1 Introdução

O uso de sistemas estruturais esbeltos tem se difundido grandemente em número e aplicabilidade nos diversos campos da engenharia. Esses sistemas estruturais são geralmente formados por vigas, barras, pórticos, treliças, placas e cascas. Em face da relevância que esses elementos têm para grande parte das estruturas modernas, engenheiros devem ter um bom conhecimento do seu comportamento estrutural quando submetidos a carregamentos estáticos ou dinâmicos.

No caso específico de carregamento dinâmico, o emprego de estruturas com um valor cada vez mais alto na relação entre resistência e peso faz surgir uma série de fenômenos relativamente complexos no seu comportamento quando comparado àquele exibido por estruturas convencionais. Este comportamento pode, em geral, ser matematicamente descrito por equações diferenciais parciais de movimento. Somente a um nível relativamente alto de aproximação e um grau elevado de especificação podem-se obter soluções exatas de forma fechada (Mickens, 1984; Kahn e Zarmi, 2004).

A perda de generalização e relativa precisão, causadas pelo uso dessas abordagens simplificadoras, muitas vezes não correspondem às necessidades de um engenheiro em prever e lidar com fenômenos que freqüentemente surgem quando o uso de estruturas esbeltas está presente. Além disto, as hipóteses feitas na obtenção destas abordagens em geral não representam, em níveis aceitáveis, as características e comportamento de estruturas mais leves.

A representação do comportamento dinâmico-estrutural de problemas mecânicos por meio de equações linearizadas é um exemplo da insuficiente capacidade de se capturar e descrever todos os fenômenos tipicamente presentes em estruturas esbeltas. O domínio em que são válidas as teorias lineares para estudos de vibrações é limitado a amplitudes pequenas comparadas à espessura do elemento estrutural em vibração. Entretanto, com o uso de estruturas cada vez mais esbeltas e máquinas modernas cada vez mais rápidas, vibrações de grande amplitude podem ocorrer para freqüências de vibração próximas às freqüências de ressonância (Benamar *et alli,* 1991).

Entre os fenômenos que a formulação linearizada de problemas dinâmicos é insuficiente para descrever encontram-se: a relação de dependência entre freqüência e amplitude, saltos dinâmicos, oscilações sub-harmônicas e super-harmônicas, valores múltiplos na resposta freqüência-amplitude correspondendo a configurações múltiplas de equilíbrio, ressonâncias combinadas, interação modal e movimentos caóticos (Nayfeh and Mook, 1979; Sathyamoorthy, 1997; Azrar *et alli*, 1999).

Uma análise que se destine então a capturar e representar adequadamente esses fenômenos precisa levar em conta cuidadosamente as fontes de não-linearidade do problema. A metodologia mais largamente empregada para efetuar uma análise deste tipo é por meio do emprego de *sofwares* baseados em uma formulação em elementos finitos. Entretanto existem algumas desvantagens no uso de formulações baseadas em elementos finitos, mesmo para modelos matemáticos relativamente simples.

Como o princípio da superposição dos efeitos não é valido para problemas não-lineares, surgem nestes problemas acoplamentos (como o existente entre deslocamentos transversais e axiais em eixos e vigas de rolamento). Neste caso modelos de elementos finitos requerem um número elevado de graus de liberdade para assegurar a obtenção de uma representação dinâmica completamente adequada, demandando um aumento considerável de tempo e de esforço computacional para obtenção de sua solução (Ribeiro e Petyt, 1999; Pesheck *et alli,* 2002; Galvão, 2004).

Uma metodologia comumente utilizada para contornar esta dificuldade é determinar a solução de equilíbrio para o modelo não-linear completo e então linearizar o modelo em torno desta solução. Dumir e Bhaskar (1988), entretanto, afirmam que esta abordagem ignora termos não-lineares relevantes à análise dinâmica, o que pode levar a uma descrição imprecisa no comportamento predito do sistema estudado.

Análises realizadas com *softwares* cuja formulação está baseada em elementos finitos são inapropriadas para uma análise paramétrica dos fatores mais relevantes na vibração de estruturas com comportamento não-linear, já que a solução é obtida especificamente para um conjunto de dados em particular.

