



Elvidio Gavassoni Neto

Modelos Discretizados de Dimensão Reduzida para Análise Dinâmica Não-Linear de Vigas e Pórticos Planos.

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio.

> Orientadores: Paulo Batista Gonçalves Deane de Mesquita Roehl

Rio de Janeiro, Agosto de 2007

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro



Elvidio Gavassoni Neto

Modelos Discretizados de Dimensão Reduzida para Análise Dinâmica Não-Linear de Vigas e Pórticos Planos.

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

> Paulo Batista Gonçalves Orientador Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

> Deane de Mesquita Roehl Orientadora Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

> > Ricardo Azoubel da Mota Silveira UFOP

Raul Rosas e Silva Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

José Eugênio Leal Coordenador(a) Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 02 de Agosto de 2007

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Elvidio Gavassoni Neto

Formou-se técnico em agrimensura pelo Centro Federal de Educação Tecnológica do Espírito Santo em 1996. Graduou-se pela Universidade Federal do Espírito Santo em 2005.

Ficha Catalográfica

Gavassoni Neto, Elvidio

Modelos discretizados de dimensão reduzida para análise dinâmica não-linear de vigas e pórticos planos / Elvidio Gavassoni Neto ; orientadores: Paulo Batista Gonçalves, Deane de Mesquita Roehl. – 2007.

136 f. : il. ; 30 cm

Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil)-Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007. Inclui bibliografia

CDD: 624

Agradecimentos

Ao escrever estas que, apesar de aparecerem no início, são as últimas palavras que acrescento a este texto, povoa-me a mente uma diversidade de sentimentos quase que contraditórios. Entretanto, enquanto reflito, ao ler os belos versos de Elliot, a contradição desaparece e aquilo que parecia um paradoxo, na verdade se mostra algo completo, uma inusitada manifestação de um sentimento recorrente a todas as mudanças da vida, pois: "What we call the beginning is often the end \ And to make an end is to make a beginning. \ The end is where we start from" (Little Gidding, V). O verbo agradecer sempre vem acompanhado do verbo recordar. Sigo, portanto, nestes parágrafos, o conselho contido nos versos do Hino aos Bandeirantes – "Deixe atrás o presente: Olha o passado à frente!".

Talvez por isso, a atenção excessiva ao relógio possa nos impedir de buscar uma bússola. Deste modo se aprofunda em significado a palavra orientador, pois foi justamente por duas boas bússolas que o relógio não inviabilizou a conclusão deste trabalho. Ao me referir aos meus orientadores faz-se necessário apontar que igualmente em importância eles permearam este tempo de dissertação.

À Professora Deane, pelo bom-humor e acessibilidade desde o período em que cursei os créditos. Por ser teimosa o suficiente para não desistir de me ensinar que há uma sutil, mas real, diferença entre teimosia e persistência. Pelo auxílio durante meu estágio de docência. Pela coragem de sempre que oportuno não ter se mantido eticamente muda, ensinando-me mais do que métodos numéricos para engenharia, mas confirmando-me a lição que a vida é mais que uma carreira e que certas coisas têm valor e não preço.

Ao Professor Paulo, por ser a pessoa de maior gentileza que já conheci. A gentileza do Paulo não é "linear-hierárquica", mas generosamente constante. Pelo respeito e tranqüilidade. Pela boa-vontade e acessibilidade em me acudir em minhas dúvidas, sempre com um sorriso. Por ter me ensinado, além de suas palavras, que existem outras coisas que podem e devem ser reduzidas, além da

dimensão dos problemas dinâmicos não-lineares, como o ego, a impaciência e a irritação.

Ao apoio financeiro da Capes e da PUC-Rio. Aos professores e funcionários da PUC-Rio e à Rita por sempre me socorrer. A meus professores, que honraram este título, e amigos da graduação cuja influência vai além da superfície do que sou, entre eles Kátia, Andréa e Juliane.

