Referências Bibliográficas

Abade, G. C., Cunha, F. R., 2007, *Computer simulation of particle aggregates during sedimentation*, Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering, doi: 10.1016/j.cma.2007.05.022.

Abramovitz, M., Stegun, I. A., 1964, *Handbook of mathematical functions*, Hardcover, ed. 10.

Adam, N. K., 1968, *The physics and chemistry of surfaces*, Dover Publications, INC. New York.

Aris, R., 1962, *Vectors, tensor, and the basic equations of fluid mechanics*, Dover Publications, INC. New York.

Barnes, H.A., Hutton, J.F., Walters, K.F.R.S., 1989, *An introduction to Rheology*, Elsevier Science Publishers.

Barthès-Biesel, D., Acrivos, A., 1973, *Deformation and burst of a liquid droplet freely suspended in a linear field*, Journal of Fluid Mechanics **61**, 1.

Batchelor G. K., 1967, *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press, ed. 3.

Batchelor G. K., 1970, *Stress system in a suspension of force-free particles*, Journal of Fluid Mechanics **41**, 545.

Batchelor G. K., Green, J. T., 1972, *Hydrodynamic interaction of two small freely-moving spheres in a linear flow field*, Journal of Fluid Mechanics **56**, 401.

Bazhlekov, I. B., Anderson, P. D., Meijer, H. E. H., 2004, *Nonsingular boundary integral method for deformable drops in viscous flows*, Physics of Fluids, v.16, number 4, pp. 1064-1081.

Bentley, B. J., Leal, L. G., 1986, *An experimental investigation of drop deformation and breakup in steady two-dimensional linear flows*, Journal of Fluid Mechanics, v.167, pp. 241-283.

Bird, R. B., Armstrong, R. C., Hassaer, O., 1987, *Dynamic of polymeric liquids*, vol. 1,2, Wiley.

Boice, W. E., DiPrima, R. C., 1997, *Equações diferenciais elementares e problemas de valor de contorno*, Wiley.

Butcher, J. C., 1987, *The numerical analysis of ordinary differential equations: Runge-Kutta and general linear methods*, John Wiley & Sons Inc.

Chang, K. S., Olbricht, W. L., 1993^a, *Experimental studies of the deformation and breakup of a synthetic capsule in steady and unsteady simple shear flow*, Journal of Fluid Mechanics **250**, 609.

Chang, K. S., Olbricht, W. L., 1993^b, *Experimental studies of the deformation and breakup of a synthetic capsule in steady and unsteady simple shear flow*, Journal of Fluid Mechanics **250**, 609.

Childress, S., 1981, *Mechanics of swimming and flying*, Cambridge University Press, Cambrigde.

Couto, H. L. G., Cunha, F. R., 2004, *Fundamentos da mecânica de suspensões coloidais e não-coloidais*, Relatório de projeto de graduação, Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade de Brasília, **1**, 122p.

Cristini, V., Blawzdziewicz, J., Loewenberg, M., 2001, *An Adaptive Mesh Algorithm for Evolving Surfaces: Simulations of Drop Breakup and Coalescence*, Journal of Computational Physics 168, 445-463.

Cunha, F. R., 1995, *Hydrodynamic dispertion in suspensions*, Tese de doutorado, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge.

Cunha, F. R., Hinch, E. J., 1996, *Shear-induced dispersion in a dilute suspension of rough spheres*, Journal of Fluid Mechanics **309**, 211.

Cunha, F. R., Loewenberg, M., 2003^a, *A study of emulsion expansion by a boundary integral method*, Mechanics Research Communications, **30**, 639.

Cunha, F. R., Sousa, A. J., Loewenberg, M., 2003^b, *A mathematical formulation of the boundary integral equations for a compressible stokes flow* , Computational and Applied Mathematics **22**, 53.

Cunha, F. R., Almeida, M. H. P., Loewenberg, M., 2003^c, *Direct numerical simulations of emulsion flows*, Journal of the Braz. Soc.of Mech. Sci & Eng. **XXV**, No.1, 31.

Cunha, F. R., 2003^d, *Notas do curso de "Microhidrodinâmica em baixos números de Reynolds"*, Pós-Graduação em Ciências Mecânicas, Depto. de Eng. Mecânica, Universidade de Brasília.

Cunha, F. R., 2003^e, *Notas do curso de "Métodos de perturbação em fluidos"*, Pós-Graduação em Ciências Mecânicas, Depto. de Eng. Mecânica, Universidade de Brasília.

Cunha, F. R., Sobral, Y. D., 2004, *Characterization of the Physical Parameters in a Process of Magnetic Separation and Pressure Driven Flows of a Magnetic Fluid in a Cylindrical Tube*, Physica A, Elsevier, 343C p. 36-64.

