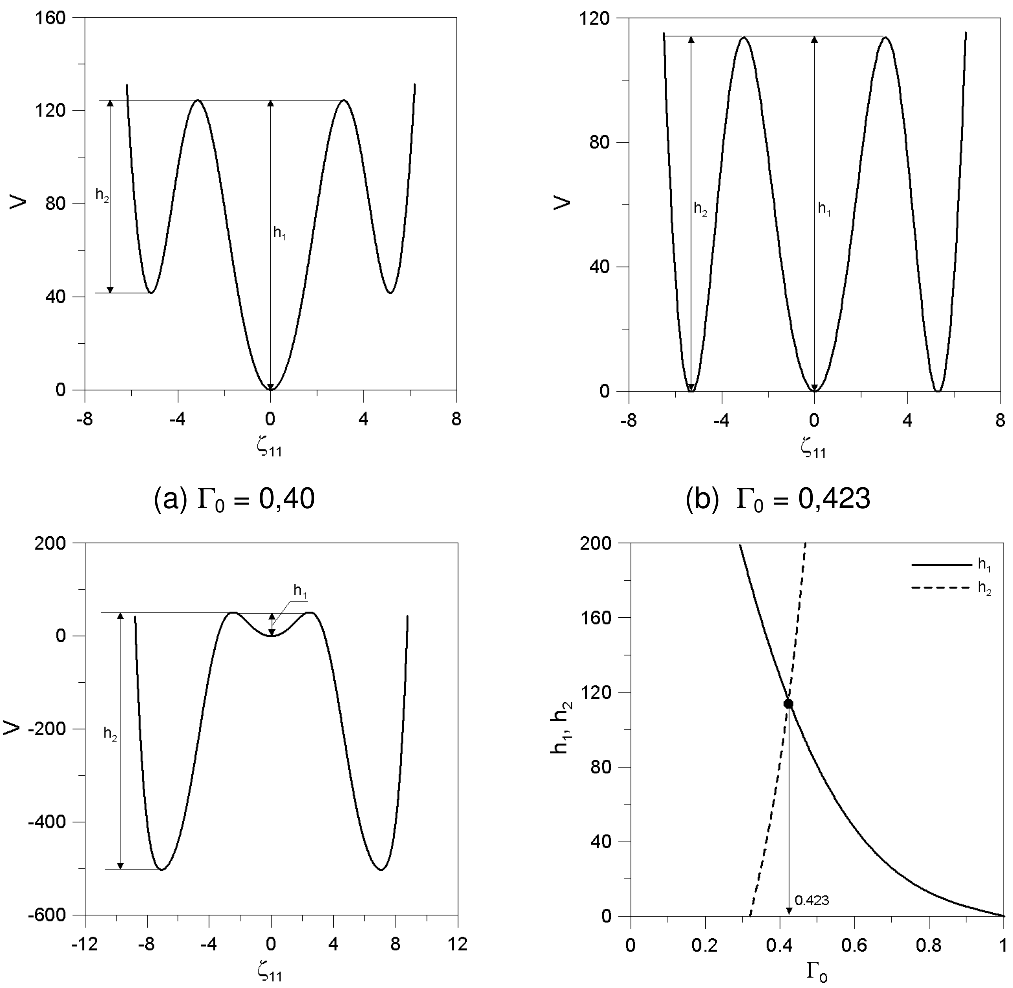
(a) $\zeta_{11} = -3{,}00$, $\dot{\zeta}_{11} = 0{,}00$ (b) $\zeta_{11} = -3{,}50$, $\dot{\zeta}_{11} = 0{,}45$



(b) $\zeta_{11} = -4{,}00$, $\dot{\zeta}_{11} = 0{,}75$ (b) $\zeta_{11} = -4{,}50$, $\dot{\zeta}_{11} = 1{,}00$

Figura 6.5 – Instantes iniciais da resposta no tempo para diversas perturbações iniciais.

O parâmetro de pré-carregamento estático, Γ_0, é importante na relação entre a profundidade dos vales potenciais pré e pós-flambagem e, portanto, nas perturbações máximas que o sistema pode suportar sem perder a estabilidade. A Figura 6.6d ilustra a variação da profundidade dos vales de energia pré-flambagem e pós-flambagem com o parâmetro de pré-carregamento estático. Nessa figura h_1 representa a profundidade do vale pré-flambagem e h_2, a profundidade do vale pós-flambagem.



(a) Γ_0 = 0,40 (b) Γ_0 = 0,423

(c) Γ_0 = 0,60 (d)

Figura 6.6 – (a-c) Variação da energia potencial em função de Γ_0 e (d) variação da profundidade dos vales potenciais com o parâmetro Γ_0.

A profundidade do vale pré-flambagem varia de infinito, quando $\Gamma_0 < \Gamma_{MIN}$, até zero, quando a carga atinge o valor da carga crítica. Já a profundidade do vale pós-flambagem varia de zero, em $\Gamma_0 \cong 0{,}32$ (mínimo pós-critico), a infinito. A intersecção de ambas as curvas define a chamada *Carga de Maxwell* (Hunt et al., 1999) que representa a carga estática que produz tanto o vale de energia pré-flambagem quanto o pós-flambagem com a mesma profundidade, Figura 6.6b. Para cargas com valores superiores ao da carga de Maxwell, a profundidade do vale de energia pós-flambagem é superior à profundidade do vale pré-flambagem (Figura 6.6c).

A Figura 6.7 ilustra as órbitas heteroclínicas e homoclínicas para um pré-carregamento estático igual a 60 % da carga crítica (Γ_0 = 0,60). Nota-se que a área que leva a soluções limitadas em torno de P_1 é bem menor que a área associada aos pontos P_4 e P_5. A Tabela 6.3 apresenta as coordenadas das cinco soluções e seus respectivos autovalores.

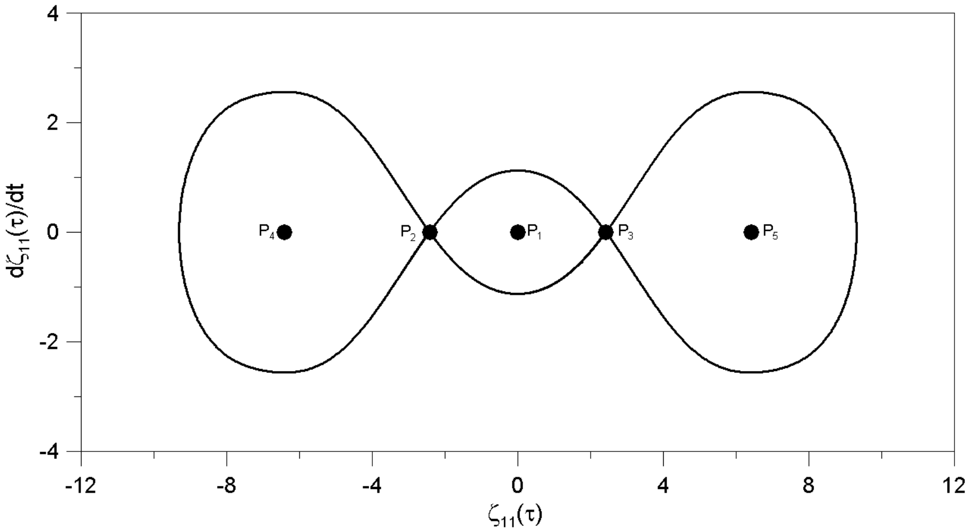


Figura 6.7 – Órbitas heteroclínicas e homoclínicas da casca cilíndrica, modelo com 1 GDL. Γ_0 = 0,60.

Tabela 6.3 – Pontos de equilíbrio e seus respectivos autovalores. Modelo reduzido com 1 GDL. (Γ_0 = 0,60).

Pontos de equilíbrio	Coordenada modal (ζ_{11})	Autovalores	Tipo
P_1 (pré-flambagem)	0,00	± 5,63i	Centro
P_2, P_3 (sela)	± 2,42	± 8,84	Sela
P_4, P_5 (pós-flambagem)	± 6,41	± 11,22i	Centro

Comparando a Figura 6.7 com a Figura 6.2, observa-se que a área da bacia de atração conservativa diminui acentuadamente com o acréscimo do parâmetro de pré-carregamento estático.

A Figura 6.8 apresenta a variação da área da bacia conservativa com o parâmetro de pré-carregamento estático. Nota-se que a área é máxima em $\Gamma_0 = \Gamma_{MIN}$, pois o vale potencial pós-flambagem não existe até se atingir esse carregamento ($h_2 = 0$ na Figura 6.6d). À medida que se incrementa o valor de Γ_0 a área da bacia conservativa diminui chegando a zero quando $\Gamma_0 = \Gamma_{CR}$. Verifica-se que a carga crítica é apenas um limite superior da capacidade de carga da estrutura. Perturbações finitas fazem com que a estrutura perca a estabilidade para valores de Γ_0 menores que Γ_{CR}.

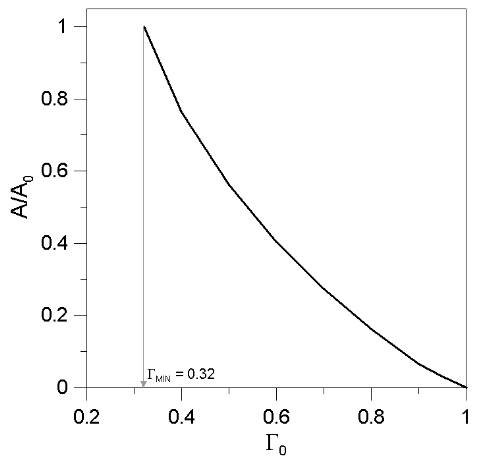


Figura 6.8 – Variação da área da bacia pré-flambagem com o parâmetro de pré-carregamento estático.

6.1.3. Vibração forçada amortecida

A Figura 6.9 apresenta, para uma casca vazia submetida a um carregamento axial dependente do tempo, equação (5.2), um diagrama de bifurcação representativo do ramo ascendente da região principal de instabilidade, Figura 5.8a. Esse diagrama é obtido através do método da Força Bruta e apresenta as bifurcações que ocorrem no vale pré-flambagem, no vale pós-flambagem e nas soluções que cruzam esses vales. Para o traçado desta figura o parâmetro de controle, Γ_1, é incrementado da esquerda para a direita e, em seguida, da direita para esquerda, para a obtenção de todas as soluções estáveis do sistema.

A Figura 6.10 apresenta os planos de fase, para uma casca cilíndrica vazia, com todas as soluções estáveis mapeadas pelo diagrama de bifurcação da Figura 6.9. Observa-se que as seções de Poincaré (P_1, P_4, P_7, P_8, P_{11} e P_{13}), referentes às soluções do vale pré-flambagem, estão próximas de outras órbitas que atuam como atratores caso haja o escape, a exceção é P_7, Figura 6.10e.

Em muitos trabalhos encontrados na literatura, a integridade do sistema dinâmico é estudada levando em consideração somente a continuidade da bacia de atração, sem impor limites às perturbações. Rega e Lenci (2005) apresentam um estudo detalhado e uma revisão bibliográfica sobre a análise da integridade de sistemas mecânicos com base na evolução das bacias de atração.

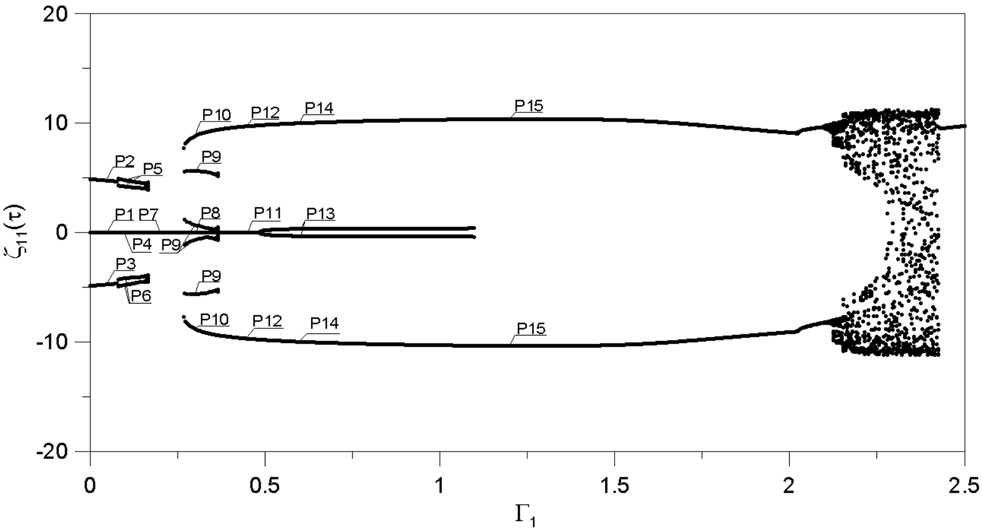
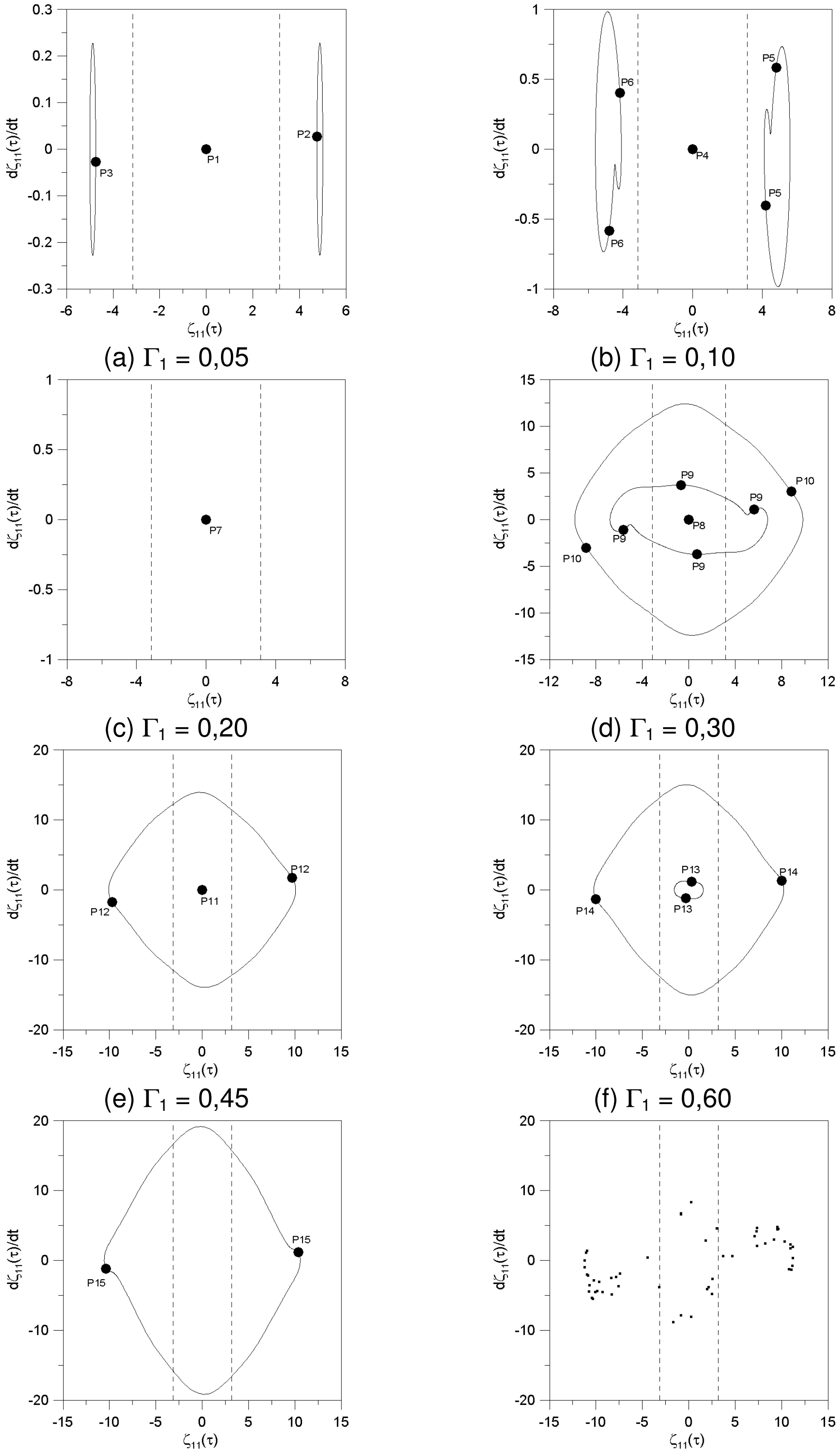


Figura 6.9 – Diagrama de bifurcação para uma casca cilíndrica vazia. (Γ_0 = 0, 40, Ω = 1,80). Modelo com 1 GDL.

Nesse trabalho, Rega e Lenci (2005) propõem um fator de integridade (FI) que consiste na determinação do maior raio de uma circunferência, centrada em cada ponto fixo de um atrator periódico, que delimita uma bacia de atração contínua. Esse critério não delimita as oscilações máximas permitidas, estuda apenas a integridade da bacia de atração de uma dada solução periódica.

