

## 4

### Exemplos de Superfícies Mínimas Cíclicas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

No modelo do hiperbolóide de  $\mathbb{H}^2$ , as geodésicas são curvas obtidas pela intersecção de planos vetoriais de  $\mathbb{R}_1^3$  com o hiperbolóide, confira em [KU], e as curvas de curvatura constantes são intersecção de planos afins com o hiperbolóide. Nesse capítulo descreveremos várias famílias de exemplos de superfícies mínimas cíclicas em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , essas famílias foram descobertas e classificadas por Laurent Hauswirth em [HA].

#### 4.1

##### Exemplos de superfícies mínimas folheadas por geodésicas

##### 4.1.1

###### Plano Hiperbólico horizontal

Seja  $\mathbb{H}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  parametrizada localmente por:

$$X : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longmapsto \left( \begin{pmatrix} \cosh v \\ \sinh v \cos u \\ \sinh v \sin u \end{pmatrix}, 0 \right)$$

$S$  é totalmente geodésica (isto é, a segunda forma fundamental anula-se) portanto ela é mínima.

##### 4.1.2

###### O Cilindro

Seja o produto de uma geodésica de  $\mathbb{H}^1$  por  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , é parametrizado localmente por:

$$X : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longmapsto \left( \begin{pmatrix} \sinh v \\ \cosh v \\ 0 \end{pmatrix}, u \right)$$

ela é totalmente geodésica, logo é mínima.

### 4.1.3

#### O Helicóide

Seja  $S$ , o helicóide em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  parametrizado localmente por:

$$X_{ab} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longmapsto \left( \begin{pmatrix} \cosh v \\ \sinh v \cos au \\ \sinh v \sin au \end{pmatrix}, bu \right)$$

Apresentaremos agora dois casos limites do helicóide em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

a)  $X_{a0}$  - gira e não sobe, obtemos assim o hiperbolóide  $\mathbb{H}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . (cf. seção 4.1.1)

b)  $X_{0b}$  - sobe e não gira, obtemos o cilindro. (cf. seção 4.1.2)

Agora iremos provar que essa superfície é mínima em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , para isso calculamos abaixo as derivadas primeiras de  $S$ :

$$X_u = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -a \sinh v \sin au \\ \sinh v \cos au \end{pmatrix}, b \right)$$

$$X_v = \left( \begin{pmatrix} \sinh v \\ \cosh v \cos au \\ \cosh v \sin au \end{pmatrix}, 0 \right)$$

com isso obtemos a primeira forma fundamental:

$$E = a^2 \sinh^2 v + b$$

$$F = 0$$

$$G = 1$$

Em seguida temos as derivadas segundas:

$$X_{uu} = (0, -a^2 \sinh v \cos au, -a^2 \sinh v \sin au, 0)$$

$$X_{uv} = (0, -a \cosh v \sin au, a \cosh v \cos au, 0)$$

$$X_{vv} = (\cosh v, \sinh v \cos au, \sinh v \sin au, 0)$$

Seja o vetor

$$N = (0, -a \sinh v \sin au, a \sinh v \cos au, t),$$

onde  $t$  é escolhido de maneira que  $\mathbf{N}$  seja normal a superfície, então os coeficientes em relação  $\mathbf{N}$  da segunda forma fundamental são:

$$\begin{aligned}\bar{e} &= 0 \\ \bar{f} &= a^2 \cosh v \sinh v \\ \bar{g} &= 0\end{aligned}$$

Portanto temos que  $\bar{H} = 0$ , logo pela proposição 3 temos que essa superfície é mínima.

## 4.2

### O Catenóide

Vamos procurar uma superfície mínima na forma de uma superfície folheada por círculos paralelos no modelo do hiperbolóide, que são curvas com curvatura constante maior que 1. Tal superfície é parametrizada por:

$$\begin{aligned}X : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto (\cosh \theta(u), \sinh \theta(u) \cos v, \sinh \theta(u) \sin v, u)\end{aligned}$$

Agora vamos definir:

$$Y(u, v) = (\cosh \theta(u), \sinh \theta(u) \cos v, \sinh \theta(u) \sin v)$$

Assim temos:

$$X(u, v) = (Y(u, v), u)$$

Vamos então calcular as derivadas de  $Y(u, v)$  para obtermos a curvatura média de  $X(u, v)$ :

$$\begin{aligned}Y_u &= (\theta' \sinh \theta, \theta' \cosh \theta \cos v, \theta' \cosh \theta \sin v) \\ Y_v &= (0, -\sinh \theta \sin v, \sinh \theta \cos v) \\ Y_{uu} &= (\theta'' \sinh \theta + (\theta')^2 \cosh \theta, \theta'' \cosh \theta \cos v + (\theta')^2 \sinh \theta \cos v, \\ &\quad \theta'' \cosh \theta \sin v + (\theta')^2 \sinh \theta \sin v) \\ Y_{uv} &= (0, -\theta' \cosh \theta \sin v, \theta' \cosh \theta \cos v) \\ Y_{vv} &= (0, -\sinh \theta \cos v, -\sinh \theta \sin v)\end{aligned}$$

Primeira Forma Fundamental:

$$\begin{aligned} E &= (\theta')^2 + 1 \\ F &= 0 \\ G &= \sinh^2 \theta \end{aligned}$$

Agora precisamos, para calcular a Segunda Forma Fundamental, de algum vetor  $\mathbf{N}$  normal a superfície, uma vez que não precisamos de um vetor normal unitário por causa da proposição 3. Sabemos que  $X_u$  e  $X_v$  são tangentes a superfície, logo:

$$\langle \mathbf{N}, X_u \rangle_1 = 0$$

$$\langle \mathbf{N}, X_v \rangle_1 = 0$$

Isso significa que  $X_u$  e  $X_v$  pertencem a  $T_x(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) = T_y \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , tal que  $x \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  sendo  $x = (y, t)$ , assim temos:

$$Y(u, v) \in \mathbb{H}^2$$

e que  $X(u, v) = (Y(u, v), u)$ , assim  $\mathbf{N} = (M, t)$ , tal que  $M = (a, b, c)$  onde vamos determinar  $M$ , mas não calcularemos explicitamente  $t$ , já que não aparece nas expressões da segunda forma fundamental.