Cunha, F. R., Couto, H. L. G., Oliveira, T. F., 2007, *On the application of a three-dimesional boundary itegral method to compute distortions of magnetic drops*, 11^{th} Conference of Magnetic Fluids, Kosice-Slovenia, p.1-8.

Davis, R. H., 1996, *Hydrodynamic diffusion of suspended particles: a symposium*, Journal of Fluid Mechanics **310**, 325.

Einstein A., 1906, *Eine neue bestimmung der moleküledimensionen*, Ann. Physik **19**, 289.

Einstein A., 1956, *Brownian movement*, Dover Publications, New York.

Evans, L. C., 1998, *Partial differential equations* , Graduate Studies in Mathematics, vol. 19.

Frankel, N. A., Acrivos, A., 1970, *The constitutive equation for a dilute emulsion* , Journal of Fluid Mechanics **44**, 65.

Goldstein, H., Poole, C., Safko, J., 2002 *Classical Mechanics*, Addison Wesley, 3 ed.

Guido, S., Simeone, M., 1998, *Binary collision of drops in simple shear flow by computer-assisted video optical microscopy* , Journal of Fluid Mechanics **357**, 1.

Hakimi, F. S., Schowalter, R., 1980, *The effects of shear and vorticity on deformation of a drop* , Journal of Fluid Mechanics **98**, part 3, 635.

Happel, J., Brenner, H., 1991, *Low Reynolds number hydrodynamics*, ed.15, Kluwer Academic Publishes.

Hinch, E. J., 1991, *Perturbation methods*, ed.3, Cambridge University Press, Cambridge.

Ifeachor, C. E., Jearvis, B. W., 1993, *Digital signal processing*, ed. 2, Addison-Wesley, United-States.

IMSL, Inc., 1997, *IMSLF 90 reference manual*, Visual Numerics, Inc., Houston, Texas, USA.

Jeffreys, H., Jeffreys, B., 1946, *Methods of mathematical physics*, ed. 13, Cambridge Universihty Press, Cambridge.

Karnis, A., Mason,S. G., 1967, *Particle motions in sheared suspensions XXIII. Wall migration of fluid drops* , Journal of Colloid and Interface Science **24**, 164.

Kennedy, M. R., Pozrikidis, C., Skalak, R., 1994, *Motion and deformation of liquids drops and the rheology of dilute emulsions in simple shear flow* , Computers and Fluids, **23**, n^o 2, pp. 251-278.

Kim, S., Karrila, S. J., 1991, *Microhydrodynamics: principles and selected applications*, Butterworth - Heinemann.

Kreyszig, 1999, *Advanced engineering mathematics*, ed. 8, John Wiley & Sons, INC.

Ladyzheskaya, O. A., 1969, *The mathematical theory of viscous inclompressible flow* , Gordon & Breach, New York.

Lai, W. M., Rubin, D., Krempl, E., 1974, *Introtuction to continuum mechanics* , ed. 1, Pergamon Press Inc., Great Britain

Lamb, H., 1932, *Hydrodynamics*, ed.6, Cambridge University Press.

Lavrenteva, O. M., Nir, A., 2003, *Axisymmetric thermal wake interaction of two drops in a gravity field at low Reynolds and high Peclet numbers*, Physics of Fluids, **15**, number 10, 3006.

Leal, L. G., 1992, *Laminar flow and convective transport processes, scaling principles and asymptotic analysis*, Butterworth-Heinemann.

Leighton, D., Acrivos, A., 1987^a, *The shear-induced migration of particles in concentrated suspensions*, Journal Fluid Mechanics **181**, 415.

Leighton, D., Acrivos, A., 1987^b, *Measurement of shear-induced self-diffusion in concentrated suspensions of spheres*, Journal Fluid Mechanics **177**, 109.

Li, X.Z., Barthés-Biesel, D., Helmy, A., 1988, *Large deformation and burst of a capsule freely suspended in an elongational flow*, Journal Fluid Mechanics **187**, 179-196.

Lighthill, M. J., 1958, *An introduction to Fourier analysis and generalised functions*, ed. 8, Cambridge University Press, Cambridge.

Lima, E. L., 1996, *Álgebra Linear*, ed. 5, Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, Rio de Janeiro, RJ

Loewenberg, M., Hinch, E. J., 1996, *Numerical simulations of a concentrated emulsion in shear flow*, Journal Fluid Mechanics **321**, 395.

Loewenberg, M., Hinch, E. J., 1996^b, *Collisions of two deformable drops in shear flow*, Journal Fluid Mechanics, **338**, 299.