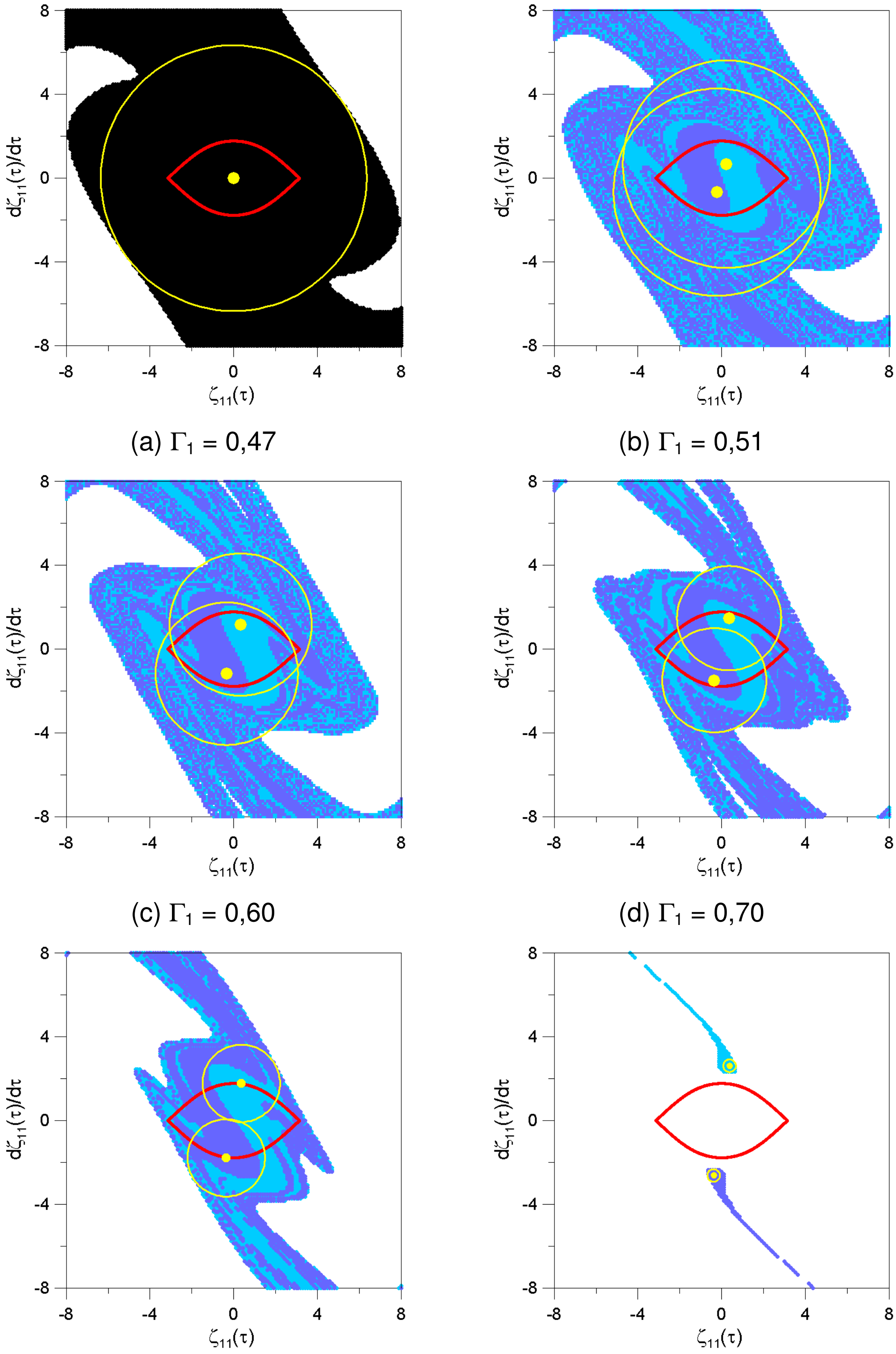
A Figura 6.11 apresenta as bacias de atração das soluções pré-flambagem em uma janela de condições iniciais que engloba os três vales potenciais. Nessa figura os eixos da abcissa e da ordenada são, respectivamente, os deslocamentos e as velocidades adimensionalizados. A região em branco representa as perturbações iniciais que convergem para um atrator externo ao vale pré-flambagem. Nessa figura a circunferência em amarelo representa a maior circunferência que delimita um espaço contínuo de condições iniciais que convergem para o seu centro (ponto fixo). Mostra-se também, para efeito de comparação, a região delimitada pelas órbitas heteroclínicas, equação (6.1).

Na Figura 6.11, observa-se que existem inúmeras condições iniciais que possuem energia total superior à definida pelo ponto de sela e que não escapam do vale de energia pré-flambagem. Essas condições iniciais convergem para o atrator situado no centro da circunferência.



(a) Γ_1 = 0,05
(b) Γ_1 = 0,10
(c) Γ_1 = 0,20
(d) Γ_1 = 0,30
(e) Γ_1 = 0,45
(f) Γ_1 = 0,60
(g) Γ_1 = 1,20
(h) Γ_1 = 2,40

Figura 6.10 – Planos de fase para uma casca cilíndrica vazia. (Γ_0 = 0, 40, Ω = 1,80).



(a) Γ_1 = 0,47 (b) Γ_1 = 0,51

(c) Γ_1 = 0,60 (d) Γ_1 = 0,70

(e) Γ_1 = 0,82 (f) Γ_1 = 1,09

Figura 6.11 – Bacia de atração permanente para uma casca cilíndrica vazia e fator de integridade. (Γ_0 = 0, 40, Ω = 1,80). Modelo com 1 GDL.

A Figura 6.12 ilustra a variação do raio máximo da circunferência (fator de integridade) da solução pré-flambagem, para uma casca cilíndrica, com o incremento da magnitude da excitação, Γ_1.

Observa-se na Figura 6.12 que o raio cresce indefinidamente entre os valores de Γ_1 = 0,20 e Γ_1 = 0,25. Esse comportamento era esperado já que não há soluções externas ao vale pré-flambagem neste intervalo, como se observa na Figura 6.9.

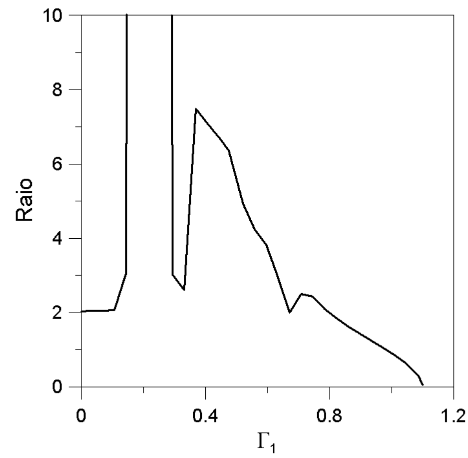
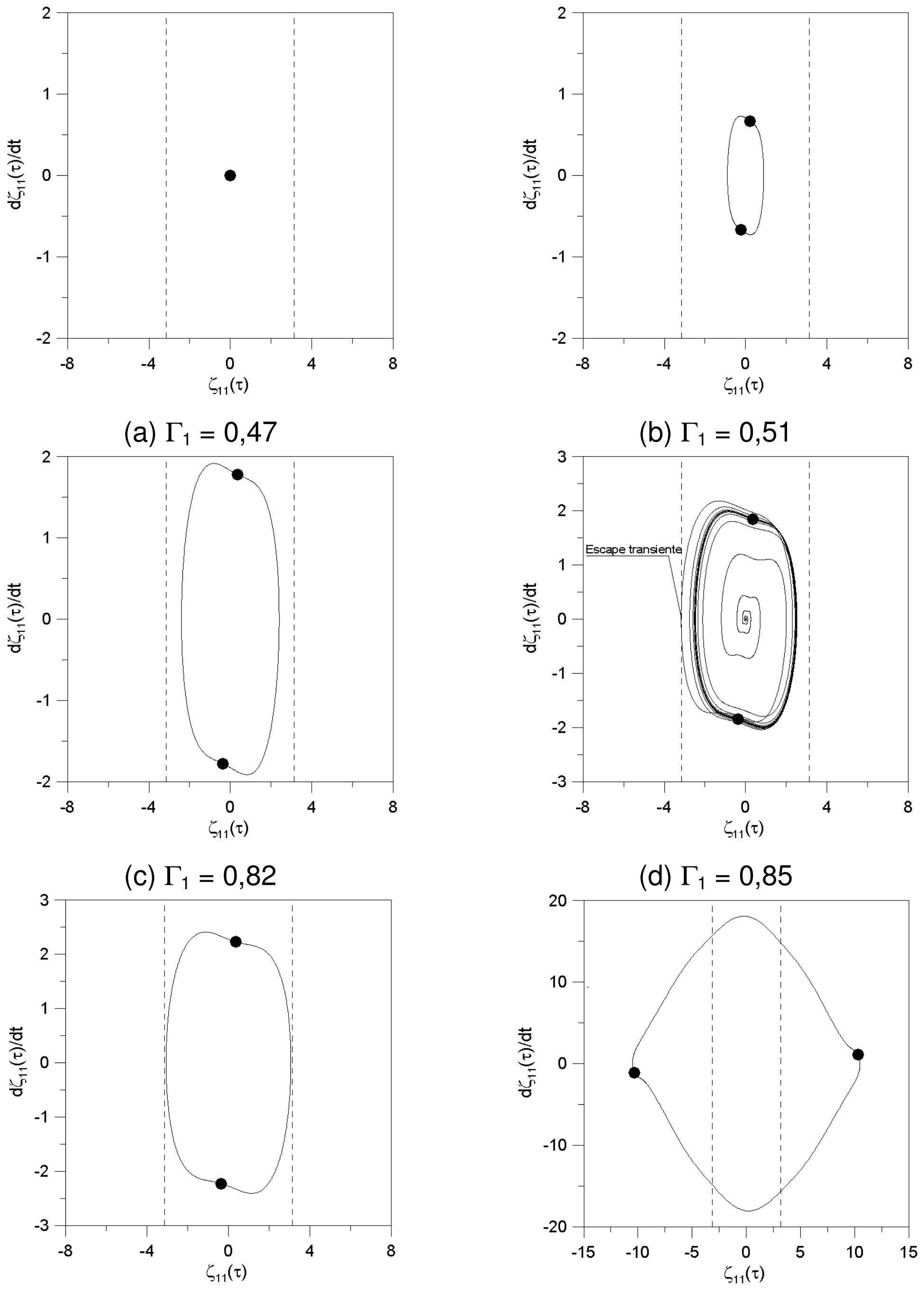


Figura 6.12 – Variação do fator de integridade bacia de atração da casca cilíndrica vazia. (Γ_0 = 0,40, Ω = 1,80). Modelo com 1 GDL.

O interesse maior na análise da integridade do sistema concentra-se na região do vale pré-flambagem da casca cilíndrica. Sendo assim, torna-se necessário o conhecimento da correlação da evolução do plano de fase, ao longo do diagrama de bifurcação, com a superfície de energia delimitada pelo ponto de sela.

A Figura 6.13 ilustra os planos de fase para uma casca cilíndrica vazia e sua relação com as coordenadas ζ_{11} dos dois pontos de sela que são representados pelas retas tracejadas e as curvas contínuas representam os planos de fase. Todas as figuras apresentam os planos de fase para o estado permanente, com exceção da Figura 6.13d que ilustra o plano de fase tanto na fase transiente quanto na permanente, mostrando o escape durante o regime transiente de vibração. Nota-se que o escape transiente (Figura 6.13d) ocorre na vizinhança do ponto de sela, onde se encontra o passo entre dois vales.

A Figura 6.13a ilustra a solução trivial. Após o parâmetro de controle, Γ_1, atingir o valor crítico, a solução trivial torna-se instável, dando origem a uma solução periódica estável de período 2T. Essa nova solução periódica e sua secção de Poincaré estão, inicialmente, contidas entre as coordenadas do ponto de sela (Figura 6.13b).



(a) Γ_1 = 0,47 (b) Γ_1 = 0,51

(c) Γ_1 = 0,82 (d) Γ_1 = 0,85

(e) Γ_1 = 1,00 (f) Γ_1 = 1,05

Figura 6.13 – Relação entre o plano de fase e a coordenada ζ_{11} do ponto de sela para casca vazia. (Γ_0 = 0,40, Ω = 1,80). Modelo com 1 GDL. $\zeta_{11}(0)=\dot{\zeta}_{11}(0)=1\times10^{-4}$. Carga brusca. ($\Gamma_{1CR\text{-}BRUSCO}$ = 1,01; $\Gamma_{1CR\text{-}GRADUAL}$ = 1,10).

O escape, permanente ou transiente, do vale de energia potencial ocorre somente quando a amplitude de vibração, $\zeta_{11}(\tau)$, torna-se superior à coordenada ζ_{11} do ponto de sela. É o caso ilustrado na Figura 6.13d e na Figura 6.13f que representam, respectivamente, o escape transiente e o escape permanente. Cabe ressaltar que todas as respostas apresentadas na Figura 6.13 são obtidas partindo-se da configuração de equilíbrio estático e dando-se uma pequena perturbação inicial, juntamente com a aplicação do carregamento, de $\zeta_{11}(0)=\dot{\zeta}_{11}(0)=1\times10^{-4}$.

Deve-se ter em mente que a carga crítica de escape do vale potencial pré-flambagem depende da maneira como a carga é aplicada. Como visto no capítulo 5, o diagrama de bifurcação considera um incremento gradual do carregamento. Assim a Figura 6.9 representa um carregamento gradual aplicado à casca, por isso a carga crítica ($\Gamma_{1CR\text{-}GRADUAL}$ = 1,10) é superior à carga crítica de um carregamento brusco ($\Gamma_{1CR\text{-}BRUSCO}$ = 1,01). A resposta ilustrada na Figura 6.13e, que está na iminência do escape, representa o plano de fase para um carregamento brusco aplicado à casca.

A Figura 6.14 ilustra a superfície de energia total da casca cilíndrica vazia para um sistema conservativo, destacando o nível de energia definido pelas coordenadas do ponto de sela. Nesta figura insere-se o plano de fase da Figura 6.13e para exemplificar como as órbitas dos planos de fase do sistema forçado se localizam em relação à superfície de energia total do sistema conservativo. Observa-se que a órbita está na iminência do escape do vale de energia potencial, tangenciando as coordenadas dos pontos de sela.

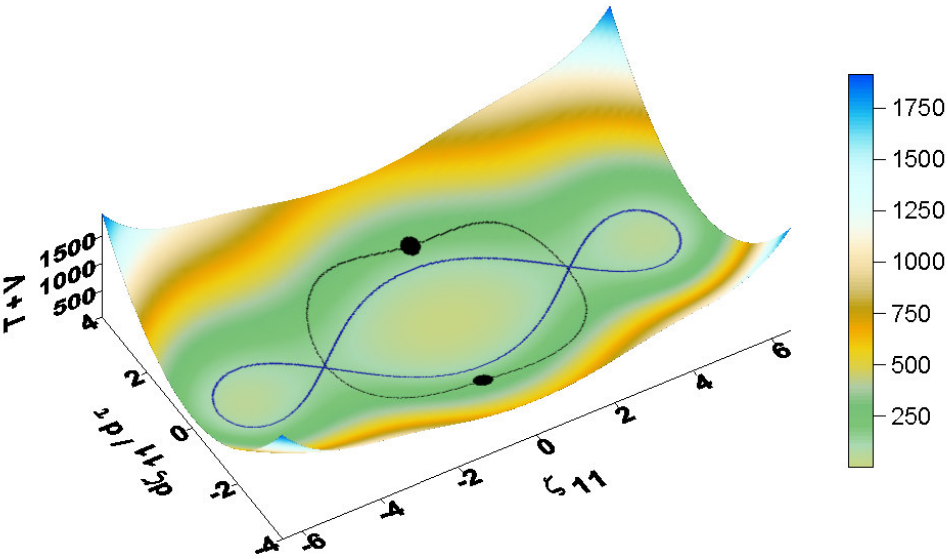


Figura 6.14 – Superfície de energia total de um sistema conservativo com o plano de fase, Figura 6.13e, de uma casca cilíndrica vazia submetida a um carregamento axial harmônico.

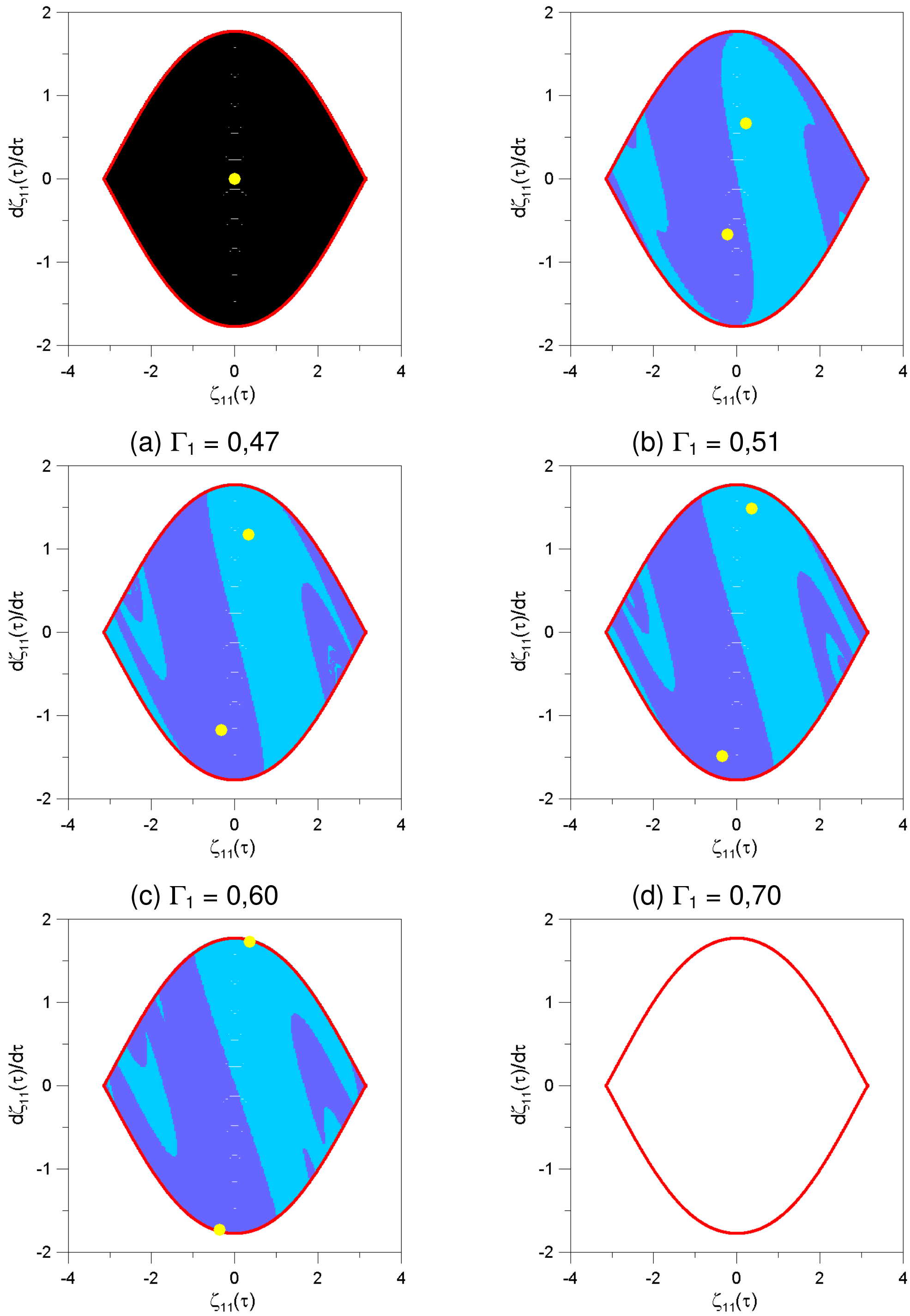
Observa-se, a partir da Figura 6.14, que o plano de fase e os respectivos pontos fixos do mapa de Poincaré possuem um nível de energia superior ao nível definido a partir do ponto de sela. Porém, a órbita permanente não ultrapassa os limites da coordenada $\zeta_{11}(\tau)$ do ponto sela, indicando que não houve o escape do vale potencial pré-flambagem. Entretanto as velocidades máximas ultrapassam os valores definidos pela equação (6.1).

Sabe-se que, tanto para o sistema amortecido quanto para o sistema não-amortecido sob vibração livre, as condições iniciais contidas na região delimitada pelas órbitas heteroclínicas levam a soluções que permanecem, tanto no regime transiente quanto no permanente, dentro do vale potencial pré-flambagem. No projeto de uma casca, a fim de evitar possíveis danos, pode-se impor que a resposta da estrutura sob a presença de qualquer tipo de carregamento dinâmico deve permanecer no interior desta mesma região. Com base neste conceito, a análise das bacias de atração do sistema forçado fica restrita a condições iniciais dentro desta região. Assim, a área delimitada pelas órbitas heteroclínicas reúne as condições iniciais que estão dentro do vale de energia pré-flambagem e que possuem energia total inferior ao ponto de sela, portanto essa área possui maior interesse para projetistas estruturais e a integridade dessa região é a que será avaliada a seguir.