Para isso temos:

$$\langle \mathbf{N}, X_u \rangle_1 = \langle M, Y_u \rangle_1 + t \cdot 1 = 0 \Rightarrow t = -\langle M, Y_u \rangle$$

$$\langle \mathbf{N}, X_v \rangle_1 = \langle M, Y_v \rangle_1 + t \cdot 0 = 0$$

Agora determinaremos  $a$ ,  $b$  e  $c$  de  $M = (a, b, c)$ , então:

$$\langle M, Y_v \rangle = 0 \Rightarrow -b \sinh \theta \sin v + c \sinh \theta \cos v = 0$$

Como  $\sinh \theta \neq 0$ , portanto podemos simplificar:

$$-b \sin v + c \cos v = 0$$

Determinamos agora:

$$b = \cos v$$

$$c = \sin v$$

e  $M = (a, \cos v, \sin v)$ , para encontrar  $a$ , fazemos:

$$\langle Y, M \rangle_1 = 0$$

Uma vez que  $Y(u, v) = (\cosh \theta, \sinh \theta \cos v, \sinh \theta \sin v)$ , temos:

$$\begin{aligned} \langle Y, M \rangle_1 &= -a \cosh \theta + \sinh \theta \cos^2 v + \sinh \theta \sin^2 v \\ &= -a \cosh \theta + \sinh \theta = 0 \end{aligned}$$

Simplificando, podemos definir  $b = \cosh \theta \cos v$  e  $c = \cosh \theta \sin v$ , então:

$$\langle Y, M \rangle_1 = -a \cosh \theta + \cosh \theta \sinh \theta = 0$$

Como sabemos que  $\cosh \theta \neq 0$ , então:  $a = \sinh \theta$

Com isso encontramos  $M$ :

$$M = (\sinh \theta, \cosh \theta \cos v, \cosh \theta \sin v)$$

e como  $\mathbf{N} = (M, t)$ , temos

$$\mathbf{N} = (\sinh \theta, \cosh \theta \cos v, \cosh \theta \sin v, t) \quad (4-1)$$

Segunda Forma Fundamental:

$$\begin{aligned} \bar{e} &= \theta'' \\ \bar{f} &= 0 \\ \bar{g} &= -\sinh \theta \cosh \theta \end{aligned}$$

Com isso temos que a curvatura média é:

$$\bar{H} = \theta'' \sinh^2 \theta - (\theta')^2 \sinh \theta \cosh \theta - \sinh \theta \cosh \theta$$

E com  $\bar{H} = 0$ , temos:

$$\theta'' \sinh \theta - (\theta')^2 \cosh \theta - \cosh \theta = 0 \quad (4-2)$$

Veremos que a equação (4-2) é um caso particular de uma equação que resolveremos na seção seguinte.

## 4.3

**Superfícies Mínimas folheadas por curvas de curvatura constante maior que 1**

Nessa seção vamos estudar as superfícies mínimas folheadas por curvas de curvatura constante  $k > 1$  em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Seja  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  uma base ortonormal tal que:

$$\begin{cases} \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle_1 = -1 \\ \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle_1 = 1 \\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle_1 = 1 \end{cases}$$

e algum número real  $\theta$ . Vamos provar que  $C$  parametrizada por:

$$C(v) = \sinh \theta (\mathbf{n} \cos v + \mathbf{b} \sin v) + \mathbf{t} \cosh \theta \in \mathbb{H}^2$$

tem curvatura constante maior que 1. Por isso reparametrizamos a curva pelo comprimento de arco  $w = v \sinh \theta$ :

$$\begin{aligned} C(w) &= \cosh \theta \mathbf{t} + \sinh \theta \left( \cos \left( \frac{w}{\sinh \theta} \right) \mathbf{n} + \sin \left( \frac{w}{\sinh \theta} \right) \mathbf{b} \right) \\ C'(w) &= -\sin \left( \frac{w}{\sinh \theta} \right) \mathbf{n} + \cos \left( \frac{w}{\sinh \theta} \right) \mathbf{b} \\ C''(w) &= \frac{1}{\sinh \theta} \left( -\cos \left( \frac{w}{\sinh \theta} \right) \mathbf{n} - \sin \left( \frac{w}{\sinh \theta} \right) \mathbf{b} \right) \end{aligned}$$

logo  $\langle C, C'' \rangle_1 = -1$ . Seja  $\{e_1, e_2\}$  base ortonormal de  $T_{C(w)}\mathbb{H}^2$  então  $\{c, e_1, e_2\}$  é base ortonormal de  $\mathbb{R}_1^3$  e podemos escrever:

$$C'''(w) = -\langle C, C'' \rangle_1 C + \langle C'', e_1 \rangle e_1 + \langle C'', e_2 \rangle e_2$$

ou seja,

$$(C''')^T = C'' + \langle C, C'' \rangle_1 C = C'' - C$$

portanto

$$(C''')^T = -\cosh \theta \mathbf{t} - \left( \frac{1}{\sinh \theta} + \sinh \theta \right) \cos \left( \frac{w}{\sinh \theta} \right) \mathbf{n} - \left( \frac{1}{\sinh \theta} + \sinh \theta \right) \sin \left( \frac{w}{\sinh \theta} \right) \mathbf{b}$$

logo

$$|(C''')^T|_1^2 = 1 + \frac{1}{\sinh^2 \theta} > 1$$

Concluimos que a curvatura da curva  $C$  é constante e maior que 1. Assim podemos parametrizar localmente uma superfície folheada por curvas de

curvatura constante maior que 1 em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  por:

$$\begin{aligned} X : I \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto (\sinh \theta(u)(\cos v \mathbf{n} + \sin v \mathbf{b}) + \cosh \theta(u) \mathbf{t}, u) \end{aligned}$$

onde  $\theta(u)$  é uma função real e  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  é o triedo de Frenet de alguma curva de tipo-espaço de  $\mathbb{R}_1^3$ , portanto nas equações de Frenet (cf. definição 15), temos  $\epsilon = -1$  e  $\eta = 1$  e logo:

$$\begin{cases} \mathbf{t}' = k\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' = k\mathbf{t} - \tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' = \tau\mathbf{n}, \end{cases}$$

Definiremos também para simplificar os cálculos:

$$Y(u, v) = \sinh \theta(u)(\cos v \mathbf{n} + \sin v \mathbf{b}) + \cosh \theta(u) \mathbf{t}$$

Assim temos:

$$\begin{aligned} X(u, v) &= (Y(u, v), u) \\ X_u(u, v) &= (Y_u(u, v), 1) \\ X_v(u, v) &= (Y_v(u, v), 0) \\ X_{uu}(u, v) &= (Y_{uu}, 0) \\ X_{uv}(u, v) &= (Y_{uv}, 0) \\ X_{vv}(u, v) &= (Y_{vv}, 0) \end{aligned}$$

Usando as equações de Frenet calculamos:

$$\begin{aligned} Y_u(u, v) &= (k \sinh \theta \cos v + \theta' \sinh \theta, \theta' \cosh \theta \cos v - \tau \sinh \theta \sin v + k \cosh \theta, \\ &\quad \theta' \cosh \theta \sin v + \tau \sinh \theta \cos v) \\ Y_v(u, v) &= (0, -\sinh \theta \sin v, \sinh \theta \cos v) \end{aligned}$$

