

2

Hidrodinâmica de baixos números de Reynolds

Na abordagem proposta para o presente estudo de reologia de emulsões pretende-se realizar uma análise microhidrodinâmica na escala das gotas para prever o comportamento macroscópico da suspensão como um fluido homogêneo equivalente. Dessa forma, as equações governantes do escoamento na microescala da emulsão devem ser estudadas. Considerando que a gota é convectada pelo escoamento, é razoável admitir que uma escala característica de velocidade experimentada pela partícula, U_a , é dada por $U_a = \dot{\gamma}_c a$, em que $\dot{\gamma}_c$ é uma taxa de cisalhamento típica daquele escoamento e a o diâmetro da gota não-deformada. Nessas condições, o número de Reynolds é definido como $Re_a = a^2 \dot{\gamma}_c / \nu$, em que ν é a viscosidade cinemática da fase contínua. Se tomarmos, por exemplo, uma gota de óleo de diâmetro $a = 10 \mu m$, em água, supondo que $\dot{\gamma}_c \approx 1 s^{-1}$, então o número de Reynolds do escoamento externo é $Re_a \approx 10^{-4}$, ou seja $Re_a \ll 1$. Conseqüentemente, o Reynolds do escoamento interno a gota também é muito pequeno, isto é, $Re_g = Re_a / \lambda \ll 1$, desde que $\lambda = \mathcal{O}(1)$, em que λ é a razão entre as viscosidades da fase dispersa e contínua, respectivamente. Portanto, de maneira geral, o número de Reynolds na escala do escoamento experimentado pela gota é muito menor do que a unidade. Isso implica que tanto escoamento interno como o externo nas vizinhanças da partícula podem ser considerados livres de efeitos de inércia (Rallison, 1984). Por outro lado temos que o número de Peclet, considerando um processo difusivo molecular, é definido como $Pe_a = a^2 \dot{\gamma}_c / D$, em que $D = \kappa T / (6\pi\mu a)$ é o coeficiente de difusão ordinário, κ é a constante de Boltzmann, T a temperatura absoluta e μ a viscosidade dinâmica do fluido ambiente. Tendo em mente o cenário descrito anteriormente e ainda que $T = 300K$, podemos estimar que $Pe_a \approx 4 \times 10^3$. O número de Peclet pode ser interpretado como uma razão entre um tempo característico do processo difusivo (associado ao movimento browniano (Einstein, 1956)) e um tempo característico da escala convectiva. Assim sendo, é possível concluir que na escala da gota o tempo necessário para se observar a influência da difusão molecular é muito maior do que o relacionado à convecção pelo campo de velocidade. Nesse caso os efeitos do

movimento browniano não são relevantes para a hidrodinâmica. A condição de escoamento em baixo número de Reynolds leva à equações do movimento lineares representando um balanço entre o gradiente de pressão e as tensões viscosas. A linearidade das equações governantes na escala da partícula, além de permitir a aplicação de métodos analíticos típicos de solução de equações diferenciais parciais lineares, garante que o princípio da invariância material (Truesdell & Noll (1965); Slattery (1972)). Dessa forma, fica assegurada a possibilidade da descrição da emulsão como um fluido homogêneo equivalente, sem a necessidade de se usar a descrição de dois fluidos típicos em modelagens de escoamentos multifásicos. Vale ainda ressaltar que o fato de $Re_a \ll 1$ na escala interna¹ não significa necessariamente que o número de Reynolds do escoamento baseado na escala macroscópica seja pequeno. De fato, o número de Reynolds baseado em escalas típicas do problema macroscópico, $Re_L \sim Re_a(L/a)$, em que L representa um comprimento característico da escala externa, pode ser considerado um parâmetro arbitrário nesse estudo.

2.1

Equações de balanço

Nas situações que a inércia do escoamento é desprezível estabelece-se um regime de equilíbrio entre as tensões viscosas e o campo de pressão. Sem o termo de taxa da variação de quantidade de movimento, as equações governantes (considerando fluidos newtonianos) são lineares e uma ampla frente de estudos, envolvendo técnicas analíticas, numéricas e experimentais pode ser explorada. De acordo com referências especializadas em Mecânica dos Fluidos de baixos números de Reynolds, essa área é muitas vezes referenciada como *Microhidrodinâmica*. As equações governantes da Microhidrodinâmica são as equações de Stokes. Considerando sua importância para este trabalho estudo, esta seção dedica-se à sua derivação e ao estudo de algumas de suas principais propriedades. Sendo assim, sejam as equações de conservação de massa e quantidade de movimento para um meio contínuo dadas, respectivamente, por (2-1) e (2-2) (Batchelor, 1967)

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2-1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}, \quad (2-2)$$

em que ρ é a massa específica, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ o vetor velocidade euleriano, $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor de tensões e \mathbf{g} uma força de campo conservativa por unidade de massa. O

¹O termo *escala interna* refere-se à escala das gotas.

operador derivada material é definido por $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ e mede a taxa de variação temporal de uma quantidade qualquer do escoamento calculada a partir de um referencial que translada com uma partícula material. O divergente do tensor de tensões, $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$, representa a taxa de quantidade de movimento por unidade de volume associada com as forças de superfície, exercidas em um elemento de fluido, pelo material externo ao mesmo. Em geral, o tensor de tensões pode ser decomposto em uma parte isotrópica ou esférica², somado de uma parte deviatórica³, ou seja,