Neste caso, a adoção da região definida por (6.1) como a região que delimita as condições iniciais permissíveis leva a uma carga inferior à mostrada na Figura 6.9. Entretanto, o critério proposto é bastante simples e consiste apenas em se verificar a cada passo de integração se a energia ultrapassa o valor de C_{SELA}. Desta maneira, procuram-se todas as condições iniciais do sistema dinâmico que possuam, no regime permanente, atratores com energia total associada inferior ao nível de energia do ponto de sela.

A Figura 6.15 ilustra a variação da bacia de atração com o parâmetro de controle Γ_1 no interior da região de interesse. Nessa figura a região em preto representa a solução fundamental do diagrama de bifurcação, enquanto que as regiões coloridas representam as soluções periódicas que surgem após o ponto de bifurcação associado à instabilidade paramétrica. Os círculos em amarelo representam os pontos fixos dos atratores presentes na área em estudo.

Observa-se, a partir da Figura 6.15, que os atratores se aproximam das fronteiras de interesse da bacia de atração à medida que o parâmetro de controle, Γ_1, é incrementado. Nessa figura, a área de interesse da bacia de atração não sofre erosão com o incremento de Γ_1. Porém, essa área de interesse desaparece subitamente em Γ_1 = 0,82 (Figura 6.15f) quando os pontos fixos do mapa de Poincaré saem da região de interesse. O valor crítico (Γ_1 = 0,82) obtido pelo critério proposto representa uma avaliação conservadora da carga de escape.

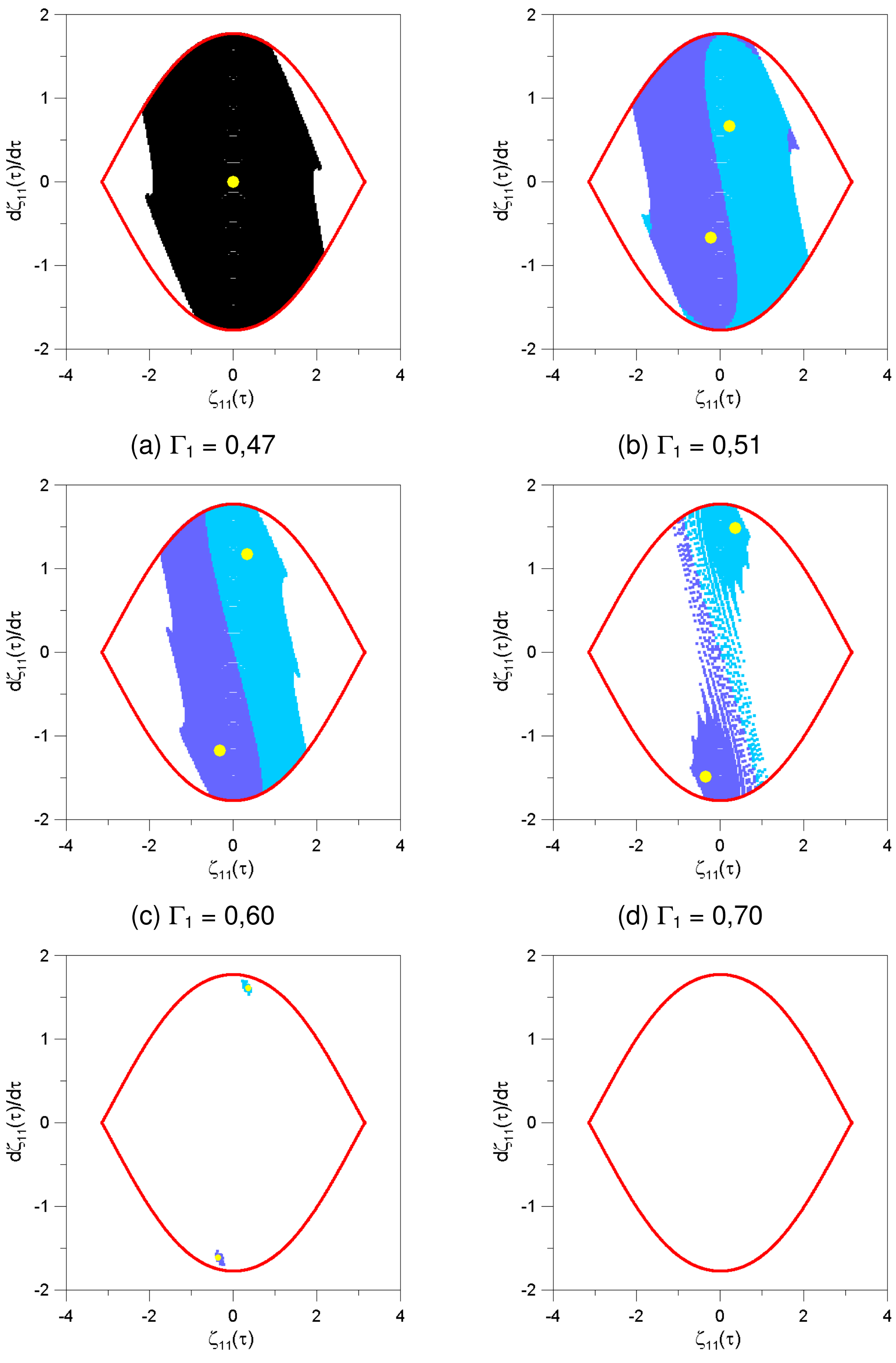


(a) Γ_1 = 0,47 (b) Γ_1 = 0,51

(c) Γ_1 = 0,60 (d) Γ_1 = 0,70

(e) Γ_1 = 0,80 (f) Γ_1 = 0,82

Figura 6.15 – Bacia de atração permanente para uma casca cilíndrica vazia na região de interesse delimitada pelos pontos de sela. (Γ_0 = 0,40, Ω = 1,80). Modelo com 1 GDL. Carregamento brusco.



(a) Γ_1 = 0,47 (b) Γ_1 = 0,51

(c) Γ_1 = 0,60 (d) Γ_1 = 0,70

(e) Γ_1 = 0,75 (f) Γ_1 = 0,80

Figura 6.16 – Bacia de atração transiente para uma casca cilíndrica vazia na região de interesse delimitada pelos pontos de sela. Modelo com 1 GDL.

Em determinados casos, pode-se ter o interesse apenas nas condições iniciais para as quais a resposta no tempo, tanto no estado permanente quanto no transiente, não apresente um nível de energia superior ao nível de energia definido pelo ponto de sela. Têm-se, nestes casos, a bacia de atração transiente do problema.

A Figura 6.16 ilustra a evolução das bacias de atração transiente em função de Γ_1. Nessa figura verifica-se, para cada perturbação inicial, e em todos os instantes de tempo, a energia total até que se atinja o estado permanente. Se em algum momento essa energia total ultrapassar o nível de energia estabelecido pelo ponto de sela, descarta-se esta perturbação inicial da área de interesse da bacia de atração. Como esperado, a bacia de atração transiente sofre uma erosão significativa a medida que Γ_1 cresce.

Observa-se, a partir da Figura 6.16 que a erosão da bacia de atração se inicia na vizinhança dos pontos de sela e segue em direção ao centro da região de interesse. Nota-se que, a partir de certo estágio de carregamento, a região central da bacia apresenta uma estrutura fractal, indicando grande sensibilidade da resposta às condições iniciais (Figura 6.16d). Após este estágio a bacia se divide em duas regiões distintas (Figura 6.16e) e sua área tende rapidamente a zero.

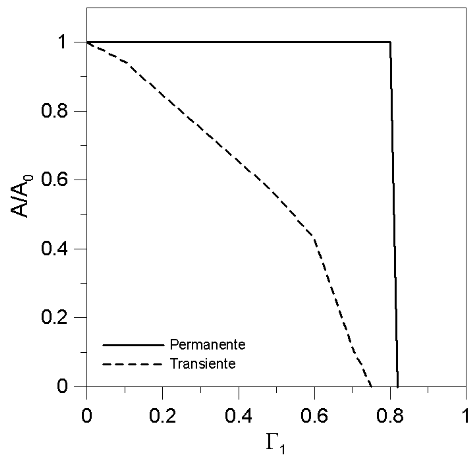


Figura 6.17 – Erosão da área de interesse da bacia de atração para casca vazia. Modelo com 1 GDL. (Γ_0 = 0,40, Ω = 1,80).

A Figura 6.17 ilustra a variação da área da bacia de atração em função do parâmetro de carga, Γ_1, tanto para o estado permanente (Figura 6.15) quanto para o estado transiente (Figura 6.16). Os resultados são normalizados em relação à área de interesse inicial da bacia de atração (A_0). Nota-se que a erosão da bacia de atração no caso permanente é repentina. Já no caso transiente, a erosão é gradual.

Os resultados até agora apresentados foram obtidos sem a consideração de um ângulo de fase entre a parcela harmônica da carga axial, equação (5.2), e a resposta. Caso se considere um ângulo ϕ, que represente um ângulo de fase, a carga axial pode ser reescrita da seguinte forma:

$$P = P_0 + P_1 \cos(\omega_e t + \phi) \tag{6.2}$$

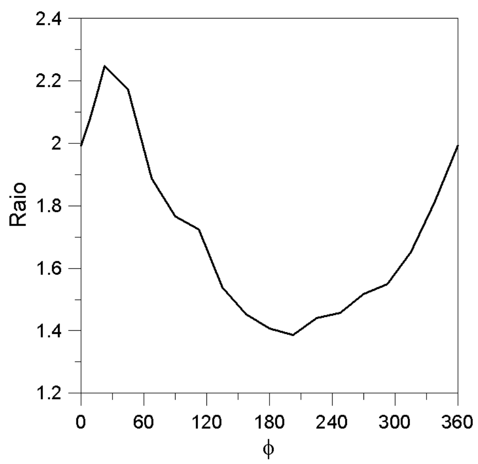


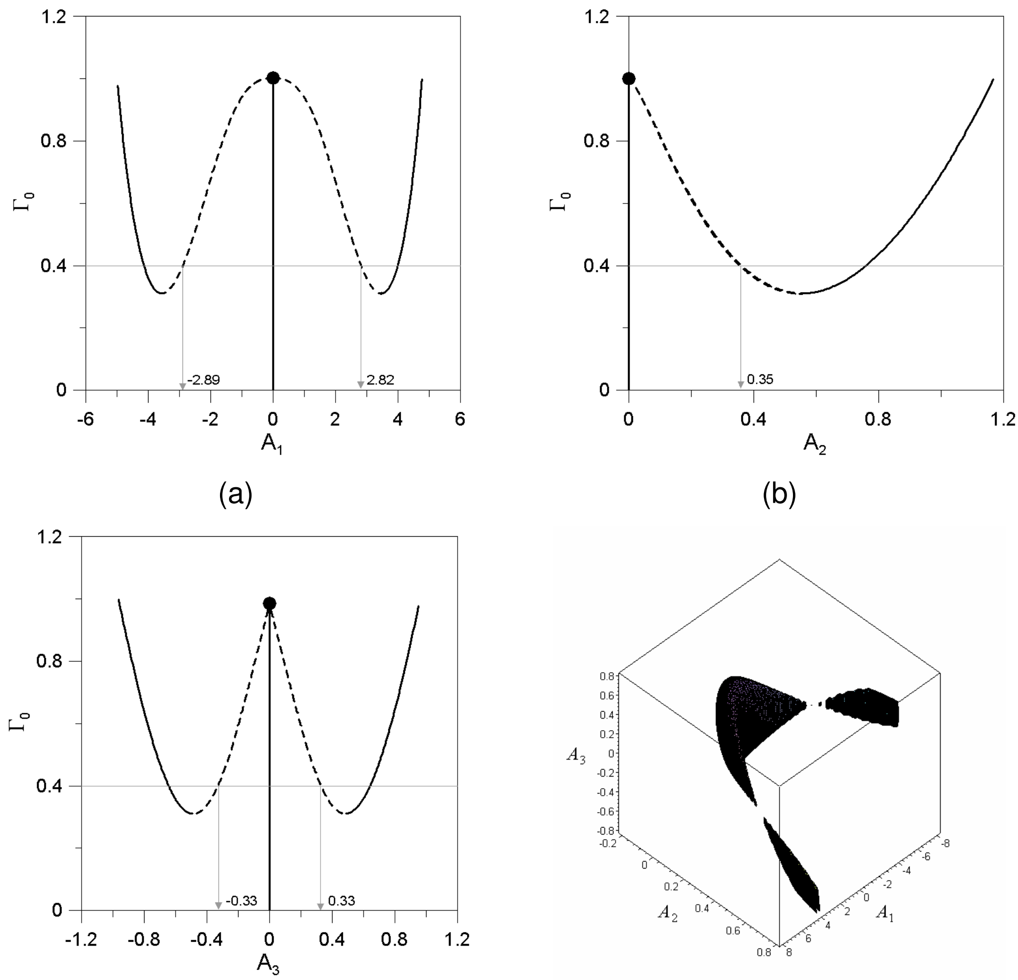
Figura 6.18 – Variação do fator de integridade com ângulo de fase. (Γ_0 = 0,40, Γ_1 = 0,80, Ω = 1,80). Modelo com 1 GDL.

Diante desse novo parâmetro é possível definir a “verdadeira” área de segurança de uma bacia de atração, conforme Rega e Lenci (2005). A Figura 6.18 apresenta a variação do fator de integridade com o ângulo de fase ϕ para uma casca cilíndrica vazia submetida ao carregamento Γ_0 = 0,40, Γ_1 = 0,80 e Ω = 1,80. Observa-se nesta figura que o ângulo de fase pode reduzir em até 30% o fator de integridade. Não se pode generalizar que em todo o trecho ascendente da região principal de instabilidade da casca vazia as reduções sejam dessa ordem. Cada caso deve ser investigado pelo projetista estrutural para se avaliar as situações mais críticas.

6.2. Integridade de um sistema dinâmico multidimensional

A análise da integridade de um sistema dinâmico multidimensional é semelhante à análise feita anteriormente para um sistema dinâmico com um grau de liberdade. Neste item, são apontadas as principais diferenças que devem ser consideradas em um sistema multidimensional. O sistema dinâmico multidimensional escolhido é o obtido a partir dos três primeiros POMs da expansão de Karhunen-Loève, gerando assim um sistema dinâmico hexa-dimensional.

As Figuras 6.19a-c apresentam a variação do pré-carregamento estático em função das coordenadas modais do modelo empregado na análise, descrevendo desta maneira o caminho pós-crítico da casca cilíndrica. Já a Figura 6.19d ilustra, em $\Re^3$, a superfície de energia potencial para uma carga estática Γ_0 = 0,40.



(a) (b)

(c) (d) Γ_0 = 0,40

Figura 6.19 – (a-c) Projeção do caminho pós-critico e (d) energia potencial total Π relativa aos pontos de sela. Modelo com 3 POMs.

Para valores de carga axial entre o mínimo pós-crítico e o valor crítico ($\Gamma_{min} < \Gamma < \Gamma_{cr}$) o sistema apresenta cinco soluções, três estáveis e duas instáveis. As coordenadas dessas soluções e os respectivos autovalores, para um carregamento de 40% da carga crítica, são apresentados na Tabela 6.4. Já para valores de pré-carregamento estático inferior ao valor mínimo pós-crítico

($\Gamma < \Gamma_{min}$) o sistema apresenta apenas uma solução, um centro, e para ($\Gamma > \Gamma_{cr}$) três soluções, dois centros e uma sela.

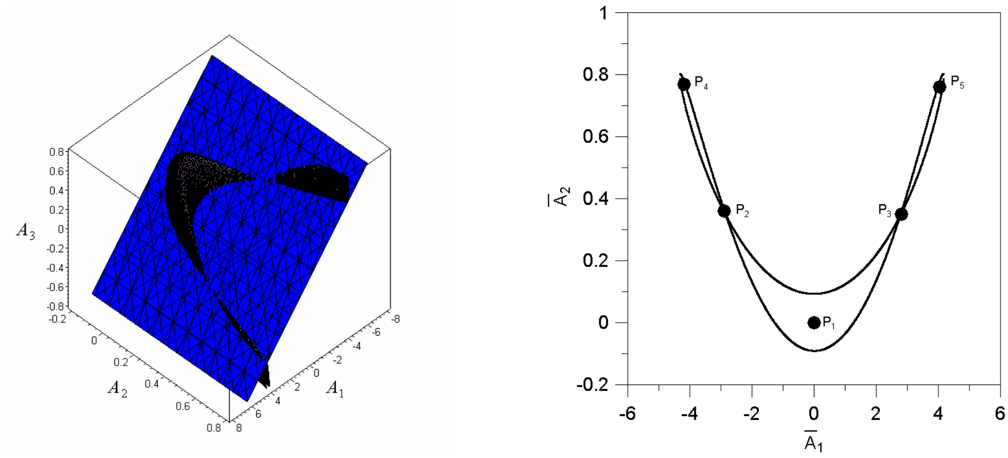
Nota-se que as coordenadas dos pontos de sela apresentadas na Tabela 6.4 são assimétricas com relação às coordenadas A_1 e A_2 e têm sinais opostos com relação à coordenada A_3. Para a análise das bacias escolheu-se um plano que passasse por ambas as selas, P_2 e P_3, e pela origem, P_1. A Figura 6.20a ilustra o plano que contém os pontos de sela e a origem. A Figura 6.20b apresenta a intersecção do plano com a superfície de energia potencial total juntamente com os pontos de equilíbrio da Tabela 6.4.

Tabela 6.4 - Pontos de equilíbrio e seus respectivos autovalores. Modelo reduzido com 3 POMs. (Γ_0 = 0,40).

Pontos de equilíbrio	Coordenadas modais (A_1, A_2, A_3)	Autovalores	Tipo
P_1 (pré-flambagem)	(0; 0; 0)	± 7,70i	centro
		± 3,54i	centro
		± 0,77i	centro
P_2 (sela)	(-2,89; 0,36; 0,33)	± 8,53i	centro
		± 3,81i	centro
		± 0,92	sela
P_3 (sela)	(2,82; 0,35; -0,33)	± 8,53i	centro
		± 3,81i	centro
		± 0,92	sela
P_4 (pós-flambagem)	(-4,14; 0,77; 0,64)	± 9,21i	centro
		± 4,26i	centro
		± 1,26i	centro
P_5 (pós-flambagem)	(3,99; 0,76; -0,64)	± 9,21i	centro
		± 4,26i	centro
		± 1,26i	centro

A Figura 6.21 ilustra algumas seções tridimensionais da superfície de energia total (T + Π), equação (6.1), associada ao ponto de sela. Os pontos de sela podem ser observados apenas nas seções que contêm dois deslocamentos, nas demais combinações a topologia da projeção da superfície tem a forma de uma "esfera", o que era esperado, tendo em vista os autovalores imaginários apresentados na Tabela 6.4.

