

6

Número Máximo de Thurston-Bennequin para nós de 2-pontes

Pelas considerações feitas no capítulo anterior, sabemos que para um tipo de nó, somos capazes, através da estabilização, de diminuir sem limites o número de Thurston-Bennequin sem mudar a classe de isotopia ambiente. Contudo, o conjunto dos possíveis números de Thurston-Bennequin dos nós legendreanos isotópicos a um nó subjacente é limitado superiormente. Então, é natural tentar encontrar o número máximo de Bennequin, $\max \beta$, para uma classe de nós legendreanos.

Vários estudos com a finalidade de estabelecer este número foram realizados. A primeira cota superior foi provada por Bennequin (1) em termos do gênero do nó K . Desde então, outras cotas superiores tem sido encontradas, em particular em termos dos polinômios de HOMFLY e Kauffman.

O objetivo de encontrar um número mais próximo do número máximo de Thurston-Bennequin de uma classe de nós legendreanos isotópicos a um nó topológico levaram matemáticos como Ng, Ferrand, Rudolph, Bennequin, entre outros, a nos fornecerem diversas desigualdades, ver (15).

Veremos neste capítulo um importante e recente resultado obtido por Ng, para nós de 2-pontes, que inclui todos os nós primos com até 9 e 10 cruzamentos, resultado este para nós primos com maior número de cruzamentos até então obtido.

Embora o título deste capítulo se refira a nós, nos referiremos a nós ou enlaces apenas por nós, e ainda ao número de Thurston-Bennequin simplesmente por número de Bennequin. É importante mencionar que consideraremos os nós de 2-pontes em forma canônica, e mantendo a notação do capítulo 3, nos referiremos aos nós de 2-pontes em forma canônica por C . Lembremos ainda que os nós serão representados por seus diagramas. Nosso objetivo neste capítulo é provar o teorema do número máximo de Bennequin para nós de 2-pontes.

Teorema 6.0.8 Teorema do Número Máximo de Thurston-Bennequin para nós de 2-pontes

Se K é um nó de 2-pontes orientado, então

$$\max \beta(K) = \text{graumin}_a F_K(a, x) - 1$$

Antes de iniciarmos a demonstração do teorema 6.0.8, apresentaremos os resultados utilizados na demonstração.

6.1

Forma racional legendreana

Seja $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ um nó de 2-pontes em forma racional, com todos os a_i 's > 0 , o qual corresponde a um número racional $\frac{p}{q}$, que tem expansão em fração contínua dada por

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = a_1 + \frac{1}{-a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{-a_4 + \ddots + \frac{1}{\cdots + \frac{1}{(-1)^{n-1}a_n}}}}}$$

onde $\text{mdc}(p, q) = 1$.

Considere as torções horizontais (figura 6.1), como no capítulo 3.



Figura 6.1: Torção horizontal positiva e negativa respectivamente.

Para mais detalhes sobre nós de 2-pontes e nós racionais, ver capítulo 3.

Nosso objetivo é encontrar adequadamente um mergulho legendreano de um nó de 2-pontes, tal que seu diagrama esteja na forma racional.

Proposição 6.1.1 Se $\frac{1}{[a_1, a_2, \dots, a_n]} - \frac{1}{[b_1, b_2, \dots, b_n]} \in \mathbb{Z}$, então os nós de 2-pontes $C_1(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $C_2(b_1, b_2, \dots, b_n)$ são isotópicos.

Prova. Sejam $C_1(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $C_2(b_1, b_2, \dots, b_n)$ nós de 2-pontes associados aos números racionais $\frac{p}{q}$ e $\frac{p'}{q'}$ respectivamente, tais que $\frac{p}{q} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ e

$\frac{p'}{q'} = [b_1, b_2, \dots, b_n]$. Suponha que,

$$\frac{q}{p} - \frac{q'}{p'} = \frac{1}{[a_1, a_2, \dots, a_n]} - \frac{1}{[b_1, b_2, \dots, b_n]} = k \in \mathbb{Z}.$$

Do fato das frações serem frações reduzidas e a diferença entre as frações ser um inteiro, segue que $p = p'$. Assim $\frac{q - q'}{p} = k \in \mathbb{Z}$, o que implica que $q - q' = pk$. Portanto, $q \equiv q' \pmod{p}$. Concluimos então pelo teorema 3.2.4 que os nós $C_1(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $C_2(b_1, b_2, \dots, b_n)$ são isotópicos. ■

Ressaltamos que esta proposição garante somente a condição suficiente para equivalência de nós, porém a condição necessária para que dois tais nós sejam isotópicos é mais complicado e não nos interessa aqui.