Antes de apresentar os coeficientes da primeira forma fundamental de  $X(u, v)$ , vamos fazer a seguinte observação:

$$\begin{aligned} E &= \bar{E} + 1 \\ F &= \bar{F} \\ G &= \bar{G} \end{aligned}$$

Onde  $\bar{E}$ ,  $\bar{F}$  e  $\bar{G}$  são os coeficientes da primeira forma fundamental de  $Y(u, v)$ . Abaixo são apresentados os coeficientes da primeira forma fundamental de

$X(u, v)$ .

$$\begin{aligned} E &= 1 + (\theta')^2 + \tau^2 \sinh^2 \theta + k^2 \cosh^2 \theta + 2\theta'k \cos v + \\ &\quad 2\tau k \sinh \theta \cosh \theta \sin v - k^2 \sinh^2 \theta \cos^2 v \\ F &= -\tau \sinh^2 \theta - k \sinh \theta \cosh \theta \sin v \\ G &= \sinh^2 \theta \end{aligned}$$

Abaixo as derivadas segundas de  $Y(u, v)$ :

$$\begin{aligned} Y_{uu}(u, v) &= (k' \sinh \theta \cos v + 2\theta'k \cosh \theta \cos v + \theta'' \sinh \theta + (\theta')^2 \cosh \theta \\ &\quad - k\tau \sinh \theta \sin v + k^2 \cosh \theta, \\ &\quad k^2 \sinh \theta \cos v + 2k\theta' \sinh \theta + \theta'' \cosh \theta \cos v + (\theta')^2 \sinh \theta \cos v \\ &\quad - \tau' \sinh \theta \cos v - 2\tau\theta' \cosh \theta \sin v + k' \cosh \theta - \tau^2 \sinh \theta \cos v, \\ &\quad 2\tau\theta' \cosh \theta \cos v - \tau^2 \sinh \theta \sin v + k\tau \cosh \theta + \theta'' \cosh \theta \sin v + \\ &\quad (\theta')^2 \sinh \theta \sin v + \tau' \sinh \theta \cos v) \\ Y_{uv}(u, v) &= (-k \sinh \theta \sin v, -\theta' \cosh \theta \sin v - \tau \sinh \theta \cos v, \theta' \cosh \theta \cos v \\ &\quad - \tau \sinh \theta \sin v) \\ Y_{vv}(u, v) &= (0, -\sinh \theta \cos v, -\sinh \theta \sin v) \end{aligned}$$

Para calcular a segunda forma fundamental usaremos o vetor normal  $\mathbf{N}$ (cf. 4-1) que encontramos na seção 4.2 desse capítulo, pois o espaço normal a uma superfície não depende da base usada.

Segunda Forma Fundamental.

Agora podemos determinar  $\bar{e}$ ,  $\bar{f}$  e  $\bar{g}$ :

$$\begin{aligned} \bar{e} &= \theta'' - \tau^2 \sinh \theta \cosh \theta + k' \cos v + (k\tau - 2k\tau \cosh^2 \theta) \sin v \\ &\quad - k^2 \cosh \theta \sinh \theta \sin^2 v \\ \bar{f} &= \tau \cosh \theta \sinh \theta + k \sinh^2 \theta \sin v \\ \bar{g} &= -\sinh \theta \cosh \theta \end{aligned}$$

Temos  $\bar{H} = E\bar{g} - 2F\bar{f} + G\bar{e} = 0$ , então:

$$\begin{aligned} \bar{H} &= -(k^2 \cosh \theta + (\theta')^2 \cosh \theta - \theta'' \sinh \theta + \cosh \theta) \sinh \theta - k\tau \sinh^2 \theta \sin v + \\ &\quad (k' \sinh^2 \theta - 2\theta'k \sinh \theta \cosh \theta) \cos v \end{aligned}$$

Se a superfície é mínima:

$$H = 0 \implies \begin{cases} -k^2 \cosh \theta - (\theta')^2 \cosh \theta + \theta'' \sinh \theta - \cosh \theta = 0 \\ -k\tau \sinh^2 \theta = 0 \\ k' \sinh^2 \theta - 2\theta'k \sinh \theta \cosh \theta = 0 \end{cases}$$

Vamos analisar a segunda equação do sistema. Sabemos que  $\sinh^2 \theta \neq 0$  e  $k \neq 0$ , logo  $\tau = 0$ , significando que a curva  $\gamma$  é plana e pertence ao plano paralelo ao plano gerado por  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{n}$  e observamos que o fato de termos  $\tau = 0$  também significa  $\mathbf{b}$  constante.

Vamos analisar agora a equação  $k' \sinh \theta = 2\theta'k \cosh \theta$ , ou seja,

$$\frac{k'}{k} = 2\theta' \coth \theta$$

Agora podemos integrar os dois termos:

$$\int \frac{1}{k} dk = 2 \int \coth \theta d\theta$$

obtemos,

$$\ln k = 2 \ln |\sinh \theta| + c$$

Que simplificando fica  $k = \lambda \sinh^2 \theta$ , onde  $\lambda$  é uma constante positiva.

Agora devemos resolver a seguinte equação:

$$\theta'' \sinh \theta - (\theta')^2 \cosh \theta - \cosh \theta - k^2 \cosh \theta = 0$$

Que reescreveremos dessa maneira:

$$\theta'' \sinh \theta - ((\theta')^2 + 1) \cosh \theta - \lambda^2 \cosh \theta \sinh^4 \theta = 0 \quad (4-3)$$

agora multiplicamos por  $2\theta' \sinh \theta$ , teremos:

$$2\theta'\theta'' \sinh^2 \theta - ((\theta')^2 + 1)2\theta' \cosh \theta \sinh \theta - 2\lambda^2\theta' \cosh \theta \sinh^5 \theta = 0$$

Agora dividindo por  $\sinh^4 \theta$  temos:

$$\frac{2\theta'\theta'' \sinh^2 \theta - ((\theta')^2 + 1)2\theta' \cosh \theta \sinh \theta}{\sinh^4 \theta} - 2\lambda^2\theta' \cosh \theta \sinh \theta = 0$$

logo,

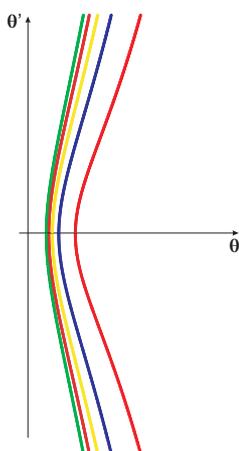
$$\left( \frac{(\theta')^2 + 1}{\sinh^2 \theta} - \lambda^2 \sinh^2 \theta \right)' = 0$$

e a função

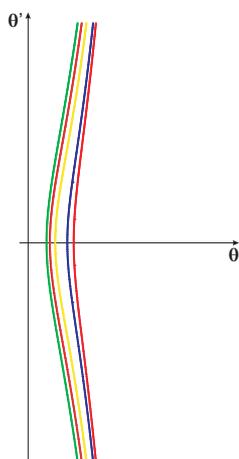
$$E(\theta, \theta') = \frac{(\theta')^2 + 1}{\sinh^2 \theta} - \lambda^2 \sinh^2 \theta, \quad (4-4)$$

é uma integral primeira de (4-3).