As órbitas que surgem a partir dos pontos de sela de um sistema conservativo multidimensional são mais complexas que as órbitas apresentadas no item anterior. Porém o princípio da conservação de energia permanece válido; dado um conjunto de condições iniciais dentro da superfície de energia total definida pelos pontos de sela, as órbitas descritas por estas condições iniciais permanecerão dentro da região delimitada por esta superfície.



(a) (b)

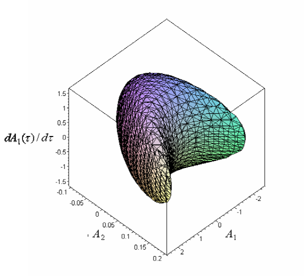
Figura 6.20 – (a) Representação, em $\Re^3$, da energia potencial total relativa aos pontos de sela e (b) sua intersecção com um plano que passa por ambas as selas e pela origem.

Tabela 6.5 – Autovalores reais da sela e seus respectivos autovetores. (Γ_0 = 0,40)

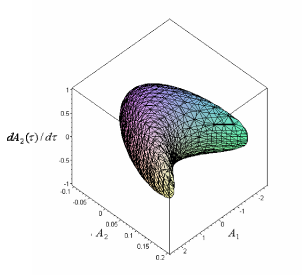
Autovalores Reais (P_2 e P_3)	Autovetor
0,92	$\{0,11; 0,10; -0,029; -0,026; -0,028; -0,025\}^T$
-0,92	$\{0,11; -0,10; -0,029; 0,026; -0,028; 0,025\}^T$

A Figura 6.22 ilustra duas projeções da órbita descrita por um conjunto de condições iniciais que parte do ponto de sela com a direção do autovetor positivo definido na Tabela 6.5. Observa-se, a partir desta figura, que a órbita descrita por este conjunto de condições iniciais está contida na região delimitada pela superfície de energia do ponto de sela, em concordância com o princípio da conservação de energia.

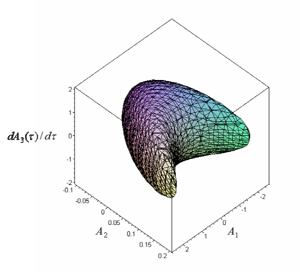
A análise da integridade de um sistema multidimensional amortecido é realizada, como no caso com 1 GDL, para uma casca cilíndrica submetida a um carregamento axial harmônico. A região de interesse do espaço hexa-dimensional escolhida para o traçado das bacias de atração é a região compreendida entre os pontos de sela.



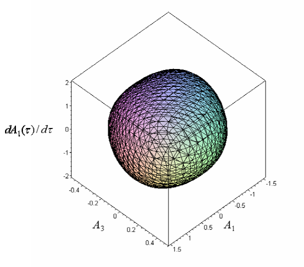
(a) $A_3 = \dot{A}_2 = \dot{A}_3 = 0$



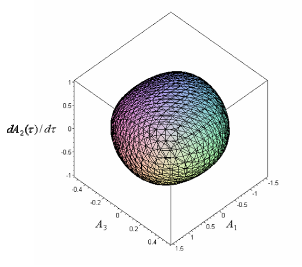
(b) $A_3 = \dot{A}_1 = \dot{A}_3 = 0$



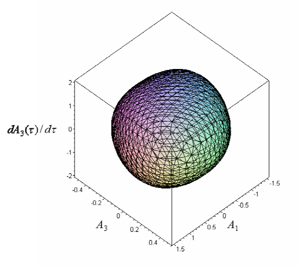
(c) $A_3 = \dot{A}_1 = \dot{A}_2 = 0$



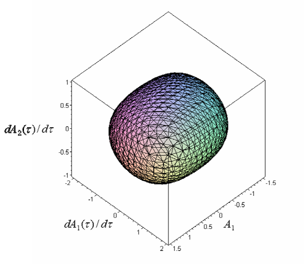
(d) $A_2 = \dot{A}_2 = \dot{A}_3 = 0$



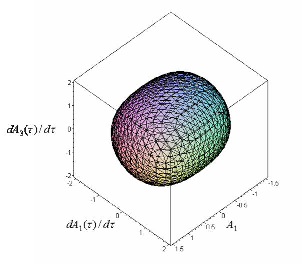
(e) $A_2 = \dot{A}_1 = \dot{A}_3 = 0$



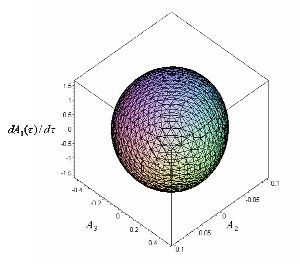
(f) $A_2 = \dot{A}_1 = \dot{A}_2 = 0$



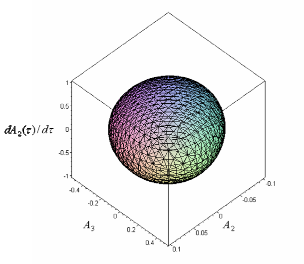
(g) $A_2 = A_3 = \dot{A}_1 = 0$



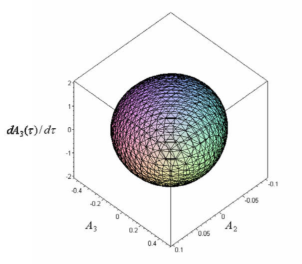
(h) $A_2 = A_3 = \dot{A}_2 = 0$



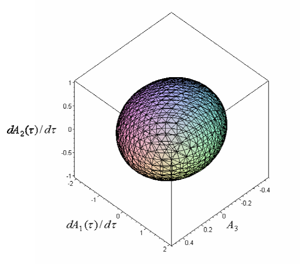
(i) $A_1 = \dot{A}_2 = \dot{A}_3 = 0$



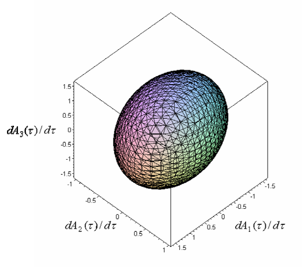
(j) $A_1 = \dot{A}_1 = \dot{A}_3 = 0$



(k) $A_1 = \dot{A}_1 = \dot{A}_2 = 0$

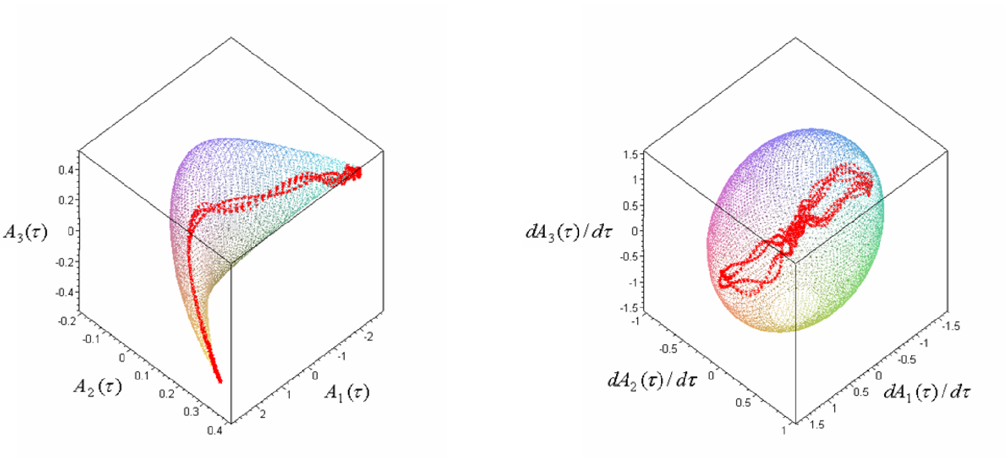


(l) $A_1 = A_2 = \dot{A}_3 = 0$



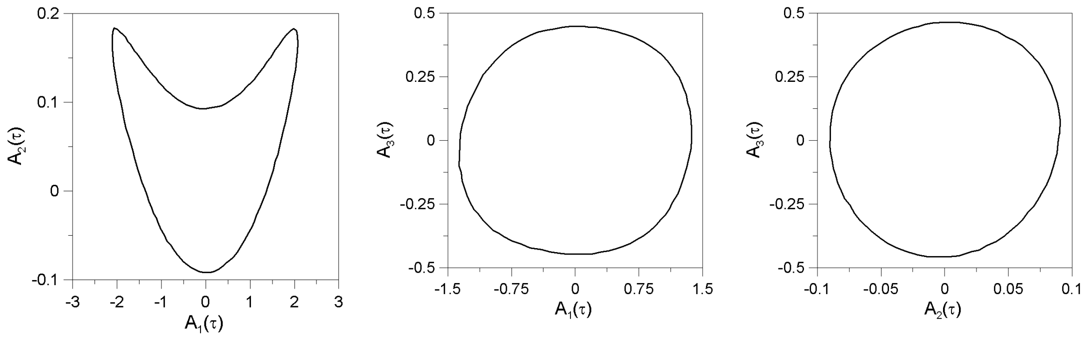
(m) $A_1 = A_2 = A_3 = 0$

Figura 6.21 – Projeções tridimensionais da superfície de energia. (Γ_0 =0,40).



(a) $\dot{A}_1 = \dot{A}_2 = \dot{A}_3 = 0$, (Π) (b) $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, (T)

Figura 6.22 – Projeções da órbita que emerge do ponto de sela na direção do autovetor. (Γ_0 = 0,40).



(a) $A_3 = 0$ (b) $A_2 = 0$ (c) $A_1 = 0$

Figura 6.23 – Secções transversais da energia potencial total, Π, (Figura 6.22a).

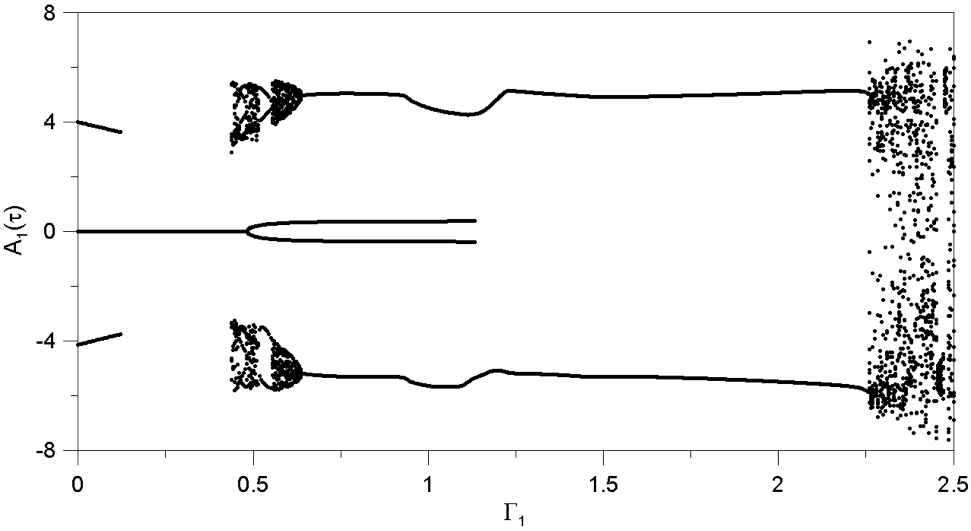
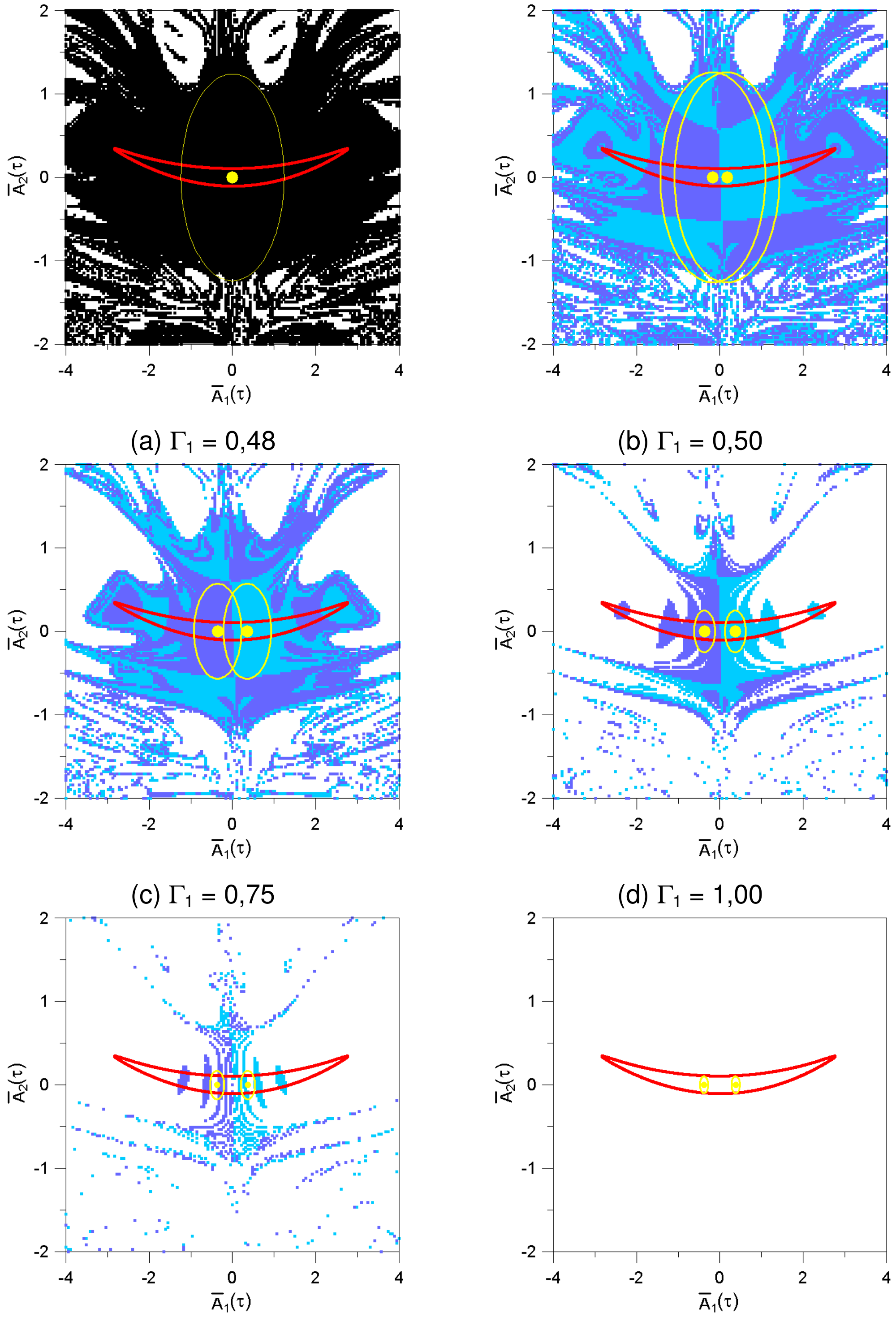


Figura 6.24 – Diagrama de bifurcação para uma casca cilíndrica vazia. (Γ_0 = 0,40, Ω = 1,80). Modelo com 3 POMs.



(a) Γ_1 = 0,48 (b) Γ_1 = 0,50

(c) Γ_1 = 0,75 (d) Γ_1 = 1,00

(e) Γ_1 = 1,05 (f) Γ_1 = 1,10

Figura 6.25 – Bacia de atração permanente para uma casca cilíndrica vazia e fator de integridade. (Γ_0 = 0,40, Ω = 1,80). Modelo com 3 POMs.

A Figura 6.24 apresenta o diagrama de bifurcação para uma casca cilíndrica vazia com as soluções pertencentes ao vale pré-flambagem, ao vale pós-flambagem e com as soluções que orbitam em tornos desses vales. Observa-se nesta figura que o modelo com 3 POMs apresenta a mesma bifurcação super-crítica que o modelo com 1 GDL (Figura 6.9) para a solução pré-flambagem e ambos os modelos fornecem, praticamente, a mesma carga crítica de escape, 1,13 e 1,10, respectivamente. Porém, nas soluções do vale pós-flambagem e nas soluções que cruzam os vales pré e pós-flambagem, existem mudanças significativas entre os modelos, dentre elas, a ausência de soluções pós-flambagem em uma janela bem maior que no modelo com 1 GDL (Γ_1 entre 0,12 e 0,45).

A Figura 6.25 ilustra a variação das bacias de atração da casca e do fator de integridade, proposto por Rega e Lenci (2005), com o parâmetro Γ_1. Diferente do modelo com 1 GDL (Figura 6.11f), os pontos fixos do mapa de Poincaré permanecem na vizinhança do centro da região pré-flambagem, saindo da região de interesse apenas quando o escape de fato ocorre, ou seja, quando não há mais atratores no vale pré-flambagem, como pode ser visto na Figura 6.25.

A visualização do processo de erosão de um sistema dinâmico multidimensional não é um processo fácil em virtude da dificuldade de se visualizar as bacias que são objetos de *n* dimensões. No presente caso, seis dimensões.

Contornando este problema, o cálculo do fator de integridade torna-se uma alternativa prática e eficiente para a análise da integridade do sistema dinâmico. Neste caso hexa-dimensional, procura-se o máximo raio de uma hiper-esfera, centrada no atrator desejado, que contém todas as condições iniciais que são atraídas pelo atrator posicionado ao centro.

Em uma hiper-esfera de dimensão *n* é possível descrever qualquer ponto de sua superfície em um sistema de coordenadas cartesianas de mesma dimensão. A superfície da hiper-esfera em $\Re^6$ é totalmente definida a partir das equações:

$$\begin{aligned}
A_1 &= x_1^A + R_{HE}\cos(\alpha_1) \\
\dot{A}_1 &= x_2^A + R_{HE}\,\mathrm{sen}(\alpha_1)\cos(\alpha_2) \\
A_2 &= x_3^A + R_{HE}\,\mathrm{sen}(\alpha_1)\,\mathrm{sen}(\alpha_2)\cos(\alpha_3) \\
\dot{A}_2 &= x_4^A + R_{HE}\,\mathrm{sen}(\alpha_1)\,\mathrm{sen}(\alpha_2)\,\mathrm{sen}(\alpha_3)\cos(\alpha_4) \\
A_3 &= x_5^A + R_{HE}\,\mathrm{sen}(\alpha_1)\,\mathrm{sen}(\alpha_2)\,\mathrm{sen}(\alpha_3)\,\mathrm{sen}(\alpha_4)\cos(\alpha_5) \\
\dot{A}_3 &= x_6^A + R_{HE}\,\mathrm{sen}(\alpha_1)\,\mathrm{sen}(\alpha_2)\,\mathrm{sen}(\alpha_3)\,\mathrm{sen}(\alpha_4)\,\mathrm{sen}(\alpha_5)
\end{aligned} \tag{6.3}$$

onde x_i^A são as coordenadas do atrator no centro da hiper-esfera, R_{HE} é o raio da hiper-esfera e α_i os ângulos que definem a hiper-esfera.

