2
Transitividade e ergodicidade

Nesse capítulo, definiremos os conceitos de transitividade e ergodicidade, demonstraremos alguns resultados sobre essas propriedades, mostraremos a analogia que existe entre elas e daremos alguns exemplos de transformações transitivas e ergódicas.

Quando não for explicitado em qual espaço estamos trabalhando, X denotará um espaço métrico completo e perfeito (sem pontos isolados) que possui um subconjunto enumerável denso. Nos exemplos fornecidos no final do capítulo, os espaços considerados são o círculo $\mathbb{S}^1$ e o espaço de seqüências infinitas de dois símbolos $\Sigma_2 = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

2.1
Resultados gerais

2.1.1
Transitividade

Um dos principais objetivos nesse trabalho é procurar aplicações diferenciáveis em subconjuntos abertos e densos da reta que sejam transitivas. Nessa subseção, definiremos transitividade e demonstraremos um teorema de equivalência que nos será bastante útil no decorrer do texto.

Antes de definirmos transitividade, precisamos nos familiarizar com alguns termos que aparecem com freqüência no estudo de sistemas dinâmicos.

Definição 2.1 *Seja $f : X \longrightarrow X$ uma função contínua. A órbita positiva de x em relação a f é o conjunto $\mathcal{O}_f^+(x) \equiv \{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. A órbita negativa de um ponto x é definida de maneira análoga: $\mathcal{O}_f^-(x) \equiv \{f^{-n}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. A órbita do ponto x em relação a f é a união desses dois conjuntos, $\mathcal{O}_f(x) \equiv \{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.*

Definição 2.2 (transitividade) *Uma função $f : X \longrightarrow X$ é transitiva se existe $x \in X$ tal que sua órbita positiva $\mathcal{O}_f^+(x)$ é densa em X.*

Embora essa seja a definição mais comum de transitividade, usaremos com freqüência uma outra definição que resulta do seguinte teorema de equivalência:

Teorema 2.3 *Seja $f : X \longrightarrow X$ uma função contínua. Então f é transitiva se, e somente se, dados dois abertos não vazios $U, V \subset X$, existe um inteiro $n > 0$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Prova: Suponhamos que f é transitiva e $x \in X$ é tal que $\overline{\mathcal{O}_f^+(x)} = X$. Assim, dado um aberto $U \subset X$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $f^i(x) \in U$. Como $f^i(x) \in \mathcal{O}_f^+(x)$, que é denso em X, então $\overline{\mathcal{O}_f^+(f^i(x))} = X$, pois X não possui pontos isolados e as órbitas $\mathcal{O}_f^+(f^i(x))$ e $\mathcal{O}_f^+(x)$ diferem de apenas um número finito de pontos.

Assim, dado outro aberto V de X, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $f^j(f^i(x)) \in V$. Logo, dados dois abertos U e V, podemos construir um inteiro n tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, basta tomarmos $f^i(x) \in U$ e $n = j$.

Vamos agora supor que vale a condição da interseção dos abertos. Pela hipótese, temos que $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(V)$ é denso em X para todo aberto V, pois intersecta qualquer aberto U de X. Como X é espaço métrico com subconjunto enumerável denso, então existe uma base enumerável $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ para a topologia de X. Assim, $\displaystyle\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(V_i)$ é interseção enumerável de abertos densos em X e, portanto, pelo teorema da categoria de Baire(Mnk, Capítulo 8), é denso e, em particular, não vazio. Tomando $x \in \displaystyle\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(V_i)$, temos que $\overline{\mathcal{O}_f^+(x)} = X$.
□

Corolário 2.4 *Sejam $f : X \longrightarrow X$ uma função transitiva e A um aberto não vazio de X tais que $f(A) \subseteq A$. Então $\overline{A} = X$.*

Prova: Suponha, por absurdo, que existe um aberto não denso $A \subset X$ tal que $f(A) \subseteq A$. Como A não é denso, podemos tomar um aberto $B \subset X \backslash A$. Daí $f^n(A) \cap B = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 2.3, temos que f não é transitiva, contrariando nossa hipótese. □

Corolário 2.5 *Seja $f : X \longrightarrow X$ uma função transitiva e $A \subset X$ um aberto não vazio tais que $f^{-1}(A) \subseteq A$. Então $\overline{A} = X$.*

Prova: A demonstração é análoga à do corolário anterior. Suponha, por absurdo, que $A \subset X$ é um aberto não denso tal que $f^{-1}(A) \subset A$. Considere um subconjunto aberto $B \subset X \backslash A$ e repare que $f^{-n}(A) \cap B = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Nesse caso, $A \cap f^n(B) = \emptyset$, contrariando o Teorema 2.3. □

Em alguns casos, pode ser difícil mostrar que uma aplicação $f : X \to X$ possui uma certa propriedade dinâmica, como, por exemplo, transitividade.