Definição 6.1.2 Dizemos que um nó de 2-pontes $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ está em forma racional legendreana, se $a_i \geq 2$ para todo i .

Embora $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ corresponda a um nó legendreano, sempre que $a_i \geq 1$ para todo i , consideraremos somente os casos em que $a_i \geq 2$. De fato, se um dos $a_i = 1$, então sem dificuldades vemos pela projeção frontal, que o nó legendreano não maximiza o número de Bennequin, o que não nos interessa.

Qualquer diagrama de nó legendreano na forma racional é facilmente convertido em um diagrama frontal (isto é, projeção no plano xz) de um nó legendreano, através da substituição das quatro tangentes verticais por cúspides, como podemos observar na Figura 6.2. Desde que os cruzamentos na projeção frontal são determinados localmente, sendo os segmentos com menor inclinação o segmento que passa por cima dos de maior inclinação, um diagrama de nó em forma racional legendreana é a projeção frontal de um único nó legendreano. Podemos observar na Figura 6.2 a correspondência entre forma racional legendreana (neste caso, $T(2,2,3)$) e a projeção frontal do nó de mesmo tipo ambiente.

Lema 6.1.3 Qualquer nó de 2-pontes pode ser expressado como um diagrama em forma racional legendreana.

Prova. Seja $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ um nó de 2-pontes em forma racional associado ao número racional $\frac{p}{q}$; escrevemos $[a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$. Temos então que $\left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$. Além disso,

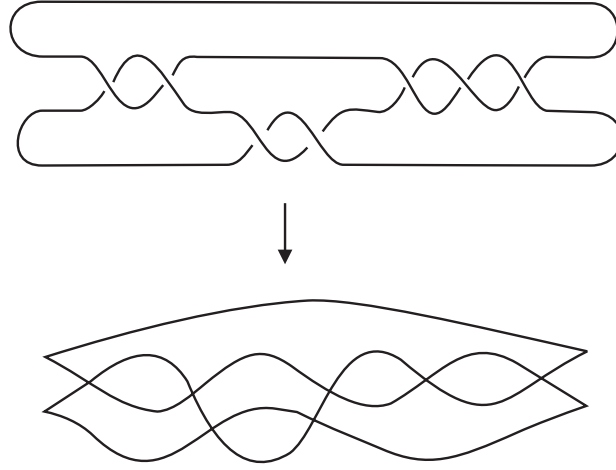


Figura 6.2: Correspondência entre um diagrama em forma racional legendreana e a projeção frontal de um nó legendreano do mesmo tipo topológico.

$$\frac{1}{\frac{p}{q}} - \frac{1}{\frac{p}{q - \lfloor \frac{q}{p} \rfloor p}} = \frac{q}{p} - \frac{q - \lfloor \frac{q}{p} \rfloor p}{p} = \frac{q - (q - \lfloor \frac{q}{p} \rfloor p)}{p} = \frac{\lfloor \frac{q}{p} \rfloor p}{p} = \lfloor \frac{q}{p} \rfloor \in \mathbb{Z}$$

e

$$0 < \frac{q}{p} - \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor < 1 \implies \frac{p}{\frac{q}{p} - \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor} > 1. \quad (6-1)$$

Portanto, pela proposição 6.1.1, $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ é isotópico a qualquer nó de 2-pontes com diagrama na forma racional associado a fração $r = \frac{p}{q - \lfloor \frac{p}{q} \rfloor p} > 1$. Observe que, se $\frac{q}{p}$ é um inteiro então C é o nó trivial e não é nó de 2-pontes.