Maffettone, P.L., Minale, M., 1998, *Equation of change for ellipsoidal drops in viscous flow*, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, **78**, 227.

Mason, T. G., Weitz, D. A., 1995, *Optical measurements of frequency-dependent linear viscoelastic moduli of complex fluids*, Physical Review Letters **74**, number 7, 1250.

Mason, T. G., Bibette, J., Weitz, D. A., 1995, *Elasticity of compressed emulsions*, Physical Review Letters **75**, number 10, 2051.

Mason, T. G., Bibette, J., 1996, *Emulsification in viscoelastic media*, Physical Review Letters **77**, number 16, 3481.

Mason, T. G., Lacasse, M. D., Grest, G. S., Lavine, D., Bibette, J., Weitz, D. A., 1997, *Osmotic pressure and viscoelastic shear modulli of concentrated emulsions*, Physical Review E **53**, number 3, 3150.

Mishra, V., Kresta, S. M., Masliyah, J. H., 1998, *Self-Preservation of the Drop Size Distribution Function and Variation in the Stability Ratio for Rapid Coalescence of a Polydisperse Emulsion in a Simple Shear Field*, Journal of Colloid and Interface Science **197**, 57-67

Mokhtarian, F., Khalili, N., Yuen, P., 2001, *Curvature computation on free-form 3-D meshes at multiple scales*, Computer Vision and Image Understanding, **83**, 118.

Oliveira, T. F., Couto, H. L. G., Cunha, F. R., 2005, *A theoretical study of an emulsion of high viscosity drops under shear*, 18th International Congress Of Mechanical Engineering - COBEM 2005, Ouro Preto - MG, Brazil.

Oliveira, T. F., Carvalho, J. A. A., Cunha, F. R., 2006, *Pressure-driven flow of a high viscosity emulsion in a cylindrical tube*, 3th Annual European Rheology Conference - AERC2006, Crete/Athens.

Oliveira, T. F., Cunha, F. R., Couto, H. L. G., 2007^a, *On the mechanics of high viscosity dilute emulsions*, in preparation.

Oliveira, T. F., Cunha, F. R., Couto, H. L. G., 2007^b, *Boundary Integral Numerical simulation of a non-linear viscoelasticity in polidisperse emulsion of high viscosity drops*, in preparation.

Pozrikidis, C., 1992, *Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow*, Cambridge Universihty Press.

Pozrikidis, C., 1993, *On the transient motion of ordered suspensions of liquid drops*, Journal Fluid Mechanics **246**, 301.

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P., 1992, *Numerical recipies in C, the art of scientific computing*, Cambridge Universihty Press, ed.2.

Princen, H. M., Kiss, A. D., 1989, *Rheology of foams and highly concentrated emulsions: IV. An experimental study of the shear viscosity and yield stress of concentrated emulsions*, Journal of Colloid and Interface Science **128**, 176.

Rallison, J. M., Acrivos, A., 1978, *A numerical study of the deformation and burst of a viscous drop in an extensional flow*, Journal Fluid Mechanics **89**, 191.

Rallison, J. M., 1980, *Note on the time dependent deformation of a viscous drop which is almost spherical*, Journal Fluid Mechanics **98**, 625.

Rallison, J. M., 1981, *A numerical study of the deformation and burst of a viscous drop in general shear flows*, Journal Fluid Mechanics **109**, 465.

Rallison, J. M., 1984, *The deformation of small viscous drops an bubbles in shearm flows*, Ann. Rev. Fluid Mechanics **16**, 45.

Schowalter, W. R., 1978, *Mechanics of Non-Newtonian Fluids*, Pergamon Press Inc, 1 ed.

Schowalter, W. R., Chaffey, C. E., Brenner, H., 1968, *Rheological behavios of a dilute emulsion*, Journal of Colloid and Interface Science **26**, 152.

Sherwood, J.D., 1988, *Breakup of fluid droplets in eletric and magnetic fileds*, Journal Fluid Mechanics **188**, 133-146.

Slattery, J. C., 1972, *Momentum, energy and mass tranfer in continua* , McGraw-Hill Book Company, United States.

Stone, H. A., Leal, L. G., 1990, *The effects of surfactants on drop deformation and breackup* , Journal Fluid Mechanics **220**, 161.

Stone, H. A., 1994, *Dynamics of drop deformation and breakup in viscous fluids*, Ann. Rev. Fluid Mechanics **26**, 65.

Tanzosh, J., Manga, M., Stone, H. A., *Boundary integral methods for viscous free-boundary problems: Deformation of sinlgle and multiple fluid-fluid interfaces*, BETECH 92 conference, Albuquerque, New Mexico, 1992

Taylor, G. I., 1932, *The viscosity of a fluid containing small drops of another fluid*, Proc. R. Soc. London Ser. A, **138**, 41.