Agora para uma análise dessa expressão fazemos  $E$  igual a uma constante e traçamos o gráfico dessas curva para diferentes valores de  $E$  e para  $\lambda = 0$ , caso do catenóide, como podemos ver na figura abaixo:



Abaixo fazemos a mesma análise, mas para  $\lambda \neq 0$ :



Observamos que sobre toda curva integral,  $\theta$  admite um mínimo que denotaremos por  $\theta_0$  e que cada curva tem dois fins, onde  $\theta$  tende ao infinito. Sem perda de generalidade suponhamos que  $\theta(0) = \theta_0$ . No caso  $\lambda \neq 0$ , vamos mostrar que  $\sinh \theta$  tende a infinito em tempo finito. Considerando a parte da curva integral em que  $\theta'$  é positiva, temos que  $\theta(u)$  é crescente, então existe a função inversa, que denotamos por  $u(\theta)$ , definida sobre o intervalo  $[\theta_0, \infty)$ , que estudaremos quando  $\theta \rightarrow \theta_0$ , observamos que temos uma situação análoga

ao Capítulo 2, assim podemos concluir que

$$u(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\lambda^2 \sinh^4 \theta + E \sinh^2 \theta - 1}},$$

é uma integral convergente.

Agora iremos calcular  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} u(\theta)$ , para mostrar que  $\sinh \theta$  tende para o infinito em tempo finito.

Tome

$$u(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{du}{d\theta} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\lambda^2 \sinh^4 \theta + E \sinh^2 \theta - 1}} \quad (4-5)$$

$$\text{Como } \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 \sinh^4 \theta + E \sinh^2 \theta - 1}} < \frac{1}{\lambda \sinh^2 \theta} < \frac{1}{\theta^2},$$

concluimos que a integral (4-5) converge, isto é, existe  $u_{\infty} < \infty$  tal que  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} u(\theta) = u_{\infty}$ . Concluimos assim que  $\sinh \theta$  tende para o infinito em tempo finito, pois  $\theta$  tende para o infinito e a curva limite tem curvatura igual a 1, isto é, um horociclo. A situação é simétrica no caso  $\theta' < 0$  logo a superfície é limitada por duas folhas  $\mathbb{H}^2$  horizontais. Assim a situação é muito parecida com o caso do exemplo de Riemann de  $\mathbb{R}^3$ .

#### 4.4

##### O Catenóide folheado por curvas de curvatura constante menor que 1

Agora vamos procurar uma superfície mínima na forma de uma superfície folheada por curvas de curvatura constante menor que 1, que no modelo do hiperbolóide, são hipérboles.

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R} \times \mathbb{H}^1 &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto (\cosh \theta(u) \cosh v, \cosh \theta(u) \sinh v, \sinh \theta(u), u) \end{aligned}$$

Agora vamos definir:

$$Y(u, v) = (\cosh \theta(u) \cosh v, \cosh \theta(u) \sinh v, \sinh \theta(u))$$

Assim temos:

$$X(u, v) = (Y(u, v), u)$$

Vamos então calcular as derivadas de  $Y(u, v)$  para obtermos a curvatura média de  $X(u, v)$ :

$$Y_u = (\theta' \sinh \theta \cosh v, \theta' \sinh \theta \sinh v, \theta' \cosh \theta)$$

$$Y_v = (\cosh \theta \sinh v, \cosh \theta \cosh v, 0)$$

$$Y_{uu} = (\theta'' \sinh \theta \cosh v + (\theta')^2 \cosh \theta \cosh v, \theta'' \cosh \theta \sinh v + (\theta')^2 \cosh \theta \sinh v, \theta'' \cosh \theta + (\theta')^2 \sinh \theta)$$

$$Y_{uv} = (\theta' \sinh \theta \sinh v, \theta' \sinh \theta \cosh v, 0)$$

$$Y_{vv} = (\cosh \theta \cosh v, \cosh \theta \sinh v, 0)$$

Primeira Forma Fundamental:

$$E = (\theta')^2 + 1$$

$$F = 0$$

$$G = \cosh^2 \theta$$

Agora precisamos, para calcular a Segunda Forma Fundamental, de algum vetor  $\mathbf{N}$  normal a superfície, uma vez que não precisamos de um vetor normal unitário por causa da proposição 3. Sabemos que  $X_u$  e  $X_v$  são tangentes a superfície, logo:

$$\langle \mathbf{N}, X_u \rangle_1 = 0$$

$$\langle \mathbf{N}, X_v \rangle_1 = 0$$

Isso significa que  $X_u$  e  $X_v$  pertencem a  $T_x(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) = T_y \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , tal que  $x \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  sendo  $x = (y, t)$ , assim temos:

$$Y(u, v) \in \mathbb{H}^2$$

e que  $X(u, v) = (Y(u, v), u)$ , assim  $\mathbf{N} = (M, t)$ , fazendo cálculos análogos aos que foram feitos na seção 4.2 temos que:

$$M = (\sinh \theta \cosh v, \sinh \theta \sinh v, \cosh \theta)$$

e como  $\mathbf{N} = (M, t)$ , temos

$$\mathbf{N} = (\sinh \theta, \cosh \theta \cos v, \cos \theta \sin v, t) \quad (4-6)$$

Segunda Forma Fundamental:

$$\begin{aligned}\bar{e} &= \theta'' \\ \bar{f} &= 0 \\ \bar{g} &= -\sinh \theta \cosh \theta\end{aligned}$$

Com isso temos que a curvatura média é:

$$\bar{H} = \theta'' \cosh^2 \theta - (\theta')^2 \cosh \theta \sinh \theta - \cosh \theta \sinh \theta$$

E com  $\bar{H} = 0$ , temos:

$$\theta'' \cosh^2 \theta - ((\theta')^2 + 1) \cosh \theta \sinh \theta - \cosh \theta \sinh \theta = 0$$

logo

$$\theta'' \cosh \theta - (\theta')^2 \sinh \theta - \sinh \theta = 0 \quad (4-7)$$

Veremos que a equação (4-7) é um caso particular de uma equação que resolveremos na seção seguinte.

