5
Invariantes de nós legendreanos

Vimos nos primeiros capítulos, os conceitos de invariante e de isotopia legendreana. Nosso objetivo neste, é apresentar invariantes de isotopia legendreana que distinguem estas classes. Então, para nós legendreanos introduzimos dois clássicos invariantes de isotopia legendreana. São eles o número de Bennequin e o número de Maslov, que podem ser usados para distinguir classes de isotopia de nós legendreanos na mesma classe de isotopia topológica.

Embora não seja sempre essencial, consideraremos nesta seção nós legendreanos orientados.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510532/CA

5.1
Números de Bennequin e Maslov

5.1.1
Número de Thurston-Bennequin

Para facilidade de expressão nos referiremos ao invariante de Thurston-Bennequin simplesmente por invariante de Bennequin.

Dado um nó legendreano K, o invariante de Bennequin mede intuitivamente o número de rotações dos planos de contato ξ em torno de K.

Mais rigorosamente, este invariante é definido por uma trivialização de um fibrado normal ν de K. Uma identificação fixa de ν com $K \times \mathbb{R}^2$ é chamada uma *trivialização* de ν ou um *referencial* de K. Um nó legendreano tem um referencial canônico, desde que ξ_x e ν_x intersectam-se transversalmente $(T_xK \subset \xi_x)$ gerando uma fibrado em linha, $l_x = \xi_x \cap \nu_x$. O fibrado em linha dá um referencial de ν sobre K. Este referencial é o *referencial de Thurston-Bennequin* de K.

Se o fibrado normal tem um outro referencial $\mathcal{F}$ então nós podemos determinar um número para o referencial de Thurston-Bennequin de K. Este número $t\omega(K, \mathcal{F})$ é justamente a rotação de l com respeito a $\mathcal{F}$ e é chamado de rotação de K com respeito a $\mathcal{F}$. Se K é homólogo a zero, então K tem um referencial dado por uma superfície de Seifert, ou seja, o referencial que é dado pelo campo vetorial que aponta para dentro da superfície de Seifert. A

rotação de K com respeito a este referencial será chamada de *invariante de Thurston-Bennequin* de K e será denotada por $\beta(K)$.

Definição 5.1.1 *Seja v um campo de vetores não nulo ao longo de K em $\nu \cap \xi$ e seja $K^{'}$ uma cópia de K obtida por um movimento de K na direção de v. O número de Thurston-Bennequin, $\beta(K)$, é o número de enlaçamento entre K e $K^{'}$, isto é, $\beta(K) = lk(K, K^{'})$.*

Observação 5.1.2 *Se $v^{'}$ é um campo de vetores não nulo ao longo de K transversal a ξ e $K^{''}$ é obtido de K por um movimento de K na direção de $v^{'}$ então $\beta(K) = lk(K, K^{''})$.*

Figura 5.1: Nó K(preto) e nó $K^{'}$ (cinza) obtido de K por um movimento na direção de v.

Seja K um nó legendreano na variedade de contato (M,ξ), onde ξ tem orientação transversal. Sendo K orientado, cada curva transversal possui orientação canônica. Se movimentarmos o nó K na direção positiva ou negativa do campo de vetores normais v de K, de modo que v é um referencial de K, obteremos dois novos nós K_+ e K_-, respectivamente. Note que os nós K_+ e K_- são transversais a ξ e, consequentemente, K_+ possui a orientação de K e K_- a orientação oposta de K .

Considere agora nós legendreanos em $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$. Interpretemos o invariante de Thurston-Bennequin em termos das projeções frontal e lagrangeana.

Figura 5.2: Cruzamento positivo (+), na projeção frontal.

Figura 5.3: Cruzamento negativo(-), na projeção frontal.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510532/CA

Proposição 5.1.3 *Seja K um nó legendreano orientado em $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$. Na projeção frontal tem-se*

$$\beta(K) = Cr_+(K) - Cr_-(K) - \frac{1}{2}C(K), \tag{5-1}$$

onde $Cr_+(K)$ $(Cr_-(K))$ é o numero de cruzamentos positivos (negativos) da projeção $\pi_F(K)$, $C(K)$ é o número de cúspides.