Para contornar esta dificuldade, é comum fazermos uso de uma conjugação entre a função que estamos trabalhando e uma aplicação $g : Y \to Y$ em que tal análise seja mais simples. Dizemos que as dinâmicas $f : X \to X$ e $g : Y \to Y$ são conjugadas se existir um homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que

$$f = h^{-1} \circ g \circ h.$$

Dizemos que $g : Y \to Y$ é um *fator* de $f : X \to X$ se existir uma aplicação $h : X \to Y$ contínua e sobrejetora tal que

$$h \circ f = g \circ h.$$

Nesse caso, dizemos que h é uma *semiconjugação* e que g é semiconjugada à f. Claramente uma conjugação é uma semiconjugação.

Todas as propriedades dinâmicas de uma aplicação são preservadas por semiconjugação: misturamento, transitividade, periodicidade de órbitas, densidade de pontos periódicos etc. Vamos, entretanto, provar apenas que a transitividade é preservada, pois, além de esta ser a propriedade que estamos interessados em estudar, a idéia da demonstração para os outros casos é, de um modo geral, a mesma.

Lema 2.6 *Se $g : Y \to Y$ é um fator de $f : X \to X$ e $h : X \to Y$ é a semiconjugação entre as dinâmicas, então*

$$h \circ f^n = g^n \circ h$$

para todo inteiro $n > 0$.

Prova: Demonstraremos usando indução em n. Pela definição de semiconjugação, o lema é satisfeito para $n = 1$. Suponha, então, que vale para $n = k$. Assim,

$$\begin{aligned} h \circ f^{k+1} &= h \circ (f^k \circ f) = (h \circ f^k) \circ f \\ &= (g^k \circ h) \circ f = g^k \circ (h \circ f) \\ &= g^k \circ (g \circ h) = (g^k \circ g) \circ h \\ &= g^{k+1} \circ h \end{aligned}$$

e a indução está completa. □

Proposição 2.7 *Se $f : X \to X$ é um aplicação transitiva e $g : Y \to Y$ é um fator de f, então g é transitiva.*

Prova: Suponha que g não é transitiva. Então, para todo $y \in Y$, existe um aberto $V \subset Y$ tal que, para todo $n \geq 0$, $g^n(y) \notin V$. Seja $x \in X$ tal que $h(x) = y$ (tal x existe, pois h é sobrejetora). Assim, pelo Lema 2.6,

$$g^n(h(x)) \notin V \Rightarrow h(f^n(x)) \notin V \Rightarrow f^n(x) \notin h^{-1}(V).$$

Pela continuidade de h, sabemos que $h^{-1}(V)$ é aberto. Dessa maneira, a órbita de x não é densa em X e, portanto, f não é transitiva. □

2.1.2 Ergodicidade

Nessa subseção, definiremos o conceito de ergodicidade, que, por possuir muitas analogias com a noção de transitividade, é também chamado de transitividade métrica. Mostraremos também algumas diferenças entre os casos em que o espaço é ou não de medida finita.

Definição 2.8 *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que a função $f : X \to X$ preserva a medida μ se, para todo $E \in \mathcal{A}$, temos que $\mu(f^{-1}(E)) = \mu(E)$. Alternativamente, dizemos que μ é uma medida f-invariante.*

Proposição 2.9 *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e considere a transformação $f : X \to X$. Então f preserva a medida μ se, e somente se,*

$$\int \phi \, d\mu = \int (\phi \circ f) \, d\mu, \tag{2-1}$$

para toda função integrável $\phi : X \to \mathbb{R}$.

Prova: Antes de começar a demonstração, lembremos que a função característica $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ é definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Lembre também que chamamos uma função $s : X \to \mathbb{R}$ de *função simples* se s for uma combinação linear finita de funções características de espaços mensuráveis, ou seja, se existirem constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ e conjuntos disjuntos $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ tais que

$$s = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{A_j}.$$

Suponha que f preserva a medida μ. Para mostrar que a equação 2-1 é satisfeita, usaremos um argumento clássico de teoria da medida: primeiro mostraremos que vale se $\phi = \chi_A$, em seguida vamos estender o resultado para ϕ simples e, finalmente, concluiremos que vale para ϕ integrável.

Se $\phi = \chi_A$, temos que

$$\phi \circ f = \chi_A \circ f = \chi_{f^{-1}(A)}$$

e, portanto,

$$\int (\phi \circ f)\, d\mu = \int \chi_{f^{-1}(A)}\, d\mu = \mu(f^{-1}(A)) = \mu(A) = \int \phi\, d\mu.$$

Assim, provamos que a equação vale quando ϕ é uma função característica. Como conseqüência da linearidade da integral, a equação ainda vale se ϕ for uma função simples. Se ϕ é uma função integrável qualquer, pela definição de integral, temos que

$$\int \phi\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n\, d\mu,$$

onde ϕ_n é uma seqüência de funções simples crescendo para ϕ, ou seja, $\phi_1 \leq \phi_2 \leq \ldots$ e $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \phi(x)$ para todo $x \in X$. Por outro lado, $\phi_n \circ f$ é uma seqüência de funções simples crescendo para $\phi \circ f$. Logo,

$$\int (\phi \circ f)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int (\phi_n \circ f)\, d\mu.$$

