3
Fundamentos históricos e filosóficos do conhecimento matemático

3.1
De Euclides à Kant – por que a geometria seguiu soberana?

Como se origina o conhecimento? Quais são os seus limites? Como ele evolui? Como se alcança a verdade? Estas são questões que não podem ser respondidas de forma absoluta. Um determinado referencial teórico pode lhes conferir base de verdade e outro não. De maneira geral, implícitas às possíveis respostas sobre as questões colocadas, encontram-se as concepções sobre o conhecimento, o ensino e a aprendizagem, bem como as práticas pedagógicas, incluindo-se aí as práticas avaliativas.

A partir dos gregos, identifica-se, além de uma matemática utilitária, já existente anteriormente, uma matemática abstrata ou teórica. Tal concepção decorre do desenvolvimento de um pensamento abstrato, associado às práticas religiosas e rituais dessa civilização. Considera-se aí a origem de um modelo que dá surgimento às Ciências, a Filosofia e a Matemática abstrata. Essas duas formas de Matemática, uma utilitária e outra teórica, convivem desde então, atravessando o período do Império Romano e da Idade Média e chegando até os nossos dias.

Independente da corrente filosófica predominante ser o racionalismo, o escolasticismo ou o empirismo, a Geometria permaneceu inquestionável em seu estatuto. Pouco importava se a Razão determinava o conhecimento do mundo físico, ou se eram os nossos sentidos físicos os elementos fundamentais na apreensão das propriedades dos objetos físicos.

A geometria tratada até aqui, é aquela contida nos Elementos de Euclides (finais do séc. IV e princípios do séc. III A.C), a chamada Geometria Euclidiana.

A crença de que esta geometria revela verdades claras e indubitáveis sobre o universo, é referida por alguns, como Mito de Euclides. “Partindo de verdades evidentes, por si próprias e procedendo por demonstrações rigorosas, Euclides chega ao conhecimento certo, objetivo e eterno”. (DAVIS, P. 1985, p.366).

A filosofia clássica chega ao seu ápice no final do século XVIII quando Kant (1724-1804) apresenta suas concepções acerca do conhecimento, até então dominadas pelas idéias do Racionalismo e do Empirismo.

> Tanto os filósofos racionalistas como Leibniz, quanto os empiristas, como Hume, dividem as proposições em duas classes mutuamente exclusivas e que exaurem o universo das proposições: as analíticas, englobando as verdades da razão e as fatuais ou empíricas. Uns e outros concordam em que as proposições da Matemática são analíticas, reservando suas discordâncias para a interpretação que dão das proposições empíricas. (Machado, N. 1994, p. 24).

A abordagem kantiana se aproxima, pelas proposições analíticas, das duas correntes filosóficas discordantes, ao mesmo tempo em que apresenta de forma original uma definição de proposições sintéticas, atribuindo papel de destaque à Matemática, de forma diferenciada dessas duas correntes.

Assim, Kant recoloca a classificação das proposições, de tal forma que podem ser:

> (...) analíticas, isto é, aquelas cuja negação conduz a contradições e as não analíticas ou sintéticas (...). Até aqui, Kant não se afasta muito das classificações anteriores. **A sua proposta original consiste, justamente, na distinção de duas classes de proposições sintéticas: as que são empíricas, ou sintéticas a posteriori e as que não são empíricas, ou sintéticas a priori**. As proposições sintéticas a posteriori dependem, segundo Kant, da experiência sensível, para sua validação (...). Já as **proposições sintéticas a priori não dependem da percepção sensorial** para sua validação, **nem são analíticas (...)**. São proposições necessárias por constituírem a base, a condição de possibilidade de ciência, da experiência objetiva. Não se deixam reduzir a verdades lógicas (...) sendo, isto sim, o **canal de comunicação do sujeito pensante com o mundo físico.** (Ibidem). (grifos meus).

Portanto, Kant considerava que o verdadeiro núcleo da teoria do conhecimento se situa no terreno dos **juízos sintéticos *a priori***, ao mesmo tempo **universais** e necessários para enriquecer e fazer progredir o conhecimento.