Prova. Seja $v = \frac{\partial}{\partial z}$, para qualquer nó legendreano K, v então v é um campo de vetores transversais a ξ ao longo de K (como na observação 5.1.2). Assim $\beta(K)$ é o número de enlaçamento de K com uma cópia $K^{'}$ de K obtida por um ligeiro movimento na direção z. Então, a projeções frontais de K e $K^{'}$ são como na Figura 5.1. Agora, o número de enlaçamento de K e $K^{'}$ é a metade do número (contados os sinais) de interseções entre eles. Lembremos que K e $K^{'}$ são orientados. Observe que para cada cruzamento positivo (negativo) da projeção de K existirá dois cruzamentos positivos (negativos) de K e $K^{'}$ e para cada cúspide positiva ou negativa de K existirá um cruzamento negativo de K e $K^{'}$. Assim, na projeção frontal temos, $\beta(K) = Cr_+(K) - Cr_-(K) - \frac{1}{2}C(K)$. ■

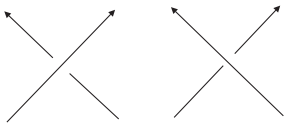

Figura 5.4: Cruzamento positivo (+) e negativo (-) respectivamente.

Proposição 5.1.4 *Seja K um nó legendreano em $\mathbb{R}^3$. Na projeção lagrangeana tem-se*

$$\beta(K) = Cr_+ - Cr_-$$

Prova. Na projeção lagrangeana K e $K^{'}$ projetam o mesmo diagrama. De fato, $\beta(K)$ é o número de enlaçamento de K e $K^{'}$. Na projeção lagrangeana se ao fazer o ligeiro movimento para obter $K^{'}$, e este não intersectar K, então o número de enlaçamento é zero. Além disso, cada cruzamento no diagrama de K contribui (± 1) para o número de enlaçamento. Daí segue o resultado. ■

Corolário 5.1.5 *O número de Thurston-Bennequin independe da orientação do nó K.*

Exemplo 5.1.6 *A Figura 5.5 mostra as projeções lagrangeana e frontal de um nó trevo. A projeção lagrangeana possui 3 cruzamentos positivos e 2 negativos, logo o número de Bennequin do nó trevo T, é $\beta(K)$= 3 - 2 =1. A projeção frontal possui 4 cúspides e 3 cruzamentos positivos, logo $\beta(T) = 3 - \frac{4}{2} = 1$.*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510532/CA

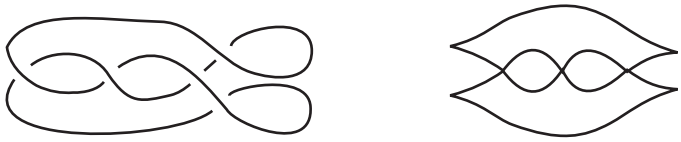

Figura 5.5: Projeção lagrangeana e frontal do nó trevo T.

Teorema 5.1.7 *O número de Bennequin β é um invariante de isotopia legendreana.*

Prova. Analisaremos a veracidade deste teorema examinando os três movimentos de Reidemeister.

Se o primeiro movimento é realizado, ou duas cúspides e um cruzamento positivo são perdidos, produzindo uma mudança de zero, ou duas cúspides e um cruzamento positivo são acrescentados, produzindo uma mudança de zero. Assim, o primeiro movimento de Reidemester não altera o número de Bennequin.

Se o segundo movimento de Reidemeister é realizado, um cruzamento positivo e um negativo são perdidos, produzindo uma mudança de zero.

Se o terceiro movimento de Reidemeister é realizado, um cruzamento positivo e um negativo são perdidos, e um cruzamento positivo e um negativo são acrescentados também produzindo uma mudança de zero. ■

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510532/CA

5.1.2 Número de Maslov

O segundo e último invariante clássico de nós legendreanos K é o número de Maslov. Este invariante é bem definido para nós homólogos a zero , assim assumimos que $K = \partial\Sigma$ onde Σ é um mergulho de uma superfície orientável. Os planos de contato, quando restrito a Σ ($\xi|_\Sigma$), formam um fibrado trivial bidimensional (qualquer fibrado dois planos orientável é trivial sobre uma superfície com bordo). Esta trivialização de $\xi|_\Sigma$ induz uma trivialização $\xi|_K = K \times \mathbb{R}^2$. Lembremos que K tem uma orientação, então seja v um campo de vetores não nulo tangentes a K apontando na direção da orientação de K. O campo de vetores v está em $\xi|_K = K \times \mathbb{R}^2$ e usando esta trivialização, nós podemos pensar em v como uma trajetória de vetores não nulos em $\mathbb{R}^2$, tal que ela tem um número de rotação. Este número de rotação é o número de Maslov de K. Note que o número de rotação depende da orientação de K e muda de sinal se a orientação é trocada.