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\Sigma}^d, \quad (2-3)$$

em que p é a pressão mecânica, determinada por $p = -\frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma})$, e \mathbf{I} o tensor identidade. Para um fluido newtoniano compressível (Aris, 1962) temos que

$$\boldsymbol{\Sigma}^d = 2\mu \left(\mathbf{E} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} \right), \quad (2-4)$$

em que μ é a viscosidade dinâmica e \mathbf{E} o tensor taxa de deformação, definido como sendo a parte simétrica do tensor gradiente de velocidade dada por $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$. Considerando um fluido incompressível, (2-1) reduz-se a condição solenoidal $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Substituindo a equação constitutiva (2-4) com a condição de incompressibilidade na equação (2-2), obtemos

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}. \quad (2-5)$$

Considera-se por ora uma adimensionalização de (2-5) usando-se as seguintes escalas características de velocidade, comprimento e tempo: $U_a = \dot{\gamma}_c a$, a , ω_c^{-1} , respectivamente, em que $\dot{\gamma}_c$ é uma taxa de cisalhamento característica e ω_c uma frequência de excitação do escoamento. Levando-se em conta que uma escala de pressão adequada para escoamentos com inércia desprezível é $p_c = \mu U_a / a$, (2-5) é adimensionalizada podendo ser escrita como (Pozrikidis, 1992)

$$Re Sh \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + Re \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{u}} + \frac{Re}{Fr} \tilde{\mathbf{g}}, \quad (2-6)$$

em que

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{a}, \quad \tilde{t} = \omega_c t, \quad \tilde{\nabla} = a \nabla, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{U_a}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\mu U_a / a}, \quad \tilde{\mathbf{g}} = \frac{\mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\|}, \quad (2-7)$$

$Sh = a\omega_c/U_a$ é o número de Strouhal e $Fr = U_a^2/(\|\mathbf{g}\|a)$ é o número de Froude. O número de Reynolds expressa a magnitude das forças de inércia em relação às forças viscosas ou, de forma equivalente, a razão entre um

²Tensor Esférico é todo aquele que pode ser escrito de forma mais geral como $c(\mathbf{x}, t)\mathbf{I}$, em que $c(\mathbf{x}, t)$ é um campo escalar.

³Tensor Deviatórico é um tensor de traço nulo do tipo $\mathbf{T}^{(d)} = \mathbf{T} - \frac{1}{3}tr(\mathbf{T})\mathbf{I}$.

tempo característico de difusão de vorticidade a^2/ν e um tempo da escala convectiva a/U_a . O número de Strouhal expressa uma frequência adimensional característica do escoamento. Observa-se que, no caso de não haver uma frequência imposta ao escoamento, toma-se $\omega_c = U_a/a$ e $Sh = 1$. Finalmente, o grupo adimensional Re/Fr fornece, por sua vez, a razão entre forças de campo e forças viscosas. Dessa forma, considerando-se a situação em que $Re \ll 1$ e $Sh Re \ll 1$, os termos do lado esquerdo da equação (2-6) podem ser desprezados. Esse caso é conhecido como *limite dual* das equações do movimento e caracteriza o escoamento como *quasi*-estacionário. Em outras palavras, o tempo requerido para a evolução do campo de velocidade de um estado permanente para outro é muito menor do que o tempo típico de uma mudança perceptível na configuração do contorno, isto é, o tempo característico de relaxação da gota, $L^2/\nu \ll a\mu(1+\lambda)/\sigma$, em que σ é o coeficiente de tensão superficial. Fisicamente, a condição de *quasi*-estacionaridade expressa que os campos de velocidade e pressão ajustam-se em intervalos muito menores do que aqueles em que a configuração do contorno muda. Dessa forma, do ponto de vista de uma partícula material, o escoamento é sempre permanente com respeito à configuração instantânea (Cunha, 2003^d). Assim sendo, retornando à forma dimensional, temos que as equações governantes do escoamento de fluido newtoniano incompressível, livre de efeitos de inércia, são as equações da continuidade e quantidade de movimento expressas na forma

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2-8)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} = 0, \quad (2-9)$$

em que $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}$. As equações (2-8) e (2-9) são conhecidas como equações de Stokes. Se considerarmos o caso em que \mathbf{g} é um campo conservativo ou força conservativa por unidade de massa, então existe um potencial escalar χ , tal que $\mathbf{g} = -\nabla\chi$. Dessa forma, se ρ é constante, define-se a pressão modificada $P = p + \rho\chi$ e a equação (2-9) pode ser escrita como

$$-\nabla P + \mu\nabla^2\mathbf{u} = 0. \quad (2-10)$$

Considerando o caso em que a força de campo por unidade de massa \mathbf{g} é devida à ação da gravidade, temos $\chi = -\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$ e a pressão modificada fica $P = p - \rho\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$, em que $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ e g é a magnitude da aceleração da gravidade. Vale observar que para se utilizar o conceito de pressão modificada o fluido necessariamente precisa ser incompressível e as condições de contorno serem apenas de velocidade, tal que a força da gravidade não tem efeito

dinâmico no escoamento. Vale ressaltar que, em escoamentos em que existe um forçamento em alta frequência, o grupo adimensional $Sh Re$ que aparece na equação (2-6) pode não ser desprezível e a equação mantém seu termo transiente. Neste caso, a equação de conservação de quantidade de movimento é expressa pela equação de Stokes em regime transiente

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla P - \mu \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (2-11)$$

Nota-se que, apesar de mantido o termo de derivada temporal, a linearidade da equação permanece.