Como $\int \phi_n\, d\mu = \int (\phi_n \circ f)\, d\mu$, tomando o limite nos dois lados, temos que

$$\int \phi\, d\mu = \int (\phi \circ f)\, d\mu.$$

A volta é trivial pois, dado um conjunto $A \in \mathcal{A}$, tomamos $\phi = \chi_A$ e temos

$$\mu(A) = \int \chi_A\, d\mu = \int (\chi_A \circ f)\, d\mu = \mu(f^{-1}(A)).$$

Assim, concluímos a prova da proposição. $\square$

Dizemos que um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é σ-finito se

$$X = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i,$$

onde $E_i \in \mathcal{A}$ e $\mu(E_i) < \infty$ para todo i.

Definição 2.10 (ergodicidade) *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida (σ-finito) e $T : X \to X$ uma transformação que preserva a medida μ. Dizemos que T é ergódica com respeito à medida μ se, para todo conjunto T-invariante $E \in \mathcal{A}$ (ou seja, $T^{-1}(E) = E$), temos que $\mu(E) = 0$ ou $\mu(X - E) = 0$.*

Note que, nessa definição, não estamos supondo que a medida seja de probabilidade, ou sequer finita, pois o nosso principal objetivo é estudar transformações que preservam a medida de Lebesgue na reta. Quando o espaço é de probabilidade, podemos substituir $\mu(X - E) = 0$ por $\mu(E) = 1$ na definição de ergodicidade, obtendo a definição clássica. Claramente, a definição que demos generaliza a definição de ergodicidade em espaços de medida finita.

Dizemos que uma certa propriedade vale para μ-quase todo ponto de X (μ-q.t.p.) se ela vale para todos os pontos do conjunto $X - \mathcal{N}$, onde $\mathcal{N}$ é um conjunto de medida nula. Quando a medida em questão estiver implícita, escreveremos abreviadamente que a propriedade vale q.t.p..

Proposição 2.11 *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade. Então T é ergódica em relação à medida μ se, e somente se, toda função integrável f, tal que $f(T(x)) = f(x)$ q.t.p., for constante q.t.p..*

Prova: Suponha que toda função mensurável T-invariante seja constante q.t.p. e seja $E \in \mathcal{A}$ um subconjunto T-invariante. Assim, χ_E tem de ser constante q.t.p. e, portanto, $\mu(E) = 0$ ou $\mu(E) = 1$. Para mostrar a volta, suponha que T é ergódica e f é uma função tal que $f(T(x)) = f(x)$ q.t.p.. Dessa maneira, o conjunto

$$E_c \equiv \{x \in X : f(x) \leq c\}$$

é mensurável, T-invariante e, portanto, pela hipótese de ergodicidade, deve ter medida 0 ou 1, independente da escolha de $c \in \mathbb{R}$. Repare que deve haver algum $c \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(E_c) = 1$, pois, caso contrário, tomando uma seqüência

$$c_1 < c_2 < \ldots < c_n < \ldots$$

tal que $c_n \to \infty$, teríamos que

$$\mu(X) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{c_i}\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_{c_i}) = 0.$$

Seja $a \equiv \inf\{c \in X : \mu(E_c) = 1\}$ e repare que, para todo $\delta > 0$,

$$\mu(E_{a+\delta}) = \mu(E_{a-\delta}) + \mu(\{x \in X : a - \delta < f(x) \leq a + \delta\}).$$

Como $\mu(E_{a+\delta}) = 1$ e $\mu(E_{a-\delta}) = 0$, temos que

$$\mu(\{x \in X : a - \delta < f(x) \leq a + \delta\}) = 1,$$

independente da escolha de δ. Dessa maneira, concluímos que

$$\mu(\{x \in X : f(x) = a\}) = 1$$

e terminamos a demonstração. $\square$

A seguir, enunciaremos sem demonstrar o principal resultado em teoria ergódica: o Teorema de Birkhoff (veja uma demonstração em (Man, p.115)).

Teorema 2.12 (Birkhoff) *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida σ-finito, $T : X \to X$ uma transformação que preserva a medida μ e $f \in L^1(\mu)$. Então, existe $g_f \in L^1(\mu)$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) = g_f(x) \quad q.t.p..$$

Além disso, $g_f \circ T = g_f$ q.t.p. e, se $E \in \mathcal{A}$ é tal que $\mu(E) < \infty$, então

$$\int_E g_f \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

Observação 2.13 *Se T é ergódica, então, pela Proposição 2.11, g_f é constante q.t.p. e, portanto, se $\mu(X) < \infty$, temos que*

$$g_f = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu \quad q.t.p..$$

Portanto, se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ for espaço de probabilidade e T for ergódica, então, para toda $f \in L^1(\mu)$, vale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) = \int_X f(x) d\mu \quad q.t.p..$$

Precisaremos, adiante, fazer uso de um importante teorema em Teoria da Medida - o Teorema da Convergência Dominada - que enunciaremos a seguir sem demonstrá-lo. Para uma prova do teorema veja, por exemplo, (Bar, Teorema 5.6, p.45).