Considere agora nós legendreanos em $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$. Interpretemos o invariante de Maslov em termos das projeções frontal e lagrangeana.

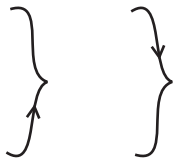

Figura 5.6: Cúspides positivas e negativas, respectivamente.

Proposição 5.1.8 *Seja K um nó legendreano em $\mathbb{R}^3$. Na projeção frontal tem-se*

$$\mu(K) = \frac{1}{2}(C_+ \ - \ C_-),$$

onde $C_+(C_-)$ é o número de cúspides positivas (negativas).

Prova. Seja $\omega = \frac{\partial}{\partial y}$. Esta é uma parte não nula de ξ e assim pode ser usada para trivializar $\xi|_K$ independente da superfície de Seifert de K. Agora, para calcular o número de rotações de K, precisamos saber quantas vezes o campo de vetores (não nulo) ν tangente a K, pensando em $\mathbb{R}^2$ pela trivialização dada por ω, rotaciona em torno da origem de $\mathbb{R}^2$. Isto é equivalente a contar quantas vezes v e ω apontam na mesma direção, chamaremos isto de interseção de ν e ω. O sinal da interseção é determinado como anterioremente (+1 e -1), veja as Figuras 5.2 e 5.3. Nas cúspides na projeção frontal, v aponta na direção de $\pm\omega = \frac{\partial}{\partial y}$. Pode-se facilmente verificar que a interseção será positiva quando a cúspide é positiva e negativa quando a cúspide é negativa. Além disso, o processo acima conta o número de vezes que v intersecta $\pm\omega$, então dividimos por dois e obtemos o número de Maslov. ■

Exemplo 5.1.9 *O número de Maslov do nó trevo T (Figura 5.5) é $\mu(T) = \frac{1}{2}(2-2) = 0$.*

Proposição 5.1.10 *Seja K um nó legendreano em $\mathbb{R}^3$. Na projeção lagrangeana tem-se*

$$\mu(K) = \textit{número de rotações de } \pi_L(K).$$

Prova. Seja $\omega = \frac{\partial}{\partial y}$. Na projeção lagrangeana ω projeta $\frac{\partial}{\partial y}$ e assim o número de rotação é facilmente visto como o número de rotação do vetor tangente a $\pi_L(K)$. ■

Proposição 5.1.11 *O número de Maslov de um nó K, $\mu(K)$, é um invariante de isotopia legendreana.*

Prova. Desde que o segundo e o terceiro movimento de Reidemeister não alteram o número de cúspides positivas ou negativas, precisamos checar a

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510532/CA

invariância do primeiro movimento. Considerando a orientação, o primeiro movimento de Reidemeister ou remove ou adiciona uma cúspide positiva e uma cúspide negativa. Nem a adição nem a remoção muda o número de Maslov . Portanto o número de Maslov é um invariante de isotopia legendreana. ■

Exemplo 5.1.12 *Seja K um nó legendreano com número de Maslov igual a zero e seja $K^{'}$ sua imagem pelo difeomorfismo $f(x, y, z) = (x, -y, -z)$. Sendo f uma rotação do espaço, $K^{'}$ é topologicamente isotópico a K, além disso $\mu(K^{'}) = -\mu(K) = 0$ e $\beta(K^{'}) = \beta(K)$. Pergunta-se K e $K^{'}$ são isotópicos por isotopia legendreana ?.*

Definição 5.1.13 *A reflexão legendreana $R(K)$ é a imagem de um nó legendreano K pelo difeomorfismo $(x, y, z) \mapsto (x, -y, -z)$.*

Desde que a reflexão legendreana é somente uma rotação de um nó no espaço, ela tem o mesmo tipo de isotopia topológica que a do próprio nó.

Proposição 5.1.14 *A reflexão legendreana $R(K)$ e K não são isotopia legendreana.*

Para a prova deste teorema ver (4), em que Chekanov mostrou este resultado usando outro tipo de invariante legendreano, as álgebras graduadas diferenciais ou DGAs.