Uma alternativa que visa superar estas dificuldades é o emprego de modelos de ordem reduzida com poucos graus de liberdade que sejam capazes de capturar a dinâmica essencial do sistema. Segundo Rega e Troger (2005), modelagem numérica, simulação experimental e mesmo rigorosa análise matemática mostram que para alguns sistemas uma descrição precisa do seu comportamento assintótico pode ser suficientemente obtida pela redução do espaço originalmente de alta dimensão (infinita no caso de estruturas contínuas) para um espaço de dimensão muito menor.

Essa abordagem simplifica a análise não-linear de vibração e requer menos tempo que modelagens baseadas em elementos finitos. Além disto, torna-se também possível um estudo paramétrico mais profundo das fontes relevantes nos fenômenos que surgem quando o comportamento não-linear é estudado.

Na redução de dimensão de um problema dinâmico de uma estrutura contínua, deve-se lembrar que a redução pode ser feita tanto na parte temporal quanto na parte espacial. De acordo com Qaisi (1993), no estudo de vibrações de estruturas geometricamente não-lineares duas abordagens distintas são comumente empregadas na redução das variáveis geométricas e temporais do problema. No primeiro, os métodos de redução são empregados inicialmente na parte espacial dos problemas. Neste caso a abordagem mais freqüente assume que os modos não-lineares de vibração têm a mesma forma dos lineares e as equações de equilíbrio que governam o movimento são reduzidas então a equações diferenciais ordinárias temporais que, no caso de formulação para vigas com não-linearidade cúbica, resultam em equações do tipo Duffing, cuja solução exata existe na forma de integrais elípticas.

Na segunda abordagem, a parte temporal da solução é assumida como periódica, reduzindo assim, as equações de movimento a equações não-lineares nas variáveis geométricas do espaço. Uma terceira abordagem é aplicar a redução da dimensão em ambas as partes, temporal e espacial, combinando as abordagens anteriores.

Em geral, pode-se classificar os métodos de redução de dimensão dos problemas não-lineares dinâmicos em analíticos e numéricos. Um resumo da literatura existente a respeito dos métodos numéricos e analíticos mais utilizados nos estudos de vibrações não-lineares pode ser encontrado no artigo escrito por Marur (2001).

Entre os métodos numéricos mais utilizados estão os métodos de Ritz (Srinivasan, 1966; Lewandowski, 1987; Lewandowski, 1997), Galerkin (Tseng e Dugundji, 1970; Ling e Wu, 1987; Lewandowski, 1997) e com ainda maior emprego o método do balanço harmônico (Benounna and White, 1984; Mickens1984; Leung e Fung, 1989; Lewandowski, 1994; Lewandowski, 1997).

O método do balanço harmônico foi empregado por Ray e Bert (1969) para o estudo de vigas biapoiadas geometricamente não-lineares. Curvas de resposta amplitude-freqüência de vibrações forçadas e amortecidas de vigas contínuas foram satisfatoriamente obtidas por Lewandowski (1992) usando uma metodologia que combina os métodos dos elementos finitos e do balanço harmônico.

Já entre os métodos analíticos os mais largamente empregados são os métodos de perturbação. O trabalho de Kahn e Zarmi (2004) apresenta uma introdução ao uso de métodos de perturbação para oscilações em sistemas fracamente não-lineares. A vibração não-linear de vigas com várias condições de contorno foi estudada por Evensen (1968) com o uso desse método. A resposta não-linear de uma viga com apoios fixos submetida a carregamento dinâmico foi obtida por Busby and Weingarten (1972). Neste estudo, os autores assumiram dois modos de vibração para a viga, utilizaram o método dos elementos finitos para a obtenção da equação não-linear de movimento e empregaram o método da perturbação para sua solução.

O método da perturbação foi também utilizado para estudo de vibração livre de placas com não-linearidade geométrica por Rehfield (1973). No trabalho de Mook et alli (1985) o problema de vibração forçada e amortecida de elementos estruturais foi formulado utilizando o método de perturbação. A metodologia desenvolvida no trabalho de Nayfeh (1998) emprega métodos de perturbação para o estudo dinâmico de estruturas fracamente não-lineares. Essa metodologia foi aplicada para o caso de uma viga sobre base elástica. Andrianov e Danishevs'kyy (2002) usaram uma abordagem baseada neste método para descrever a vibração não-linear de barras e vigas.