"A person is poor when he is friendless, but even poorer when he ceases being a friend." (M. J. Ashton). Àqueles que me fazem mais rico e comigo dividem o convívio da sala 607D+ ("favelinha highest level"). À Bê ("top gatas Ipatinga") pela implicância e disposição em ajudar e à Marianna pelo incentivo. À Elaine pelo companheirismo durante os créditos, desde a pilha de maçã verde até hoje. Ao meu amigo Eduardo Arreguy ("Petroboy"), pelo companheirismo em todo o caminho desde a graduação, embora estejamos agora trilhando caminhos diferentes o respeito continua e a admiração perdura.

Aprendi desde cedo que a amizade nasce da admiração, tenho sete grandes razões para reafirmar minha crença nesse princípio. Ainda mais porque o número sete é, desde a antiguidade, símbolo de completude e perfeição. Esses sete desmistificaram a afirmação de ser o mestrado uma caminhada de um só. Ao amigo Roberto ("Rouxinol") por sua calma, inteligência e caráter. Por conhecer a eloqüência do silêncio e a nobreza do ouvir. Ao amigo Bazan pelo seu entusiasmo que só não é maior que o número de consoantes do seu pré-nome. Ao amigo Slongo ("aristocracia pura"), por fazer das diferenças entre ele e seus amigos, um aprendizado e das semelhanças, laços consolidados; por ter a invulgar sabedoria de saber não somente aquilo que quer, mas também o que não quer. À pequena amiga Vivian, pela alegria de viver e contentamento em servir. À amiga Amanda, por sua bondade e doçura, por sua sinceridade e solicitude. À Jociléia pela sua pureza, pela sua prontidão no servir, e pela sua simplicidade, que de tão rara, é seu maior dom. À amiga Lorena pela sua naturalidade, generosidade e tremendo companheirismo.

"Our intellectual and active powers increase with our affections." (R.W.Emerson). Por isso agradeço ao Stanley, cujo nome é para mim a própria definição da palavra amizade. À Beta, pelo seu amor e por justificar o fato desta cidade ser chamada de maravilhosa. Ao meu irmão Rodolfo, cuja admiração incondicional é meu maior incentivo. Ao pai, pelo exemplo e por seu amor. Ao meu padrasto pela serenidade e paciência. À vó, pela sabedoria, e por ser a pessoa mais inteligente que conheço. Ao anjo que é a minha mãe, a quem devo tudo o que sou e o que quero ser! Ao Pai celestial, por ser autor e aperfeiçoador de todos estes, pois sem Ele nada do que foi feito se fez!

Voltando a Elliot: "Every phrase and every sentence is an end and a beginning" Até porque para agradecer não existem pontos finais, somente vírgulas,...

Resumo

Gavassoni Neto, Elvidio; Gonçalves, Paulo Batista; Roehl, Deane de Mesquita. **Modelos Discretizados de Dimensão Reduzida para Análise Dinâmica Não-Linear de Vigas e Pórticos Planos.** Rio de Janeiro. 136p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Um dos resultados fundamentais na mecânica clássica é que, para sistemas lineares com n graus de liberdade, existem n modos de vibração ortogonais e que as freqüências naturais são independentes da amplitude de vibração. Além disso, qualquer movimento da estrutura pode ser obtido como uma combinação linear desses modos. No caso de sistemas não-lineares, isto não mais se verifica e a relação entre freqüência, amplitude e os modos de vibração precisa ser determinada. A obtenção dessas informações para estruturas se dá em geral pelo uso de programas de análise não-linear baseados em uma formulação em elementos finitos. Contudo, isto é um procedimento custoso computacionalmente. Uma abordagem mais viável é o uso de modelos discretos compatíveis de baixa dimensão, por meio dos quais as freqüências e os modos não-lineares são obtidos. Neste trabalho é proposto um procedimento para a derivação de modelos de redução de dimensão para vigas e pórticos planos esbeltos. As equações diferenciais de movimento são obtidas a partir da aplicação das técnicas variacionais a um funcional não-linear de energia. A obtenção do modelo se dá através do emprego dos métodos de Ritz ou Galerkin para a redução espacial e do balanço harmônico para redução no tempo. Os modos lineares são utilizados como uma primeira aproximação para os modos não-lineares. As relações freqüência-amplitude são satisfatoriamente obtidas para vibrações livre e forçada (não-amortecida e amortecida). Entretanto, essas curvas apresentam, em geral, no regime não-linear, pontos limites, sendo obtidas, portanto, com uso do método do controle de comprimento de arco. Uma correção para o modo-linear é obtida com uso dos métodos dos elementos finitos e da perturbação. Um estudo paramétrico e das condições de contorno é apresentado para vigas. O comportamento não-linear de pórticos em L é também analisado. Para esses pórticos é estudada a influência de cargas axiais e da geometria. Os resultados são comparados com soluções analíticas encontradas na literatura.