Desde que os cruzamentos de um nó legendreano são determinados pelas inclinações dos segmentos em cada cruzamento, a imagem refletida de um nó legendreano troca essas inclinações. Isto pode ser realizado pela rotação do diagrama frontal por um ângulo de $\frac{\pi}{2}$, e então, substituindo os pontos de tangência vertical por cúspides e vice-versa.

5.2 Estabilização

Dado um nó legendreano K, existe um modo simples de se obter outro nó legendreano com o mesmo tipo de nó topológico; através da estabilização. Nosso principal objetivo é mostrar que, através da estabilização, é possível diminuir o número de Bennequin de um nó legendreano e assim introduziremos o conceito de cota superior e portanto o número máximo de Bennequin. Descrevemos a estabilização na estrutura de contato canônica em $\mathbb{R}^3$, ou seja, em $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510532/CA

A estabilização de um nó pela projeção frontal é realizada da seguinte maneira: Se um segmento do nó K na projeção frontal de K está em linha reta, então a estabilização de K é obtida acrescentando zig-zags como mostra a figura 5.7. Deve-se notar que o coeficiente angular aproximado dos zig-zags é próximo ao valor de y. A essa operação chamamos de estabilização. Se as cúspides a serem acrescentadas são positivas (negativas), a *estabilização* é dita *positiva* (negativa) e denotada por $S_+(S_-)$.Note que, se um zig-zag com duas cúspides é inserido, então

$$\beta(S_\pm(K)) = \beta(K) - 1$$

$$\mu(S_\pm(K)) = \mu(K) \pm 1.$$

É importante observar que a operação de estabilização é bem definida, ou seja, não depende do ponto em que a estabilização é feita. Em $\mathbb{R}^3$, observe que os zig-zags podem ser feitos passando por cúspides e cruzamentos na projeção frontal. Além disso, pelo teorema de Darboux, a operação de estabilização pode ser estendida a qualquer variedade de contato de dimensão 3.

Analogamente, temos a estabilização de um nó pela projeção lagrangeana. Um importante resultado segue abaixo.

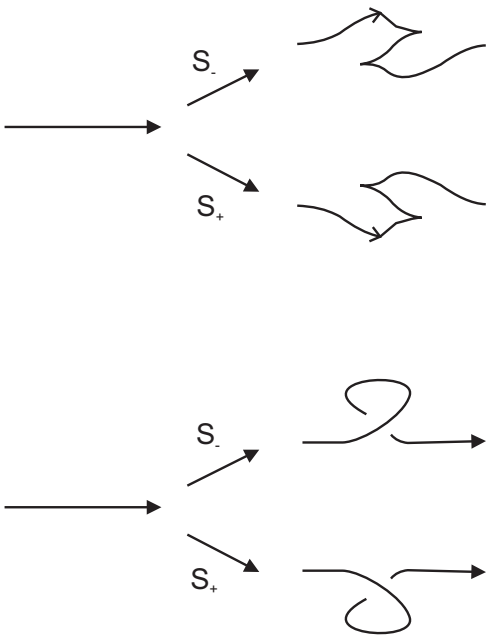

Figura 5.7: Estabilizações nas projeções frontal (superior) e lagrangeana (inferior).

Teorema 5.2.1 (Ver (39) 2.7) *Dado dois nós legendreanos K_1 e K_2 em $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$ isotópicos topologicamente, então depois de cada um ser estabilizado um certo número de vezes, eles serão isotópicos por isotopia legendreana.*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510532/CA

Assim, a classificação topológica de nós é equivalente a classificação estável legendreana de nós. Verificamos que os movimentos de Reidemester para nós topológicos podem ser alterados por movimentos de Reidemester para nós legendreanos após um número suficiente de estabilizações e assim constatamos o teorema.

Note que, usando a estabilização fazemos com que nós legendreanos tenham o número de Bennequin negativo. Basta observar que o número de Bennequin dado pela Equação 5-1 diminui a medida que o número de cúspides aumenta, então basta fazer a estabilização acrescentando um número suficiente de cúspides.

Veremos que, em estruturas de contato tensas, existem cotas superiores do número de Bennequin para nós legendreanos com o mesmo tipo de nó topológico subjacente.

Enquanto estabilizar um nó é relativamente simples, não é necessariamente fácil desestabilizar um nó.