Teorema 2.14 (Teorema da Convergência Dominada) *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e (f_n) uma seqüência de funções integráveis convergindo μ-q.t.p. para uma função mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo n, então f é integrável e*

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Teorema 2.15 *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $T : X \to X$ uma transformação que preserva μ. Então são equivalentes:*

1. *T é ergódica;*

2. *para quaisquer $A, B \in \mathcal{A}$, vale*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mu(T^{-i}A \cap B) \to \mu(A)\mu(B) \quad q.t.p.,$$

3. *se $A, B \in \mathcal{A}$ são conjuntos de medida positiva, então existe um inteiro n tal que*

$$\mu(T^{-n}(A) \cap B) > 0.$$

Prova: (1)⇒(2)

Pelo Teorema de Birkhoff,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_A(T^i(x)) = \mu(A) \quad \text{q.t.p..}$$

Multiplicando os dois lados por $\chi_B(x)$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_A(T^i(x))\chi_B(x) = \mu(A)\chi_B(x) \quad \text{q.t.p..}$$

Por outro lado, como

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_A(T^i(x))\chi_B(x) \leq 1$$

para todo n, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada para obter

$$\lim_{n\to\infty}\int_X \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\chi_A(T^i(x))\chi_B(x)\,d\mu = \int_X \mu(A)\chi_B(x)\,d\mu$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_X \chi_A(T^i(x))\chi_B(x)\,d\mu = \mu(A)\int_X \chi_B(x)\,d\mu$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mu(T^{-i}(A)\cap B) = \mu(A)\mu(B) \quad \text{q.t.p..}$$

(2)⇒(3)

Sejam $A, B \in \mathcal{A}$ conjuntos de medida positiva. Então,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mu(T^{-i}(A)\cap B) \to \mu(A)\mu(B) > 0.$$

Em particular, uma das parcelas do somatório deve ser positiva, ou seja, existe um inteiro k tal que $\mu(T^{-k}(A)\cap B) > 0$

(3)⇒(1)

Seja $A \in \mathcal{A}$ um conjunto T-invariante de medida positiva. Então, para todo inteiro i,

$$\mu(T^{-i}(A)\cap A^c) = \mu(A\cap A^c) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Mas, pela hipótese, A^c não pode ter medida positiva. Assim, $\mu(A^c) = 0$ e, portanto, T é ergódica. □

A estreita relação entre os conceitos de transitividade e ergodicidade pode ser observada se compararmos o Teorema 2.3 com a propriedade (3) do teorema acima. Vemos também, claramente, que uma transformação ergódica com respeito à medida de Lebesgue é sempre transitiva. O inverso, entretanto, nem sempre é verdade (veja um exemplo de uma transformação que preserva medida, é transitiva mas não é ergódica em (Man, Seção 2.7, p.172)).

2.2
Aplicações no círculo

Antes de começarmos a estudar dinâmicas transitivas e ergódicas na reta, é conveniente nos familiarizarmos com o conceito de transitividade e ergodicidade de aplicações no círculo $\mathbb{S}^1$ pois, como $\mathbb{S}^1$ é uma variedade compacta, essa análise se torna um pouco mais simples.

O círculo unitário pode ser representado de duas maneiras distintas:

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{z \in \mathbb{C} : z = e^{2\pi i x}, x \in \mathbb{R}\}$$

ou

$$\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

Nesse segundo caso, representaremos o círculo como o intervalo unitário, identificando os pontos 0 e 1.

Claramente, existe um isomorfismo entre essas duas notações:

$$x \in [0,1] \quad \mapsto \quad e^{2\pi i x}.$$

2.2.1
Rotações irracionais

Usando a notação do círculo no plano complexo, uma rotação de $z \in \mathbb{C}$ por um ângulo α é

$$R_\alpha(z) = e^{2\pi i \alpha} z$$

e, portanto,

$$R_\alpha^n(z) = (e^{2\pi i \alpha})^n z = e^{2\pi i n \alpha} z = R_{n\alpha}(z).$$

Já na representação $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, temos

$$R_\alpha(x) = x + \alpha \ (\text{mod } 1),$$

onde (mod 1) significa que os números reais que distam de um número inteiro estão identificados. Assim,

$$R_\alpha^n(x) = x + n\alpha \ (\text{mod } 1).$$

Há dois tipos muito distintos de rotações no círculo: as racionais e as irracionais.