Palavras-chave

Vigas, pórticos planos, vibração não-linear, controle do comprimento de arco, modelo reduzido.

Abstract

Gavassoni Neto, Elvidio; Gonçalves, Paulo Batista; Roehl, Deane de Mesquita. Low-Dimensional Reduced Order Models for the Nonlinear Dynamic Analysis of Beams and Plane Frames. Rio de Janeiro. 136p. MSc. Dissertation – Civil Engineering Department, Catholic University, PUC-Rio

One of the fundamental results in classical mechanics is that linear systems with n degrees of freedom have n orthogonal vibration modes and n natural frequencies which are independent of the vibration amplitude. Any motion of the system can be obtained as a linear combination of these modes. This does not hold for nonlinear systems in which case amplitude dependent vibrations modes and frequencies must be obtained. One way of obtaining these informations for arbitrary structures is to use a nonlinear finite element software. However, this is a cumbersome and time consuming procedure. A better approach is to derive a consistent low dimensional model from which the nonlinear frequencies and mode shapes can be derived. In this work a procedure for the derivation of low dimensional models for slender beams and portal frames is proposed. The differential equations of motion are derived from the application of variational techniques to a nonlinear energy functional. The linear vibration modes are used as a first approximation for the nonlinear modes. The Galerkin and Ritz methods are used in the model for the spatial reduction and the harmonic balance method for the reduction in time domain. This allows the analysis of the free and forced (damped or undamped) vibrations of the structure in non-linear regime. However nonlinear resonance curves usually presents limit points. To obtain these curves, a methodology for the solution of non-linear equations based on an arc-length procedure is derived. Based on the finite element methods and using the basic ideas of the perturbation theory, a correction for the nonlinear vibration modes is derived. The influence of boundary conditions, geometric, and force parameters on the beam response is analyzed. The behavior of L frames is studied. For this kind of frame, the influence of axial loading and geometric parameters on the response is studied. The results are compared with analytical solutions found in the literature.

Keywords

Beams, plane frames, nonlinear vibration, arc-length control, reduced model.

Sumário

1 Introdução	23
1.1. Objetivo	28
1.2. Organização do trabalho	28
2 Formulação geral	29
2.1. Princípio de Hamilton	30
2.2. Formulação para vigas	30
2.3. Formulação para pórticos	35
0 Visco biopoindos	44
3 vigas biapoladas	41
3.1. Analise linear	41
3.1.1. Solução analítica	41
3.1.2. Metodo dos elementos finitos	43
3.1.3. Métodos de Ritz e Galerkin	45
3.1.4. Comparação entre os resultados	46
3.2. Análise não-linear	48
3.2.1. Métodos de perturbação	48
3.2.1.1. Método de Lindstedt-Poincaré	49
3.2.2. Métodos de Ritz e Galerkin	51
3.2.3. Método do balanço harmônico	52
3.2.4. Método do controle do comprimento de arco	53
3.2.5. Redução espacial utilizando a solução analítica	55
3.2.5.1. Vibração livre	56
3.2.5.1.1. Influência do parâmetro η	57
3.2.5.2. Vibração forçada não amortecida	57
3.2.5.2.1. Influência da amplitude do carregamento harmônico	59
3.2.5.3. Vibração forçada amortecida	59
3.2.5.3.1. Influência do fator de amortecimento	62
3.2.5.3.2. Influência do parâmetro η	63
3.2.5.3.3. Influência da amplitude da carga externa	65

