

2 Tendências da mortalidade

2.1. Noções básicas de matemática atuarial

Nesta seção são definidos alguns conceitos importantes dentro da matemática atuarial, que serão abordados no presente trabalho. Para as notações, buscou-se atender as convenções determinadas pelo *International Actuarial Association's Permanent Committee on Notation*.

- Função de sobrevivência

A função de sobrevivência é denotada por $s(x)$ e representa a probabilidade de um recém-nascido sobreviver até a idade x .

Considerando que a idade de morte X de uma pessoa recém-nascida é uma variável aleatória contínua e sendo $F_x(x)$ a função de distribuição de X :

$$F_x(x) = \Pr(X \leq x), x \geq 0.$$

A função de sobrevivência é definida como:

$$s(x) = 1 - F_x(x) = \Pr(X > x), x \geq 0.$$

Por convenção, $F_x(0) = 0$, o que implica em $s(0) = 1$.

- Probabilidade de morte

O símbolo (x) é utilizado para denotar uma vida à idade x . O tempo futuro de vida de (x) , $X - x$, é denotado por $T(x)$. A probabilidade de tempo futuro de vida $T(x)$ se relaciona da forma:

$$\begin{aligned} {}_nq_x &= \Pr(T(x) \leq n) = \Pr(X \leq x + n \mid X > x) = \frac{\Pr(x < X \leq x + n)}{\Pr(X > x)} = \\ &= \frac{F(x + n) - F(x)}{s(x)} = \frac{s(x) - s(x + n)}{s(x)} \\ {}_np_x &= 1 - {}_nq_x = \Pr(T(x) > n), n \geq 0 \end{aligned}$$

O símbolo ${}_nq_x$ representa a probabilidade de (x) morrer dentro de n anos. Por outro lado, ${}_np_x$ é a probabilidade de (x) chegar vivo à idade $x+n$. Quando $n=1$, convencionalmente é omitido o prefixo na simbologia, denotando-se simplesmente q_x e p_x . Temos também que ${}_0p_x = 1$ e ${}_0q_x = 0$.

- Força de mortalidade

A força de mortalidade, denotada por μ_x , mede a intensidade da morte instantânea. Ela expressa a probabilidade condicional de (x) morrer entre as idades x e z , dado que ela já sobreviveu até a idade x e assumindo que o intervalo $(z - x)$ tende a zero. Algebricamente, tem-se:

$$\mu_x = \lim_{z \rightarrow x^+} \frac{F_x(z) - F_x(x)}{1 - F_x(x)} = -\frac{s'(x)}{s(x)}$$

A força de mortalidade também é denominada “taxa de falha” em análises de sobrevivência e confiabilidade. Formas de equivalência das equações expostas acima podem ser obtidas através das seguintes fórmulas:

$${}_tq_x = \int_0^t {}_tP_x \mu_{x+s} ds$$

$${}_tP_x = \exp\left(-\int_0^t {}_t\mu_{x+s} ds\right)$$

- Taxas centrais de mortalidade

Para calcular as taxas brutas centrais de mortalidade no período de 1 ano, precisa-se do número de mortes no ano e da quantidade central de expostos ao risco de morte no meio do ano (Neves, 2005). A taxa central de mortalidade à idade x é então definida pela razão:

$$m_x = \frac{d_x}{L_x},$$

onde m_x é a taxa central de mortalidade à idade x , d_x é o número de mortes esperadas de pessoas com idade x e L_x é aproximadamente a quantidade de pessoas expostas ao risco de morte no meio do ano. A função L_x é derivada da função básica l_x das tábuas de mortalidade. Tem-se que: $L_x \cong \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$, onde l_x é a quantidade esperada de sobreviventes à idade x e l_{x+1} é a quantidade esperada de

sobreviventes à idade $x+1$, dado que se iniciou a coorte hipotética com l_0 indivíduos com zero ano.