Taylor, G. I., 1934, *The formation os emulsions in definable fields of flow*, Proc. R. Soc. London Ser. A, **146**, 501.

Torza, S., Cox, R. G., Mason, S. G., 1972, *Particle motion in sheared suspoensions*, Journal of Colloid and Interface Science **38**, 395-411.

Truesdell, C., Noll, W., 1965, *Handbuch der Physik* , vol.3/3, Springer-Verlag, Berlin.

Van Dyke, M. D., 1975, *Perturbation methods in fluid mechanics*, Parabolic Press, Stanford, California, 271.p.

Wilkinson, J. H., 1965, *The Algebraic Eingenvalue Problem*, Oxford Science Publications.

Yiantsios, S. G., Davis, R. H., 1991, *Close approach and deformation of two viscous drops due to gravity and Van der Waals forces*, Journal of Colloid and Interface Science **144**(2), 412.

Youngren, G. K., Acrivos, A., 1975, *Stokes flow past a particle of arbitrary shape: a numerical method of solution*, Journal of Fluid Mechanics **69**, 377.

Zinchenko, A. Z., Rother, M. A., Davis, R. H., 1997, *A novel boundary-integral algorithm for viscous interaction of deformable drops*, Physics of Fluids, v.9, number 6, pp. 1493-1511.

Zhou, H., Pozrikidis, C., 1993, *The flow of ordered and random suspensions of two-dimensional drops in channel*, Journal of Fluid Mechanics **225**, 103.

A
Demonstrações adicionais

A.1
Teorema de dissipação mínima - complemento

Sejam dois escoamentos $(\boldsymbol{u}, p)$ e $(\boldsymbol{u}', p')$ incompressíveis e que satisfazem as condições de contorno em um certo domínio V, delimitado pela superfície S. O escoamento $(\boldsymbol{u}, p)$ satisfaz as equações de Stokes, mas $(\boldsymbol{u}', p')$ não necessariamente. Nesse caso, temos que

$$\chi = \int_V 2\mu(\boldsymbol{E}' - \boldsymbol{E}) : \boldsymbol{E}\, dV = \int_V 2\mu \boldsymbol{E}^d : \boldsymbol{E}\, dV = \int_V 2\mu \nabla \boldsymbol{u}^d : \boldsymbol{E}\, dV, \quad \text{(A-1)}$$

em que $\boldsymbol{E}' = 1/2[\nabla \boldsymbol{u}' + (\nabla \boldsymbol{u}')^T]$ e $\boldsymbol{E}^d = \boldsymbol{E}' - \boldsymbol{E}$. Sendo $\boldsymbol{E} : \nabla \boldsymbol{u}^d = \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{u}^d) - (\nabla \cdot \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{u}^d$, em que $\boldsymbol{u}^d = \boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u}$ e $2\mu \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \mu \nabla^2 \boldsymbol{u} = \nabla p$, desde que $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = (1/2)\nabla^2 \boldsymbol{u}$ e $(\boldsymbol{u}, p)$ satisfazem as equações de Stokes, então (A-1) fica

$$\chi = 2\mu \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{u}^d)\, dV - \int_V \nabla p \cdot \boldsymbol{u}^d\, dV. \quad \text{(A-2)}$$

Como $\nabla \cdot \boldsymbol{u}^d = 0$ então $\nabla p \cdot \boldsymbol{u}^d = \nabla \cdot (p \boldsymbol{u}^d)$. Agora, usando o teorema da divergência obtemos

$$\chi = 2\mu \int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{u}^d \cdot \boldsymbol{n}\, dS - \int_S p \boldsymbol{u}^d \cdot \boldsymbol{n}\, dS = 0, \quad \text{(A-3)}$$

desde que $\boldsymbol{u}^d(\boldsymbol{x}) = 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in S$ já que ambos os escoamentos satisfazem as condições de contorno.

Por incluir.

A.2
Representação integral do escoamento de Stokes

Considere o teorema recíproco com o par de escoamentos $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{0})$ e $(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{f}')$. O primeiro escoamento é livre de forças de campo, de tal forma que (2-31) fica $\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{u}' - \boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}' \cdot \boldsymbol{u}$. Considerando agora que o segundo escoamento é produzido por um monopolo com intensidade $\boldsymbol{F}$ na posição $\boldsymbol{x}_o$ tal que $\boldsymbol{f}' = -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' = -\boldsymbol{F}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o)$, temos que

$$\frac{1}{8\pi\mu}\boldsymbol{F} \cdot \nabla \cdot [\boldsymbol{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o) \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mu \boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o) \cdot \boldsymbol{u}] = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o)\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}. \qquad \text{(A-4)}$$