A órbita de um ponto $x \in \mathbb{S}^1$ por uma rotação $R_\alpha(x) = x + \alpha$ (mod 1) é periódica se $\alpha \in \mathbb{Q}$ e densa se $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

De fato, se $\alpha = p/q$ é uma fração irredutível com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, então a órbita de qualquer ponto $x \in \mathbb{S}^1$ será periódica de período q pois

$$R_\alpha^q(x) = x + q\left(\frac{p}{q}\right) \pmod 1 = x + p \pmod 1 = x$$

e, claramente, q é o menor inteiro positivo que satisfaz essa condição.

A seguir, definiremos um conceito mais forte que transitividade.

Definição 2.16 *Seja $f : X \to X$ uma transformação contínua. Dizemos que f é minimal se $\overline{\mathcal{O}_f^+(x)} = X$ para todo $x \in X$.*

Proposição 2.17 *A rotação R_α é minimal (e, em particular, transitiva) se, e somente se, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.*

Prova: Já vimos que se $\alpha \in \mathbb{Q}$, então a órbita de qualquer ponto é periódica. Assim, precisamos apenas mostrar que se $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, então a órbita de qualquer ponto é densa em $\mathbb{S}^1$.

Em primeiro lugar, considere uma seqüência de números racionais $\alpha_n = p_n/q_n$ que converge para α, onde p_n e q_n são primos entre si para todo $n \in \mathbb{N}$. Repare que a seqüência $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, induzida por $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, é não limitada e, portanto, para todo $\epsilon > 0$ e todo inteiro $M > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $q_n > M$ e $|\alpha_n - \alpha| < \epsilon$. Além disso, a órbita de um ponto $x \in \mathbb{S}^1$ por R_{α_n} é constituída de q_n pontos periódicos equidistribuídos em $\mathbb{S}^1$:

$$\mathcal{O}_n(x) = \{x + j\frac{p_n}{q_n} \pmod 1 : j \in \{0, \ldots, q_n - 1\}\}.$$

Por outro lado, a seqüência de funções R_{α_n} converge uniformemente para R_α. Assim, para $\epsilon > 0$ e um inteiro $M > 0$, existe um inteiro $n > 0$ tal que $q_n > M$ e

$$|R_\alpha^k(x) - R_{\alpha_n}^k(x)| < \epsilon$$

para todo inteiro $k \leq M$.

Como ϵ é arbitrariamente pequeno e M arbitrariamente grande, temos que a órbita de R_α é densa em $\mathbb{S}^1$, independente da escolha de x. $\square$

É trivial ver que rotações no círculo preservam a medida de Lebesgue, pois o tamanho de qualquer intervalo é preservado pela ação de R_α, ou seja, R_α é uma isometria. Da mesma forma, R_α tem de ser ergódica (com respeito à medida de Lebesgue) se $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, pois os únicos conjuntos invariantes são $\mathbb{S}^1$ e $\emptyset$. Esse fato, entretanto, não é tão óbvio: em princípio, poderia haver um subconjunto de $\mathbb{S}^1$ invariante e de interior vazio, mas com medida positiva.

Proposição 2.18 *Rotações irracionais R_α são ergódicas com respeito à medida de Lebesgue.*

Prova: Seja $f \in L^2(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}, \lambda)$, onde $\mathcal{B}$ são os borelianos do círculo e λ é a medida de Lebesgue no círculo. Então, f possui expansão de fourier

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x}$$

em L^2. Se f é R_α-invariante, então

$$f(x+\alpha) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \alpha} e^{2\pi i n x} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x} = f(x)$$

e, portanto, $a_n = a_n e^{2\pi i n \alpha}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Como α é irracional, $e^{2\pi i n \alpha} \neq 1$ se $n \neq 0$. Assim, $a_n = 0$ para todo $n \neq 0$ e temos que $f(x) = a_0$ em L^2. Pela Proposição 2.11, R_α tem de ser ergódica. $\square$

2.2.2 Aplicações expansoras

Apresentaremos, agora, outra aplicação que, embora também seja transitiva e ergódica, é muito diferente da rotação irracional, como veremos adiante.

Considere a função $\phi_k : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ definida por

$$\phi_k(x) = kx \pmod 1,$$

onde $k \in \mathbb{N}$ é maior que 1.

Diferente da rotação, a aplicação expansora ϕ_k não é uma isometria. Assim, pontos em $\mathbb{S}^1$ podem possuir órbitas com comportamentos bem distintos, algo que não acontece para R_α, em que todas as órbitas ou são densas ou são periódicas (e de mesmo período). Existem, por exemplo, pontos periódicos de período arbitrário e pontos cuja órbita é densa.