Os objetos do mundo sensível situam-se no contexto espaço-temporal. Para Kant, é impossível conhecê-los sensorialmente, sem uma concepção inicial, ***a priori***, do espaço e do tempo que **se daria através da sensibilidade, para Kant, fruto de uma faculdade de intuição**.

> São duas as formas da sensibilidade: o espaço e o tempo. Kant analisa-as detidamente, procurando demonstrar como são **formas apriorísticas** e, portanto, **independentes da experiência sensível**. Para Kant, não é porque o sujeito cognoscente percebe as coisas como exteriores a si mesmo e exteriores umas às

> outras que ele forma a noção de espaço; ao contrário, é porque possui a noção de espaço como uma estrutura inerente à sua sensibilidade que o sujeito cognoscente pode perceber os objetos como relacionados espacialmente. Kant mostra ainda que **é possível abstrair todas as coisas que estão no espaço, não se podendo fazer o mesmo com o próprio espaço**. **A argumentação kantiana com relação ao tempo é fundamentalmente a mesma**. (Chauí, M. 1991, p.x). (grifo meu).

A Matemática refere-se ao tempo e ao espaço, pois:

> (...) nosso conhecimento do tempo é sistematizado na aritmética, que se baseia na **intuição da sucessão**. Nosso conhecimento do espaço é sistematizado na geometria. Para Kant, como para Platão, há somente uma geometria - a mesma que hoje chamamos de euclidiana (...). As verdades da geometria e da aritmética se nos impõem pela maneira como funciona nossa mente. (Davis, P. 1985, p. 370). (grifo meu).

Assim, "**a Matemática, enquanto se refere ao espaço e ao tempo. é constituída de proposições sintéticas *a priori*** e não analíticas, como anteriormente era considerada. (...) Trata-se, sem dúvida de uma posição singular, a da Matemática na concepção de Kant. Ela se refere à realidade concreta, mas utiliza para apreendê-la, preconceitos a respeito do espaço e do tempo (...)". (Machado, N. 1994, p. 25). (grifo meu).

De forma idêntica, "Poincaré defendeu que as leis aritméticas são juízos sintéticos e a priori pela razão de que se fundam na intuição pura do princípio de indução completa que ele considerava como uma lei matemática e não uma lei lógica". (DINES, Z. P., 1974, p.70).

Kant defende que os **juízos sintéticos *a priori*,** ou o acesso às matrizes invariantes e permanentes referentes ao espaço-tempo que permitem a nós a apreensão do mundo, **não se dá através dos sentidos,** mas da **razão introspectiva**. Isso justificaria porque as verdades geométricas e aritméticas são válidas para todos, independentemente da experiência. As intuições do tempo e do espaço, sobre as quais se baseiam a aritmética e a geometria, possuem sua existência vinculada à mente humana.

A concepção kantiana do *a priori*, bem como da posição singular que ocupa a Matemática nesta concepção constituíram-se numa influência dominante na filosofia matemática, servindo de base para as três escolas de fundamentos estabelecidas a partir da segunda metade do século XIX, chegando ao século XX.

3.2
A crise dos fundamentos

O mito de Euclides permaneceu firme, servindo de base sólida, tanto a filósofos quanto a matemáticos, até boa parte do século XIX. Entretanto, o desenvolvimento das geometrias não-euclidianas, demonstrando a existência de mais de uma geometria possível, e da análise Matemática - o cálculo e suas vertentes - ultrapassando a intuição da geometria euclidiana, colocaram em cheque o alicerce sólido da Matemática. “(...) a perda da certeza na geometria foi filosoficamente intolerável, pois implicou na perda de toda a certeza no conhecimento humano. A geometria tinha servido, desde Platão, como exemplo supremo da possibilidade dessa certeza”. (Davis, P. 1985, p. 372).

Assim, os matemáticos do século XIX enfrentaram este desafio deslocando da geometria para a aritmética a busca por novos fundamentos. Neste sentido, foram apresentados três métodos, por Dedekind, Cantor e Weierstrass. O que caracterizava, de forma comum, os três métodos era a necessidade de se utilizar algum conjunto infinito de números racionais no esforço de se reduzir a análise e a geometria à aritmética. Neste sentido, Cantor desenvolveu a teoria dos conjuntos, sobre a qual poderia ser construída toda a Matemática. (idem).