A determinação do raio máximo dessa hiper-esfera hexa-dimensional segue o fluxograma apresentado na Figura 6.26. Nesse algoritmo, busca-se, a partir de um ponto fixo (centro da hiper-esfera) e de um raio inicial, o maior raio possível até que haja o primeiro escape da hiper-esfera. Para isto, define-se inicialmente o incremento do raio e de cada ângulo. Em função destes incrementos, discretiza-se o espaço em células n-dimensionais. A seguir, definido o raio, variam-se os ângulos, obtêm-se, após cada incremento, as condições iniciais, e integram-se as equações de movimento da casca no tempo até se obter os pontos fixos da solução permanente. Se o ponto fixo encontrado for o centro da hiper-esfera em questão, continua-se o processo até que se obter um ponto fixo diferente, determinando-se assim o fator de integridade. A qualidade dos resultados está relacionada com o incremento dos ângulos e do raio da hiper-esfera, quanto menores forem esses incrementos melhores são os resultados.

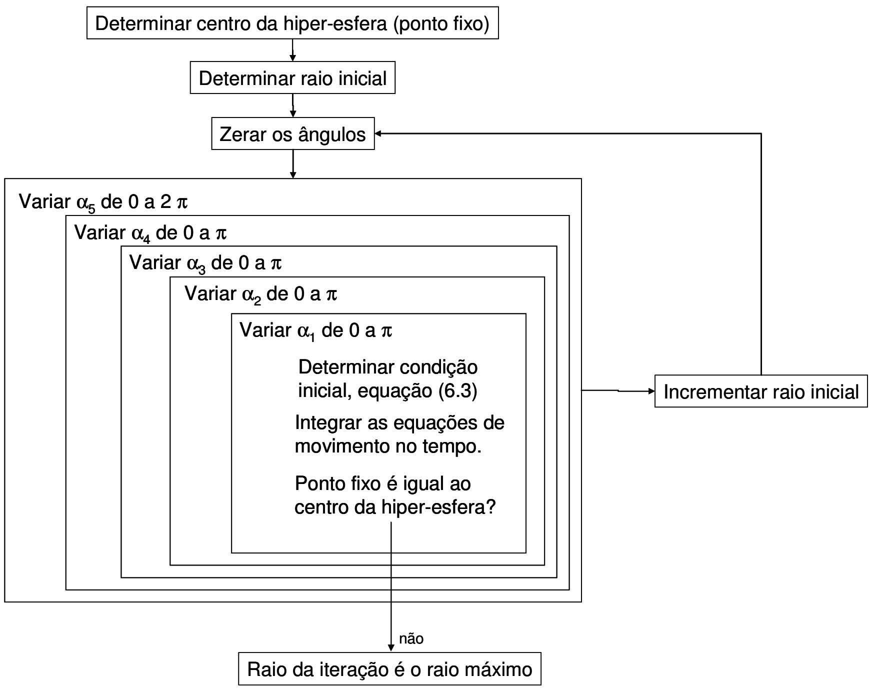


Figura 6.26 – Fluxograma para a determinação do fator de integridade. Modelo com 3 POMs.

Nota-se, na Figura 6.25, que, para o caso multidimensional, a circunferência em amarelo não, necessariamente, tangencia a região em branco que indica a região em que há o escape do vale de energia potencial pré-flambagem. Isto ocorre porque a Figura 6.25 é apenas uma secção da superfície de energia potencial, enquanto que a circunferência em amarelo é uma projeção da hiper-esfera neste plano. Desta maneira, as condições iniciais que levam ao escape podem estar em um plano diferente do adotado na Figura 6.25. É o caso, por exemplo, das Figuras 6.24c, e, f, sendo que nesta última não se tem no plano adotado qualquer ponto que pertença à bacia de atração, embora ainda exista uma bacia de atração.

A Figura 6.27 ilustra a variação do fator de integridade do sistema multidimensional com o parâmetro Γ_1. Nota-se, nesta figura, um crescimento indefinido do raio da hiper-esfera entre os valores de Γ_1 = 0,12 a Γ_1 = 0,45, condizente com o diagrama de bifurcação da Figura 6.24 que no mesmo intervalo de Γ_1 não apresenta soluções fora do vale de energia pré-flambagem. Desta maneira, o único atrator presente é o da solução fundamental, portanto o raio cresce indefinidamente, pois todas as soluções presentes, mesmo apresentando grandes amplitudes, convergem para este atrator. Obviamente nesta região um outro critério de integridade deve ser adotado em função dos valores máximos de deslocamento e velocidade permissíveis. Comparando a variação do fator de integridade do modelo multidimensional com o modelo com 1 GDL, observa-se que a faixa em que há um crescimento indefinido do raio no modelo multidimensional é superior a do modelo com o 1 GDL.

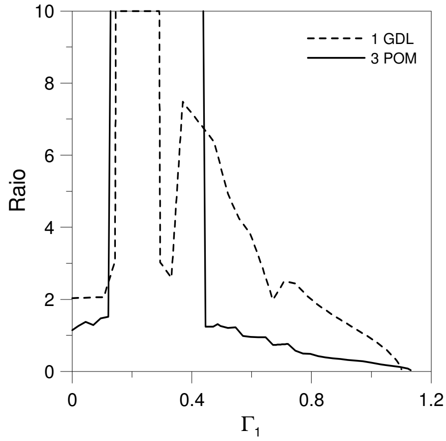
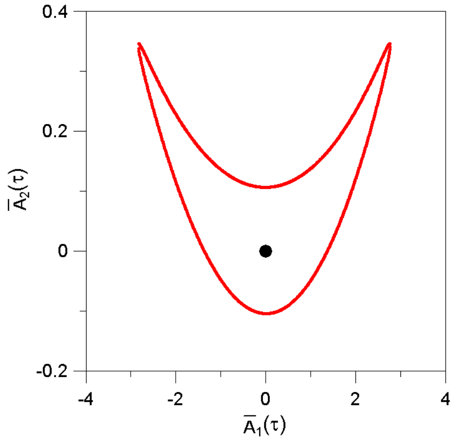


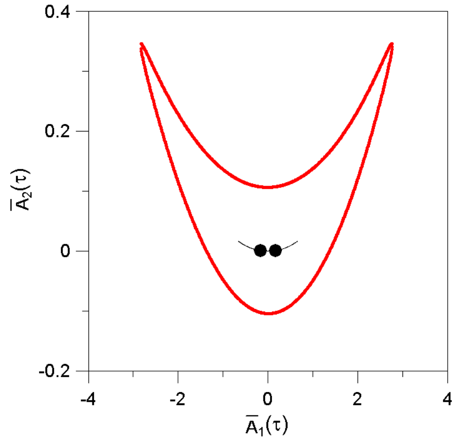
Figura 6.27 – Variação do fator de integridade bacia de atração da casca cilíndrica vazia. (Γ_0 = 0,40, Ω = 1,80). Comparação entre os modelos reduzidos com 1 GDL e com 3 POM.

A Figura 6.28 mostra as projeções das órbitas das soluções permanentes no plano $\overline{A}_1 \times \overline{A}_2$ para uma casca cilíndrica vazia. Observa-se nessas figuras que, à medida que o parâmetro da amplitude de excitação aumenta, a resposta permanente se aproxima dos pontos de selas, ocorrendo o escape da região pré-flambagem na vizinhança destes pontos.

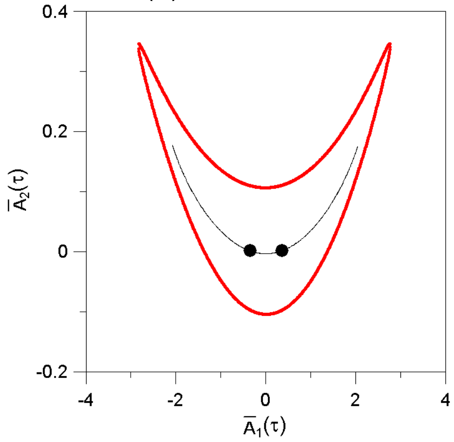
Ainda, na Figura 6.28, nota-se que a projeção da resposta dinâmica da casca, no estado permanente, no plano que contém a sela, permanece dentro da superfície delimitada pela superfície de energia total associada ao ponto de sela. Isto significa que toda a resposta permanente do sistema possui energia total inferior à energia total do ponto de sela.



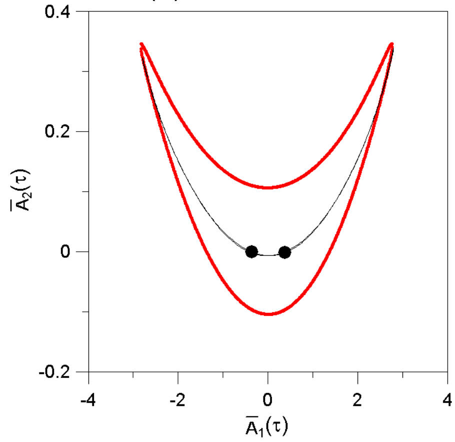
(a) Γ_1 = 0,48



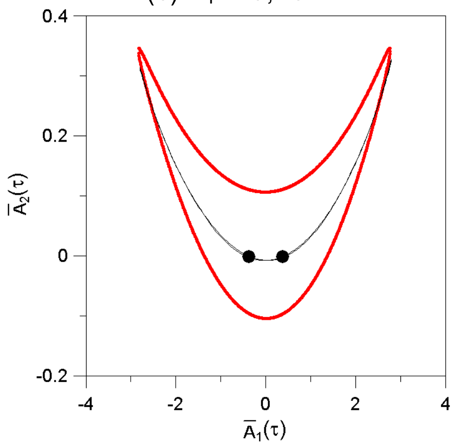
(b) Γ_1 = 0,50



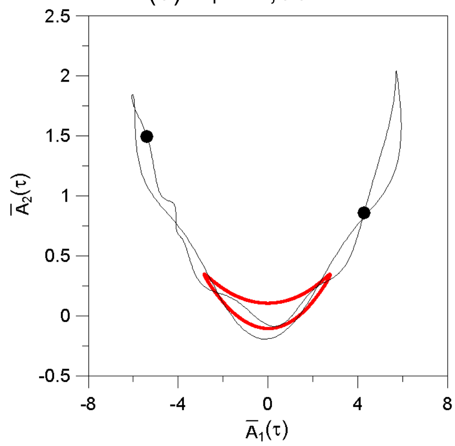
(c) Γ_1 = 0,75



(d) Γ_1 = 1,00



(e) Γ_1 = 1,05



(f) Γ_1 = 1,13

Figura 6.28 – Projeção da resposta permanente no plano $\bar{A}_1 \times \bar{A}_2$. ($\Gamma_0$ = 0,40, Ω = 1,80). Modelo com 3 POMs. Carga brusca. ($\Gamma_{1CR\text{-}BRUSCO}$ = 1,06; $\Gamma_{1CR\text{-}GRADUAL}$= 1,13). $A_i(0) = \dot{A}_i(0) = 1 \times 10^{-4}$.

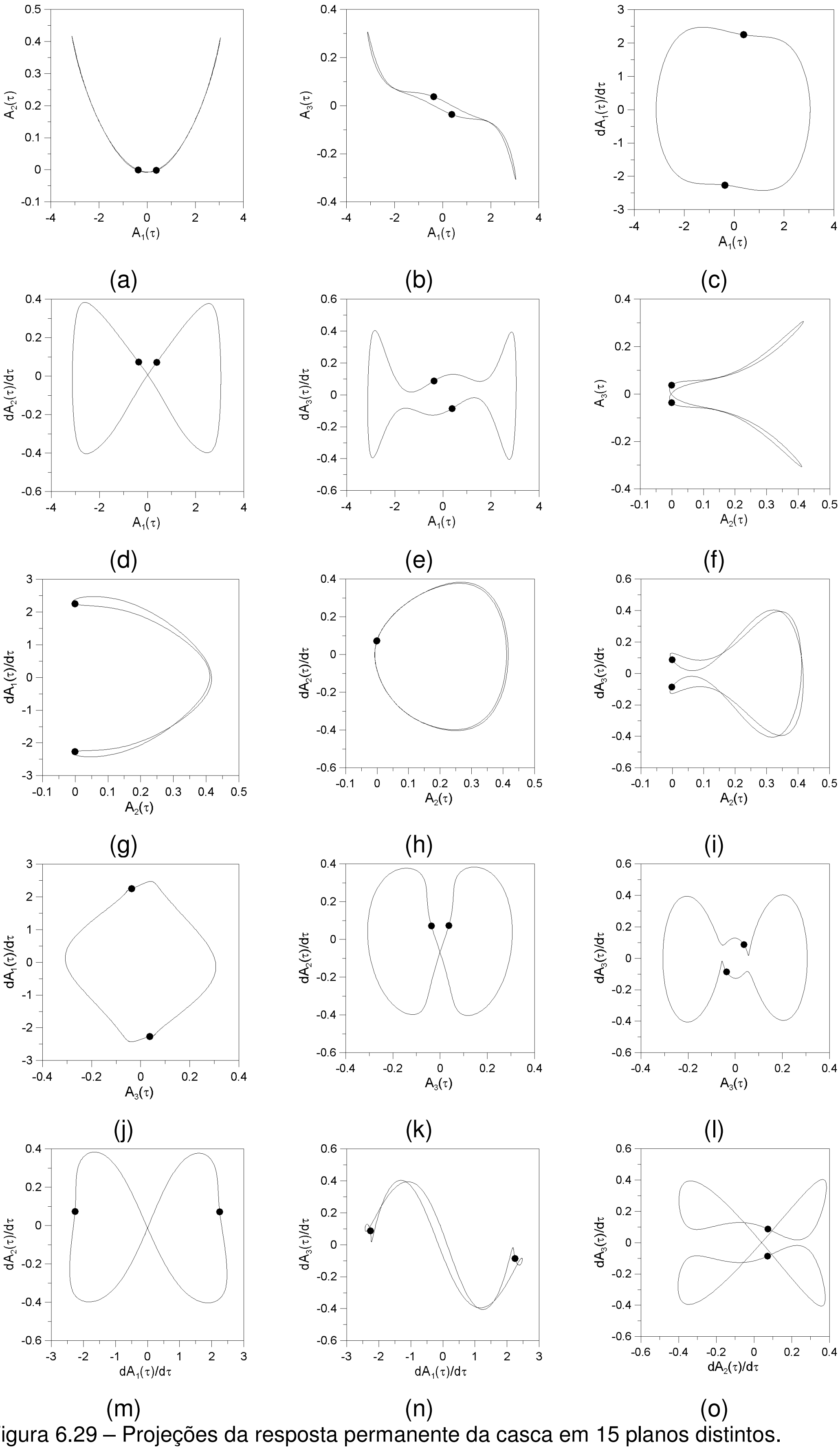


Figura 6.29 – Projeções da resposta permanente da casca em 15 planos distintos. (Γ_0 = 0,40, Γ_1 = 1,05, Ω = 1,80).

Na Figura 6.29 são apresentadas algumas projeções das órbitas permanentes nos demais planos de fase para uma casca cilíndrica vazia. O carregamento aplicado corresponde ao definido na Figura 6.28e. A estrutura está na eminência do escape.

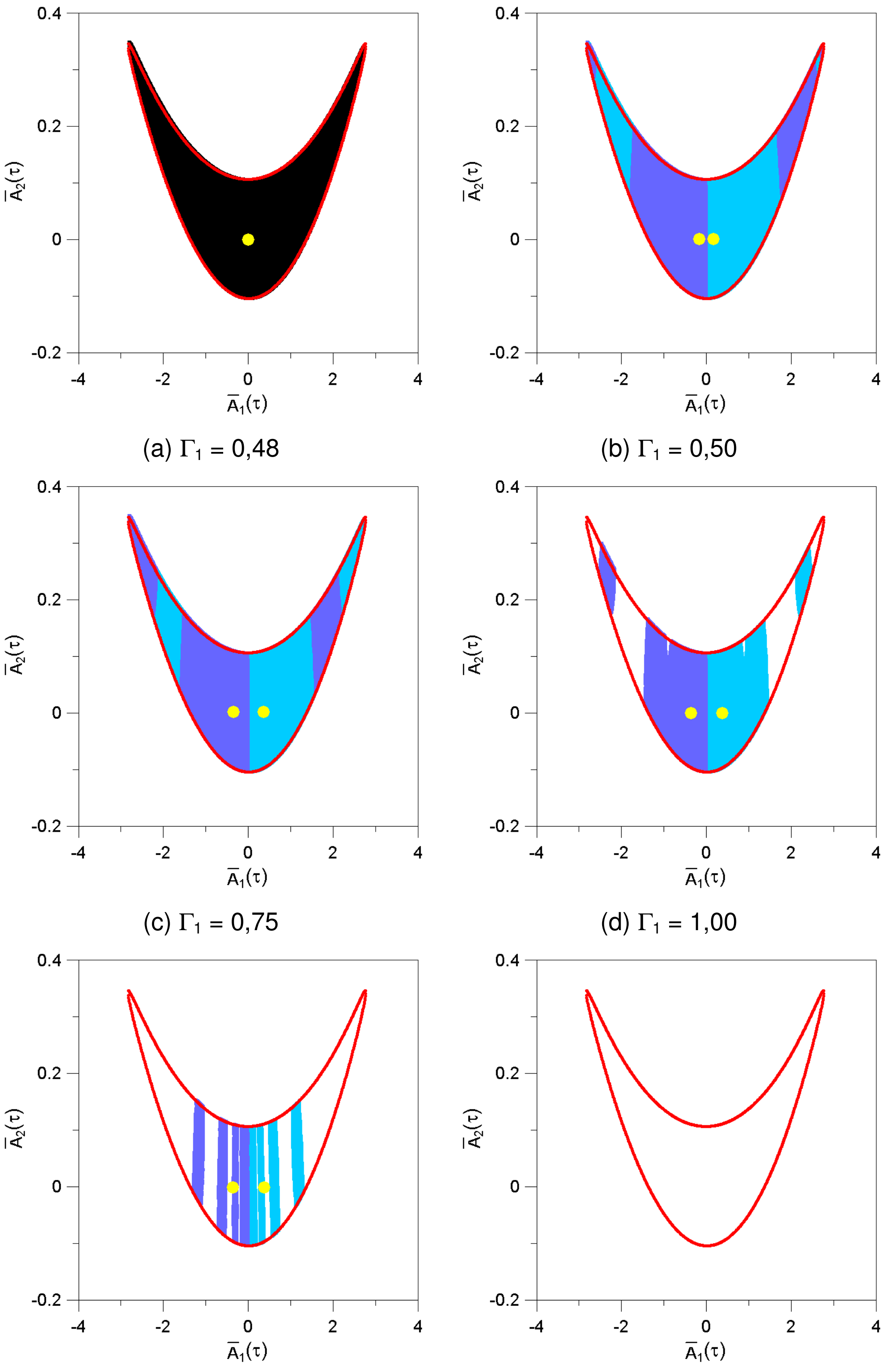
Novamente a região de interesse da bacia de atração pode ser definida a partir da equação (6.1). Procuram-se, desta maneira, todas as condições iniciais do sistema dinâmico que possuam, no regime permanente, atratores com energia total associada inferior ao nível de energia do ponto de sela.

A Figura 6.30 ilustra a variação da bacia de atração, em uma das secções da região de interesse, com o parâmetro Γ_1. Observa-se nesta figura que no modelo reduzido com 3 POMs a carga crítica em que ocorre a completa erosão da bacia de atração (Figura 6.30f) é a mesma identificada no diagrama de bifurcação Figura 6.24, ou seja, Γ_{CR} = 1,13.