As taxas de mortalidade m_x são caracterizadas como uma forma discreta da força de mortalidade μ_x . As duas funções se relacionam da forma:

$$m_x = \frac{\int_0^1 {}_n p_x \mu_{x+n} dn}{\int_0^1 {}_n p_x dn}$$

Se a força de mortalidade μ_x assume valor constante na idade x de forma que $\mu_{x+s} = \mu_x, \forall 0 \leq s < 1$, temos:

$$m_x = \frac{\mu_x \int_0^1 {}_n p_x dn}{\int_0^1 {}_n p_x dn} \Leftrightarrow m_x = \mu_x$$

As taxas centrais de mortalidade também possuem relação com as probabilidades de morte. Partindo-se do pressuposto que m_x varia linearmente no intervalo $(x, x+n)$, concluímos que as mortes possuem uma distribuição uniforme entre x e $x+n$. Defina:

$${}_n m_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{n L_x}$$

então supondo uniformidade:

$${}_n m_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{(l_x + l_{x+n})/2n} \Rightarrow \frac{2 {}_n q_x}{n(1+{}_n p_x)}$$

Isolando ${}_n q_x$ na equação, temos:

$${}_n q_x = \frac{2n {}_n m_x}{2 + n {}_n m_x}$$

Quando $n = 1$, temos:

$$q_x = \frac{2 m_x}{2 + m_x} \Rightarrow q_x = \frac{m_x}{1 + \frac{m_x}{2}}$$

- Expectativa de vida

A expectativa de vida à idade x , denotada por e_x , indica o tempo futuro de vida esperado de (x) , $X - x$. Através das funções de uma tábua de mortalidade, e_x é obtida pela relação:

$$e_x = \frac{T_x}{l_x},$$

onde T_x representa a função “anos-pessoas”, indicando o total de anos vividos pela coorte l_x entre as idades x e a última idade prevista na tábua de mortalidade.

2.2. Panorama da mortalidade

O Brasil tem apresentado expectativa de vida acima da média mundial, mas tem estado em uma situação um tanto desconfortável quando comparado aos países latino-americanos e caribenhos. Segundo o estudo do IBGE em parceria com a ONU, vários países possuíam, em 2005, expectativas de vida superiores às do Brasil, estimada em 72,05 anos, na época. De acordo com as estimativas apresentadas pela ONU para o período 2000-2005, o Brasil ocupou a 82ª posição no ranking de 192 países ou áreas no que diz respeito à expectativa de vida. A Fig.2 exibe um comparativo entre as expectativas de vida de alguns países latino-americanos e caribenhos, e também do Japão e dos Estados Unidos. O Japão foi incluído no gráfico por representar a primeira colocação no *ranking* mundial de expectativa de vida em 2005, e a inclusão dos Estados Unidos justifica-se pelo fato da maioria dos atuários brasileiros adotarem tábuas de mortalidade baseadas em experiências de mortalidade norte-americanas. A diferença na expectativa de vida entre os países mais e menos desenvolvidos vem diminuindo. Essa queda é naturalmente inevitável dada a tendência de envelhecimento global, pois as expectativas de vida dos países com população mais idosa crescem menos.