Integrando a equação (A-4) em um volume V regular, isto é que não contém singularidades como ilustrado na figura (A.1), e aplicando o teorema da divergência de Gauss, desde que $\boldsymbol{F}$ é arbitrário, obtemos

$$\int_S [\boldsymbol{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) - \mu \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o)] \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\, dS = 0. \qquad \text{(A-5)}$$

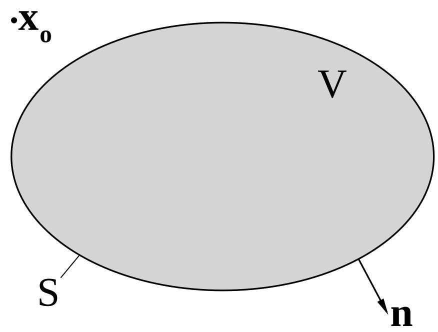

Figura A.1: Volume de controle no domínio do escoamento. O polo está na posição $\boldsymbol{x}_o$, tal que $\boldsymbol{x}_o \notin V$.

Se o polo está contido na região de integração, define-se um pequeno volume esférico V_ε, de raio ε, que contém o polo conforme indica a figura (A.2). Dessa forma, a equação (A-5) vale para o volume $V - V_\varepsilon$, delimitado pelas superfícies S e S_ε, isto é

$$\int_{S,S_\varepsilon} [\boldsymbol{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) - \mu \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})] dS(\boldsymbol{x}) = 0. \qquad \text{(A-6)}$$

Sobre a superfície S_ε o vetor normal é dado por $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{r}/\varepsilon$, em que $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o$ com $\boldsymbol{x} \in S_\varepsilon$, $dS = \varepsilon^2 d\Omega$, em que Ω é o ângulo sólido e as funções de Green são dadas por

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_\varepsilon(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{rr}}{\varepsilon^3} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{\mathcal{T}}_\varepsilon(\boldsymbol{r}) = -6\frac{\boldsymbol{rrr}}{\varepsilon^5}. \qquad \text{(A-7)}$$

Usando esses resultados em (A-6) obtemos

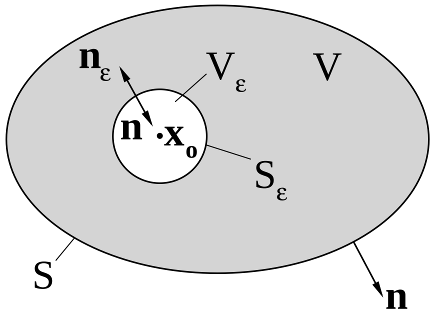

Figura A.2: Volume de controle no domínio do escoamento. O polo está na posição $\boldsymbol{x}_o$, tal que $\boldsymbol{x}_o \in V$.

$$
\begin{aligned}
&\int_S [\boldsymbol{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_o)\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) - \mu\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_o)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})]dS(\boldsymbol{x}) \\
-&\int_{S_\varepsilon}\left[\left(\boldsymbol{I}+\frac{\boldsymbol{rr}}{\varepsilon^2}\right)\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{r} + 6\mu\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\cdot\frac{\boldsymbol{rr}}{\varepsilon^2}\right]d\Omega(\boldsymbol{x}) = 0. \qquad \text{(A-8)}
\end{aligned}
$$

Tomando o limite $\varepsilon \to 0$ o tensor de tensões e o campo de velocidade tendem para seus respectivos valores em $\boldsymbol{x}_o$, isto é $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}_o)$ e $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_o)$. Como $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{0}$, o primeiro termo da segunda integral em (A-8) anula-se, de forma que

$$
\begin{aligned}
&\int_S [\boldsymbol{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_o)\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) - \mu\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_o)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})]dS(\boldsymbol{x}) = \\
&6\mu\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_o)\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^4}\int_{S_\varepsilon}\boldsymbol{rr}\,dS(\boldsymbol{x}). \qquad \text{(A-9)}
\end{aligned}
$$

Neste ponto é importante considerar o teorema da divergência para o produto tensorial $\boldsymbol{rr}$. Segue-se que

$$
\int_{S_\varepsilon}\boldsymbol{rr}\,dS = \varepsilon\int_{S_\varepsilon}\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_\varepsilon\,dS = \varepsilon\int_{V_\varepsilon}\nabla\boldsymbol{r}\,dV = \varepsilon\boldsymbol{I}\int_{V_\varepsilon}dV = \frac{4\pi}{3}\varepsilon^4\boldsymbol{I}, \qquad \text{(A-10)}
$$

em que $\boldsymbol{n}_\varepsilon$ é o vetor normal à S_ε que aponta para fora do volume V_ε. Portanto a equação (A-9) pode ser escrita na forma