Vamos, por enquanto, deixar as comparações de lado e provar que

Proposição 2.19 *ϕ_k é transitiva.*

Prova: Basta repararmos que a função ϕ_k dilata o comprimento dos intervalos por um fator $k > 1$ (se eles forem suficientemente pequenos). Denotando o comprimento de um intervalo (a,b) por $|(a,b)| = b - a$, temos que, dado qualquer intervalo aberto $U \subset \mathbb{S}^1$,

$$|\phi_k^n(U)| = \min\{1, k^n |U|\}$$

e, portanto, deve existir um $n \in \mathbb{N}$ tal que $|\phi_k^n(U)| = 1$, ou seja, $\phi_k^n(U) = \mathbb{S}^1$. Em particular, $\phi_k^n(U)$ intersecta qualquer outro aberto de $\mathbb{S}^1$. Pelo Teorema 2.3, ϕ_k é transitiva. $\square$

Observação 2.20 *Na demonstração acima, o que estamos provando, na verdade, é que a aplicação ϕ_k é misturadora, um conceito de recorrência mais forte que transitividade. Dizemos que uma função $f : X \to X$ é misturadora se, para todo par de abertos não vazios $U, V \subset X$, existe um inteiro $N = N(U,V) > 0$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$. Pelo Teorema 2.3, vemos claramente que aplicações misturadoras são transitivas. No caso de ϕ_k, para todo intervalo U, vimos que existe um $N > 0$ tal que $\phi_k^n(U) = \mathbb{S}^1$ para todo $n \geq N$ e, portanto, a aplicação ϕ_k é, de fato, misturadora.*

Vamos, agora, nos concentrar na análise estatística de ϕ_k. Primeiro, repare que ϕ_k preserva a medida de Lebesgue. De fato,

$$\phi_k^{-1}((a,b)) = \left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}\right) \cup \left(\frac{a+1}{k}, \frac{b+1}{k}\right) \cup \ldots \cup \left(\frac{a+k-1}{k}, \frac{b+k-1}{k}\right)$$

e, portanto,

$$\mu(\phi_k^{-1}((a,b))) = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{b+i}{k} - \frac{a+i}{k}\right) = b - a = \mu((a,b)).$$

Como intervalos geram a σ-álgebra dos Borelianos, concluímos que ϕ_k preserva a medida de Lebesgue.

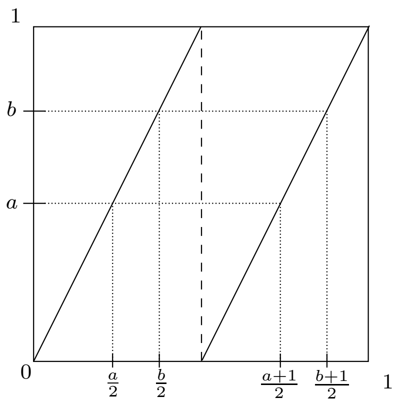

Figura 2.1: A aplicação expansora ϕ_2 preserva a medida de Lebesgue.

Os próximos dois lemas serão necessários para provarmos que a aplicação expansora de grau 2 é ergódica. As demonstrações dos lemas e do teorema podem ser facilmente generalizadas para ϕ_m, escolhemos, entretanto, provar apenas o caso $m = 2$ para não sobrecarregar a notação.

Lema 2.21 *Seja $\mathcal{E}$ a coleção de todos os seguintes intervalos:*

$$E_{n,p} = \left(\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right) \quad n \in \mathbb{N}, p \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}.$$

Então a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ (em $\mathbb{S}^1$) é gerada por $\mathcal{E}$, ou seja, $\mathcal{B}$ é a menor σ-álgebra que contém $\mathcal{E}$.

Prova: Denotemos por $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ a σ-álgebra gerada por $\mathcal{E}$ e $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ a σ-álgebra gerada pelos intervalos $(a, b) \subset \mathbb{S}^1$. Sabemos que $\mathcal{B} = \mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ e, portanto, iremos mostrar que $\mathcal{A}_{\mathcal{I}} = \mathcal{A}_{\mathcal{E}}$. É trivial vermos que $\mathcal{A}_{\mathcal{E}} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ pois $E_{n,p}$ é um intervalo aberto de $\mathbb{S}^1$. Como $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ é a menor σ-álgebra que contém $\mathcal{E}$, então $\mathcal{A}_{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{I}}$.

Vamos, então, provar que $\mathcal{A}_{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{E}}$. Dado um intervalo real (a, b), defina as seqüências

$$c_n = \frac{[2^n a] + 1}{2^n} \quad \text{e} \quad d_n = \frac{[2^n b] - 1}{2^n},$$

onde $[\cdot]$ denota a parte inteira de um número real. Repare que, para todo $n \geq 1$, $c_n > a$ e $d_n < b$. Além disso,

$$\lim_{n \to \infty} c_n = a \quad \text{e} \quad \lim_{n \to \infty} d_n = b.$$

Assim, existe $N \geq 1$ tal que $(c_n, d_n) \subset (a, b)$ se $n \geq N$ e, portanto,

$$\bigcup_{i=N}^{\infty} (c_i, d_i) = (a, b).$$

Concluímos, então, que $(a, b) \in \mathcal{A}_{\mathcal{E}}$. Como $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ é a menor σ-álgebra que contém os intervalos (a, b), temos que $\mathcal{A}_{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ e a prova está terminada. □

Como conseqüência do lema anterior, se quisermos mostrar que uma certa propriedade estatística vale para conjuntos $\mathcal{B}$-mensuráveis, basta mostrarmos que ela vale para os conjuntos $E_{n,p} \in \mathcal{E}$.