A teoria dos conjuntos confundiu-se, no início, com a própria Lógica, compreendida neste contexto como as leis fundamentais da razão, o pilar do universo. Neste sentido, a lei da contradição e as regras de implicação são consideradas como necessárias e indubitáveis. Esta tese logística foi elaborada e defendida por Bertrand Russell e Whitehead, na obra Principia Matematica, na qual pretenderam demonstrar que as leis da aritmética, como de resto toda a Matemática derivam das leis da lógica. (Davis, P. 1985, p. 373)

Assim, quando tudo se encaminhava para que toda a Matemática pudesse reduzir-se aos fundamentos da Teoria dos Conjuntos, dá-se um novo revés. O próprio Russell descobre que a noção dos conjuntos, aparentemente clara, levava a contradições, dentre as quais, uma das mais notáveis é conhecida como paradoxo de

Russel[6]. “As controvérsias do fim do século dezenove e do início do século vinte ocorreram devido à descoberta das contradições na teoria dos conjuntos”. (Idem).

Estabelece-se, assim, a chamada "crise dos fundamentos" que se transforma na questão central no interior das importantes controvérsias do início do século XX. Na tentativa de restabelecer credibilidade aos fundamentos da Matemática, surgiram três escolas principais: o Logicismo, o Intuicionismo ou Construtivismo e o Formalismo.

O Logicismo tem em Leibniz um importante representante, na medida em que ele utiliza o cálculo lógico como instrumento indispensável ao raciocínio dedutivo que empreende. Russell, Frege, assim como quase todos os lógicos modernos, defendem o princípio de que a análise de uma proposição pode ser demonstrada utilizando-se as leis gerais da lógica.

A tese logicista contida na obra fundamental de Russell e Whitehead - Principia matemática - continha situações embaraçosas, como o paradoxo de Russell, que no início do século XX causaram um enorme incômodo às convicções logicistas. Neste sentido, Russell desenvolve novos axiomas no intuito de viabilizar uma nova lógica para dar à Matemática um suporte seguro.

Essa estratégia foi amplamente contestada sob a acusação de ser um remendo no sentido de tentar excluir o mal detectado nos paradoxos. Além disso, considerou-se que possuía uma estrutura complicada que não se identificava com a lógica no sentido filosófico ou universal.

Após o logicismo, surge outra grande escola denominada de Construtivismo ou Intuicionismo. Sua concepção tem raízes em Kant e surge em torno de 1908 a partir das concepções de L. E. J. Brouwer, um de seus representantes mais típicos. Para Brouwer, que aceita o caráter apriorístico das proposições relativas ao tempo e ao espaço, toda a Matemática decorria de uma construção em um número finito de procedimentos, a partir dos números naturais, que são dados a nós por uma intuição fundamental. É esta intuição, resultante da introspecção, a responsável por evidenciar a verdade das proposições Matemáticas e não a observação direta dos objetos externos. Assim, a Matemática é “uma

[6] Este paradoxo ou antinomia é semelhante ao Paradoxo do Barbeiro: “o barbeiro é aquele que barbeia os homens que não se barbeiam a si próprios”. O paradoxo advém ao perguntar se o barbeiro se barbeia a si próprio. (Nagel & Newman, 2003).

construção de entidades abstratas, a partir da intuição do matemático, e tal construção prescinde de uma redução (...) à Lógica ou uma formalização rigorosa em um sistema dedutivo". (Machado, N. (1994), p. 40).

Neste sentido, os entes matemáticos devem ser construídos passo a passo e, portanto, não existe, em relação a eles, uma perspectiva platônica ou empírica. O princípio básico da construtibilidade implica em que a lei do terceiro excluído[7] seja rejeitada. Este fato justificaria, de forma diferente da de Russell, os paradoxos encontrados nas proposições logicistas, pois, para os construtivistas, a construção de enunciados dotados de sentido não implica em que estes sejam verdadeiros ou falsos.

A concepção construtivista apresenta-se como uma ameaça à maioria dos matemáticos que, como Hilbert, achava que uma reforma da Matemática por este viés deformaria a ciência, colocando a perder muitas das preciosidades que se tinha alcançado. Assim, Hilbert passa a defender a Matemática clássica dos ataques construtivistas, propondo para isso a demonstração rigorosa de sua consistência por raciocínios de natureza puramente finita.