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_o) &= -\frac{1}{8\pi}\int_S \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_o)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\,dS(\boldsymbol{x}) \\
&+ \frac{1}{8\pi\mu}\int_S \boldsymbol{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_o)\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\,dS(\boldsymbol{x}). \qquad \text{(A-11)}
\end{aligned}
$$

Os caso em que $\boldsymbol{x}_o \notin V$ é obtido diretamente de A-5. Se $\boldsymbol{x}_o \in S$ com esse procedimento é preciso combinar representações integrais do escoamento dentro e fora de V e usar a condição de salto $\boldsymbol{u}_s(\boldsymbol{x}_o) = (1/2)(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_o) + \lambda \boldsymbol{u}'_o)$, sabendo que a velocidade é uma função contínua através de S (ver detalhes em Cunha *et. al.* (2003^b)).

A.3 Operador adjunto da dupla camada potencial

Seja um espaço de funções vetoriais $V = \{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ v_i \in C^0;\ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) < \infty\}$, de dimensão infinita, em que C^0 é o espaço das funções contínuas, no qual está definido o produto interno

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_S \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\, dS(\boldsymbol{x}), \tag{A-12}$$

em que $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$. Seja também $\boldsymbol{L}$ uma aplicação linear desse espaço definida por

$$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{u} = \frac{1}{4\pi} \int_S \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\, dS(\boldsymbol{x}). \tag{A-13}$$

O operador linear adjunto a $\boldsymbol{L}$, denotado por $\boldsymbol{L}^A$, é definido tal que $(\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{L}^A \cdot \boldsymbol{v})$. Dessa forma, para obter uma expressão para $\boldsymbol{L}^A$ fazemos

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &= \int_S \left[\frac{1}{4\pi} \int_S \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\, dS(\boldsymbol{x})\right] \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_o)\, dS(\boldsymbol{x}_o) \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_S \int_S \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_o)\, dS(\boldsymbol{x})\, dS(\boldsymbol{x}_o) \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_S \int_S \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_o) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\, dS(\boldsymbol{x}_o)\, dS(\boldsymbol{x}) \\
&= \int_S \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \cdot \left[\frac{1}{4\pi} \int_S \boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_o)\, dS(\boldsymbol{x}_o)\right] \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\, dS(\boldsymbol{x}).
\end{aligned}$$

Usando as propriedades de simetria em relação ao produto escalar escrevemos

$$(\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_S \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \cdot \left[\frac{1}{4\pi} \int_S \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_o) \cdot \boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o)\, dS(\boldsymbol{x}_o)\right] dS(\boldsymbol{x}).$$

Finalmente, comutando $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{x}_o$ e usando a simetria ímpar de $\boldsymbol{\mathcal{T}}$

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &= \int_S \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_o) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_o) \cdot \left[-\frac{1}{4\pi} \int_S \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o)\, dS(\boldsymbol{x})\right] dS(\boldsymbol{x}_o) \\
&= \left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_o) \cdot \left[-\frac{1}{4\pi} \int_S \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o)\, dS(\boldsymbol{x})\right]\right) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{L}^A \cdot \boldsymbol{v}),
\end{aligned}$$

de forma que

$$\boldsymbol{L}^A \cdot \boldsymbol{v} = -\frac{1}{4\pi}\, \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_o) \cdot \int_S \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o)\, dS(\boldsymbol{x}). \tag{A-14}$$

A.4
Equação constitutiva para o salto de tensões através de uma interface entre dois líquidos

A origem física da tensão superficial está na tendência de uma superfície líquida (quer seja entre um líquido e um gás como entre um líquido e outro líquido) em se contrair espontaneamente, tendendo a admitir a configuração de mínima área (Adam, 1968). Para entender esse fato, consideremos inicialmente que em um líquido distíngue-se de um gás pelo fato de suas moléculas atraírem-se mutuamente com intensidade suficiente para impedir a vaporização. Ainda assim, as moléculas de um líquido são relativamente livres para rotacionar e transladar umas em relação às outras. Dessa forma, no interior de um líquido as moléculas estão sujeitas à forças atrativas em todas as direções. Porém, na interface entre dois líquidos imiscíveis ou entre um líquido e um gás, as partículas são atraídas por suas vizinhas para dentro do fluido. Nessa condição, uma molécula sofre uma força perpendicular à interface que a faz mover-se para o interior. Portanto, as moléculas em uma interface líquida estão sempre movimentando-se para o dentro do fluido, produzindo um efeito de redução da área da superfície que delimita o material. A contração espontânea da superfície pode ser interpretada como um energia livre associada a um trabalho de exercido pela interface. Na solução de muitos problemas envolvendo interfaces fluidas, essa energia livre por unidade de área da superfície é substituída por uma "tensão superficial" atuando em todas as direções paralelas à superfície. Levando isso em conta, podemos conceber um modelo em que a interface exerce uma determinada tensão sobre o fluido. Dessa forma, existe um salto de tensões $\Delta \boldsymbol{f}$ através da superfície. Sendo assim, considerando que a interface esteja em equilíbrio mecânico, o balanço de forças sobre a superfície pode ser modelado por