Lema 2.22 *Seja $E_{n,p} \in \mathcal{E}$. Então, para todo $B \in \mathcal{B}$,*

$$\mu(\phi_2^{-n}(B) | E_{n,p}) = \mu(B),$$

onde

$$\mu(A|B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}$$

é a medida condicional de A com respeito a B.

Prova: Repare que

$$\phi_2^{-n}((a,b)) = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left(\frac{a+k}{2^n}, \frac{b+k}{2^n}\right),$$

pois

$$\phi_2^n\left(\left(\frac{a+k}{2^n}, \frac{b+k}{2^n}\right)\right) = (a+k \pmod 1, b+k \pmod 1) = (a,b)$$

para todo inteiro $0 \leq k < 2^n$. Além disso, existe um inteiro $k_p \in \{0,1,\ldots,2^n-1\}$ tal que

$$\left(\frac{a+k_p}{2^n}, \frac{b+k_p}{2^n}\right) \subset \left(\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right).$$

Assim,

$$\mu(\phi_2^{-n}((a,b))|E_{n,p}) = \frac{\mu\left(\left(\frac{a+k_p}{2^n}, \frac{b+k_p}{2^n}\right)\right)}{\mu\left(\left(\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right)\right)} = \frac{(b-a)/2^n}{1/2^n} = b-a = \mu((a,b)).$$

A prova do lema está concluída. $\square$

Teorema 2.23 *A aplicação ϕ_2 é ergódica com respeito à medida de Lebesgue.*

Prova: Seja A um conjunto ϕ_2-invariante mensurável tal que $\mu(A) > 0$, mostraremos que $\mu(A^c) = 0$.

Pelo Lema 2.22 e pela invariância de A temos:

$$\mu(\phi_2^{-n}(A)|E_{n,p}) = \mu(A|E_{n,p}) = \mu(A).$$

Como $\mu(A) > 0$, concluímos que

$$\mu(E_{n,p}|A) = \mu(E_{n,p}).$$

Pelo Lema 2.21, os conjuntos $E_{n,p}$ geram os borelianos e, portanto, para todo conjunto mensurável B,

$$\mu(B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)}.$$

Escolhendo $B = A^c$, temos que

$$\mu(A^c) = \frac{\mu(A \cap A^c)}{\mu(A)} = \frac{\mu(\emptyset)}{\mu(A)} = 0$$

e, portanto, ϕ_2 é ergódica. $\square$

2.3
O shift unilateral

Considere o espaço $\Sigma_2 = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ das seqüências infinitas de dois símbolos. Há muitas maneiras de definirmos uma topologia para esse espaço, uma delas é adotar a seguinte métrica:

$$d(x,y) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{d}(x_k,y_k)}{2^k},$$

onde $x = (x_k)_{k\geq 1}$, $y = (y_k)_{k\geq 1}$ e $\bar{d} : \{0,1\} \to \mathbb{R}$ é a métrica discreta.

Definição 2.24 *Seja $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \Sigma_2$, definimos o shift como a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \Sigma_2 & \longrightarrow & \Sigma_2 \\ & x & \longmapsto & w, \end{array}$$

onde $w = (w_n = x_{n+1})_{n\geq 1}$.

Teorema 2.25 *O shift σ é uma aplicação Lipschitz (e, em particular contínua).*

Prova: Dados $x = (x_k), y = (y_k) \in \Sigma_2$, temos que

$$\begin{aligned} d(\sigma(x),\sigma(y)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{d}(x_{n+1},y_{n+1})}{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\bar{d}(x_n,y_n)}{2^{n-1}} \\ &= 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\bar{d}(x_n,y_n)}{2^n} \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{d}(x_n,y_n)}{2^n} = 2d(x,y). \end{aligned}$$

Logo σ é Lipschitz com constante de Lipshitz igual a 2. □

Teorema 2.26 *O shift σ é uma aplicação transitiva.*

Prova: A idéia da demonstração é construir uma seqüência de dois símbolos cuja órbita positiva seja densa em Σ_2. Antes, observamos que a distância entre dois pontos $x, y \in \Sigma_2$ cujos primeiros N termos coincidem satisfaz:

$$d(x,y) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{N+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) = \frac{1}{2^N}.$$

Agora repare que, dado $\epsilon > 0$, podemos tomar o menor inteiro N_ϵ tal que $\frac{1}{2^{N_\epsilon}} < \epsilon$. Assim, fixando $x^* \in \Sigma_2$, temos que, se os primeiros N_ϵ termos de $x \in \Sigma_2$ coincidem com os de x^*, então x pertence à bola $B_\epsilon(x^*)$.