A Figura 6.31 ilustra a variação da bacia de atração transiente na região de interesse. Observa-se, como no modelo anterior, que a erosão parte dos pontos de sela e segue em direção ao centro da região de segurança. A erosão total da região (Figura 6.31f) ocorre bem antes que no caso permanente (Figura 6.30f).

Dependendo do sistema dinâmico analisado, a obtenção do raio da hiper-esfera pode ser um processo computacionalmente trabalhoso, principalmente, para sistemas com muitos graus de liberdade, pois inicialmente não se sabe que trechos do diagrama de bifurcação contém janelas onde o raio é infinito. Também, o método da força bruta, ou o da continuação, não garante que todas as soluções estáveis fora do vale pré-flambagem foram identificadas, dificultando a determinação do raio máximo.

Para sanar estes problemas, pode-se pensar em definir um limite máximo para a pesquisa do raio da hiper-esfera, porém a decisão sobre esse limite não é trivial. Neste trabalho, propõe-se um método que independente do modelo multidimensional e das soluções que estão fora do vale pré-flambagem para a determinação do raio máximo da hiper-esfera. A idéia é semelhante ao critério para o traçado das bacias de atração no estado transiente, ou seja, procura-se o máximo raio da hiper-esfera que reúne o conjunto de condições iniciais que, durante o estado transiente e permanente, não possuam energia total superior à energia total do ponto de sela. Cria-se desta forma um critério misto entre o fator de integridade e o critério de energia.

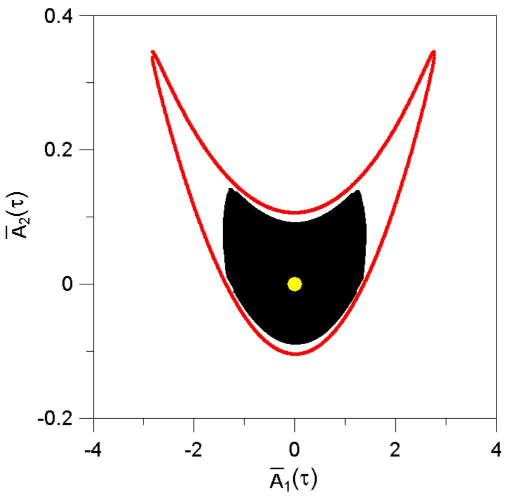


(a) Γ_1 = 0,48 (b) Γ_1 = 0,50

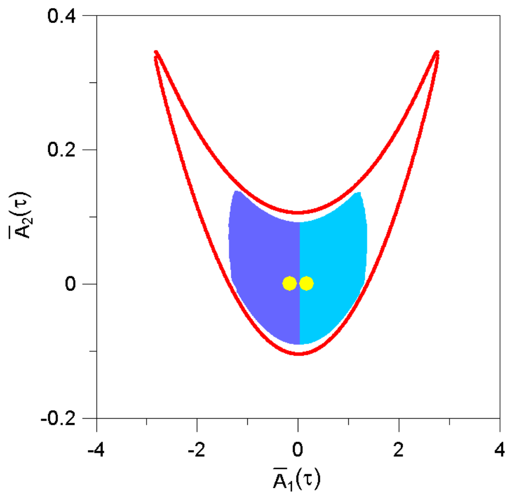
(c) Γ_1 = 0,75 (d) Γ_1 = 1,00

(e) Γ_1 = 1,05 (f) Γ_1 = 1,13

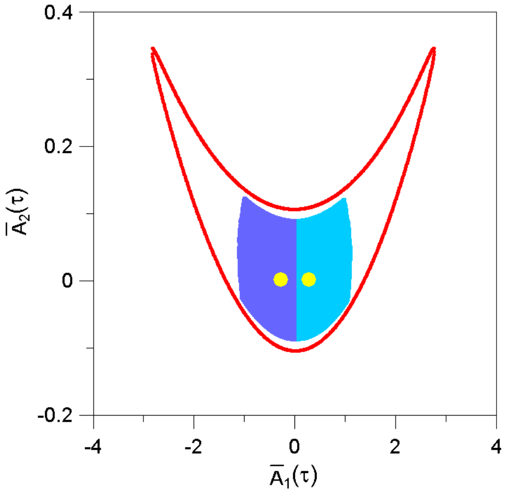
Figura 6.30 – Bacia de atração permanente para uma casca cilíndrica vazia na região do interesse do vale pré-flambagem. (Γ_0 = 0,40, Ω = 1,80). Modelo com 3 POMs.



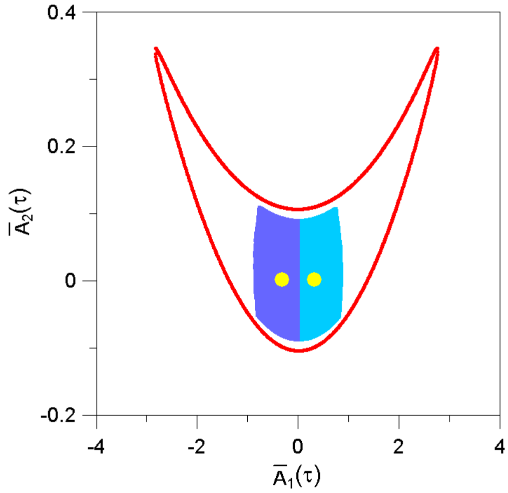
(a) Γ_1 = 0,48



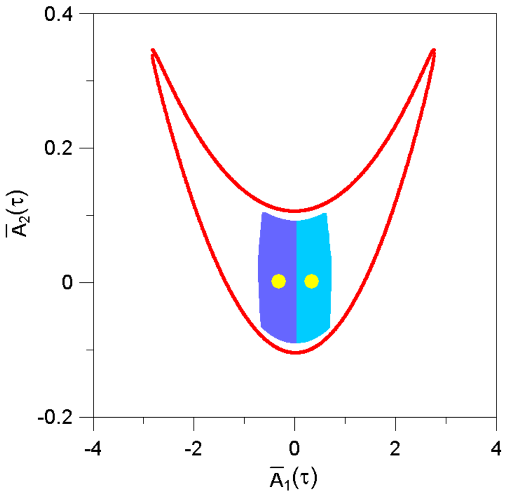
(b) Γ_1 = 0,50



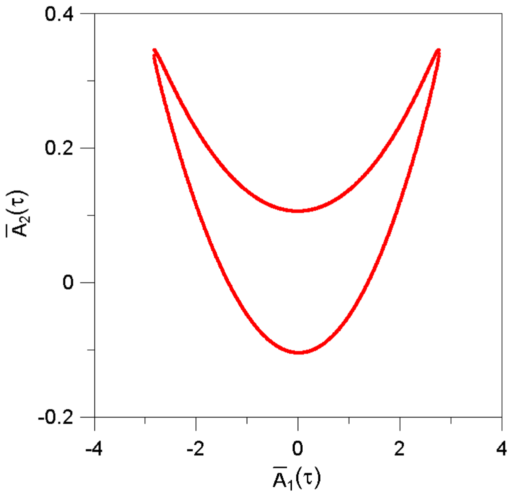
(c) Γ_1 = 0,55



(d) Γ_1 = 0,60



(e) Γ_1 = 0,62



(f) Γ_1 = 0,65

Figura 6.31 – Bacia de atração transiente para uma casca cilíndrica vazia na região de interesse do vale pré-flambagem. (Γ_0 = 0,40, Ω = 1,80). Modelo com 3 POMs.

A Figura 6.32 ilustra a variação do raio da hiper-esfera, segundo o critério misto proposto, para uma casca cilíndrica vazia. Observa-se que o máximo raio obtido é menor que os registrados na Figura 6.27, pois a hiper-esfera deve estar contida dentro do hiper-volume definido pela energia total do ponto de sela. Os resultados são mais conservadores, porém há uma redução significativa da amplitude de vibração do problema que, do ponto de vista estrutural, se torna vantajoso.

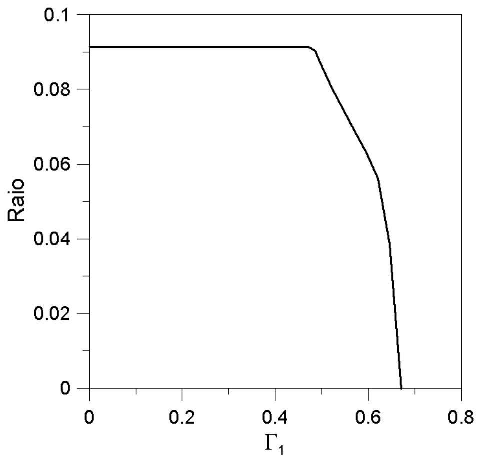


Figura 6.32 – Variação do fator de integridade misto da bacia de atração de uma casca vazia. (Γ_0 = 0,40, Ω = 1,80). Modelo com 3 POMs.

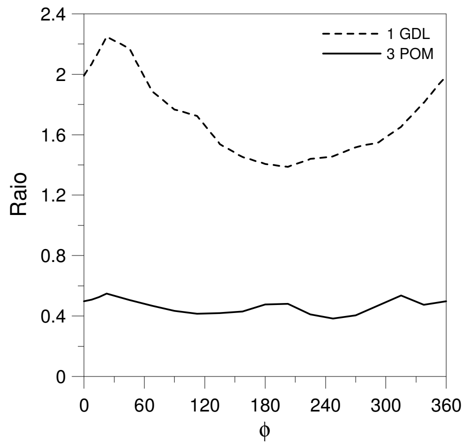


Figura 6.33 – Variação do fator de integridade de uma casca cilíndrica vazia com ângulo de fase. (Γ_0 = 0,40, Γ_1 = 0,80, Ω = 1,80). Comparação entre os modelos reduzidos com 1 GDL e com 3 POM.

Por fim, a Figura 6.33 ilustra a variação do fator de integridade com o ângulo de fase. Comparando esta figura com a Figura 6.18, observa-se que a variação do raio é completamente distinta sendo a faixa de variação menor que no caso anterior. Mas a variação entre os valores máximo e mínimo alerta para a importância da consideração do ângulo de fase na análise das bacias de atração.

6.3. Casca cilíndrica completamente cheia

Apresenta-se a seguir a análise da integridade de uma casca cilíndrica completamente cheia, a partir dos conceitos apresentados anteriormente para uma casca cilíndrica vazia.

6.3.1. Modelo com um grau de liberdade

Primeiramente avalia-se a integridade da casca completamente cheia a partir de um modelo com apenas um grau de liberdade. A Figura 6.34 ilustra o diagrama de bifurcação para um carregamento definido por Γ_0 = 0,40 e Ω = 0,90, representativo do ramo ascendente da região principal de instabilidade.

A Figura 6.35 apresenta a evolução da bacia de atração e do fator de integridade na região definida pela equação (6.1). Observa-se que o máximo raio fica totalmente contido na região de interesse da bacia de atração.

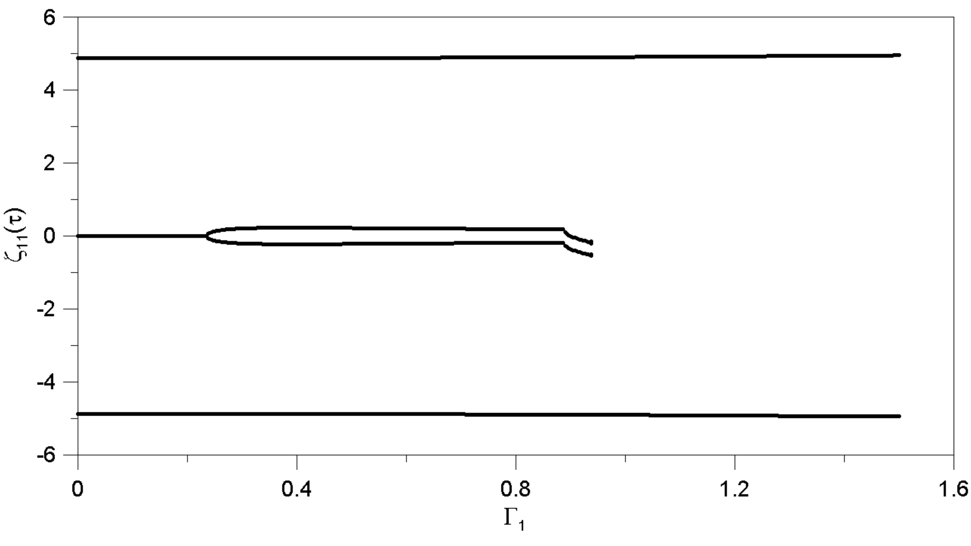
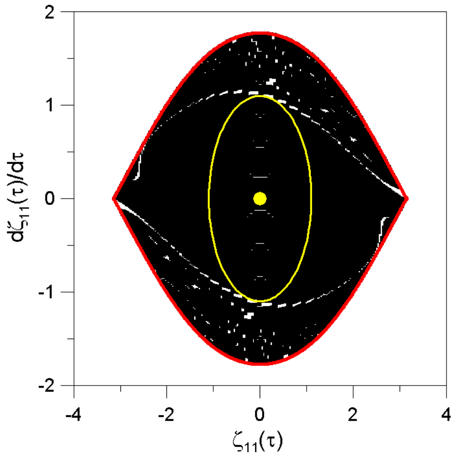
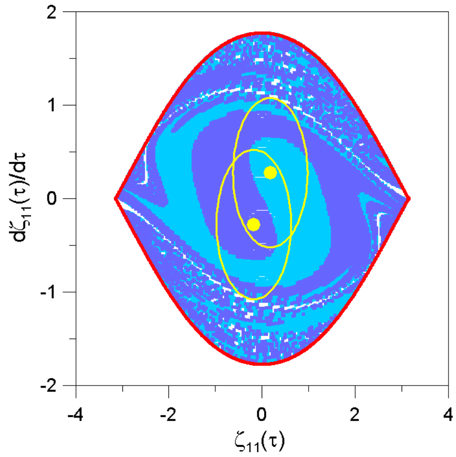


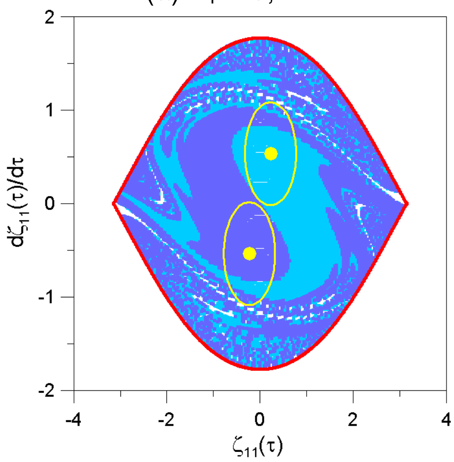
Figura 6.34 – Diagrama de bifurcação para uma casca cilíndrica completamente cheia. (Γ_0 = 0,40, Ω = 0,90). Modelo com 1 GDL.

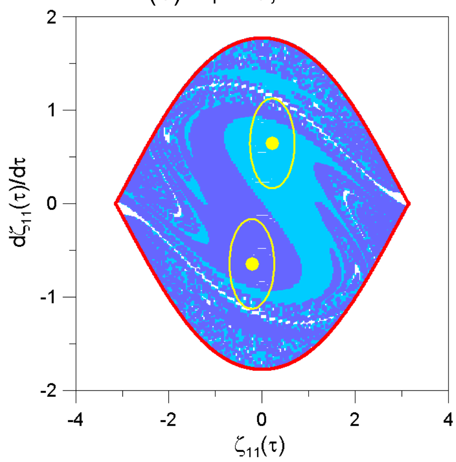
Nota-se na Figura 6.35 que os pontos fixos do mapa de Poincaré permanecem dentro da região de interesse da bacia de atração ao longo de toda a variação do parâmetro de controle do diagrama de bifurcação da Figura 6.34, ao contrário do que foi observado para a casca vazia. Observa-se, ainda, na Figura 6.35, que a região de interesse da bacia de atração é invadida por um atrator não pertencente ao vale pré-flambagem o que leva a uma redução acentuada do fator de integridade, como mostra a Figura 6.36.



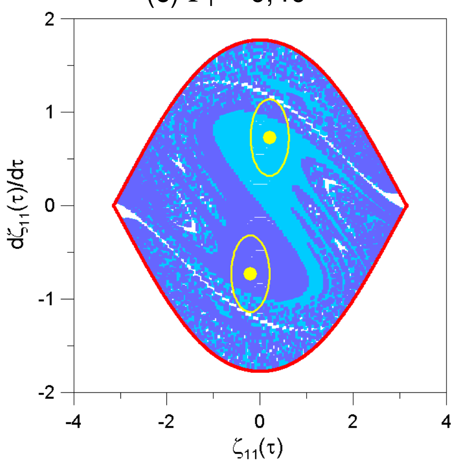


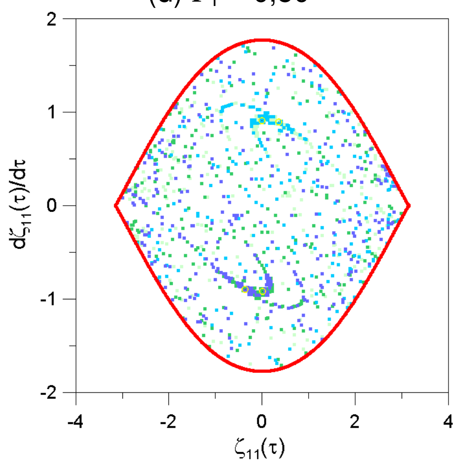
(a) Γ_1 = 0,22 (b) Γ_1 = 0,27





(c) Γ_1 = 0,40 (d) Γ_1 = 0,50





(e) Γ_1 = 0,60 (f) Γ_1 = 0,95

Figura 6.35 – Bacia de atração permanente para uma casca cilíndrica completamente cheia na região de interesse *versus* fator de integridade. (Γ_0 = 0,40, Ω = 0,90). Modelo com 1 GDL.

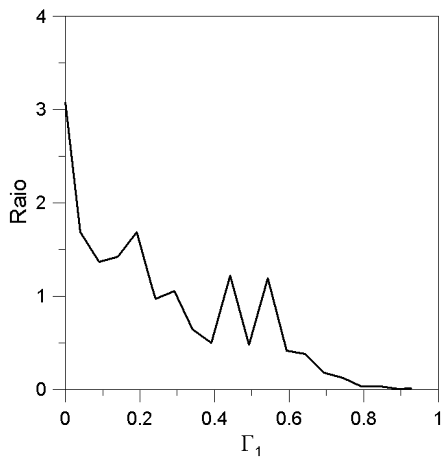
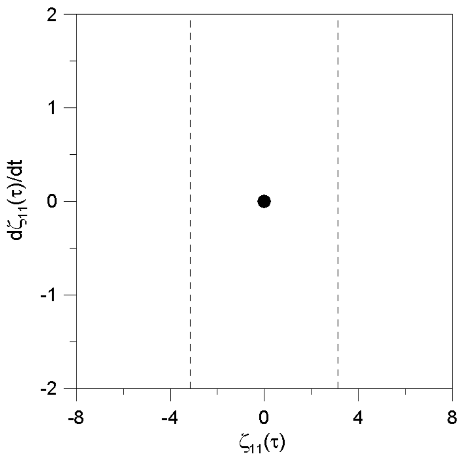


Figura 6.36 – Variação do fator de integridade bacia de atração da casca cilíndrica completamente cheia. (Γ_0 = 0,40, Ω = 0,90). Modelo com 1 GDL.