2.2

Propriedades gerais das equações de Stokes

As equações (2-8) e (2-10) formam um sistema de equações diferenciais parciais lineares, podendo ser as mesmas tratadas pelos métodos convencionais de solução desse tipo de problema (Evans, 1998). Da linearidade provém o fato da força sobre uma partícula transladando em um fluido newtoniano em regimes de baixo número de Reynolds depender linearmente da velocidade relativa entre a partícula e o fluido. Essa propriedade pode ser constatada levando-se em conta o problema de uma partícula rígida, delimitada pela superfície S , transladando com velocidade $\mathbf{U}(t)$, em regime de baixo número de Reynolds. Considerando a simetria do tensor de tensões, desde que o fluido e as partículas não são magnéticos, isto é, não há torques internos induzidos no material por magnetização, a força de hidrodinâmica sobre a partícula é dada por⁴

$$\mathbf{F} = \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2-12)$$

em que \mathbf{n} é o vetor unitário normal à superfície S , que aponta para o lado do fluido que exerce tensão. Considerando a equação (2-10), se $|\mu \nabla^2 \mathbf{u}| \sim \mu \mathbf{U}/L^2$ é uma escala das tensões viscosas e $|\nabla P| \sim \mathbf{F}/L^3$ é uma escala da pressão, em que L representa um comprimento característico do escoamento, então $\mathbf{F}/L^3 \sim \mu \mathbf{U}/L^2$, de onde segue que

$$\mathbf{F} \sim \mu \mathbf{U} L. \quad (2-13)$$

No caso de uma partícula esférica isolada, por exemplo, a força de arrasto sobre a partícula é exatamente $\mathbf{F} = 6\pi\mu a \mathbf{U}(t)$. Conclui-se daí que a relação entre a força hidrodinâmica sobre um corpo em escoamentos de baixo número de Reynolds é proporcional à velocidade relativa entre o corpo e o fluido. A forma

⁴Notação: $\int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS$.

mais geral de relacionar essas duas grandezas (força e velocidade) é através de um tensor de segunda ordem, tal que (Kim & Karrila, 1991)

$$\mathbf{F} = \mu \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}(t). \quad (2-14)$$

O tensor \mathbf{R} é denominado *tensor resistência* e independe do escoamento, sendo função apenas da geometria (forma, tamanho e orientação) da partícula⁵. De outra maneira, podemos escrever $\mathbf{U}(t) = \mu^{-1} \mathbf{M} \cdot \mathbf{F}$, em que $\mathbf{M} = \mathbf{R}^{-1}$ é o tensor mobilidade da partícula.

Outra propriedade importante do escoamento de Stokes é a sua reversibilidade em relação ao tempo. Tendo em vista que em regimes de Stokes o movimento $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ é uma função linear da força hidrodinâmica aplicada, então, se o sentido da força é invertido, reverte-se também o movimento. Esse fato pode ser verificado pelo seguinte argumento: Considere que \mathbf{u} e P são solução das equações de Stokes dadas em (2-11), então, é imediato mostrar que $-\mathbf{u}$ e $-P$ também o são⁶. Nota-se que o caso de escoamentos de Reynolds arbitrários, o termo não-linear $|\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}| \sim \|\mathbf{u}\|^2/L$ mantém seu sinal quando o sentido da velocidade é revertido, de forma que o escoamento reverso não é mais uma solução do problema. Por exemplo: o movimento relativo entre duas esferas lisas em cisalhamento simples produz trajetórias relativas fechadas reversíveis. Invertendo-se a direção do cisalhamento, as partículas retornam ao longo das mesmas trajetórias relativas, sem migração lateral. Esse fenômeno é consequência direta da linearidade e reversibilidade no tempo das equações de Stokes. Vale ressaltar que essa condição de simetria pode ser quebrada por características intrínsecas do sistema, como rugosidade superficial, deformação em relação a forma esférica, forças coloidais, ou efeito de inércia (Cunha & Hinch, 1996), produzindo migração de partículas ao longo das linhas de corrente do escoamento de Stokes. A propriedade de reversibilidade em escoamentos de Stokes leva à impossibilidade de certos movimentos. Organismos biológicos, livres da ação líquida da gravidade e executando movimentos com reversibilidade no tempo, não são capazes de se mover em escoamentos de Stokes (Childress, 1981). Isso ocorre porque se há simetria no tempo, então o movimento líquido é nulo, já que a força sobre o corpo depende linearmente da velocidade, conforme ilustrado na figura 2.1. Em outras palavras, se um microorganismo executa um movimento com determinada velocidade, o fluido exerce sobre ele uma força com sentido contrário. Logo, se os movimentos são alternados, após cada ciclo a força resultante sobre o corpo é nula. Em geral, para produzir movimento, os microorganismos precisam quebrar a simetria no

⁵Para uma partícula esférica isolada o tensor resistência é dado por $\mathbf{R} = 6\pi a \mathbf{I}$.

⁶ $\frac{\partial}{\partial t}(-\mathbf{u}) - \mu \nabla^2(-\mathbf{u}) + \nabla(-P) = -(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla P) = 0$.