3.2.6. Redução espacial utilizando funções polinomiais	67
3.2.7. Correção não-linear	68
3.2.7.1. Funções trigonométricas	68
3.2.7.2. Funções polinomiais	73
4 Vigas com outras condições de apoio	78
4.1. Condições de contorno	78
4.2. Análise linear	79
4.3. Análise não-linear	80
4.3.1. Vibração livre	81
4.3.2. Vibração forçada não-amortecida	84
4.3.3. Vibração forçada amortecida	85
4.3.4. Correção não-linear	89
4.3.4.1. Viga apoiada-engastada	89
4.3.4.2. Viga biengastada	92
5 Pórticos planos	95
5.1. Análise linear	96
5.2. Análise não-linear	98
5.2.1. Vibração livre	100
5.2.2. Vibração forçada não amortecida	101
5.2.3. Vibração forçada amortecida	103
5.2.3.1. Influência da carga axial P	106
5.2.3.2. Influência da geometria do pórtico	107
5.2.3.3. Carregamento axial em ambas as barras	111
6 Conclusões e sugestões	113
6.1. Conclusões	113
6.2. Sugestões	115
7 Referências Bibliográficas	116

Apêndice A Termos das equações diferenciais de movimento para pórticos 120

Apêndice B Algoritmo utilizando método do controle do comprimento o	le
arco	126
Anexo I Formulação em elementos finitos	133
Anexo II Relações trigonométricas	136

Lista de figuras

Figura 2-1 Elemento diferencial da viga antes e após a deformação	32
Figura 2-2 Elemento de viga-coluna sob ação de carregamento axial e transvers	sal
	37
Figura 3-1 Primeiros quatro modos de vibração de uma viga biapoiada	43
Figura 3-2 Elemento de viga unidimensional	43
Figura 3-3 Aproximações polinomiais para o primeiro modo de vibração linear	de
uma viga biapoiada – efeito da discretização	44
Figura 3-4 Aproximações polinomiais para o primeiro modo de vibração linear	de
uma viga biapoiada – efeito do grau do polinômio, 3 elementos finitos	45
Figura 3-5 Curva de ressonância na forma adimensional para vibração livre, $\eta=0$),1
	51
Figura 3-6 Interpretação geométrica da equação de restrição	54
Figura 3-7 Fluxograma para o método do comprimento de arco	56
Figura 3-8 Comparação entre as respostas freqüência-amplitude para vibraç	ão
livre obtida pelos métodos de Lindstedt-Poincaré e Galerkin/Balan	ço
Harmônico	57
Figura 3-9 Influência do parâmetro η na vibração livre	58
Figura 3-10 Resposta freqüência-amplitude para vibração forçada não amorteci	da
	59
Figura 3-11 Influência da amplitude da carga harmônica na vibração forçada n	ão
amortecida	60
Figura 3-12 Resposta das amplitudes para vibração forçada amortecida	61
Figura 3-13 Resposta freqüência-amplitude para vibração amortecida	62
Figura 3-14 Influência do fator de amortecimento na resposta freqüência	ia-
amplitude	63
Figura 3-15 Seção transversal da viga de aço	63
Figura 3-16 Influência do valor de h na resposta freqüência-amplitude da vibraç	ão
forçada amortecida	64
Figura 3-17 Influência do valor de L na resposta freqüência-amplitude da vibraç	ão
forçada amortecida	65