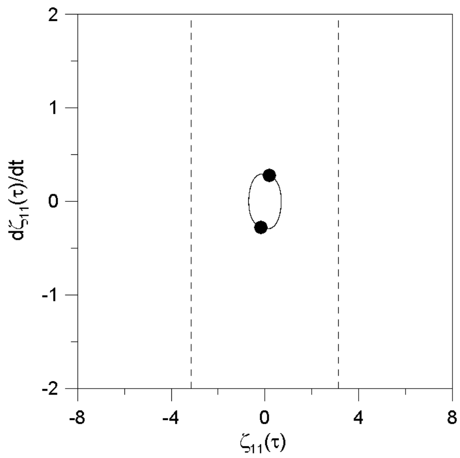
A Figura 6.37 apresenta a variação da resposta permanente com Γ_1 e sua relação com as coordenadas do ponto de sela do sistema com 1 GDL, representadas pelas retas verticais tracejadas. As coordenadas do ponto de sela para a casca cilíndrica completamente cheia são as mesmas já apresentadas para uma casca vazia. O meio fluido não as modifica, pois o ponto de sela está ligado à energia potencial do sistema e o fluido, segundo as considerações apresentadas no capítulo 3, modifica apenas a inércia da casca cilíndrica.

Na Figura 6.34 observa-se que a carga de escape para um carregamento gradual é Γ_1 = 0,96. Já a carga crítica de escape para carregamento brusco, como mostra a Figura 6.37f é Γ_1 = 0,75.

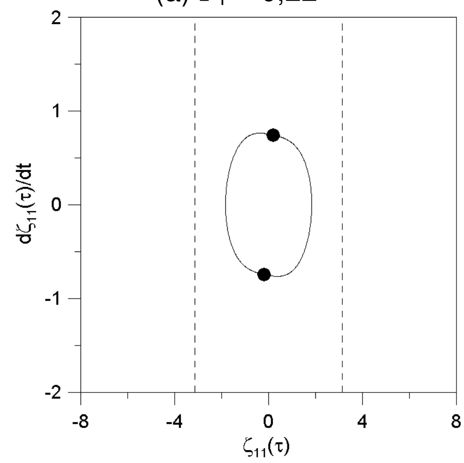
A Figura 6.38 ilustra a evolução das bacias de atração transientes. Como esperado, a bacia de atração transiente sofre uma erosão significativa a medida que Γ_1 cresce, devido à presença de atratores externos à região de interesse.



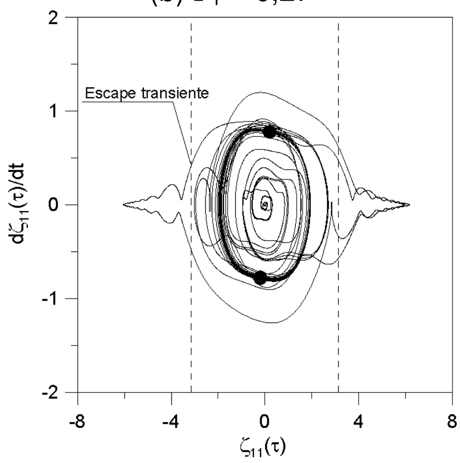
(a) Γ_1 = 0,22



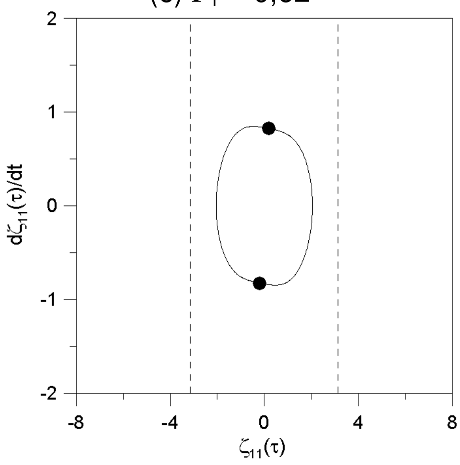
(b) Γ_1 = 0,27



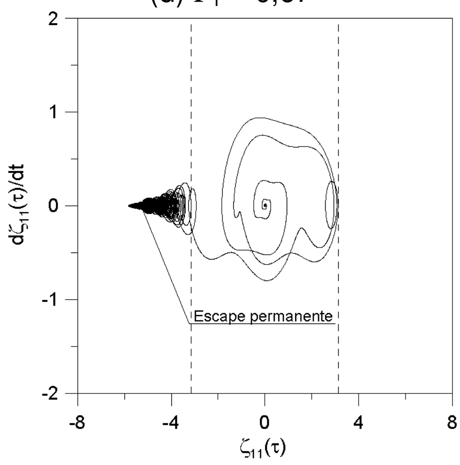
(c) Γ_1 = 0,62



(d) Γ_1 = 0,67



(e) Γ_1 = 0,74



(f) Γ_1 = 0,75

Figura 6.37 – Relação entre o plano de fase e a coordenada ζ_{11} do ponto de sela para a casca completamente cheia. (Γ_0 = 0,40, Ω = 0,90). $\zeta_{11} = \dot{\zeta}_{11} = 1\times10^{-4}$. Carga brusca. ($\Gamma_{1CR\text{-}BRUSCO}$ = 0,75; $\Gamma_{1CR\text{-}GRADUAL}$ = 0,96).

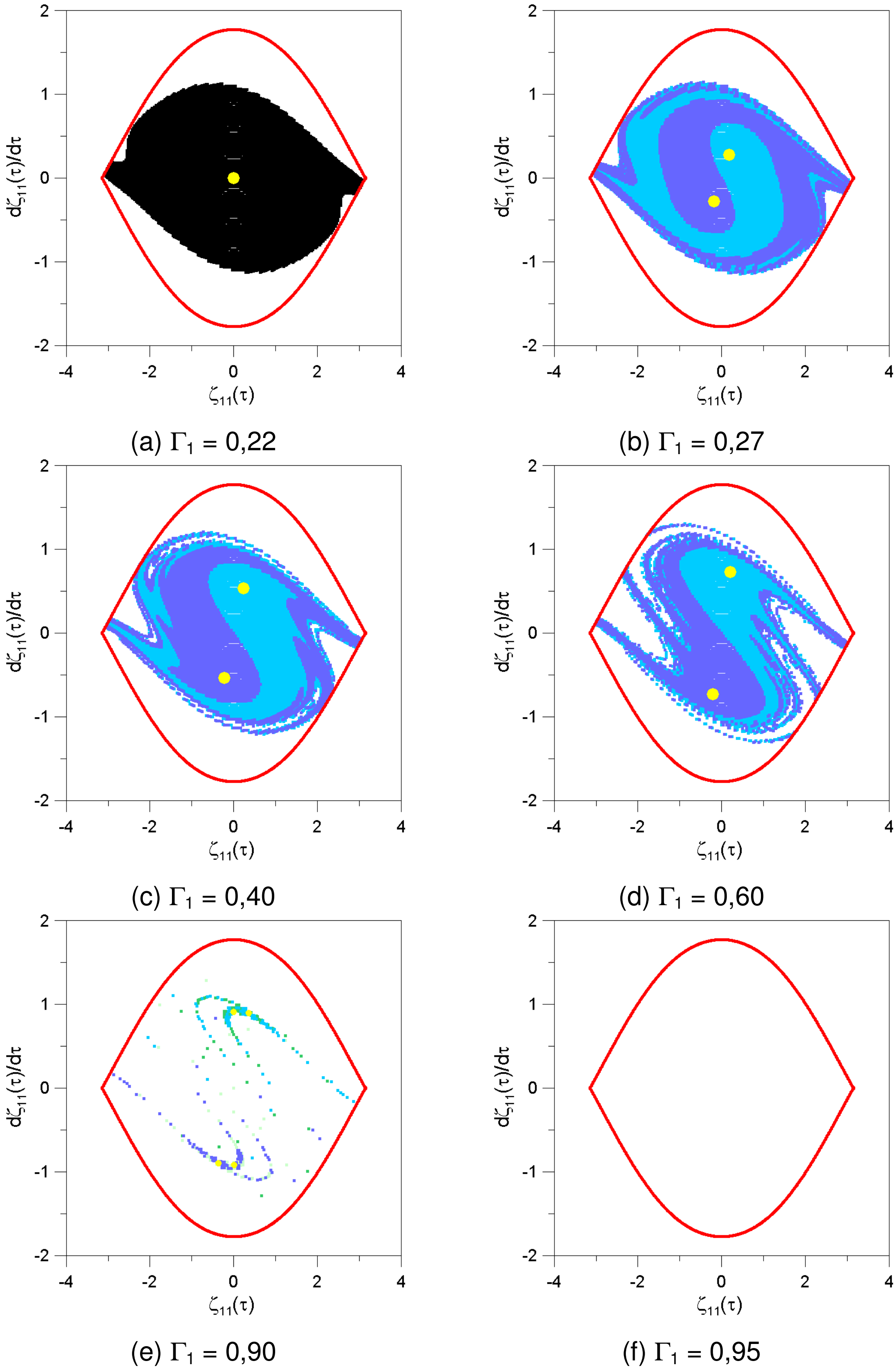


Figura 6.38 – Bacia de atração transiente para uma casca cilíndrica completamente cheia na região de interesse. (Γ_0 = 0,40, Ω = 0,90). Modelo com 1 GDL.

A Figura 6.39 apresenta a variação da área de interesse da bacia de atração, tanto no estado permanente quanto no transiente, com o parâmetro Γ_1. Os resultados são normalizados com relação à área inicial A_0. Nota-se que a erosão da área de interesse, no caso permanente, é gradual até $\Gamma_1 \cong 0{,}65$ e, a partir desse valor, torna-se mais acentuada.

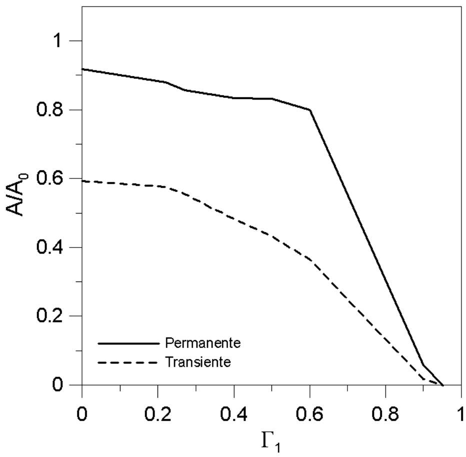


Figura 6.39 – Erosão da área da região de interesse da bacia de atração. (Γ_0 = 0,40, Ω = 0,90).

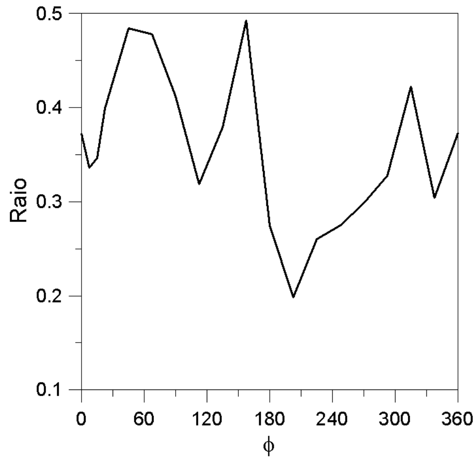


Figura 6.40 – Variação do fator de integridade de uma casca cilíndrica completamente cheia com o ângulo de fase. (Γ_0 = 0,40, Γ_1 = 0,60, Ω = 0,90). Modelo com 1 GDL.

Por fim, a Figura 6.40 apresenta a variação do fator de integridade da bacia de atração com o ângulo de fase do carregamento harmônico (Γ_0 = 0,40, Γ_1 = 0,60 e Ω = 0,90). Esta variação define o conceito da "verdadeira" área de segurança de uma bacia de atração, conforme Rega e Lenci (2005). Observa-se que ocorrem reduções da ordem de 50% no fator de integridade, ressaltando a importância de se analisar cada caso de carregamento para se estabelecer o caso crítico de operação da casca cilíndrica.

6.3.2. Modelo multidimensional

Para a análise da integridade da casca cilíndrica completamente cheia a partir de um modelo multidimensional, trabalha-se com o modelo reduzido a partir dos três primeiros POMs da expansão de Karhunen-Loève.

A Figura 6.41 apresenta o diagrama de bifurcação representativo do ramo ascendente da região principal de estabilidade da casca cilíndrica completamente cheia. As principais modificações que este modelo com 3 POMs apresenta em relação ao modelo com 1 GDL está nas soluções do vale pós-flambagem e nas soluções que cruzam os vales.

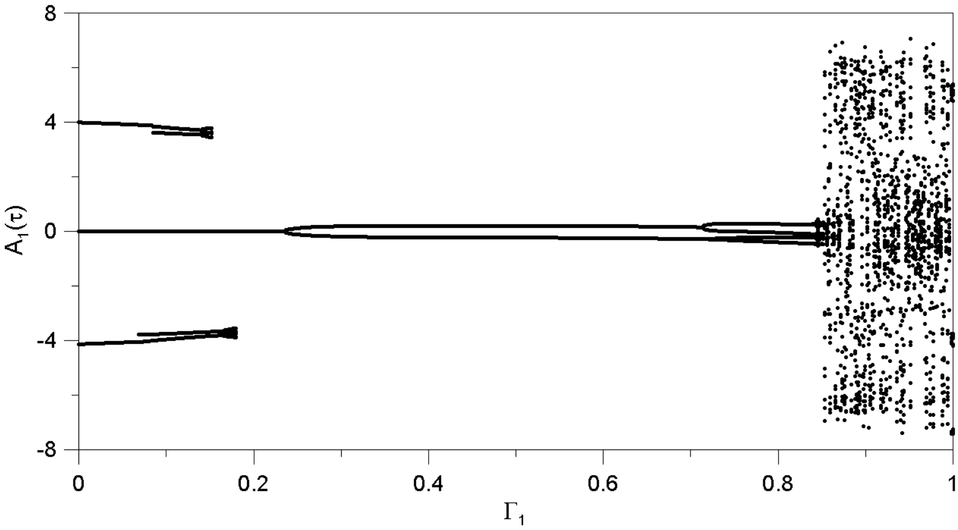


Figura 6.41 – Diagrama de bifurcação para uma casca cilíndrica completamente cheia. (Γ_0 = 0,40, Ω = 0,90). Modelo com 3 POMs.

Ao contrário da Figura 6.34, não são detectados, com este modelo, atratores externos às soluções do vale pré-flambagem para valores de Γ_1 superiores a, aproximadamente, 0,17. Indicando, desta maneira, que a área de bacia de atração nesta região é suficientemente grande para garantir que não haja o escape, como pode ser visto na variação do raio da hiper-esfera com o parâmetro de controle Γ_1, Figura 6.42. Do ponto de vista estrutural, a inexistência de atratores externos ao vale pré-flambagem não garante a integridade da estrutura em razão da possibilidade de respostas transientes de grande amplitude.

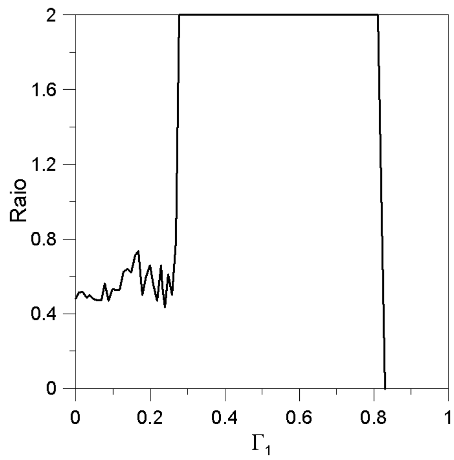


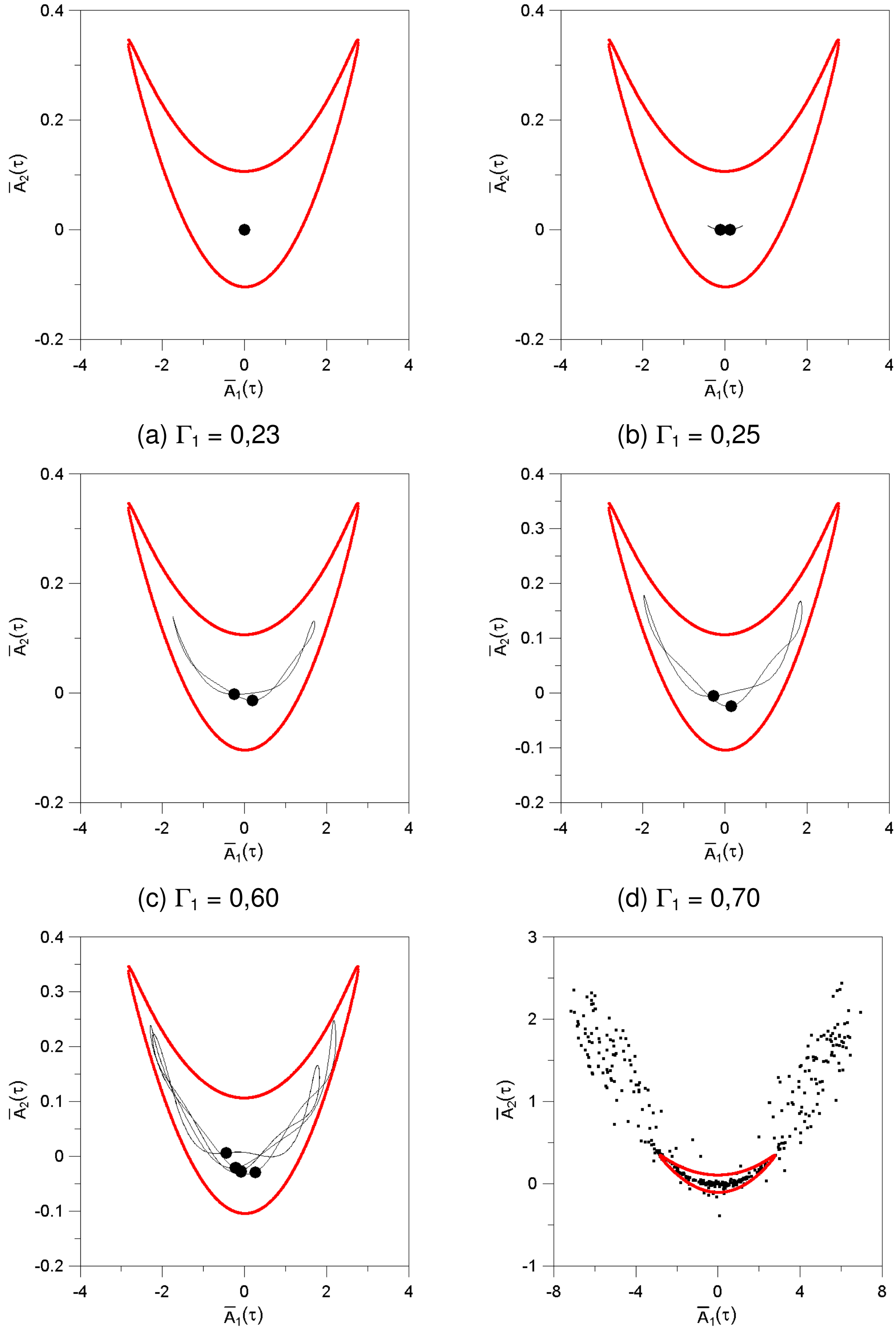
Figura 6.42 – Variação do fator de integridade da bacia de atração da casca completamente cheia. (Γ_0 = 0,40, Ω = 0,90). Modelo com 3 POMs.