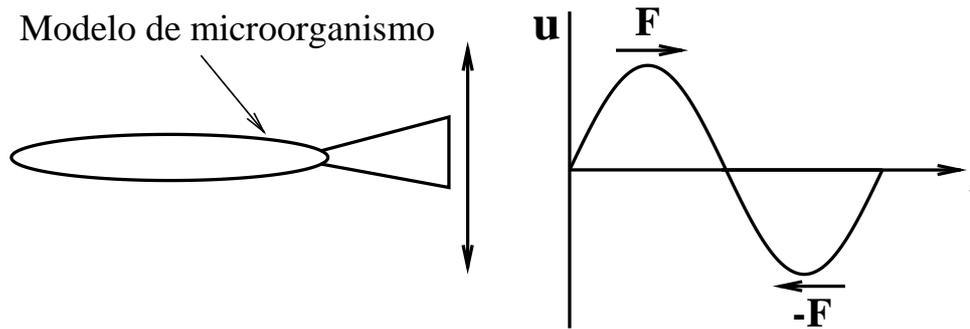


Figura 2.1: Movimentos reversíveis no tempo (oscilações harmônicas, por exemplo) não são capazes de deslocar um corpo em escoamentos em baixos números de Reynolds, em consequência da reversibilidade das equações de Stokes.

tempo do escoamento, por exemplo, realizando movimentos helicoidais ou em altas frequências.

2.2.1 Funções harmônicas em escoamentos de Stokes

Partindo das equações de Stokes, é possível demonstrar que os campos de pressão e vorticidade são harmônicos e que a velocidade é biharmônica, em escoamentos livres de inércia. No caso do campo de pressão, utilizando-se uma identidade vetorial conhecida⁷ e o fato do escoamento ser solenoidal ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) mostra-se que

$$-\nabla \times \boldsymbol{\xi} = \frac{1}{\mu} \nabla P, \tag{2-15}$$

em que $\boldsymbol{\xi} = \nabla \times \mathbf{u}$ é a vorticidade. Tomando o divergente de (2-15) e sabendo que o divergente do rotacional de um vetor é sempre nulo, e também que o divergente do gradiente de um vetor é o laplaciano, obtém-se $\nabla^2 P = 0$. Portanto, o campo de pressão é harmônico. Neste caso, P pode ser expandido em uma série de funções harmônicas sólidas⁸ de grau n , $P = \sum p_n$ (Lamb, 1932). Por outro lado, tomando o rotacional de (2-15) e sabendo que o rotacional do gradiente de uma função escalar é o vetor nulo, temos $-\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\xi}) = 0$. Mais uma vez, utilizando uma identidade vetorial⁹ e sabendo que, por definição, $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$, segue que $\nabla^2 \boldsymbol{\xi} = 0$, mostrando que o campo de vorticidade também é harmônico. Considerando as propriedades das funções harmônicas

⁷ $\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times \boldsymbol{\xi}$, em que $\boldsymbol{\xi} = \nabla \times \mathbf{u}$ é o vetor vorticidade.

⁸O termo *harmônico sólido* é usado para reforçar a idéia de que p_n são funções no espaço tridimensional.

⁹ $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\xi}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) - \nabla^2 \boldsymbol{\xi}$

(Evans, 1998), pode-se inferir que não há regiões de concentração intensa de vorticidade que indiquem que esta grandeza seja um campo compacto em regiões próximas à contornos sólidos. Também é possível mostrar que a vorticidade assume valores extremos nas fronteiras de um domínio regular. Por fim, tomando o laplaciano de (2-10), temos $\mu \nabla^2 \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla^2 \nabla P$. Observando a identidade vetorial $\nabla^2 \nabla P = \nabla(\nabla \cdot \nabla P) - \nabla \times \nabla \times (\nabla P)$, sabendo que $\nabla \times (\nabla P) = \mathbf{0}$ e, desde que a pressão é harmônica, que $\nabla \cdot \nabla P = \nabla^2 P = 0$, segue que $\nabla^2 \nabla P = 0$. Portanto, $\nabla^2 \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla^4 \mathbf{u} = 0$, de forma que é possível concluir que a velocidade é um campo biharmônico em regimes de escoamentos de Stokes. Detalhes sobre a solução de problemas de Stokes usando expansões em harmônicos esféricos podem ser obtidos em Lamb (1932) e Jeffreys & Jeffreys (1946).

2.2.2 Unicidade

Para demonstrar a unicidade da solução das equações de Stokes recorreremos à taxa de dissipação de quantidade de movimento em energia interna para um fluido newtoniano incompressível, $\Phi = 2\mu \mathbf{E} : \mathbf{E}$. Dessa maneira, consideramos uma região do espaço V , delimitada pela superfície S na qual as condições de contorno de velocidade são conhecidas. Supomos que \mathbf{u} e \mathbf{u}' são duas soluções das equações de Stokes nesse domínio, tais que ambas satisfazem as condições de contorno em S . A taxa de dissipação de energia mecânica em energia interna em todo o domínio V , devido à diferença entre os campos de velocidade, $\mathbf{u}^d = \mathbf{u} - \mathbf{u}'$, pode então ser calculada por