Agora defina a sequência $x_1, x_2, \dots$ de número racionais por $x_1 = r, \dots, x_{i+1} = \frac{1}{\lceil x_i \rceil - x_i}$. A sequência termina em x_m , quando x_m é um inteiro, pois x_m é uma fração contínua. Faça $b_i = \lceil x_i \rceil$ e observe que $r = [b_1, b_2, \dots, b_m]$. Suponha agora que $b_i < 2$ para algum i , e $r > 0$. Assim,

$$b_i = \left\lceil \frac{1}{\lceil x_{i-1} \rceil - x_{i-1}} \right\rceil < 2 \implies \left\lceil \frac{1}{\lceil x_{i-1} \rceil - x_{i-1}} \right\rceil = 1 \implies \lceil x_{i-1} \rceil - x_{i-1} \geq 1$$

o que é uma contradição. Logo $b_i \geq 2$ para todo i .

Concluimos que $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ é isotópico a $S(b_1, b_2, \dots, b_m)$, que está em forma racional legendreana. ■

6.2

Demonstração do Teorema do Número Máximo de Thurston-Bennequin para nós de 2-pontes

Teorema 6.2.1 (Ver (39)) *Seja $F_K(a, x)$ o polinômio de Kauffman de um nó K orientado, então*

$$\beta(K) \leq \text{graumin}_a F_K(a, x) - 1.$$

O teorema foi demonstrado por Fuchs e Tabachnikov em (39), utilizando um invariante para nós legendreanos em termos do polinômio de Kauffman, definido por Rudolph (34) em 1990. Este teorema nos dá uma cota superior para o número de Bennequin, a qual mostraremos ser o número máximo de Bennequin para nós legendreanos isotópicos ao nó de 2-pontes.

Lema 6.2.2 *Seja $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ um nó de 2-pontes, onde $a_1, a_n \geq 1$ e $a_i \geq 2$ para $2 \leq i \leq n-1$, então $\text{graumin}_a R_{C(a_1, a_2, \dots, a_n)}(a, x) = -1$.*

Prova. Lembremos que o polinômio de Kauffman de um nó de 2-pontes em forma racional C (abreviamos $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$) é definido por $F_C(a, x) = a^{w(t)} R_C(a, x)$ (aqui substituímos a por $\frac{1}{a}$), onde $R_C(a, x)$ é definido como no teorema 3.3.1, ou seja,

$$R_{C(a_1, a_2, \dots, a_n)}(a, x) = \frac{1}{a} v^t M^{-a_1-1} S M^{-a_2-1} S \dots M^{-a_n-1} S w,$$

onde t denota transposta e

$$M = \begin{pmatrix} x & -1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \omega = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ \frac{a^2+1}{x} - a \end{pmatrix}.$$

Note que, da forma que $R_C(a, x)$ é definido, nenhum dos termos M^{-1} , $M^{-1}S$ e w contém potências negativas de a . Assim, o lema ficará provado se $f(x) \neq 0$, onde

$$f(x) = (v^t M^{-a_1} (M^{-1} S) M^{-a_2} (M^{-1} S) \dots M^{-a_n} (M^{-1} S) w)|_{a=0}.$$

Após um pequeno cálculo obtemos as matrizes:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & x & ax \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad (M^{-2}SM^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & ax & -ax^2 - a + ax^2 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Defina as matrizes auxiliares:

$$A = M^{-1}|_{a=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = (M^{-2}SM^{-1})|_{a=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A partir das matrizes definidas acima, obtemos:

$$(ASw)|_{a=0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{x}Au = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (Auv^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$(ASw)|_{a=0} = \frac{1}{x}Au \quad e \quad B = Auv^t$$

Nosso objetivo agora é escrever $f(x)$ em termos das matrizes obtidas. Vejamos:

$$\begin{aligned} f(x) &= (v^t M^{-a_1} (M^{-1}S) M^{-a_2} (M^{-1}S) \dots M^{-a_n} (M^{-1}S) \omega)|_{a=0} \\ &= (v^t (M^{-1})^{a_1-1} M^{-2} S M^{-1} (M^{-1})^{a_2-2} M^{-2} S \dots M^{-a_n} (ASw))|_{a=0} \\ &= (v^t A^{a_1-1} B A^{a_2-2} B A^{a_3-2} \dots (ASw))|_{a=0} \\ &= (v^t A^{a_1-1} (Auv^t) A^{a_2-2} (Auv^t) A^{a_3-2} \dots (\frac{1}{x}Au))|_{a=0} \\ &= (v^t (A^{a_1} u v^t) (A^{a_2-1} u v^t) (A^{a_3-1} u v^t) \dots (\frac{1}{x}Au))|_{a=0} \\ &= \frac{1}{x} (v^t A^{a_1} u) (v^t A^{a_2-1} u) (v^t A^{a_3-1} u) \dots (v^t A^{a_{n-1}-1} u) (v^t A^{a_n} u). \end{aligned}$$