#### 4.5

#### Superfícies Mínimas folheadas por curvas de curvatura constante menor que 1

Nessa seção vamos estudar superfícies mínimas folheadas por curvas de curvatura constante  $k < 1$  em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Inicialmente ver como parametrizar tais curvas: Seja  $\{e_1, e_2, e_3\}$  base ortonormal de  $\mathbb{R}_1^3$  tal que

$$\begin{cases} \langle e_1, e_1 \rangle_1 = -1 \\ \langle e_2, e_2 \rangle_1 = 1 \\ \langle e_3, e_3 \rangle_1 = 1 \end{cases}$$

e algum número real  $\theta$ . Vamos provar que a curva  $C$  parametrizada por:

$$C(v) = \sinh \theta e_2 + \cosh \theta \cosh v e_1 + \cosh \theta \sinh v e_3 \in \mathbb{H}^2$$

tem curvatura constante menor que 1. Antes vamos fazer uma mudança de variável  $w = \cosh \theta v$  e escreveremos:

$$C(w) = \sinh \theta e_2 + \cosh \theta \cosh\left(\frac{w}{\cosh \theta}\right) e_1 + \cosh \theta \sinh\left(\frac{w}{\cosh \theta}\right) e_3$$

Calculamos inicialmente  $C'(v) = \sinh\left(\frac{w}{\cosh \theta}\right)e_1 + \cosh\left(\frac{w}{\cosh \theta}\right)e_3$ , portanto

$$C''(w) = \frac{1}{\cosh \theta} \left( \cosh\left(\frac{w}{\cosh \theta}\right)e_1 + \sinh\left(\frac{w}{\cosh \theta}\right)e_3 \right)$$

logo  $\langle C, C'' \rangle_1 = -1$ . Seja  $\{v_1, v_2\}$  base ortonormal de  $T_{C(w)}\mathbb{H}^2$  então  $\{C, v_1, v_2\}$  é base ortonormal de  $\mathbb{R}_1^3$  e podemos escrever:

$$C''(w) = -\langle C, C'' \rangle_1 C + \langle C'', v_1 \rangle_1 v_1 + \langle C'', v_2 \rangle_1 v_2$$

ou seja,

$$(C'')^T = C'' + \langle C, C'' \rangle_1 C = C'' - C$$

portanto

$$(C'')^T = -\sinh \theta e_2 + \left( \frac{1}{\cosh \theta} + \cosh \theta \right) \cosh\left(\frac{w}{\cosh \theta}\right)e_1 + \left( \frac{1}{\cosh \theta} + \cosh \theta \right) \sinh\left(\frac{w}{\cosh \theta}\right)e_3$$

logo

$$|(C'')^T|_1^2 = 1 - \frac{1}{\cosh^2 \theta}$$

e obtemos

$$0 < 1 - \frac{1}{\cosh^2 \theta} < 1$$

#### 4.5.1

##### 1º Caso, onde o vetor normal à curva é de tipo-tempo

Seja a superfície em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  parametrizada localmente por:

$$X : I \times \mathbb{H}^1 \longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longmapsto (\cosh \theta(u)(\cosh v \mathbf{n} + \sinh v \mathbf{b}) + \sinh \theta(u) \mathbf{t}, u)$$

onde  $\theta(u)$  é uma função real e  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  é o triedo de Frenet de alguma curva de tipo-espaço de  $\mathbb{R}_1^3$ , tal que o vetor normal seja de tipo-tempo, portanto nas equações de Frenet (cf. definição 15), temos  $\epsilon = 1$  e  $\eta = -1$  e logo:

$$\begin{cases} \mathbf{t}' = -k \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' = -k \mathbf{t} - \tau \mathbf{b} \\ \mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n}, \end{cases}$$

Definiremos também para simplificar os cálculos:

$$Y(u, v) = \cosh \theta(u)(\cosh v \mathbf{n} + \sinh v \mathbf{b}) + \sinh \theta(u) \mathbf{t}$$

Assim temos:

$$\begin{aligned} X(u, v) &= (Y(u, v), u) \\ X_u(u, v) &= (Y_u(u, v), 1) \\ X_v(u, v) &= (Y_v(u, v), 0) \\ X_{uu}(u, v) &= (Y_{uu}, 0) \\ X_{uv}(u, v) &= (Y_{uv}, 0) \\ X_{vv}(u, v) &= (Y_{vv}, 0) \end{aligned}$$

Usando as equações de Frenet calculamos:

$$Y_u(u, v) = (\theta' \cosh \theta - k \cosh \theta \cosh v, -k \sinh \theta + \theta' \sinh \theta \cosh v - \tau \cosh \theta \sinh v, -\tau \cosh \theta \cosh v + \theta' \sinh \theta \sinh v)$$

$$Y_v(u, v) = (0, \cosh \theta \sinh v, \cosh \theta \cosh v)$$

Antes de apresentar os coeficientes da primeira forma fundamental de  $X(u, v)$  vamos fazer a seguinte observação:

$$\begin{aligned} E &= \bar{E} + 1 \\ F &= \bar{F} \\ G &= \bar{G} \end{aligned}$$

Onde  $\bar{E}$ ,  $\bar{F}$  e  $\bar{G}$  são os coeficientes da primeira forma fundamental de  $Y(u, v)$ . Abaixo são apresentados os coeficientes da primeira forma fundamental de  $X(u, v)$ .

$$\begin{aligned} E &= 1 + (\theta')^2 + \tau^2 \cosh^2 \theta - k^2 \sinh^2 \theta + 2\theta' k \cosh v \\ &\quad - 2\tau k \sinh \theta \cosh \theta \sinh v + k^2 \cosh^2 \theta \cosh^2 v \\ F &= -\tau \cosh^2 \theta + k \sinh \theta \cosh \theta \sinh v \\ G &= \cosh^2 \theta \end{aligned}$$

Abaixo as derivadas segundas de  $Y(u, v)$ :

$$\begin{aligned}
Y_{uu}(u, v) &= (-k' \cosh \theta \cosh v + (\theta')^2 \sinh \theta + \theta'' \cosh \theta - 2\theta' k \sinh \theta \cosh v + \\
&\quad k^2 \sinh \theta + k\tau \cosh \theta \sinh v, \\
&\quad -2\theta' k \cosh \theta - k' \sinh \theta + (\theta')^2 \cosh \theta \cosh v + \theta'' \sinh \theta \cosh v + \\
&\quad k^2 \cosh \theta \cosh v - 2\theta' \tau \sinh \theta \sinh v - \tau' \cosh \theta \sinh v + \tau^2 \cosh \theta \cosh v, \\
&\quad \tau^2 \cosh \theta \sinh v + (\theta')^2 \cosh \theta \sinh v - \tau' \cosh \theta \cosh v + k\tau \sinh \theta + \\
&\quad \theta'' \sinh \theta \sinh v - 2\theta' \tau \sinh \theta \cosh v) \\
Y_{uv}(u, v) &= (-k \cosh \theta \sinh v, -\tau \cosh \theta \cosh v + \theta' \sinh \theta \sinh v, -\tau \cosh \theta \sinh v + \\
&\quad \theta' \sinh \theta \cosh v) \\
Y_{vv}(u, v) &= (0, \cosh \theta \cosh v, \cosh \theta \sinh v)
\end{aligned}$$