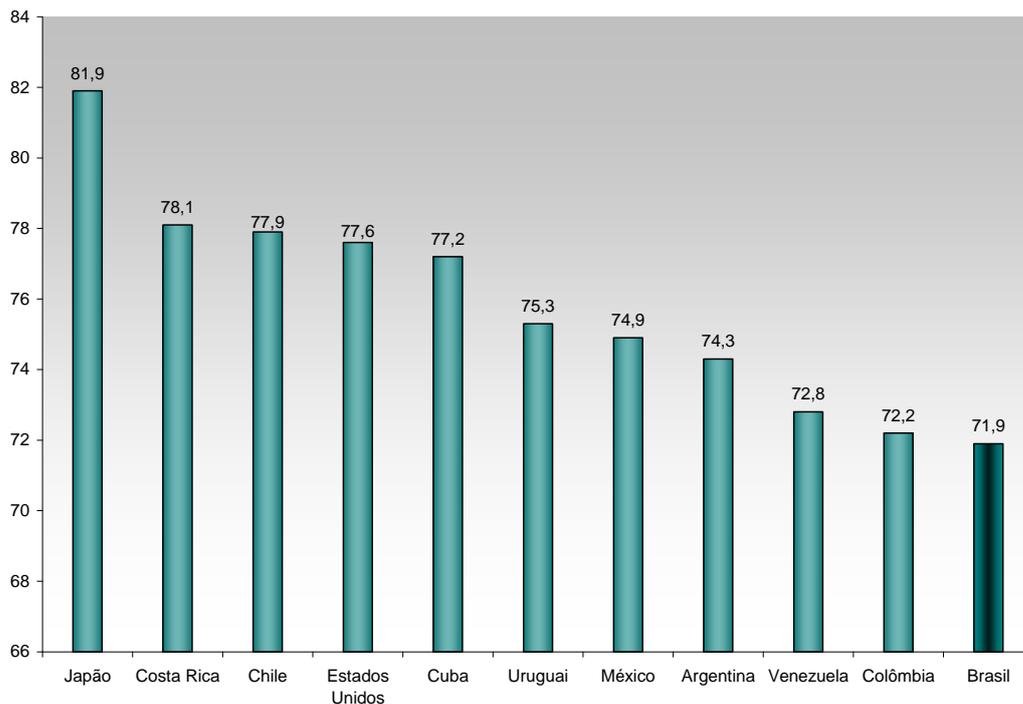


Figura 2 – Expectativa de vida por países (2005)

Fonte: IBGE

Seguindo a tendência mundial, no Brasil vem sendo verificado o aumento da sobrevida das pessoas com idades mais avançadas, bem como o aumento do número de pessoas que atingem tais idades, caracterizando dois fenômenos que vêm ocorrendo concomitantemente, denominados, respectivamente, por “expansão” e “retangularização” da função de sobrevivência. A Fig. 3 representa as funções de sobrevivência $s(x)$ afetadas pelos dois fenômenos. A “retangularização” da curva de sobrevivência refere-se ao fato de estar ocorrendo uma grande concentração de mortes em torno de uma idade média de morte (ponto Lexis), a partir da qual a linha começa a se curvar. Até chegar nesse ponto médio, as probabilidades de sobrevivência também vêm aumentando. Um maior volume de pessoas atingem as idades mais avançadas. A “expansão” da função de sobrevivência é caracterizada pela elevação da idade limite que a população alcança. O envelhecimento populacional vem sendo evidenciado pela atuação desses dois fatores. Enquanto o indivíduo envelhece à medida em que a sua idade aumenta, e este é um processo irreversível, a população, como coletivo, envelhece à medida em que aumenta a idade média das pessoas que a compõem. O sustentado aumento da idade média que caracteriza o envelhecimento

populacional ocorre ao aumentar o peso relativo dos idosos no total da população (Wong & Moreira, 2000).

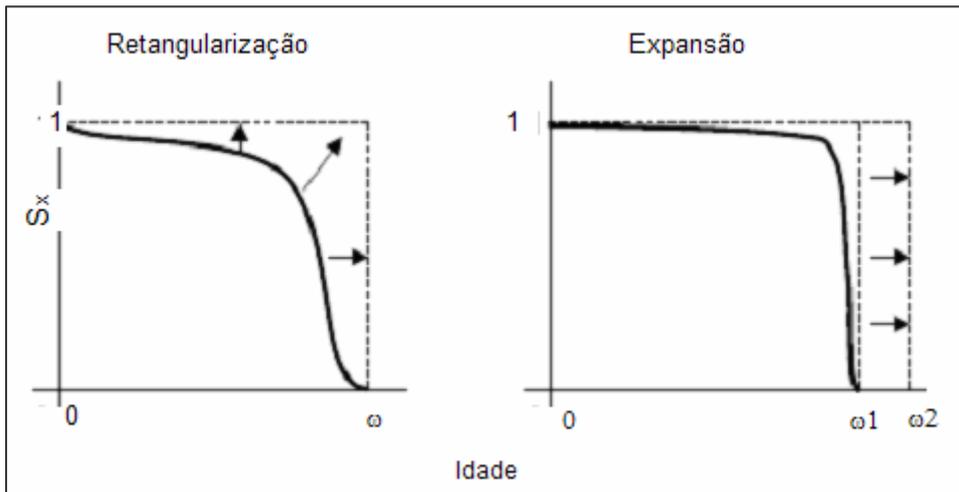


Figura 3 – Mudanças na curva da função de sobrevivência

A evolução da sobrevivência brasileira para a população aos 60 anos no período 1991-2030 é demonstrada na Fig. 4. Observa-se claramente o aumento da expectativa de sobrevivência da população “idosa” e a diferença entre os valores apontados para as mulheres e os homens.