Considere

$$\widetilde{x} = \underline{0}\,\underline{1}\,\underline{00}\,\underline{01}\,\underline{10}\,\underline{11}\,\underline{000}\,\underline{001}\,\underline{010}\,\underline{011}\,\underline{100}\,\underline{101}\,\underline{110}\,\underline{111}\,\underline{0000}\,\ldots$$

a seqüência formada pela concatenação das seqüências finitas de dois símbolos, começando pelas seqüências de comprimento 1, seguidas pelas de comprimento 2 etc.

Para vermos que a órbita do ponto $\widetilde{x}$ é densa em Σ_2, basta observarmos que, pela construção de $\widetilde{x}$, para qualquer $\epsilon > 0$ e para todo $x \in \Sigma_2$, existe um inteiro n tal que os primeiros N_ϵ termos de x coincidem com os de $\sigma^n(\widetilde{x})$ e, portanto, concluímos que $\sigma^n(\widetilde{x}) \in B_\epsilon(x)$. Logo, $\overline{\mathcal{O}^+_\sigma(\widetilde{x})} = \Sigma_2$. □

Vamos, agora, definir um conjunto $\mathcal{N} \subset \Sigma_2$ da seguinte maneira: $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{N}$ se, e somente se, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_j = a_{j+1}$ para todo $j \geq k$. Repare que $\mathcal{N}$ é σ-invariante, bem como seu complementar $\widetilde{\Sigma_2} = \Sigma_2 - \mathcal{N}$ e, portanto, faz sentido definirmos uma dinâmica para $\sigma : \widetilde{\Sigma_2} \to \widetilde{\Sigma_2}$.

Corolário 2.27 *O shift $\sigma : \widetilde{\Sigma_2} \to \widetilde{\Sigma_2}$ é uma aplicação transitiva.*

Prova: É suficiente reparar que o elemento $\widetilde{x}$ que construímos na demonstração do Teorema 2.26 pertence a $\widetilde{\Sigma_2}$. □

A seguir, construiremos uma semiconjugação entre a aplicação expansora de grau 2, que definimos em 2.2.2, e o shift, descrito nessa seção.

Considere os intervalos $I_0 = [0, 1/2]$ e $I_1 = [1/2, 1]$. Seja $x = \{a_j\}_{j=1}^{\infty}$, defina $h : \Sigma_2 \to \mathbb{S}^1$ tal que

$$h(x) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \phi_2^{-j}(I_{a_{j+1}}).$$

Primeiro, repare que h está bem definida, pois

$$A_n = \bigcap_{j=0}^{n} \phi_2^{-j}(I_{a_{j+1}})$$

é uma seqüência de intervalos compactos encaixados.

A sobrejetividade de h é garantida pelo fato de que todo número $x \in [0, 1)$ possui uma expansão em base 2, ou seja, para todo $x \in \mathbb{S}^1$, existe uma seqüência $\{a_j(x)\}_{j=1}^{\infty} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tal que

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j(x)}{2^j}.$$

Podemos, por exemplo, definir

$$a_j(x) = [2\phi_2^{j-1}(x)], \tag{2-2}$$

onde $[\cdot]$ representa a parte inteira de um número real.

Repare que se $x \in \phi_2^{-n}(0)$, então $a_j(x) = 0$ para todo $j > n$. Nesse caso, $h^{-1}(x)$ consiste em duas seqüências de Σ_2: a que acabamos de definir (2-2) e uma $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que

$$b_j = \begin{cases} a_j(x), & j \leq n \\ 1, & j > n. \end{cases}$$

Dessa maneira, vemos que h não é injetiva e, assim, pode ser somente uma semiconjugação, não uma conjugação total.

Para terminarmos de provar que h é uma semicojugação, resta apenas mostrarmos que h é contínua. Se $x, y \in \Sigma_2$ são tais que $d(x, y) < \epsilon$, então os primeiro N_ϵ termos de x e y devem coincidir, onde N_ϵ é o menor inteiro positivo tal que $1/2^{N_\epsilon} < \epsilon$. Pela construção de h,

$$h(x), h(y) \in \bigcap_{j=1}^{N\epsilon} \phi_2^{-j+1}(I_{a_j}) = \overline{E_{N_\epsilon,p}},$$

para algum inteiro $0 \leq p < 2^{N_\epsilon} - 1$. Assim,

$$d(h(x), h(y)) \leq |E_{N_\epsilon,p}| = \left| \left(\frac{p}{2^{N_\epsilon}}, \frac{p+1}{2^{N_\epsilon}} \right) \right| = 1/2^{N_\epsilon} < \epsilon.$$

Logo, h é contínua e ϕ_2 é fator de σ.

Assim, as propriedades dinâmicas das órbitas de $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ são herdadas por $\phi_2 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$.