Figura 3-18 Influência da amplitude adimensional da carga externa nas curva	s de
ressonância para vibração amortecida	66
Figura 3-19 Influência da amplitude da carga externa na forma dimensional	nas
curvas de ressonância para vibração amortecida	66
Figura 3-20 Comparação entre o uso de polinômio e a função senoidal	para
obtenção da relação freqüência-amplitude para vibração amortecida	67
Figura 3-21 Resposta de X_1 para vibração amortecida com correção não-linear	70
Figura 3-22 Resposta de X_2 para vibração amortecida com correção não-linear	70
Figura 3-23 Resposta de X_3 para vibração amortecida com correção não-linear	71
Figura 3-24 Resposta de X_4 para vibração amortecida com correção não-linear	71
Figura 3-25 Resposta freqüência-amplitude para vibração amortecida utiliza	indo
correção não-linear	72
Figura 3-26 Comparação da resposta freqüência-amplitude para vibra	ação
amortecida com e sem correção não-linear	72
Figura 3-27 Comparação entre as funções trigonométrica e polinomial utiliz	zada
para a correção não-linear	74
Figura 3-28 Comparação entre as respostas com correção obtida pelo uso	das
funções trigonométrica e das polinomiais	75
Figura 3-29 Comparação entre as respostas com e sem correção	76
Figura 3-30 Comparação entre as respostas corrigidas utilizando as fun-	ções
combinadas ou separadamente	77
Figura 4-1 Modos de vibração para vigas com diversas condições de apoio	79
Figura 4-2 Variação da freqüência natural de uma viga com apoios elásticos	em
função da rigidez rotacional da mola em escala logarítmica	81
Figura 4-3 Resposta freqüência-amplitude de uma viga engastada-livre	82
Figura 4-4 Resposta freqüência-amplitude de uma viga engastada-apoiada	82
Figura 4-5 Resposta freqüência-amplitude de uma viga biengastada	83
Figura 4-6 Influência das condições de apoio na resposta freqüência-amplitude	: 84
Figura 4-7 Influência das condições de apoio na resposta freqüência-ampli	tude
para vibração forçada não-amortecida	85
Figura 4-8 Influência das condições de apoio na relação freqüência-amplitu	de -
X^*_{l} , para vibração forçada amortecida	86
Figura 4-9 Influência das condições de apoio na relação freqüência-amplitu	de -
X^*_{2} , para vibração forçada amortecida	86

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521508/CA

Figura 4-10 Influência das condições de apoio nas curvas de ressonância para
vibração forçada amortecida 87
Figura 4-11 Influência dos valores da constante da mola na relação freqüência-
amplitude - X_I^* , para vibração forçada amortecida 87
Figura 4-12 Influência dos valores da constante da mola na relação freqüência-
amplitude - X_2^* , para vibração forçada amortecida 88
Figura 4-13 Influência dos valores da constante da mola nas curvas de ressonância
para vibração forçada amortecida 88
Figura 4-14 Gráficos de $p_0(x)$ e $p_1(x)$ para viga engastada-apoiada 89
Figura 4-15 Resposta freqüência-amplitude para vibração forçada amortecida para
viga engastada-apoiada utilizando correção não-linear 90
Figura 4-16 Influência da correção na resposta freqüência-amplitude para vibração
forçada amortecida de vigas engastada-apoiadas 91
Figura 4-17 Resposta freqüência-amplitude para vibração forçada amortecida de
viga engastada-apoiada utilizando correção não-linear com uma e duas
funções 91
Figura 4-18 Gráficos de $p_0(x) e p_1(x)$ para viga biengastada 92
Figura 4-19 Resposta freqüência-amplitude para vibração forçada amortecida para
viga biengastada utilizando correção não-linear 93
Figura 4-20 Influência da correção na resposta freqüência-amplitude para vibração
forçada amortecida de vigas biengastadas 93
Figura 4-21 Resposta freqüência-amplitude para vibração forçada amortecida de
viga biengastada utilizando correção não-linear com uma e duas funções 94
Figura 5-1 Pórtico de Roorda sem imperfeições iniciais95
Figura 5-2 Elemento de viga-coluna de comprimento l_e 96
Figura 5-3 Compatibilidade de deslocamentos nodais97
Figura 5-4 Seção transversal das barras do pórtico97
Figura 5-5 Modo fundamental de vibração livre do pórtico em L 98
Figura 5-6 Função usada para aproximar o modo axial de vibração para barra c100
Figura 5-7 Função usada para aproximar o modo axial de vibração para barra b
100
Figura 5-8 Variação de X_1 com a freqüência para vibração livre 101