Por hipótese $a_i \geq 2$ para $2 \leq i \leq n-1$, o que garante que $(v^t A^{a_k-1} u)$ é não nulo para $2 \leq k \leq (n-1)$; dessa forma precisamos somente verificar que os termos $(v^t A^{a_1} u)$ e $(v^t A^{a_n} u)$ são não nulos.

Considere a sequência $f_k(x) = v^t A^k u$. Afirmamos que para todo $k \geq 1$, $f_k(x)$ tem grau $(k-1)$ e, portanto, é não nulo.

Considere $f_1(x) = v^t A u$ e $f_2(x) = v^t A^2 u$, então

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$f_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ -x & x^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x.$$

Portanto, $f_1(x) = 1$ tem grau 0 e $f_2(x) = x$ tem grau 1. Agora basta mostrar que $f_k(x)$ tem grau $(k-1)$ para $k \geq 3$. Considere a função

$$x f_{k+1}(x) - f_k(x) = x v^t A^{k+1} u - v^t A^k u = (x v^t A - v^t) A^k u.$$

Temos que,

$$(x v^t A - v^t) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & x & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$(v^t A^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & x & 0 \\ -x & x^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & x & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, $(x v^t A - v^t) A^k u = (v^t A^2) A^k u$ e, portanto, $f_{k+2}(x) = x f_{k+1}(x) - f_k(x)$. Então, mostrar que $f_k(x)$ tem grau $(k-1)$ para todo $k \geq 3$ é o mesmo que mostrar que $f_{k+2}(x)$ tem grau $(k+1)$ para todo $k \geq 1$.

Primeiramente, se $k=1$ temos que $f_3(x) = x f_2(x) - f_1(x) = x^2 - 1$ e, portanto, $f_3(x)$ tem grau $(1+1)$. Suponha que $f_{k+2}(x) = x f_{k+1}(x) - f_k(x)$ tem grau $(k+1)$, para algum $1 \leq k \leq l$. Seja $f_{l+3}(x) = x f_{l+2}(x) - f_{l+1}(x)$; por hipótese de indução $f_{l+2}(x)$ tem grau $(l+1)$, e portanto, $x f_{l+2}(x)$ tem grau $(l+2)$. Como o grau $f_{l+1}(x)$ é menor que o grau de $f_{l+2}(x)$, segue que $f_{l+3}(x)$

tem grau $l+2$. Assim, para todo $k > 1$, $f_{k+2}(x)$ tem grau $(k+1)$.

Concluimos que $f(x)$ é não nulo e, portanto, o

$$\text{graumin}_a R_{C(a_1, a_2, \dots, a_n)}(a, x) = -1.$$

■

Prova do teorema 6.0.8:

Prova. Seja K um nó de 2-pontes e $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ uma forma racional legendreana associada ao nó K , que chamaremos de K' . Como K' é nó de 2-pontes, o seu diagrama possui 4 cúspides, e portanto, podemos escrever a equação do número de Bennequin da seguinte forma: $\beta(K') = (C_+ - C_-) - 2$. Assim,

$$\begin{aligned} \beta(K') &= (C_+ - C_-) - 2 \\ &= w(K') - 2 \\ &= (\text{graumin}_a F_{K'}(a, x) - \text{graumin}_a L_{K'}(a, x)) - 2 \\ &= \text{graumin}_a F_{K'}(a, x) - 1, \end{aligned}$$

pelo Lema 6.2.2.

Sendo K' isotópico topologicamente a K , então pelo Teorema 6.2.1, concluímos que $\max \beta(K) = \text{graumin}_a F_K(a, x) - 1$. ■