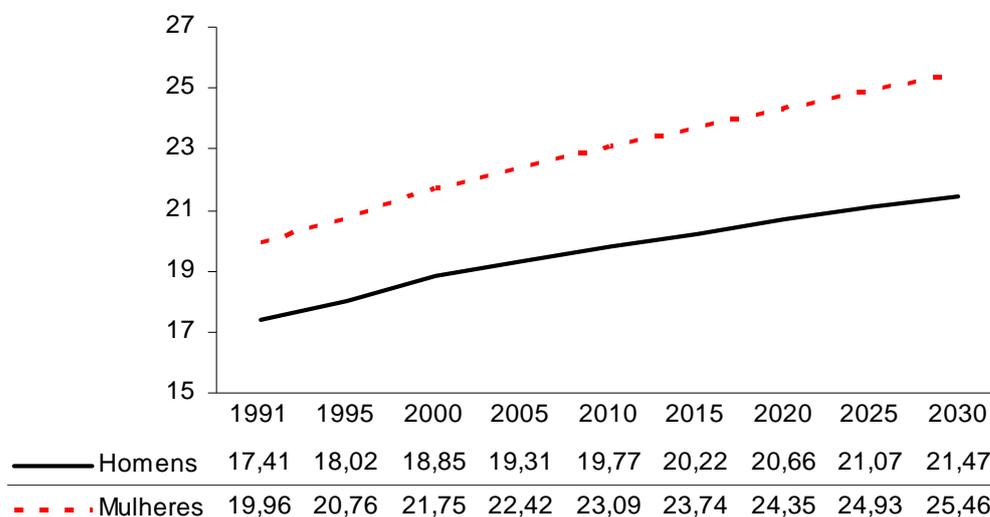


Figura 4 – Expectativa de vida feminina e masculina aos 60 anos

Ilustrando também a questão do aumento do número de pessoas que estão atingindo idades mais avançadas, temos a previsão mostrada na Fig. 5. Percebe-se que é previsto um aumento de cerca de 30% da população jovem-adulta (15 a 64

anos) entre os anos 2007 e 2050. Já para a população idosa (acima de 70 anos), esperamos um crescimento bastante significativo: superior a 300%, passando de 7,7 milhões para 34,3 milhões.

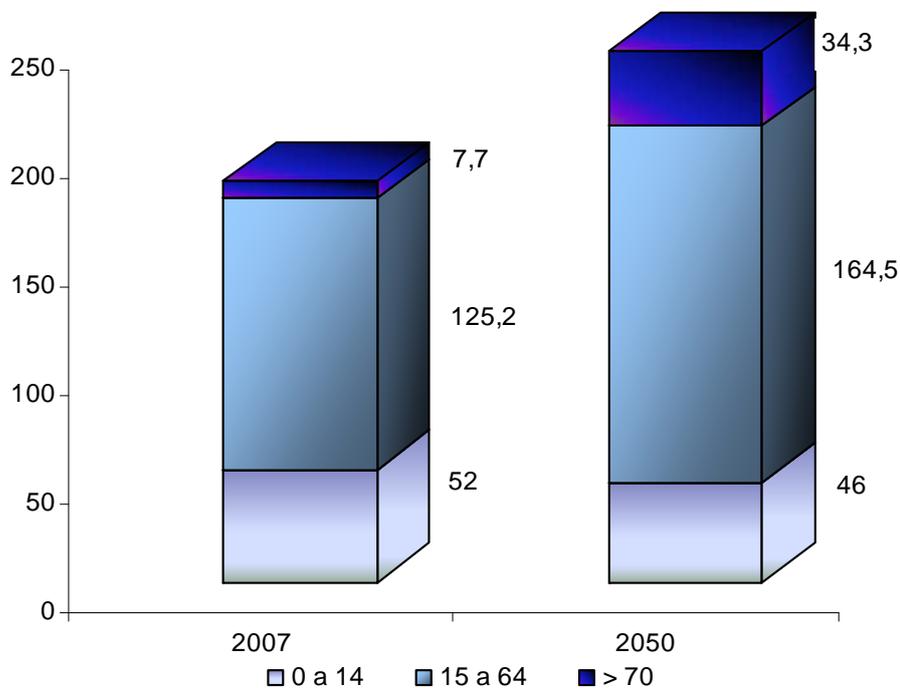


Figura 5 – Projeção da população brasileira (2050)