$$\Phi_V^d = \int_V 2\mu \mathbf{E}^d : \mathbf{E}^d dV, \quad (2-16)$$

em que $\mathbf{E}^d = 1/2[\nabla \mathbf{u}^d + (\nabla \mathbf{u}^d)^T]$ e $\nabla \mathbf{u}^d = \nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}'$. Desde que \mathbf{E}^d é simétrico, $\nabla \mathbf{u}^d = \mathbf{E}^d + \mathbf{W}^d$, em que $\mathbf{W}^d = 1/2[\nabla \mathbf{u}^d - (\nabla \mathbf{u}^d)^T]$ é a parte anti-simétrica de $\nabla \mathbf{u}^d$, temos que $\mathbf{E}^d : \mathbf{E}^d = \mathbf{E}^d : \nabla \mathbf{u}^d$, já que $\mathbf{E}^d : \mathbf{W}^d = 0$. Usando as identidades $\mathbf{E}^d : \nabla \mathbf{u}^d = \nabla \cdot (\mathbf{E}^d \cdot \mathbf{u}^d) - (\nabla \cdot \mathbf{E}^d) \cdot \mathbf{u}^d$ e $\nabla \cdot \mathbf{E}^d = 1/2 \nabla^2 \mathbf{u}^d$, a equação (2-16) fica

$$\Phi_V^d = \int_V 2\mu \nabla \cdot (\mathbf{E}^d \cdot \mathbf{u}^d) dV - \int_V \mu \nabla^2 \mathbf{u}^d \cdot \mathbf{u}^d dV. \quad (2-17)$$

Aplicando o teorema da divergência na primeira integral do lado direito da equação (2-17) obtemos $\int_V 2\mu \nabla \cdot (\mathbf{E}^d \cdot \mathbf{u}^d) dV = \int_S 2\mu \mathbf{E}^d \cdot \mathbf{u}^d \cdot \mathbf{n} dS$. Como as duas soluções \mathbf{u} e \mathbf{u}' satisfazem as condições de contorno segue que $\mathbf{u}^d(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ em $\mathbf{x} \in S$, logo a referida integral é nula. Por outro lado, das equações de Stokes $\mu \nabla \mathbf{u}^d = \nabla p^d$, em que $p^d = p - p'$ e (2-17) reduz-se a

$$\Phi_V^d = - \int_V \nabla p^d \cdot \mathbf{u}^d dV. \quad (2-18)$$

Sendo $\nabla p^d \cdot \mathbf{u}^d = \nabla \cdot (p^d \mathbf{u}^d) - p^d \nabla \cdot \mathbf{u}^d$ e $\nabla \cdot \mathbf{u}^d = 0$, podemos escrever

$$\Phi_V^d = - \int_V \nabla \cdot (p^d \mathbf{u}^d) dV = - \int_S p^d \mathbf{u}^d \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (2-19)$$

A integral de superfície em (2-19) anula-se também porque $\mathbf{u}^d(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, se $\mathbf{x} \in S$. Portanto, $\Phi_V^d = 0$ se o escoamento é governado pelas equações de Stokes. Voltando à equação (2-16) e observado que o integrando dessa equação é uma quantidade sempre não negativa, desde que o volume de integração é arbitrário e \mathbf{E}^d é um campo contínuo, conclui-se, pelo teorema da localização, que $\mathbf{E}^d = \mathbf{0}$, isto é $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$ em todo o V . Sendo assim, \mathbf{u} e \mathbf{u}' podem diferir apenas por um movimento de corpo rígido. No entanto, desde que em S os campos de velocidade são idênticos, já que devem satisfazer as condições de contorno, então $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}'(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in V$ (Kim & Karrila, 1991), requerendo assim a unicidade da solução das equações de Stokes, como consequência direta da sua linearidade.

2.2.3

Teorema de dissipação mínima de energia

Sejam dois escoamentos (\mathbf{u}, p) e (\mathbf{u}', p') incompressíveis e que satisfazem as condições de contorno em um certo domínio V , delimitado pela superfície S . Considere que o escoamento (\mathbf{u}, p) satisfaz as equações de Stokes, enquanto (\mathbf{u}', p') não necessariamente. O teorema da mínima dissipação de energia diz que (\mathbf{u}, p) tem a menor taxa de dissipação de energia interna dentre todos os demais escoamentos incompressíveis, (\mathbf{u}', p') , que satisfazem as condições de contorno em S . Esse fato pode ser demonstrado a partir da expressão para a taxa de dissipação de energia de (\mathbf{u}', p') no volume V

$$\Phi' = \int_V \mathbf{E}' : \mathbf{E}' dV. \quad (2-20)$$

É possível também estabelecer a identidade

$$\int_V (\mathbf{E}' - \mathbf{E}) : \mathbf{E} dV = 0 \quad (2-21)$$

por meio de desenvolvimentos semelhantes aos usados na demonstração da unicidade da solução das equações de Stokes, conforme disposto no anexo A.1. Subtraindo (2-20) de (2-21) temos que $\Phi' = \int_V [\mathbf{E}' : \mathbf{E}' - (\mathbf{E}' - \mathbf{E}) : \mathbf{E}] dV$, ou equivalentemente

$$\Phi' = \int_V [\mathbf{E} : \mathbf{E} + (\mathbf{E}' - \mathbf{E}) : \mathbf{E}'] dV \quad (2-22)$$