Para calcular a segunda forma fundamental precisamos de um vetor normal, que determinaremos a seguir:

Sabemos que  $X_u$  e  $X_v$  são tangentes a superfície, logo:

$$\langle \mathbf{N}, X_u \rangle_1 = 0$$

$$\langle \mathbf{N}, X_v \rangle_1 = 0$$

Isso significa que  $X_u$  e  $X_v$  pertencem a  $T_x(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) = T_y \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , tal que  $x \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  sendo  $x = (y, t)$ , assim temos:

$$Y(u, v) \in \mathbb{H}^2$$

e que  $X(u, v) = (Y(u, v), u)$ , assim  $\mathbf{N} = (M, t)$ , fazendo cálculos análogos aos que foram feitos na seção 4.2 temos que:

$$M = (\cosh \theta, \sinh \theta \cosh v, \sinh \theta \sinh v)$$

e como  $\mathbf{N} = (M, t)$ , temos

$$\mathbf{N} = (\cosh \theta, \sinh \theta \cosh v, \sinh \theta \sinh v, t) \quad (4-8)$$

Segunda Forma Fundamental.

Agora podemos determinar  $\bar{e}$ ,  $\bar{f}$  e  $\bar{g}$ :

$$\begin{aligned}
\bar{e} &= +\theta'' - \tau^2 \cosh \theta \sinh \theta - k' \cosh v + (-k\tau + 2k\tau \cosh^2 \theta) \sinh v \\
&\quad - k^2 \cosh \theta \sinh \theta \cosh v^2 v \\
\bar{f} &= \tau \cosh \theta \sinh \theta - k \cosh^2 \theta \sinh v \\
\bar{g} &= -\sinh \theta \cosh \theta
\end{aligned}$$

Temos  $\bar{H} = E\bar{g} - 2F\bar{f} + G\bar{e} = 0$ , então:

$$\begin{aligned} \bar{H} = & (-k^2 \sinh \theta - (\theta')^2 \sinh \theta + \theta'' \cosh \theta - \sinh \theta) \cosh \theta - k\tau \cosh^2 \theta \sinh v + \\ & (-k' \cosh^2 \theta + 2\theta'k \sinh \theta \cosh \theta) \cosh v \end{aligned}$$

Se a superfície é mínima:

$$H = 0 \implies \begin{cases} \theta'' \cosh \theta - (\theta')^2 \sinh \theta - k^2 \sinh \theta - \sinh \theta = 0 \\ -k\tau \cosh^2 \theta = 0 \\ -k' \cosh^2 \theta + 2\theta'k \sinh \theta \cosh \theta = 0 \end{cases}$$

Vamos analisar a segunda equação do sistema. Sabemos que  $\cosh^2 \theta \neq 0$  e  $k \neq 0$ , logo  $\tau = 0$ , significando que a curva  $\gamma$  é plana e pertence ao plano paralelo ao plano gerado por  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{n}$  e observamos que o fato de termos  $\tau = 0$  também significa  $\mathbf{b}$  constante.

Vamos analisar agora a equação  $k' \cosh \theta = 2\theta'k \sinh \theta$ , ou seja,

$$\frac{k'}{k} = 2\theta' \tanh \theta$$

Agora podemos integrar os dois termos:

$$\int \frac{1}{k} dk = 2 \int \tanh \theta d\theta$$

obtemos,

$$\ln k = 2 \ln |\cosh \theta| + c$$

Que simplificando fica  $k = \lambda \cosh^2 \theta$ , onde  $\lambda$  é um número real positivo. Assim podemos resolver a seguinte equação:

$$\theta'' \cosh \theta - (\theta')^2 \sinh \theta - k^2 \sinh \theta - \sinh \theta = 0$$

na qual reescrevemos dessa maneira:

$$\theta'' \cosh \theta - ((\theta')^2 + 1) \sinh \theta - \lambda^2 \cosh^4 \theta \sinh \theta = 0 \quad (4-9)$$

multiplicando por  $2\theta' \cosh \theta$ , teremos:

$$2\theta'\theta'' \cosh^2 \theta - 2((\theta')^2 + 1)\theta' \cosh \theta \sinh \theta - 2\theta'\lambda^2 \cosh^5 \theta \sinh \theta = 0$$

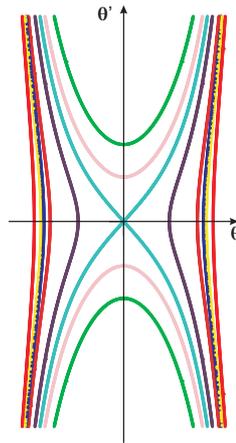
que dividindo por  $\cosh^4 \theta$  fica:

$$\frac{2\theta'\theta'' \cosh^2 \theta - 2\theta'((\theta')^2 + 1) \sinh \theta \cosh \theta}{\cosh^4 \theta} - 2\lambda^2 \theta' \cosh \theta \sinh \theta = 0$$

logo,

$$\left( \frac{(\theta')^2 + 1}{\cosh^2 \theta} - \lambda^2 \cosh^2 \theta \right)' = 0$$

temos que a função  $E(\theta, \theta') = \frac{(\theta')^2 + 1}{\cosh^2 \theta} - \lambda^2 \cosh^2 \theta$  é uma integral primeira de (4-9). Agora para uma análise dessa expressão fazemos  $E$  igual a uma constante e traçamos o gráfico dessas curva para diferentes valores de  $E$  e para  $\lambda = 0$ , que é o caso do catenóide, como podemos ver na figura abaixo:



Observamos pela figura acima que obtivemos três tipos de curvas integrais, sendo um deles muito semelhante ao caso anterior, no qual  $\theta' = 0$  e portanto  $\theta$  admite um mínimo que novamente suporemos que  $\theta(0) = \theta_0$ . No caso  $\lambda \neq 0$ , vamos mostrar que  $\cosh \theta$  tende a infinito em tempo finito. Considerando a parte desse tipo de curva em que  $\theta'$  é positiva, temos que  $\theta(u)$  é crescente, então existe a função inversa, que denotamos por  $u(\theta)$ , definida sobre o intervalo  $[\theta_0, \infty)$  e expressada por:

$$u(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\lambda^2 \cosh^4 \theta + E \cosh^2 \theta - 1}}, \tag{4-10}$$

que é uma integral convergente pelo mesmo argumento feito no capítulo 2 seção 2.3.