$$\int_S \Delta \boldsymbol{f}\, dS - \int_C \sigma(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{t})\, d\ell = \boldsymbol{0}, \tag{A-15}$$

em que σ é um coeficiente de tensão superficial com dimensão de tensão por unidade de comprimento e $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n})$ é o vetor binormal da superfície S, cujo contorno é C. Levando em conta a seguinte forma do teorema de Stokes:

$$\int_C \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{t}\, d\ell = \int_S [\boldsymbol{n}\nabla \cdot \boldsymbol{F} - \nabla \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}]\, dS, \tag{A-16}$$

em que $\boldsymbol{F}$ é um vetor qualquer e $\boldsymbol{n}$ é diferenciável em toda superfície S. Fazendo $\boldsymbol{F} = \sigma\boldsymbol{n}$, a equação (A-15) pode ser escrita como

$$\int_S \Delta\boldsymbol{f}\, dS = \int_S [\boldsymbol{n}\nabla\cdot(\sigma\boldsymbol{n}) - \nabla(\sigma\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{n}]\, dS. \tag{A-17}$$

Inicialmente temos que $\boldsymbol{n}\nabla\cdot(\sigma\boldsymbol{n}) = (\sigma\nabla\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} + \boldsymbol{nn}\cdot\nabla\sigma$. Por outro, sabendo que $\nabla(\sigma\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{n} = (\nabla\sigma\,\boldsymbol{n} + \sigma\nabla\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{n}$ e que $\nabla\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} = (1/2)\nabla(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{0}$, desde que $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} = 1$, temos que $\nabla(\sigma\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{n} = \nabla\sigma$. Portanto, a equação (A-17) reduz-se a

$$\int_S \Delta\boldsymbol{f}\, dS = \int_S [(\sigma\nabla\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} + \boldsymbol{nn}\cdot\nabla\sigma - \nabla\sigma]\, dS. \tag{A-18}$$

Desde que S e arbitrária, pelo teorema da localização segue que

$$\Delta\boldsymbol{f} = (\sigma\nabla\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{nn})\cdot\nabla\sigma. \tag{A-19}$$

Na equação (A-19) podemos observar as contribuições normal, $(\sigma\nabla\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$, e tangencial, $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{nn})\cdot\nabla\sigma$, do salto de tensões através da superfície. O vetor gradiente deve ser entendido como o gradiente superficial, desde que as integrais em (A-18) são sobre a superfície S. Nota-se que apenas há salto de tensões tangenciais se existe gradiente de σ. Tipicamente esses gradientes estão associados a distribuições de tensoativos ou variações de temperatura sobre a interface.

B
Coeficientes de Fourier de I_1 e I_2 no regime de pequenas amplitudes de deformação

Considerando as expansões em série de Fourier para as integrais I_1 e I_2 da seção 4.4 temos que

$$
\begin{aligned}
I_1(\gamma_o, t) &= a_0 + a_2 cos(2\omega t) + b_2 sen(2\omega t) + a_4 cos(4\omega t) + b_4 sen(4\omega t), \\
I_2(\gamma_o, t) &= a_1 cos(\omega t) + b_1 sen(\omega t) + a_3 cos(3\omega t) + b_3 sen(3\omega t),
\end{aligned} \tag{B-1}
$$