Novamente subtraindo da integral em (2-22) a expressão (2-20), determina-se que

$$\begin{aligned} \Phi' &= \int_V [\mathbf{E} : \mathbf{E} + (\mathbf{E}' - \mathbf{E}) : \mathbf{E}' - (\mathbf{E}' - \mathbf{E}) : \mathbf{E}] dV \\ &= \int_V [\mathbf{E} : \mathbf{E} + (\mathbf{E}' - \mathbf{E}) : (\mathbf{E}' - \mathbf{E})] dV, \end{aligned} \quad (2-23)$$

logo, combinado (2-20) e (2-23)

$$\int_V \mathbf{E}' : \mathbf{E}' dV = \int_V \mathbf{E} : \mathbf{E} dV + \int_V (\mathbf{E}' - \mathbf{E}) : (\mathbf{E}' - \mathbf{E}) dV. \quad (2-24)$$

Desde que a segunda integral do lado direito de (2-24) é sempre uma quantidade não negativa, podemos concluir que

$$\int_V \mathbf{E} : \mathbf{E} dV \leq \int_V \mathbf{E}' : \mathbf{E}' dV, \quad (2-25)$$

que demonstra o teorema da dissipação mínima do escoamento de Stokes. De um ponto de vista analítico, pode-se interpretar esse resultado como um princípio variacional segundo o qual a solução das equações de Stokes em um determinado domínio, sujeito à condições de contorno específicas, é aquela que promove a mínima taxa de dissipação de energia do escoamento por ação viscosa (Evans, 1998).

2.3

Teorema da Reciprocidade de Lorentz

O Teorema da Reciprocidade de Lorentz relaciona dois escoamentos de Stokes de forma que é possível obter informações de um deles a partir do conhecimento da solução do outro. Sua importância aparece em diversos pontos do estudo da Microhidrodinâmica, sendo um dos elementos principais para a derivação da representação integral do escoamento de Stokes. Assim sendo, consideremos $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ e $(\mathbf{u}', \boldsymbol{\sigma}')$ dois movimentos quaisquer do mesmo fluido em uma região V , delimitada pela superfície S . Ambos os movimentos satisfazem as equações de Stokes (2-8) e (2-9). O teorema recíproco postula que (Happel & Brenner, 1991)

$$\int_S (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}') \cdot \mathbf{n} dS + \int_V (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{f}) dV = \int_S (\boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_V (\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}') dV, \quad (2-26)$$

em que $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$ e \mathbf{g} é uma força de campo por unidade de massa. Para demonstrar o teorema representado em (2-26) consideremos um fluido newtoniano incompressível de viscosidade μ . Conforme já mencionado, sejam dois escoamentos que satisfazem as equações de Stokes $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ e $(\mathbf{u}', \boldsymbol{\sigma}')$. Dessa forma os tensores de tensão $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\sigma}'$ são expressos respectivamente por $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}$ e $\boldsymbol{\sigma}' = -p'\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}'$. Sendo assim, levando em conta que ambos os campos de velocidade são solenoidais, temos que $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{E}' = -p'\mathbf{I} : \mathbf{E}' + 2\mu\mathbf{E} : \mathbf{E}'$ e $\boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{E} = -p'\mathbf{I} : \mathbf{E} + 2\mu\mathbf{E}' : \mathbf{E}$, desde que $\mathbf{I} : \mathbf{E}' = \mathbf{I} : \mathbf{E} = 0$,

$$\boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{E} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{E}'. \quad (2-27)$$

Por outro lado, considerando a simetria do tensor de tensões e o fato do produto interno entre um tensor simétrico e outro anti-simétrico ser nulo, temos que $\boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u}' = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{E}' + \underbrace{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{W}'}_0 = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{E}'$, portanto

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{E}' = \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u}'. \quad (2-28)$$

Seja agora a identidade $\boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u}' = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}') - (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{u}'$. Considerando (2-28) e a relação equivalente para $\boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{E}$, podemos escrever

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{E}' = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}') - (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{u}', \quad (2-29)$$

$$\boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{E} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}') \cdot \mathbf{u}. \quad (2-30)$$

Finalmente, tendo em vista (2-27) e que $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{f}$, subtrai-se (2-29) de (2-30) para obter

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}' - \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{f}' \cdot \mathbf{u} - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}'. \quad (2-31)$$

Na ausência de forças de campo a expressão (2-31) reduz-se a

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}' - \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{u}) = 0. \quad (2-32)$$

Integrando (2-31) em uma região simplesmente conexa de fluido e usando o teorema da divergência chega-se ao resultado apresentado em (2-26), como se queria mostrar. Na ausência de forças de campo podemos simplificar (2-26) chegando a

$$\int_S (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}') \cdot \mathbf{n} dS = \int_S (\boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2-33)$$

Os resultados expressos em (2-31) e em (2-32) são referenciados na literatura (Pozrikidis (1992); Kim & Karrila (1991); Happel & Brenner (1991))

como *Teorema da Reciprocidade de Lorentz* ou, simplesmente, *Identidade Recíproca*. Este teorema pode ser utilizado para demonstrar propriedades de simetria do escoamento de Stokes como, por exemplo, a simetria da matriz resistência \mathbf{R} , mostrada em (2-14) (ver Kim & Karrila (1991)). Em particular, na determinação da representação integral do escoamento em regimes de baixos números de Reynolds o referido problema é fundamental. No contexto deste trabalho, essa representação é o ponto de partida para a formulação do *Método Integral de Contorno*, que será utilizado na soluções numéricas do escoamentos na superfície de gotas em uma emulsão. Outra característica relevante do Teorema da Reciprocidade é que o mesmo permite que se obtenha informação sobre um determinado escoamento sem a necessidade de resolvê-lo explicitamente. Ao invés disso, utiliza-se dados de outro escoamento já conhecido, como por exemplo o escoamento gerado por um ponto de força (solução fundamental das equações de Stokes), para inferir sobre a solução do primeiro. Recentemente, uma variação do teorema da reciprocidade de Lorentz para escoamentos compressíveis foi desenvolvida por Cunha *et. al.* (2003^b). Uma formulação da identidade recíproca para o caso tridimensional de gotas magnéticas em escoamentos de Stokes também foi desenvolvida por Cunha *et. al.* (2007). Nesse caso, a referida identidade fornece a base para a solução de problemas envolvendo gotas magnéticas pelo Método Integral de Contorno.