Definição 5.2.2 *Seja K um nó legendreano. Dizemos que K é desestabilizável se existe um nó legendreano $K^{'}$ tal que $K = \pm S(K^{'})$.*

5.3
Cotas superiores

Na estrutura de contato canônica em $\mathbb{R}^3$, ou mais geralmente em uma estrutura de contato tensa, existem muitas cotas superiores de invariantes clássicos de nós legendreanos e transversais. A busca pela menor cota superior, ou seja, o número máximo, do invariante de Bennequin, resultou em interessantes desigualdades.

Como nosso interesse são os nós legendreanos, nossa abordagem se resume a cotas superiores de invariantes de nós legendreanos.

Proposição 5.3.1 (Ver (24)) *Seja T um nó transversal em $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$, então $\beta(T) \leq -\chi(\Sigma_T)$, onde $\chi(\Sigma_T)$ é a característica de Euler da superfície de Seifert do nó T.*

Teorema 5.3.2 *Sejam K nó legendreano em $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$, K_+ e K_- como acima. Então*

$$\beta(K_+) = \beta(K) + \mu(K)$$

$$\beta(K_-) = \beta(K) - \mu(K).$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510532/CA

Prova. Sejam X um campo de vetores não nulo. O número $\beta(K_+)$ é o número de enlaçamento de $K_+ = K + \epsilon v$ e $K_+ + \epsilon^{'} X = K + \epsilon v + \epsilon^{'} X$, para $\epsilon^{'} > 0$ pequeno. Note que desde que v é perpendicular a K, o número $\beta(K)$ é o número de enlaçamento de K e $K + \epsilon v$, e além disso é também o número de enlaçamento de $K + \epsilon^{'} X$ e $K + \epsilon v + \epsilon^{'} X$. Assim, $\beta(K_+) - \beta(K)$ é o número de rotação de v com respeito a X, que é igual a $\mu(K)$. Isto prova a igualdade $\beta(K_+) = \beta(K) + \mu(K)$. A prova da segunda igualdade é análoga. ■

Corolário 5.3.3 *Seja K nó legendreano em $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$ com superfície de Seifert Σ_K. Então*

$$\beta(K) + |\mu(K)| \leq -\chi(\Sigma_K) \tag{5-2}$$

Prova. Do fato de K_+ e K_- serem nós transversais a ξ_{can} e isotópicos a K, temos que

$$\beta(K) = \beta(K_+) + \mu(K) \quad \text{e} \quad \beta(K) = \beta(K_-) - \mu(K).$$

Pelo teorema 5.3.2, e pela proposição 5.3.1 segue que

$$\beta(K) \leq -\chi(K) - \mu(K) \;\; e \;\; \beta(K) \leq -\chi(K) + \mu(K)$$

logo,

$$\beta(K) \leq -\chi(\Sigma_K) - |\mu(K)|$$

■

Corolário 5.3.4 *Seja K um nó legendreano topologicamente trivial em $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$, então $\beta(K) < 0$.*

Prova. Como K é nó trivial, temos que $\chi(\Sigma_K) = 1$. Pelo Corolário 5.3.3 $\beta(K) \leq -1 - |\mu(K)| < 0$. ■

Teorema 5.3.5 (Ver (13)) *Dada uma estrutura de contato ξ, são equivalentes:*

(i) ξ é supertorcida.

(ii) Existe um nó legendreano não trivial com invariante de Thurston-Bennequin igual a zero.

(iii) Existe um nó transversal não trivial com número de enlaçamento igual a zero.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510532/CA

Definição 5.3.6 *Seja $\mathcal{K}$ um tipo de nó topológico em $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ classe de nós legendreanos isotópicos ao tipo de nó $\mathcal{K}$. Definimos o número máximo de Thurston-Bennequin por:*

$$\max\beta(K) = \max\{\beta(K); K \in \mathcal{L}(\mathcal{K})\}$$

Teorema 5.3.7 *Seja K um nó legendreano, então:*

1) $\beta(K) + |\mu(K)| \leq 2g(K)$;
2) $\beta(K) + |\mu(K)| \leq \text{graumin}_a P_K$;
3) $\beta(K) \leq \text{graumin}_a F_K$,

onde $g(K)$ denota o gênero de K e $\text{graumin}_a P_K$ ($\text{graumin}_a F_K$) *denota o grau mínimo da variável a do polinômio P_K de HOMFLY (F_K de Kauffman).*

As demonstrações das desigualdades deste teorema encontram-se em (1) e (39), Teorema 2.3.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510532/CA