Fonte: IBGE

O aumento da expectativa de vida tem levantado a questão do limite máximo para a idade dos seres humanos. Na verdade, várias tentativas de se estabelecer tais limites foram ultrapassadas rapidamente (Olshansky , 1988). O Professor Jay Olshansky, da Universidade de Illinois afirma que a mortalidade não manterá sua taxa corrente de melhoria. As principais razões que ele aponta são a obesidade, a disseminação de doenças e, o mais importante, a existência de um limite biomédico para a duração da vida humana. O Professor Shripad Tuljapurkar da Universidade de Stanford, na Califórnia, assume que a duração da vida humana aumentará linearmente às taxas correntes até 2010, mas ele acredita que tecnologias anti-idade se tornarão então disponíveis e prolongarão a vida ainda mais. Segundo ele, drogas e terapias vão fazer com que a mortalidade decline 5 vezes mais rápido do que taxas históricas, entre 2010 e 2030 (Tuljapurkar, 1998). Os pesquisadores Jim Oeppens, da Universidade de

Cambridge na Inglaterra, e James Vaupel, do Instituto Max Planck para Pesquisa Demográfica na Alemanha, contrariam as tentativas de se estabelecer limites para a idade máxima do ser humano e concluíram que ainda estamos longe do limite do crescimento da expectativa de vida. Eles apontam que a expectativa de vida vem crescendo de forma aproximadamente linear de 1840 até hoje. “Se estivéssemos perto do limite, essa linha deveria já ter começado a se curvar, mas não há sinais disso” (Oeppens & Vaupel, 2002).

2.3. Tábuas de mortalidade estáticas versus geracionais

Como já mencionado na seção 1, a inclusão nos cálculos atuariais da tendência da mortalidade ao longo do tempo é feita através das tábuas de mortalidade. Para estimar a sobrevivência de um indivíduo quando da contratação de um plano de previdência, associa-se a cada um dos seus possíveis anos de falecimento uma probabilidade de morte, retirada de uma ferramenta utilizada pelo atuário conhecida como tábua de mortalidade, tábua de vida, tábua biométrica ou demográfica. A tábua de mortalidade é um instrumento que resume a experiência de mortalidade de uma população, informando as probabilidades condicionais de morte nas diversas idades. Consiste em uma tabela que registra, de um grupo inicial de pessoas da mesma idade, o número daquelas que vão atingindo as diferentes idades até a extinção completa do referido grupo.

‘As probabilidades de morte são retiradas de tábuas de mortalidade, que informam a probabilidade de morte por faixa etária, geralmente de um em um ano, ou seja, a tábua informa, por exemplo, qual a probabilidade de uma pessoa morrer entre 15 e 16 anos, entre 70 e 71 anos, até uma idade denominada ômega (ω), que é o limite da tabela. Assume-se que, ao alcançar a idade ω , a chance da pessoa morrer é 100% (cem por cento). Outra informação muito importante trazida pelas tábuas é a esperança de vida a partir de qualquer idade. Assim, é possível obter quantos anos espera-se que uma pessoa vá viver ao se aposentar à idade Y , e, conseqüentemente, calcular o custo de sua aposentadoria’ (Ferreira, 1985).

Por conta do aumento da longevidade, o Conselho de Gestão da Previdência Complementar aprovou a resolução CGPC nº18, de 28/3/2006, que elevou a tábua de mortalidade mínima a ser adotada pelos fundos de pensão brasileiros. Antes, as regras exigiam que a premissa mínima adotada fosse a tábua AT-49M, que prevê uma sobrevivência de 18,5 anos para aqueles que chegam aos 60 anos. Com a nova regra, será preciso adotar, pelo menos, a AT-83, cuja sobrevivência prevista acima dos 60 anos é de 22,5 anos. A resolução não exige as entidades da responsabilidade de promoverem estudos sobre adequação de tábuas. Caso esse estudo revele aderência a alguma tábua com expectativa de vida inferior à da AT-83, ou se mostre não conclusivo, em função, por exemplo, do número reduzido de expostos ao risco, a entidade deverá adotar a tábua AT-83 na avaliação dos encargos de sobrevivência de válidos. Segundo o ex-secretário de Previdência Complementar Adacir Reis (2006): *"É de responsabilidade do fundo e de seus administradores estudar a tábua que seja a mais adequada às suas necessidades e nada impede que esta estime longevidade ainda maior que a da AT-83 (como a AT-2000, por exemplo)".*

O que ocorre na utilização das tábuas estáticas é que as probabilidades de morte apontadas para cada idade se mantêm constantes ao longo do tempo. Por exemplo, caso seja utilizada uma tábua estática, considera-se que a probabilidade de uma pessoa de 80 anos morrer hoje antes de atingir a idade 81 é igual à de uma pessoa de 80 anos morrer antes de atingir a idade 81 em qualquer época, seja há 10 anos ou daqui a 5, 10 ou 15 anos. Quando da utilização de tábuas estáticas, a variação da mortalidade é inserida no cálculo atuarial somente quando da troca da tábua de mortalidade adotada. E conforme relatado no parágrafo anterior, a efetuação das trocas das tábuas adotadas vem sendo cada vez mais exigida pelos órgãos regulamentadores, uma vez que a mortalidade está em movimento. A Tabela 1 ilustra parcialmente uma tábua de mortalidade estática.