2.3.1

Aplicações do teorema da reciprocidade

Como mencionado anteriormente, o teorema da reciprocidade pode ser empregado para se obter informações sobre um determinado escoamento de Stokes a partir de uma solução já conhecida desse mesmo tipo de escoamento. Para exemplificar essa aplicação, consideremos o problema de se determinar uma primeira correção no cálculo da força sobre uma partícula imersa em um escoamento, levando em conta efeitos de inércia. Para isso, seja um escoamento permanente governado por

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = Re \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad (2-34)$$

em que Re é o número de Reynolds. No presente contexto, estamos restritos a pequenos valores de Re , de maneira que os efeitos da inércia no escoamento são discretos. Levando em conta que o $Re \ll 1$, podemos abordar o problema usando um método de perturbação regular (Hinch, 1991), em que \mathbf{u} e $\boldsymbol{\sigma}$ são representados por expansões em séries de potências de Re na forma

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{u}_o + Re \mathbf{u}_1 + \dots \\ \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}_o + Re \boldsymbol{\sigma}_1 + \dots\end{aligned}\quad (2-35)$$

Substituindo as equações (2-35) na equação (2-34) e eliminando termos $\mathcal{O}(Re^2)$ obtém-se

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_o + Re(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 - \mathbf{u}_o \cdot \nabla \mathbf{u}_o) = \mathbf{0}. \quad (2-36)$$

Se a equação anterior é válida para Re pequeno, porém arbitrário¹⁰, então

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_o = \mathbf{0}, & \mathcal{O}(1) \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 - \mathbf{u}_o \cdot \nabla \mathbf{u}_o = \mathbf{0}, & \mathcal{O}(Re). \end{cases} \quad (2-37)$$

As equações (2-37) devem ser solucionadas seqüencialmente. Sendo assim, ao se resolver a equação associada à $\mathcal{O}(Re)$, a solução $\mathcal{O}(1)$ para o campo de velocidade \mathbf{u}_o já deve ser conhecido. Outra observação relevante é que a equação para $\boldsymbol{\sigma}_1$ em (2-37) é linear, já que \mathbf{u}_o é conhecido para todo o domínio tal que $\mathbf{u}_o \cdot \nabla \mathbf{u}_o$ faz o papel de uma força de campo por unidade de massa. Para o cálculo da força sobre uma partícula, admitimos analogamente que $\mathbf{F} = \mathbf{F}_o + Re \mathbf{F}_1 + \dots$, em que $\mathbf{F}_1 = \int_S \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n} dS$. Mostraremos que não é necessário resolver \mathbf{u}_1 e P_1 para determinar $\boldsymbol{\sigma}_1$ e, conseqüentemente, a correção \mathbf{F}_1 .

Consideremos que $(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{u}')$ é a solução do escoamento de Stokes sobre um corpo qualquer, delimitado pela superfície S , transladando em um fluido infinito com velocidade unitária em uma direção constante $\hat{\mathbf{e}}$. Usando o teorema recíproco tal como expresso em (2-26) para o par de escoamentos $(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{u}')$ e $(\boldsymbol{\sigma}_1, \mathbf{u}_1)$, em que o primeiro é regular por hipótese e o segundo é tal que $\mathbf{f}_1 = -\mathbf{u}_o \cdot \nabla \mathbf{u}_o$ e $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ sobre a superfície do corpo, obtemos

$$\int_S (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{u}') \cdot \mathbf{n} dS - \int_V \mathbf{u}' \cdot (\mathbf{u}_o \cdot \nabla \mathbf{u}_o) dV = \int_S (\boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2-38)$$

Levando em conta que em S , $\mathbf{u}' = \hat{\mathbf{e}}$ e $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$,

$$\hat{\mathbf{e}} \cdot \int_S \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \mathbf{u}' \cdot (\mathbf{u}_o \cdot \nabla \mathbf{u}_o) dV, \quad (2-39)$$

ou ainda

$$\mathbf{F}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}} = \int_V \mathbf{u}' \cdot (\mathbf{u}_o \cdot \nabla \mathbf{u}_o) dV. \quad (2-40)$$

¹⁰O que inclui o caso $Re = 0$.

Vale lembrar que em (2-40) \mathbf{u}' e \mathbf{u}_o são soluções de escoamentos de Stokes conhecidas previamente, de maneira que não é preciso resolver o problema associado a $\boldsymbol{\sigma}_1$ para se determinar \mathbf{F}_1 .