Vamos calcular  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} u(\theta)$ .

Tome

$$u(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{du}{d\theta} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\lambda^2 \cosh^4 \theta + E \cosh^2 \theta - 1}} \tag{4-11}$$

Como  $\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 \cosh^4 \theta + E \cosh^2 \theta - 1}} < \frac{1}{\lambda \cosh^2 \theta} < \frac{1}{\theta^2}$ ,

concluimos que a integral (4-11) converge, isto é, existe  $u_{\infty} < \infty$  tal que  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} u(\theta) = u_{\infty}$ . Concluimos assim que  $\cosh \theta$  tende para o infinito em tempo

finito, pois  $\theta$  tende para o infinito. Aqui novamente a curva limite tem curvatura 1, isto é, um horociclo. Esse caso é parecido ao da seção anterior.

Para o outro tipo de curva onde temos que  $\theta' \neq 0$  e positiva para todo  $\theta$ , daí  $\theta(u)$  é crescente, então existe uma função inversa  $u(\theta)$  definida da mesma maneira que em (4-10) e portanto têm as mesmas características.

O terceiro tipo de curva que obtivemos é a curva que passa pela origem no plano de fase  $(\theta, \theta')$ , assim analisando novamente a função inversa  $u(\theta)$  onde  $\theta_0 = 0$  para  $\theta \rightarrow 0$  observamos que ela é convergente e novamente que  $\theta \rightarrow \infty$  e então  $\cosh \theta$  tende para o infinito em tempo finito.

#### 4.5.2

##### 2º Caso, quando o vetor binormal é de tipo-tempo

Seja a superfície em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  parametrizada por:

$$X : I \times \mathbb{H}^1 \longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longmapsto (\cosh \theta(u)(\sinh v \mathbf{n} + \cosh v \mathbf{b}) + \sinh \theta(u) \mathbf{t}, u)$$

onde  $\theta(u)$  é uma função real e  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  é o triedo de Frenet de alguma curva de tipo-espaco de  $\mathbb{R}_1^3$ , tal que o vetor binormal seja de tipo-tempo, portanto nas equações de Frenet (cf. definição 15), temos  $\epsilon = 1$  e  $\eta = 1$  e logo:

$$\begin{cases} \mathbf{t}' = k\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' = -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' = \tau\mathbf{n}, \end{cases}$$

Definiremos também para simplificar os cálculos:

$$Y(u, v) = \cosh \theta(\sinh v \mathbf{n} + \cosh v \mathbf{b}) + \sinh \theta \mathbf{t}$$

Assim temos:

$$\begin{aligned} X(u, v) &= (Y(u, v), u) \\ X_u(u, v) &= (Y_u(u, v), 1) \\ X_v(u, v) &= (Y_v(u, v), 0) \\ X_{uu}(u, v) &= (Y_{uu}, 0) \\ X_{uv}(u, v) &= (Y_{uv}, 0) \\ X_{vv}(u, v) &= (Y_{vv}, 0) \end{aligned}$$

Usando as equações de Frenet calculamos:

$$Y_u(u, v) = (\theta' \cosh \theta - k \cosh \theta \sinh v, k \sinh \theta + \theta' \sinh \theta \sinh v + \tau \cosh \theta \cosh v, \tau \cosh \theta \sinh v + \theta' \sinh \theta \cosh v)$$

$$Y_v(u, v) = (0, \cosh \theta \cosh v, \cosh \theta \sinh v)$$

Antes de apresentar os coeficientes da primeira forma fundamental de  $X(u, v)$  vamos fazer a seguinte observação:

$$E = \bar{E} + 1$$

$$F = \bar{F}$$

$$G = \bar{G}$$

Onde  $\bar{E}$ ,  $\bar{F}$  e  $\bar{G}$  são os coeficientes da primeira forma fundamental de  $Y(u, v)$ . Abaixo são apresentados os coeficientes da primeira forma fundamental de  $X(u, v)$ .

$$\begin{aligned} E &= 1 + (\theta')^2 + \tau^2 \cosh^2 \theta + k^2 \sinh^2 \theta + 2\theta'k \sinh v \\ &\quad + 2\tau k \sinh \theta \cosh \theta \cosh v + k^2 \cosh^2 \theta \sinh^2 v \\ F &= \tau \cosh^2 \theta + k \sinh \theta \cosh \theta \cosh v \\ G &= \cosh^2 \theta \end{aligned}$$

Abaixo as derivadas segundas de  $Y(u, v)$ :

$$\begin{aligned} Y_{uu}(u, v) &= (-k' \cosh \theta \sinh v + (\theta')^2 \sinh \theta + \theta'' \cosh \theta - 2\theta'k \sinh \theta \sinh v \\ &\quad - k^2 \sinh \theta - k\tau \cosh \theta \cosh v, \\ &\quad 2\theta'k \cosh \theta + k' \sinh \theta + (\theta')^2 \cosh \theta \sinh v + \theta'' \sinh \theta \sinh v + \\ &\quad - k^2 \cosh \theta \sinh v - 2\theta'\tau \sinh \theta \cosh v + \tau' \cosh \theta \cosh v + \tau^2 \cosh \theta \sinh v, \\ &\quad \tau^2 \cosh \theta \cosh v + (\theta')^2 \cosh \theta \cosh v + \tau' \cosh \theta \sinh v + k\tau \sinh \theta + \\ &\quad \theta'' \sinh \theta \cosh v + 2\theta'\tau \sinh \theta \sinh v) \end{aligned}$$

$$Y_{uv}(u, v) = (-k \cosh \theta \cosh v, \tau \cosh \theta \sinh v + \theta' \sinh \theta \cosh v, \tau \cosh \theta \cosh v + \theta' \sinh \theta \sinh v)$$

$$Y_{vv}(u, v) = (0, \cosh \theta \sinh v, \cosh \theta \cosh v)$$

Para calcular a segunda forma fundamental precisamos de um vetor normal, que determinaremos a seguir:

Sabemos que  $X_u$  e  $X_v$  são tangentes a superfície, logo:

$$\langle \mathbf{N}, X_u \rangle_1 = 0$$

$$\langle \mathbf{N}, X_v \rangle_1 = 0$$

Isso significa que  $X_u$  e  $X_v$  pertencem a  $T_x(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) = T_y\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , tal que  $x \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  sendo  $x = (y, t)$ , assim temos:

$$Y(u, v) \in \mathbb{H}^2$$

e que  $X(u, v) = (Y(u, v), u)$ , assim  $\mathbf{N} = (M, t)$ , fazendo cálculos análogos aos que foram feitos na seção 4.2 temos:

$$M = (\cosh \theta, \sinh \theta \sinh v, \sinh \theta \cosh v)$$

e como  $\mathbf{N} = (M, t)$ , temos

$$\mathbf{N} = (\cosh \theta, \sinh \theta \sinh v, \sinh \theta \cosh v, t) \quad (4-12)$$

Segunda Forma Fundamental.