O Formalismo também tem em Kant as suas raízes, pois considera os teoremas como decorrentes dos axiomas, de acordo com as leis da lógica. Os axiomas não são, por sua vez, princípios lógicos ou conseqüências destes, mas entes decorrentes da estrutura de dados da percepção sensível do espaço e do tempo. Neste sentido, ao contrário de propor a redução da Matemática à lógica como queriam os logicistas, o formalismo propõe que a lógica assuma proporções de método que legitimaria a inferência em quaisquer conteúdos.

Hilbert adotou a concepção kantiana na proposta de seu programa formalista que, grosso modo, consistia em descrições de objetos e construções concretas, não lógicas; a teorização formal dessas construções e objetos utilizando a Lógica como instrumento fundamental, e o estabelecimento de teorias formais consistentes, cada vez mais abrangentes, até a formalização completa da Matemática.

[7] A lei do terceiro excluído afirma que uma proposição ou sua negação é verdadeira e assim a aceitabilidade de provar que um objeto matemático existe mostrando que sua não existência implicaria uma contradição. Formalistas, tais como Hilbert, não consideram essas provas como problemáticas; construtivistas, notadamente L. E. Brouwer, se recusam a empregá-las, pelo menos para conjuntos infinitos.

Quando se deu o desenvolvimento bem sucedido das geometrias não-euclidianas, os sistemas matemáticos formais passam a adquirir um caráter de jogo em que as peças perdem a importância e não fazem mais sentido para o jogador. Isto se dá pelo fato dessas geometrias não se referirem mais ao mundo empírico ou mesmo ao platônico.

Tal fato leva a uma reorientação do eixo de legitimação das teorias formais que se desloca de um suposto isomorfismo com o mundo empírico para uma independência em relação a este. Passa-se a exigir apenas que a consistência de uma proposição formal refira-se à impossibilidade simultânea de sua demonstração e à de sua negação. Ao mesmo tempo, uma teoria formal é considerada completa se toda a fórmula decorrente das regras inicialmente estabelecidas é um teorema ou a sua negação.

As pretensões formalistas de um sistema consistente e completo que englobasse toda a Matemática foram colocadas por terra quando, por volta de 1930, Kurt Gödel publica um artigo esclarecendo que, em grande parte dos sistemas formais, podem-se construir proposições bem-formadas, em relação às quais não se pode deduzir se são falsas ou verdadeiras: “uma destas proposições, bastante conhecida, é o chamado "Teorema de Goldbach", que estabelece que todo número par é a soma de dois números primos”. (Machado, N. 1994, p. 36). Não há, até hoje, prova bem sucedida para tal conjectura apesar dela demonstrar-se verdadeira.

3.3
A hegemonia do formalismo lógico

Como a Matemática formal não é considerada como ciência, visto que não tem objeto de estudo, ela passa a servir como estrutura para as outras ciências, sendo utilizada como linguagem. Neste sentido, uma das razões para a hegemonia do formalismo matemático foi sua ligação ao positivismo lógico, tendência dominante na filosofia da ciência, durante os anos 40 e 50 do século XX, que preconizava uma ciência unificada pela codificação em um cálculo lógico formal com um único método dedutivo.

Apesar do positivismo lógico não ser mais a corrente dominante na filosofia da ciência que encontra em trabalhos como os de Karl Popper uma alternativa histórico-crítica à altura, o mesmo não se dá como efeito na filosofia da Matemática. A influência de Russel, Frege e Wittgenstein deixou a herança de uma filosofia analítica que preconiza a análise e a lógica como elementos centrais.

O exemplo mais importante da disseminação da idéia do formalismo matemático foi a obra de Bourbaki[8], um grupo de matemáticos cujo objetivo era o de conceber toda a matemática clássica em bases estritamente axiomáticas e estruturais. Esta obra foi composta por uma série de textos produzidos em nível de pós-graduação sobre a teoria dos conjuntos, a álgebra e a análise, nos anos 1950 e 1960. A herança formalista da Matemática viabilizou-se, no seu ensino, para níveis mais elementares sob o nome de "Matemática Moderna".