Tabela 1 – Tábua de mortalidade da População dos Estados Unidos 1979-1981

x	q_x	l_x	d_x	m_x	L_x	T_x	e_x
0	0,01260	100.000	1.260	0,01260	98.973	7.387.758	73,88
1	0,00093	98.740	92	0,00093	98.694	7.288.785	73,82
2	0,00065	98.648	64	0,00065	98.617	7.190.091	72,89
3	0,00050	98.584	49	0,00050	98.560	7.091.474	71,93
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Fonte: Bowers et al. (1997)

As tábuas estáticas são obtidas a partir de dados coletados durante um certo período enquanto as tábuas dinâmicas incorporam projeções futuras da mortalidade. Claramente, em um ambiente onde a longevidade é crescente, temos: $q_{x+k,t+k} < q_{x+k,t}$. Desta forma, é notório que as tábuas estáticas subestimam as expectativas de sobrevida ou as contribuições relacionadas a planos de previdência. A precificação de rendas vitalícias requer a utilização de tábuas projetadas. As tábuas dinâmicas, ou geracionais, projetam a mortalidade para o futuro, buscando-se antecipar ao aumento da longevidade. Os fatores de *improvement* projetam a mortalidade para o ano em que esta será aplicada. Devido à característica redutora dos fatores de *improvement*, a probabilidade de uma pessoa com 80 anos em 2010 falecer é menor do que a de uma pessoa com 80 anos em 2007 falecer, pois foi introduzida a melhoria gradual da mortalidade nos 3 anos. A Fig. 6 ilustra o comportamento das probabilidades de morte previstas em tábuas estáticas e em tábuas geracionais

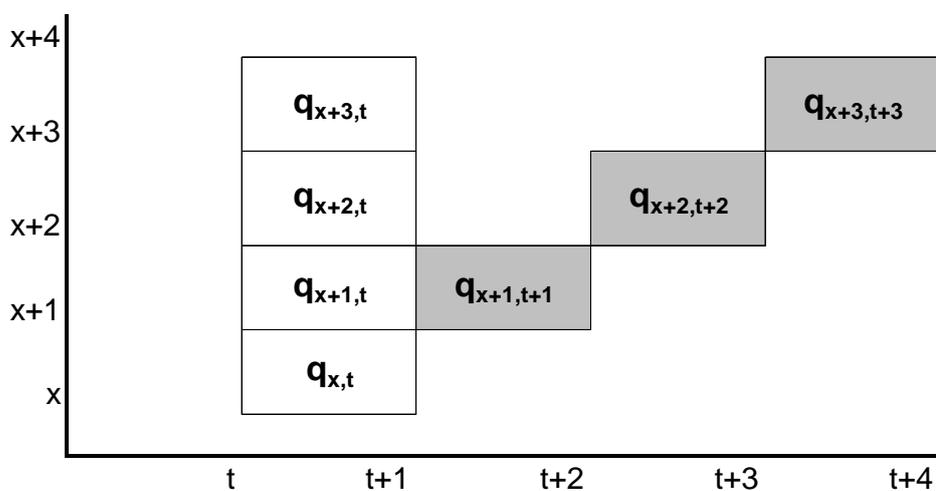


Figura 6 – Probabilidades de morte: tábuas estáticas x geracionais

Vários estudos estão sendo realizados e algumas tábuas geracionais já foram publicadas, como a RP-2000, publicada pela *Society of Actuaries (SOA)* em 2003. Esta tábua foi construída com base em um período mais recente de observação (1990-1994) e teve por base experiências somente de populações pertencentes a fundos de pensão. A *SOA* recomendou a aplicação de uma escala de projeção denotada por AA à tábua RP-2000. A escala contém os fatores de

improvement a serem aplicados nas probabilidades de morte em cada idade para projetá-las a partir do ano-base 2000, tornando a tábua de mortalidade geracional. É importante destacar que, para construção da tábua de mortalidade, foi utilizado como base um período de observação de 4 anos, mas para construção da escala AA, o período de observação das informações foi de 17 anos. A Tabela 2 fornece a expectativa de vida esperada aos 55 anos para indivíduos nascidos em diferentes anos, pela tábua AT-83 masculina, que é estática, e pela tábua RP-2000 masculina geracional. A Fig. 7 ilustra o comportamento das probabilidades de morte previstas nas tábuas estáticas AT-83M e UP-94M, bem como na tábua RP-2000 estática e geracional. Nota-se a melhoria gradual sendo incorporada à sobrevivência na tábua geracional.