Figura 5-9 Variação de X_2 com a freqüência para vibração livre102

Figura 5-10 Variação de X_1 com a freqüência para vibração forcada não
amortecida 102
Figura 5-11 Variação de X_2 com a freqüência para vibração forcada não
amortecida 103
Figura 5-12 Variação de X_1 com a freqüência para vibração forcada amortecida
104
Figura 5-13 Variação de X com a freqüência para vibração forcada amortecida 105
Figura 5-14 Variação de X_2 com a freqüência para vibração forcada amortecida
105
Figura 5-15 Variação de ω_0^2 / Ω_0^2 com o parâmetro de carga λ 106
Figura 5-16 Influência do parâmetro λ nas curvas de ressonância para vibração
livre
Figura 5-17 Influência do parâmetro à pas curvas de ressonância para vibração
forcada amortecida
Eigure 5.19 Influêncie de perêmetre 4/ per sumue de ressenêncie pere vikrese
Figura 5-18 influencia do parametro γ has curvas de ressonancia para vibração
Figura 5-19 Influência do parâmetro γ nas curvas de ressonância para vibração
forçada amortecida 109
Figura 5-20 Influência do parâmetro γ na resposta ω/ω_0 - X_1 para vibração livre
110
Figura 5-21 Influência do parâmetro γ na resposta $\omega/\omega_0 - X_2$ para vibração livre
110
Figura 5-22 Pórtico de Roorda com ambas as barras carregadas axialmente 111
Figura 5-23 Influência do carregamento axial nas curvas de ressonância para
vibração forçada amortecida 112
Figura 5-24 Influência de λ nas curvas de ressonância para vibração forçada
amortecida 112

Lista de tabelas

Tabela 3-1Comparação dos resultados de freqüências	(ω_n/Ω) obtidos pelos	
métodos analíticos e numéricos	47	
Tabela 4-1 Resultados de ω_n/Ω , obtidos pelo método dos elementos finitos e pela		
solução analítica para diversas condições de apoio		
Tabela 4-2 Funções polinomiais para vários conjuntos de condições de apoio		
Tabela 5-1 Freqüências naturais de vibração para o pórtico em L		

Lista de Símbolos

- *a*, Equação de restrição ;
- *A*, Área da seção transversal;
- *c*, Constante de amortecimento por unidade de comprimento;
- *c_{cr}*, Constante de amortecimento crítico;
- *c_i*, Constantes da solução da equação diferencial de movimento linear;
- *e*, Espessura de perfis tubulares;
- *E*, Módulo de elasticidade;
- f^* , Vetor de forças generalizadas;
- *h*, Altura da seção transversal;
- *I*, Momento de inércia da seção transversal;
- *J*, Funcional de energia;
- *k*, Rigidez rotacional de uma mola;
- k^* , Rigidez rotacional de uma mola na forma adimensional;
- *K*, Matriz de rigidez elástica no método dos elementos finitos;
- \overline{K} , Matriz de rigidez elástica nos métodos de Ritz e Galerkin;
- *Kg*, Matriz de rigidez geométrica no método dos elementos finitos;
- K_{t_i} Equivalente à matriz de rigidez tangente;
- *L*, Comprimento de um elemento estrutural;
- *l_e*, Comprimento de um elemento finito
- L_g , Lagrangeano;
- *M*, Matriz de massa no método dos elementos finitos;
- \overline{M} , Matriz de massa nos métodos de Ritz e Galerkin;
- $N_i(x)$, Funções de forma;

 $p_i(x)$, Polinômios utilizados para aproximação dos modos de vibração lineares e suas correções não-lineares;