Importante ressaltar que, de forma semelhante às atuais reformas educacionais em decorrência das transformações que ocorrem pelo avanço do desenvolvimento tecnológico, numa economia globalizada, o movimento da matemática moderna ganhou força naquele contexto, especialmente a partir do lançamento do primeiro satélite artificial pela União Soviética. Assim, aumentou a pressão para a modernização do ensino da Matemática e das Ciências.

A nova abordagem escolar deveria apresentar a matemática de forma unificada, recorrendo, para isso, à linguagem dos conjuntos e privilegiando o papel das estruturas algébricas. Também como nas atuais reformas, para respaldar cientificamente a nova proposta e substituir a "velha", argumentava-se que seus pressupostos correspondiam à essência do próprio conhecimento matemático (baseando-se no matemático inglês Boole, por exemplo), além de se apoiarem em destacadas investigações psicológicas (especialmente em Piaget) sobre os processos mentais.

Entretanto, já nos primeiros anos da década de 1960 começam a aparecer manifestações contrárias a este movimento. A ênfase nas estruturas algébricas e nas axiomatizações teria levado muitos professores a se sentirem em dificuldades para ensinar, por exemplo, os conteúdos geométricos. Em muitos países o formalismo e a ênfase na linguagem foram levados a extremos.

No início dos anos setenta ocorre um forte movimento de crítica à Matemática moderna nos Estados Unidos, depois na França e outros países.

[8] "Bourbaki é um personagem fictício, adotado por um grupo de jovens matemáticos franceses em 1928, que se reuniram num seminário para discutir e propor avanços da matemática em todas as áreas." (D´AMBRÓSIO, 1996, p.54)

Diante do declínio dos resultados escolares dos estudantes, começou-se a reclamar o regresso à ênfase em competências básicas. Um importante ícone deste movimento foi Morris Kline, um matemático prestigiado que escreveu um livro, em 1973, intitulado *Why Johnny can't add: The failure of the new math.*

No Brasil é publicado em 1976 "O Fracasso da Matemática Moderna", onde Kline salienta que "Os líderes da Matemática Moderna não se satisfazem com uma abordagem dedutiva da Matemática. Desejam apresentar um desenvolvimento dedutivo rigoroso". (p.72). Critica, ainda, o fato de que tornaram a geometria muito rigorosa e axiomática, o que acabou afastando os jovens, em vez de aproximá-los.

Segundo Soares (2001), a geometria ensinada no Brasil continuava sendo a euclidiana embora utilizando a linguagem dos conjuntos, o que levava professores a observarem seus estudantes confusos com essa abordagem.

Por outro lado, Osvaldo Sangiorgi, um dos introdutores e maiores defensores da Matemática moderna no Brasil, reconhece ainda na década de 70 que esse movimento não produziu o efeito esperado: "não se sabe mais calcular áreas de figuras geométricas planas muito menos dos corpos sólidos que nos cercam" (apud Soares, 2001, p. 87).

Alguns autores atribuem o insucesso desse movimento não tanto ao seu conteúdo, tão criticado, mas ao excesso de radicalismo com que foi implantado e pelas interpretações errôneas que geraram improvisação ou exagero.

D´Ámbrósio (1996), por exemplo, lamenta que tudo o que se fala de matemática moderna no Brasil é negativo. Ressalta que, "sem dúvida, foi um movimento da maior importância e que os desacertos muito naturais e esperados foram explorados e sensacionalizados pelos "mesmistas" e a matemática moderna foi desprestigiada e combatida". (p.54).

Neste sentido, em nossa opinião ainda restam dúvidas a serem pesquisadas e esclarecidas quanto ao impacto do movimento de crítica à matemática moderna na contínua diminuição de suas idéias no ensino de Matemática. Teriam sido suas propostas de fato um completo equívoco a ponto de levá-las ao fracasso? Teriam sido os referidos "naturais desacertos" desta proposta explorados no sentido de derrotá-la em detrimento de importantes contribuições? Do meu ponto de vista, possivelmente tenha havido os dois movimentos concomitantes, como, aliás, vemos atualmente em relação às reformas educacionais consolidadas nos projetos governamentais e muitas vezes pouco articuladas no cotidiano das escolas.