Enquanto métodos numéricos, como o balanço harmônico, são apontados como de aplicação a uma grande variedade de problemas e resultam em boas aproximações para problemas com forte não-linearidade (Mickens,1984), vários autores concordam em afirmar que os métodos de perturbação produzem resultados satisfatórios somente quando a não-linearidade do problema é considerada fraca (Leung e Fung, 1989; Hamdan e Burton, 1993; Lewandowski, 1994; Lacarbonara, 1999). De acordo com Lau e Yuen (1993) um erro comumente encontrado em muitas análises dinâmicas é considerar a não-linearidade como fraca, quando na realidade ela não é.

De acordo com Lewandowski (1992) os métodos numéricos de aproximação como o balanço harmônico são mais simples e sistemáticos, o que viabiliza sua implementação e melhora o desempenho computacional em relação aos métodos analíticos como o método da perturbação.

Encontram-se na literatura outras abordagens para obtenção de modelos de ordem reduzida. No trabalho de Ribeiro e Petyt (1999) o método dos elementos finitos hierárquico foi utilizado para diminuir o número de graus de liberdade necessários para obter a resposta dinâmica de vibrações não-lineares em vigas com vários tipos de condições de apoio. Quando comparada à formulação convencional em elementos finitos, essa metodologia resultou mais favorável em termos da convergência, alcançada com um menor número de graus de liberdade, reduzindo assim significativamente o tempo computacional.

O modelo reduzido obtido por Lacarbonara (1999) se baseia no procedimento de discretização de Galerkin retificado. Essa metodologia é aplicada a uma classe de sistemas unidimensionais com não-linearidades cúbicas e quadráticas. Nesse estudo, o modelo foi capaz de capturar e condensar corretamente todas as contribuições modais dos movimentos não-lineares dos problemas estudados. O autor também afirma que o modelo reduzido empregado pode ser estendido à análise de sistemas contínuos com ou sem ressonância interna.

No trabalho de Pesheck *et alli* (2002) é utilizado um modelo de ordem reduzida empregando um ou dois modos não-lineares normais (NNM's – *Non-linear normal modes*) para o estudo de uma viga de rolamento em balanço. Os resultados obtidos indicam que o modelo reduzido adotado conseguiu capturar com a precisão desejada o comportamento dinâmico do problema estudado.

Uma metodologia empregando NNM's foi adotada por Touzé *et alli* (2004) para o estudo de vibrações com grandes amplitudes em vigas sobre base elástica não-linear e uma viga biengastada geometricamente não-linear. A redução de tempo computacional obtida nas análises empregando esta metodologia foi significante e a predição do comportamento dinâmico das estruturas estudadas foi satisfatória.

Tiso *et alli* (2005) utilizaram um modelo reduzido empregando o método dos elementos finitos para uma análise dinâmica não-linear de estruturas com imperfeições iniciais. A metodologia foi exemplificada com o estudo de estruturas porticadas.

Resultados como esses são importantes principalmente no caso em que se queira analisar modos de vibração de ordem elevada ou quando estes se acoplam com modos mais baixos devido à ressonância interna. Eles também são relevantes para estudos em que vários harmônicos precisam ser incluídos nas séries utilizadas para se aproximar a resposta no tempo ou para estruturas compostas por múltiplos membros estruturais (Ribeiro e Petyt, 1999).

1.1. Objetivo

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de metodologias para a obtenção de modelos consistentes de baixa dimensão para o estudo de vibração harmônica não-linear geométrica de vigas e pórticos planos.

1.2. Organização do trabalho

O capítulo 2 apresenta a formulação para a obtenção do funcional de energia para o problema não-linear, a partir do Princípio de Hamilton. As técnicas variacionais são então empregadas para obtenção das equações diferenciais parciais de movimento tanto para vigas quanto para pórticos.

No capítulo 3 o desenvolvimento da metodologia empregada é apresentado tendo como exemplo o estudo de vibração não-linear de uma viga simplesmente apoiada. No capítulo 4 estende-se a metodologia para vigas com outras condições de contorno.

A aplicação da metodologia desenvolvida no capítulo 3 para pórticos planos é o tema do capítulo 5. Por fim, no capítulo 6 são apresentadas as conclusões e sugestões para aplicação e continuação deste trabalho de pesquisa.