- *P*,. Carga estática de compressão;
- P_{cr} , Carga crítica de uma coluna biapoiada;
- P_{L} Carga crítica de um pórtico em L;
- P(t), Carregamento dinâmico;
- P^* , Razão entre *EA* e P_{cr} ;

- q(t), Parte da solução temporal do deslocamento;
- q_{t} Derivada do vetor de equações não-lineares em relação ao parâmetro de nível de freqüência.
- *r*, Raio de giração;
- s, Coordenada ao longo do eixo deformado;
- *t*, Variável para indicar o tempo;
- *T*, Energia cinética;
- $T_{i,j}$, Termos da equação diferencial de movimento para pórticos;
- $T^*_{i,j}$, Termos da equação diferencial adimensional de movimento para

pórticos;

- *u*, Deslocamento axial;
- u_i, Graus de liberdade no método dos elementos finitos;
- *u**, Deslocamento axial adimensional;
- *U*, Energia de deformação interna;
- *V*, Potencial das cargas externas;
- *w*, Deslocamento transversal;
- *w**, Deslocamento transversal adimensional;
- *W*, Trabalho realizado por forças conservativas;
- W_{nc} , Trabalho realizado por forças não conservativas;
- *x*, Eixo axial do elemento estrutural;
- x^* , Coordenada axial de um elemento diferencial após deformação;
- *X*, Vetor de amplitudes dimensionais dos modos de vibração;
- X_0 , Amplitude da carga harmônica externa;
- X_c , Amplitude da parte co-senoidal da carga harmônica externa;
- X_s , Amplitude da parte senoidal da carga harmônica externa;
- X^* , Amplitude adimensional dos modos de vibração;
- X_{0}^{*} , Parâmetro adimensional de carregamento dinâmico;
- *z*, Eixo transversal ao elemento estrutural;
- z^* , Coordenada transversal do elemento diferencial após deformação;
- α , Parâmetro adimensional de freqüência;
- β , Parâmetro adimensional de amortecimento;
- β_0 , ângulo entre o eixo indeformado e deformado;
- β_{b} , Rotação nodal da barra de pórtico horizontal;

- β_c , Rotação nodal da barra de pórtico vertical;
- χ , Mudança de curvatura da linha neutra;
- δ , Variação durante um dado intervalo de tempo;
- $\delta \lambda_f$, Correção do incremento do parâmetro de nível de freqüência;
- δX , Correção do incremento de amplitude;
- Δ , Encurtamento de um elemento estrutural;
- Δl , Comprimento de arco.
- $\Delta \lambda_{f}$, Variação do parâmetro de nível de freqüência de arco.
- ΔX Variação da amplitude.
- \mathcal{E} , Deformação axial;
- ϕ_f , Ângulo de fase,
- $\phi(x)$, Função que representa a parte espacial do deslocamento transversal dimensional;
- $\phi(\zeta)$, Função que representa a parte espacial do deslocamento transversal adimensional;
- η , Parâmetro adimensional usado para indicar esbeltez do elemento;
- κ , Parâmetro adimensional dado pelo quadrado da razão entre *L* e $r\pi$,
- λ , Razão entre *P* e *P*_{cr};
- λ_f , Parâmetro de nível de freqüência;
- Π , Energia potencial total;
- $\theta(x)$, Função que representa a parte espacial do deslocamento axial dimensional;
- ρ , Massa específica;
- τ , Parâmetro adimensional da coordenada temporal;
- *ω*, Freqüência de oscilação do sistema;
- ω_0 , Freqüência natural de oscilação do sistema;
- Ω , Freqüência natural de uma viga biapoiada;
- Ω_0 , Freqüência natural de um pórtico em L quando $\lambda = 0$;
- ξ , Fator de amortecimento;
- ψ , Parâmetro de escala;
- Ψ , Vetor de equações algébricas não-lineares;
- ζ , Parâmetro adimensional da coordenada axial.

"...life is not lineal, but experiential, not chronological, but developmental. We live in deeds, not days; in service, not seasons." (Elder N. A. Maxwell)