Tabela 2 – Expectativa de vida aos 55 anos - AT-83M e RP-2000 Geracional

	Idade hoje	Expectativa de vida aos 55 anos pela AT-83M	Expectativa de vida aos 55 anos pela RP-2000 Geracional
Nascido em 1952	55	26,8	28,5
Nascido em 1962	45	26,8	29,4
Nascido em 1972	35	26,8	30,2
Nascido em 1982	25	26,8	31,0

Fonte: Watson Wyatt (2007)

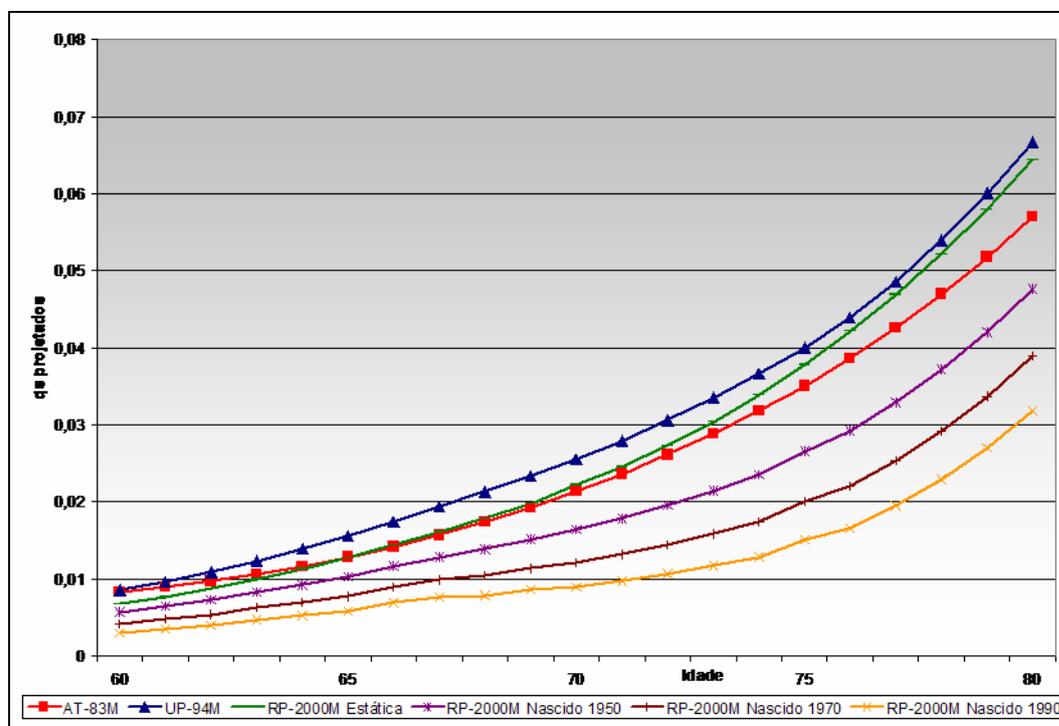


Figura 7 – Comparação das probabilidades de morte entre 60 e 80 anos

Fonte: Watson Wyatt (2007)

O impacto monetário em um plano de previdência privada, quando da substituição da tábua AT-83 pela tábua RP-2000 geracional, é estimado em Watson Wyatt (2007) como sendo de:

- 1,5%, supondo um plano com a maioria de participantes ativos, com idade média de 32 anos, e poucos assistidos ;
- 0,03% em um plano onde a maioria dos participantes são assistidos, com idade média de 61 anos, e poucos ativos;
- 1,8% em um plano onde 70% dos participantes são ativos com idade média de 38 anos e 30% dos participantes são assistidos com idade média de 50 anos.

No capítulo seguinte, são apresentadas algumas das metodologias que vêm sendo estudadas para projeção das taxas de mortalidade.