Agora podemos determinar  $\bar{e}$ ,  $\bar{f}$  e  $\bar{g}$ :

$$\begin{aligned} \bar{e} &= \theta'' - \tau^2 \cosh \theta \sinh \theta - k' \sinh v + (k\tau - 2k\tau \cosh^2 \theta) \cosh v \\ &\quad - k^2 \cosh \theta \sinh \theta \cosh^2 v \\ \bar{f} &= -\tau \cosh \theta \sinh \theta - k \cosh^2 \theta \cosh v \\ \bar{g} &= -\sinh \theta \cosh \theta \end{aligned}$$

Temos  $\bar{H} = E\bar{g} - 2F\bar{f} + G\bar{e} = 0$ , então:

$$\begin{aligned} \bar{H} &= (k^2 \sinh \theta - (\theta')^2 \sinh \theta + \theta'' \cosh \theta - \sinh \theta) \cosh \theta + k\tau \cosh^2 \theta \cosh v + \\ &\quad (-k' \cosh^2 \theta + 2\theta'k \sinh \theta \cosh \theta) \sinh v \end{aligned}$$

Se a superfície é mínima:

$$H = 0 \implies \begin{cases} \theta'' \cosh \theta - (\theta')^2 \sinh \theta + k^2 \sinh \theta - \sinh \theta = 0 \\ k\tau \cosh^2 \theta = 0 \\ -k' \cosh^2 \theta + 2\theta'k \sinh \theta \cosh \theta = 0 \end{cases}$$

Vamos analisar a segunda equação do sistema. Sabemos que  $\cosh^2 \theta \neq 0$  e  $k \neq 0$ , logo  $\tau = 0$ , o que significa que  $\mathbf{b}$  constante.

Vamos analisar agora a equação  $k' \cosh \theta = 2\theta' k \sinh \theta$ , ou seja,

$$\frac{k'}{k} = 2\theta' \tanh \theta$$

Agora podemos integrar os dois termos:

$$\int \frac{1}{k} dk = 2 \int \tanh \theta d\theta$$

obtemos,

$$\ln k = 2 \ln |\cosh \theta| + c$$

Que simplificando fica  $k = \lambda \cosh^2 \theta$ , onde  $\lambda$  é uma constante real positiva.

Assim podemos resolver a seguinte equação:

$$\theta'' \cosh \theta - (\theta')^2 \sinh \theta + k^2 \sinh \theta - \sinh \theta = 0$$

na qual reescrevemos dessa maneira:

$$\theta'' \cosh \theta - ((\theta')^2 + 1) \sinh \theta + \lambda^2 \cosh^4 \theta \sinh \theta = 0 \quad (4-13)$$

multiplicando por  $2\theta' \cosh \theta$ , teremos:

$$2\theta'\theta'' \cosh^2 \theta - 2((\theta')^2 + 1)\theta' \cosh \theta \sinh \theta + 2\theta'\lambda^2 \cosh^5 \theta \sinh \theta = 0$$

que dividindo por  $\cosh^4 \theta$  fica:

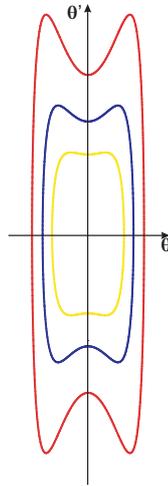
$$\frac{2\theta'\theta'' \cosh^2 \theta - 2\theta'((\theta')^2 + 1) \sinh \theta \cosh \theta}{\cosh^4 \theta} + 2\lambda^2 \theta' \cosh \theta \sinh \theta = 0$$

logo,

$$\left( \frac{(\theta')^2 + 1}{\cosh^2 \theta} + \lambda^2 \cosh^2 \theta \right)' = 0$$

e a função  $E(\theta, \theta') = \frac{(\theta')^2 + 1}{\cosh^2 \theta} + \lambda^2 \cosh^2 \theta$  é uma integral primeira de (4-13).

Para uma análise dessa expressão fazemos  $E$  igual a uma constante e traçamos o gráfico dessas curva para diferentes valores de  $E$  e para  $\lambda = 0$ , que é o caso do catenóide, como podemos ver na figura abaixo:



Observamos que para  $\theta' = 0$ ,  $\theta$  admite um máximo que denotaremos  $\theta_0$ . Sem perda de generalidade suponhamos  $\theta(0) = \theta_0$ . Considerando a parte da curva integral em que  $\theta'$  é positiva, temos que  $\theta(u)$  é crescente, então existe a função inversa, que denotamos por  $u(\theta)$ , definida sobre o intervalo  $(0, \theta_0)$ . Observamos que como nos casos anteriores, podemos concluir que

$$u(\theta) = \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{f(\theta)}},$$

tal que

$$f(\theta) = -\lambda^2 \cosh^4 \theta + E \cosh^2 \theta - 1 \sim_{\theta \rightarrow \theta_0} f'(\theta_0)(\theta - \theta_0)$$

então portanto  $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} u < \infty$ .

Como no caso de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  as curvas integrais são periódicas então as superfícies que encontramos são muito parecidas com a família de superfícies mínimas em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  encontrada no Capítulo 3.

#### 4.6 Conclusão

Encontramos os seguintes exemplos de superfícies mínimas de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  folheadas por curvas horizontais de curvatura constante:

- Um plano hiperbólico horizontal  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$  (cf. seção 4.1.1);
- O cilindro  $\mathbb{H}^1 \times \mathbb{R}$  (cf. seção 4.1.2);

- O helicóide (cf. seção 4.1.3);
- Duas superfícies de tipo catenóide (cf. seção 4.2 e 4.4);
- Uma família a dois parâmetros de superfícies folheadas por curvas de curvatura constante maior que 1, parecidos com os exemplos de Riemann de  $\mathbb{R}^3$ , já que são contidos entre dois planos horizontais (cf. seção 4.3);
- Uma família a dois parâmetros de superfícies folheadas por curvas de curvatura constante menor que 1, de tipo exemplo de Riemann (cf. seção 4.5.1);
- Uma família a dois parâmetros de superfícies folheadas por curvas de curvatura constante menor que 1, periódicas na direção vertical (cf. seção 4.5.2).

Assim apenas faltou analisarmos o caso onde as superfícies são folheadas por curvas de curvatura igual a 1, isto é, os horociclos.

Em conclusão, observamos que o método usado nessa dissertação poderia ser aplicado para o estudo das Superfícies Cíclicas satisfazendo outras equações de curvatura, tais como superfícies de curvatura média constante ou de curvatura Gaussiana constante.