3.3.1 Dos anos 1980 aos tempos atuais e as lições apreendidas do passado

Nos anos 80 se deu um novo e intenso movimento de reforma do ensino da Matemática cujo início é marcado pela publicação da *Agenda for action* do NCTM (1980), manifesto onde se proclama a resolução de problemas como o foco da Matemática escolar. Em seguida, surgiram relatórios, conferências e projetos nos quais a resolução de problemas ocupa lugar destacado. Um dos documentos mais importantes, *Normas para o currículo e avaliação da matemática escolar*, também do NCTM (1989/1991), salienta que o principal objetivo da Matemática escolar é levar o estudante a desenvolver o seu poder matemático.

As novas orientações curriculares propostas nas últimas décadas no panorama nacional e internacional valorizam principalmente quatro idéias: 1) a natureza das competências matemáticas merece atenção especial no processo de ensino-aprendizagem; 2) o impacto das novas tecnologias computacionais na Matemática e na sociedade em geral; 3) O surgimento de novos domínios na Matemática; 4) a investigação profunda sobre o processo de aprendizagem.

Um dos principais aspectos das orientações curriculares atuais, a resolução de problemas, especialmente baseada na teorização de George Pólya, apresenta-se como parte essencial da atividade matemática e assume papel central nas novas formulações curriculares com o objetivo de proporcionar aos estudantes uma experiência matemática genuína que se aproximasse da atividade criativa dos matemáticos.

Acerca de todo este movimento reformista das últimas décadas, descrito por nós, Lins e Gimenez (2001) ressaltam a importância tanto do conhecimento matemático quanto dos significados não-matemáticos (entendidos dessa forma sob o aspecto hegemônico do formalismo descrito anteriormente) na ampliação das possibilidades cognitivas dos estudantes, de suas aprendizagens.

> (...) não há razão, tampouco para que a introdução de significados matemáticos (ou como diria Vigotsky, conceitos científicos) exclua da escola os significados não matemáticos, já que o papel que uns e outros cumprem é o mesmo, como parte da organização da atividade humana. (Lins E Gimenez, 2001, p.28).

Ao analisar a construção histórico-filosófica do conhecimento matemático pude entender as diversas concepções que nortearam esta construção, os diversos problemas encontrados em seus fundamentos, as estratégias e confrontos ocorridos para ultrapassá-los e as influências desta experiência histórica sobre os princípios que norteiam hoje tanto as concepções de professores quanto as políticas educacionais.

Há muitas maneiras diferentes de encarar a matemática. O que fica patente é que quase todos os escritos sistemáticos sobre a matemática no sentido filosófico têm se inserido na tradição do fundamentismo, isto é, as tentativas de estabelecer uma base para a indubitabilidade da matemática.

Davis e Hersh (1985) afirmam que em ciência, a procura dos "fundamentos" conduz ao problema tradicional da "lógica indutiva": como deduzir leis gerais de experiências e observações particulares[9]. (p.386).

Esses autores defendem a idéia, com a qual concordo, de que a matemática é uma coisa única. Os pontos de vista platonista, formalista e construtivista sobre ela são acreditados porque cada um corresponde a uma certa visão dela, uma visão de um certo ângulo, ou um exame com um instrumento particular de observação. (p.400). "Nosso problema é achar uma compreensão da própria coisa, unir as visões parciais – cada uma das quais é errada se tomada isoladamente, pois é incompleta e unilateral. Como são retratos da mesma coisa, são compatíveis. Sua incompatibilidade aparente é criada por nossa maneira de encará-las com uma pré-concepção imprópria". (Idem).

Portanto, se alguém pergunta o que é a matemática, é fácil aceitar o modelo dos sistemas formais como resposta, embora não seja difícil achar críticas a eles feitas por matemáticos conscientes de quão pouco ele se ajusta a sua própria prática.

---

[9] Ao longo do trabalho terei a oportunidade de abordar, através de Lakatos, discípulo de Popper e Polya, uma experiência que coloca em questão as teses fundamentistas, ao afirmar que "não é nem possível, nem necessário justificar as leis da ciência através do raciocínio indutivo". As teorias científicas seriam, por outro lado, inventadas como hipóteses, especulações e até mesmo adivinhações.