sendo

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \left(\frac{1}{c}\right) - \left(\frac{1}{2c}\right)\left(1 - \frac{1}{c_1}\right)\gamma_o^2 + \left(\frac{1}{8c}\right)\left(-\frac{1}{c_1} + \frac{1}{4c_2} + \frac{3}{4}\right)\gamma_o^4, \\
a_1 &= \left(\frac{\omega}{c^2}\right)\left(\frac{1}{c_1}\right)\gamma_o + \left(\frac{\omega}{c^2}\right)\left(-\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)\gamma_o^3, \\
a_2 &= \left(\frac{1}{2c}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{c_1} + \frac{1}{2c_2}\right)\gamma_o^2 + \left(\frac{1}{12c}\right)\left(\frac{7}{4c_1} - \frac{1}{c_2} + \frac{1}{4c_3} - 1\right)\gamma_o^4, \\
a_3 &= \left(\frac{\omega}{4c^2}\right)\left(\frac{1}{2c_1} - \frac{1}{c_2} + \frac{1}{2c_3}\right)\gamma_o^3, \\
a_4 &= \left(\frac{1}{48c}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{c_1} + \frac{3}{2c_2} - \frac{1}{c_3} + \frac{1}{4c_4}\right)\gamma_o^4, \\
b_1 &= \left(\frac{1}{c}\right)\left(1 - \frac{1}{c_1}\right)\gamma_o + \left(\frac{1}{2c}\right)\left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{c_1} - \frac{1}{4c_2}\right)\gamma_o^3, \\
b_2 &= \left(\frac{\omega}{2c^2}\right)\left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1}\right)\gamma_o^2 + \left(\frac{\omega}{6c^2}\right)\left(\frac{5}{8c_1} - \frac{1}{c_2} + \frac{3}{8c_3}\right)\gamma_o^4, \\
b_3 &= \left(\frac{1}{8c}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} - \frac{1}{3c_3}\right)\gamma_o^3, \\
b_4 &= \left(\frac{1}{16c^2}\right)\left(-\frac{1}{3c_1} + \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_3} + \frac{1}{3c_4}\right)\gamma_o^4,
\end{aligned} \tag{B-2}
$$

em que $c_n = 1 + n^2\omega^2/c^2$ e $n = 1, \ldots, 4$.

C
Funções materiais da emulsão em cisalhamento oscilatório

Considerando os coeficientes de Fourier a_i e b_i do apêndice C, as funções viscométricas associadas à resposta em tensão de uma emulsão diluída de gotas de alta razão de viscosidade são dadas por

$$\begin{aligned} \mu_{ap} &= \eta'_i \, cos(\omega t) + \eta''_i \, sen(\omega t) \\ &+ \eta'_{iii} \, cos(3\omega t) + \eta''_{iii} \, sen(3\omega t), \end{aligned} \tag{C-1}$$

em que

$$\begin{aligned} \eta'_i &= \mu_B + \frac{5c\phi}{\lambda Ca_\lambda} \, a_1, \quad \eta''_i = \frac{5c\phi}{\lambda Ca_\lambda} \, b_1, \\ \eta'_{iii} &= \frac{5c\phi}{\lambda Ca_\lambda} \, a_3, \qquad \eta''_{iii} = \frac{5c\phi}{\lambda Ca_\lambda} \, b_3. \end{aligned} \tag{C-2}$$

$$\begin{aligned} N_1 &= N_1^o + \chi'_{ii} \, cos(2\omega t) + \chi''_{ii} \, sen(2\omega t) \\ &+ \chi'_{iv} \, cos(4\omega t) + \chi''_{iv} \, sen(4\omega t), \end{aligned} \tag{C-3}$$

em que

$$\begin{aligned} N_1^o &= \frac{10\phi}{\lambda}(1 - c\, a_0), \\ \chi'_{ii} &= -\frac{10c\phi}{\lambda} \, a_2, \qquad \chi''_{ii} = -\frac{10c\phi}{\lambda} \, b_2, \\ \chi'_{iv} &= -\frac{10c\phi}{\lambda} \, a_4, \qquad \chi''_{iv} = -\frac{10c\phi}{\lambda} \, b_4. \end{aligned} \tag{C-4}$$

$$\begin{aligned} N_2 &= N_2^o + \zeta'_{ii}\, cos(2\omega t) + \zeta''_{ii}\, sen(2\omega t) \\ &+ \zeta'_{iv}\, cos(4\omega t) + \zeta''_{iv}\, sen(4\omega t), \end{aligned} \tag{C-5}$$

em que

$$\begin{aligned} N_2^o &= \frac{5\phi}{\lambda}(ca_o - 1) + \frac{75c\phi}{56\lambda}\, Ca_\lambda\, a_1, \\ \zeta'_{ii} &= \frac{5c\phi}{\lambda}\, a_2 + \frac{75c\phi}{56\lambda}\, Ca_\lambda (a_1 + a_3), \\ \zeta''_{ii} &= \frac{5c\phi}{\lambda}\, b_2 + \frac{75c\phi}{56\lambda}\, Ca_\lambda (b_1 + b_3), \\ \zeta'_{iv} &= \frac{5c\phi}{\lambda}\, a_1 + \frac{75c\phi}{56\lambda}\, Ca_\lambda a_3, \\ \zeta''_{iv} &= \frac{5c\phi}{\lambda}\, b_1 + \frac{75c\phi}{56\lambda}\, Ca_\lambda b_3. \end{aligned} \tag{C-6}$$