A Figura 6.43 apresenta a variação da resposta permanente ao longo do diagrama de bifurcação da Figura 6.41. Os planos de fase foram construídos no plano auxiliar que contém as duas selas do modelo com 3 POMs, da mesma forma que a utilizada para a casca vazia, facilitando, desta maneira, a visualização.

Nota-se, na Figura 6.43, que os pontos fixos das secções de Poincaré são assimétricos como já observado no capítulo 5. A redução a partir da expansão de Karhunen-Loève não garante que o modo seja simétrico, pois o mesmo é uma soma de funções harmônicas. O fluido interno à casca acentua essa característica.

A Figura 6.44 apresenta as projeções da resposta permanente para Γ_0 = 0,40, Γ_1 = 0,83 e Ω = 0,90. Para esse carregamento, a casca está na iminência do escape. Nota-se que as órbitas permanentes apresentam uma forma complexa e que antes do escape a solução com periodicidade 2T sofre uma duplicação de período, passando a ter uma periodicidade 4T.

Para o estudo da integridade das bacias de atração, a região de interesse escolhida é a delimitada pelo nível de energia associado ao ponto de sela desse sistema com 3 POMs. A Figura 6.45 apresenta a variação da bacia de atração na região de interesse em função do parâmetro de controle Γ_1. Já a Figura 6.46 apresenta a variação das bacias de atração transientes.



(a) Γ_1 = 0,23 (b) Γ_1 = 0,25

(c) Γ_1 = 0,60 (d) Γ_1 = 0,70

(e) Γ_1 = 0,83 (f) Γ_1 = 0,85

Figura 6.43 – Projeção da resposta permanente no plano $\overline{A}_1(\tau)\times\overline{A}_2(\tau)$ para a casca completamente cheia. (Γ_0 = 0,40, Ω = 0,90). Modelo com 3 POMs. $A_i = \dot{A}_i = 1\times10^{-4}$. Carga brusca. ($\Gamma_{1CR\text{-}BRUSCO}$ = 0,84; $\Gamma_{1CR\text{-}GRADUAL}$ = 0,90)

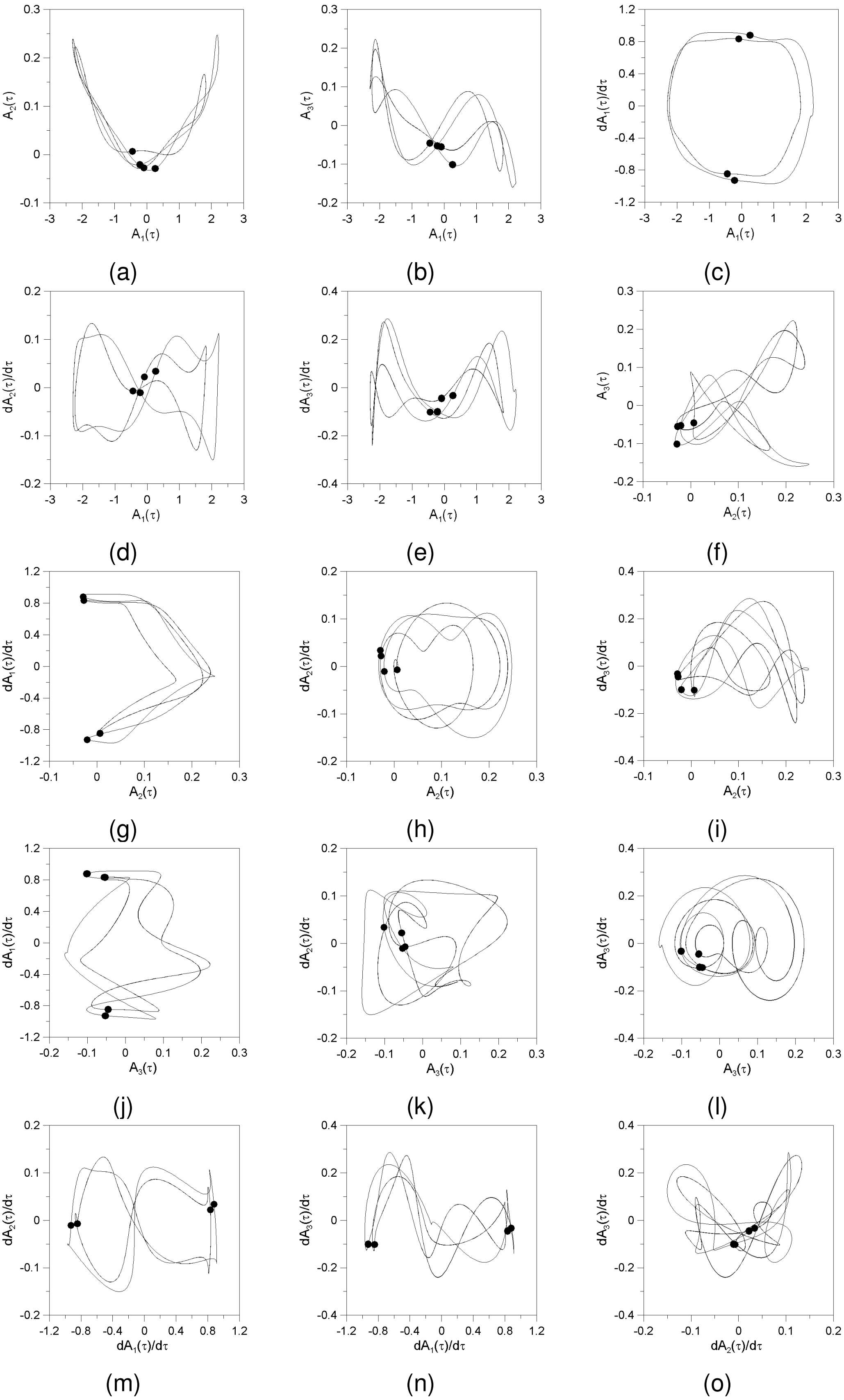
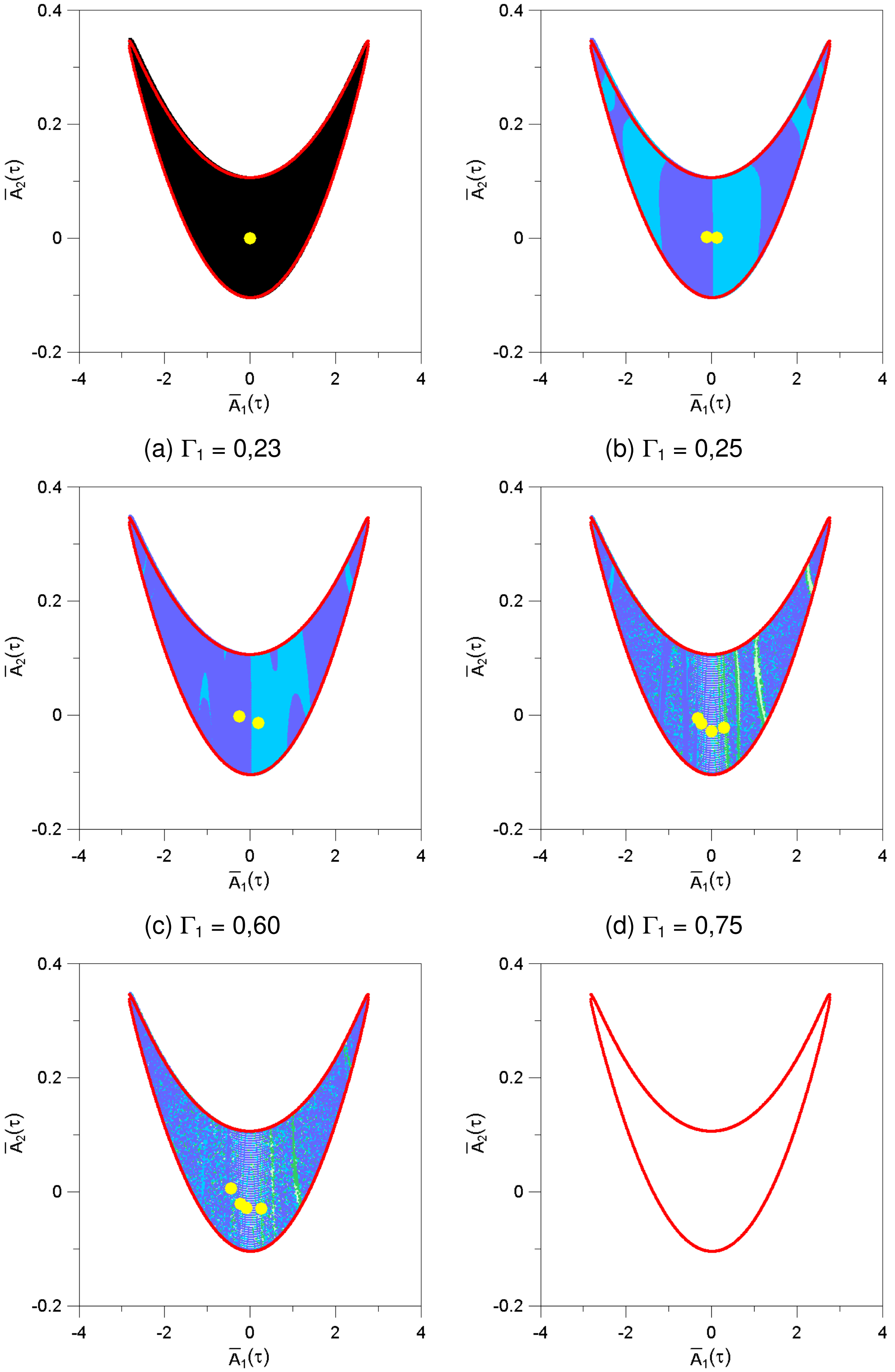


Figura 6.44 – Projeções da resposta permanente da casca completamente cheia. (Γ_0 = 0,40, Γ_1 = 0,83, Ω = 0,90).

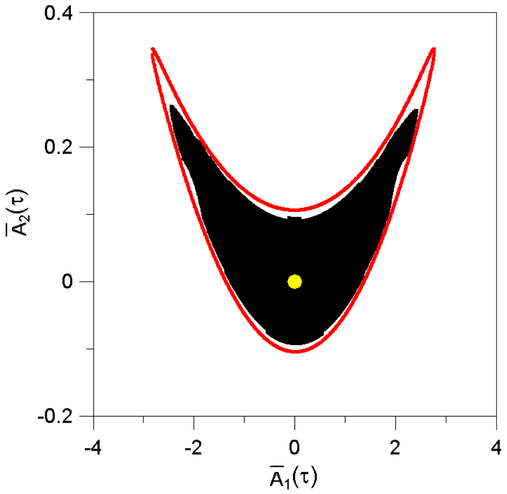


(a) Γ_1 = 0,23 (b) Γ_1 = 0,25

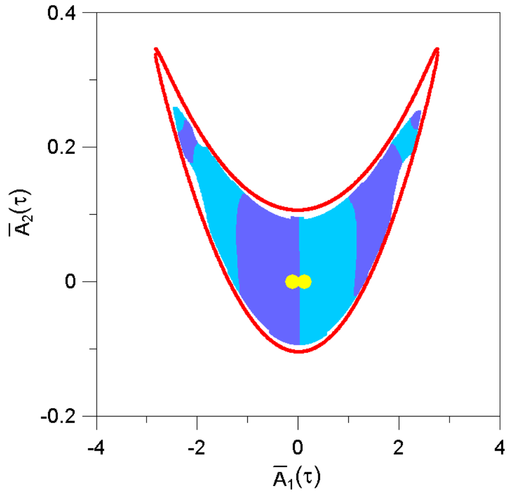
(c) Γ_1 = 0,60 (d) Γ_1 = 0,75

(e) Γ_1 = 0,83 (f) Γ_1 = 0,85

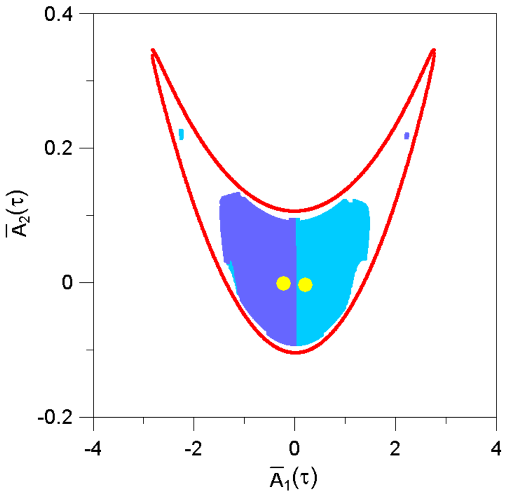
Figura 6.45 – Bacia de atração permanente para uma casca cilíndrica completamente cheia na região do vale pré-flambagem. (Γ_0 = 0,40, Ω = 0,90). Modelo com 3 POMs.



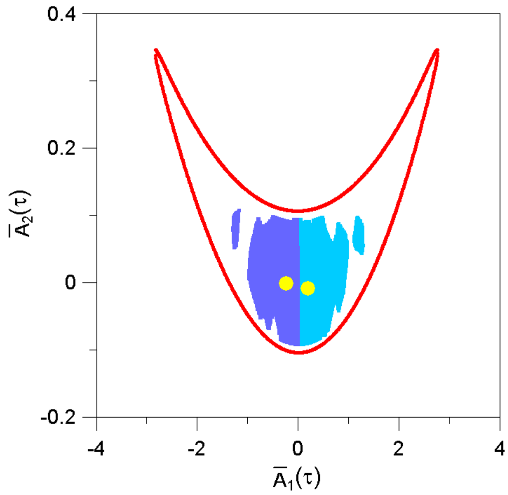
(a) Γ_1 = 0,23



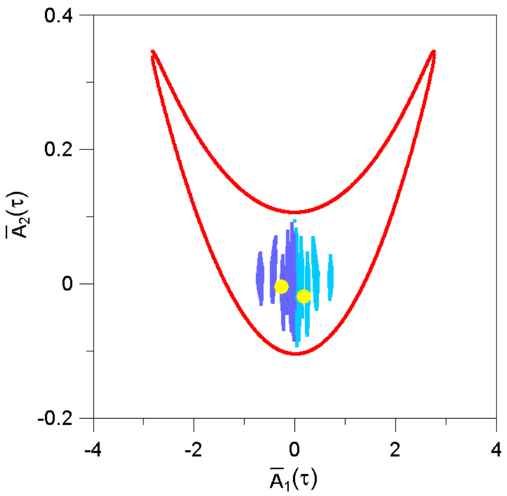
(b) Γ_1 = 0,25



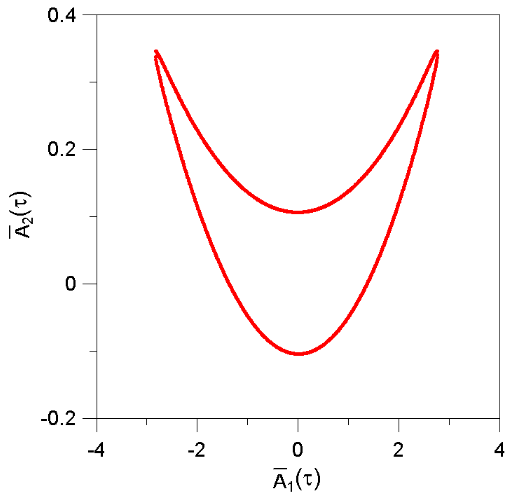
(c) Γ_1 = 0,45



(d) Γ_1 = 0,55



(e) Γ_1 = 0,64



(f) Γ_1 = 0,73

Figura 6.46 – Bacia de atração transiente para uma casca cilíndrica completamente cheia na região do vale pré-flambagem. (Γ_0 = 0,40, Ω = 0,90). Modelo com 3 POMs.

Como já observado anteriormente, o raio da hiper-esfera apresenta um salto repentino após o valor de Γ_1 igual a 0,17, garantindo que, mesmo para vibrações transientes de grande amplitude, não haverá escape do vale pré-flambagem. Para contornar esse problema, pode-se utilizar o critério misto que envolve o fator de integridade e o nível de energia delimitado pelo ponto de sela. A Figura 6.47 apresenta a variação do raio segundo esse critério para a casca cilíndrica completamente cheia.

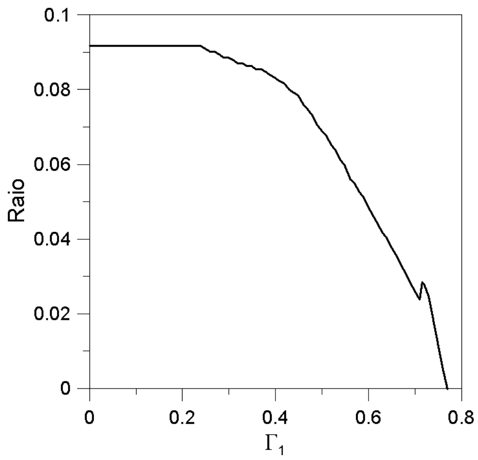


Figura 6.47 – Variação do fator de integridade misto da bacia de atração para uma casca cilíndrica completamente cheia com Γ_1. (Γ_0 = 0,40, Ω = 0,90). Modelo com 3 POMs.

Por fim, a Figura 6.48 apresenta a variação do raio da hiper-esfera com o ângulo de fase. Considera-se, também neste caso, o critério misto.

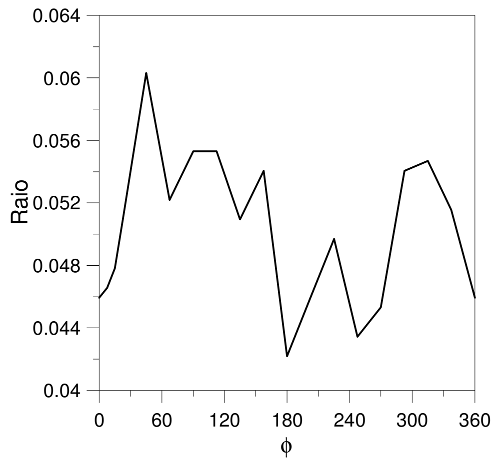


Figura 6.48 - Variação do fator de integridade misto de uma casca cilíndrica completamente cheia com ângulo de fase. (Γ_0 = 0,40, Γ_1 = 0,60, Ω = 0,90). Modelo com 3 POMs.