O problema anterior tratava de efeitos não-lineares relacionados com a inércia do escoamento. Considerando agora um problema em que esses efeitos estão associados à natureza não-linear do fluido podemos escrever, em geral, que

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = De \mathcal{L}(\mathbf{u}), \quad (2-41)$$

em que $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ representa uma correção não-newtoniana e De é número de Deborah, que é a razão entre o tempo de relaxação do fluido e um tempo da escala convectiva do escoamento (Bird *et.al.*, 1987). Consideremos um regime tal que $De \ll 1$, no qual os efeitos não-newtonianos são discretos. Seguindo os passos do exemplo anterior, um método de perturbação regular é utilizado tal que $\mathbf{u} = \mathbf{u}_o + De \mathbf{u}_1$ e $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_o + De \boldsymbol{\sigma}_1$. Substituindo essas expressões na equação (2-41) obtemos

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_o + De \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 = De \mathcal{L}(\mathbf{u}_o + De \mathbf{u}_1). \quad (2-42)$$

Usando uma série de Taylor para desenvolver $\mathcal{L}(\mathbf{u}_o + De \mathbf{u}_1)$ obtemos

$$De \mathcal{L}(\mathbf{u}_o + De \mathbf{u}_1) = De [\mathcal{L}(\mathbf{u}_o) + De \nabla_u \mathcal{L}(\mathbf{u}_o) \cdot \mathbf{u}_1 + \dots], \quad (2-43)$$

em que $\nabla_u = (\partial_u, \partial_v, \partial_w)$ é o gradiente em relação ao vetor velocidade. Substituindo (2-43) em (2-42) e desconsiderando os termos $\mathcal{O}(De^2)$, podemos escrever a equação (2-42) na forma $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_o + De [\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 - \mathcal{L}(\mathbf{u}_o)] = \mathbf{0}$. Similarmente ao caso anterior, sendo De pequeno mas arbitrário, segue que

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_o = \mathbf{0}, & \mathcal{O}(1) \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 - \mathcal{L}(\mathbf{u}_o) = \mathbf{0}, & \mathcal{O}(De), \end{cases} \quad (2-44)$$

tal que a correção não-linear da força é dada por

$$\mathbf{F}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}} = \int_V \mathbf{u}' \cdot \mathcal{L}(\mathbf{u}_o) dV, \quad (2-45)$$

em que \mathbf{u}_o é a solução do problema de Stokes ($\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_o = \mathbf{0}$) no mesmo domínio, enquanto \mathbf{u}' é a solução para o escoamento de um corpo transladando com velocidade unitária $\hat{\mathbf{e}}$ em um fluido viscoso no espaço.

2.4

Solução fundamental do escoamento de Stokes

A solução fundamental das equações de Stokes corresponde ao escoamento gerado pela presença de um ponto de força em um domínio tridimensional infinito de fluido (espaço livre), representada pelo seguinte sistema de equações (Ladyzhenskaya, 1969)

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} - \nabla p = \mathbf{F} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (2-46)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (2-47)$$

em que \mathbf{F} é uma força concentrada (ou monopolo) aplicada sobre o fluido, \mathbf{x}_o é a posição do ponto de força e $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)$ é a distribuição *delta de Dirac* no espaço tridimensional. De maneira mais geral, a presença de uma partícula em um escoamento de Stokes é representada por $\mathbf{F} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) + \mathbf{D} \cdot \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) + \mathbf{Q} : \nabla \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) + \dots$, em que \mathbf{D} e \mathbf{Q} representam momentos (dipolo e quadrupolo) gerados pela partícula sobre o fluido. No presente contexto, um ponto de força ou de partícula produz um distúrbio de velocidade e pressão de longo alcance no fluido. Em uma região suficientemente afastada da localização \mathbf{x}_o do mesmo, tal que os momentos de alta order que decaem com $1/r^2$, ou mais rápido do que isso, tornam-se contribuições de segunda ordem já que $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o\| \gg 1$. Vale notar que a distribuição delta de Dirac atende às seguintes propriedades (Lighthill, 1958)

$$(i) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) dV = 1, \quad (ii) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) f(\mathbf{x}) dV = f(\mathbf{x}_o), \quad (2-48)$$

em que $f(\mathbf{x}_o)$ é uma função regular qualquer. A solução do problema diferencial representado pelas equações (2-46) e (2-47) pode ser encontrada via transformada de Fourier tridimensional, definida segundo o par de transformadas

$$\mathfrak{F}\{f(\mathbf{x})\} = \hat{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (2-49)$$

$$\mathfrak{F}^{-1}\{\hat{f}(\mathbf{k})\} = f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k}. \quad (2-50)$$

A equação (2-50) pode ser interpretada como a projeção da função $f(\mathbf{x})$ em um espaço de ondas planas (autofunções gaussianas) sendo, $f(\mathbf{k})$ a amplitude de cada onda $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$. O vetor número de onda \mathbf{k} é definido como $\mathbf{k} = 2\pi (1/\lambda_j) \hat{\mathbf{e}}_j$,

em que \hat{e}_j é o vetor unitário em cada direção $j = 1, 2, 3$ e λ_j o comprimento de onda na direção \hat{e}_j . É importante salientar as seguintes propriedades da transformada de Fourier

$$\mathfrak{F}\{\nabla \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x})\} = i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{k}), \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3, \quad (2-51)$$

$$\nabla \mathfrak{F}^{-1}\{\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{k})\} = \mathfrak{F}\{i\mathbf{k} \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{k})\}, \quad \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{k}) \in \mathbb{R}. \quad (2-52)$$

De acordo com (2-51), temos que $\mathfrak{F}\{\nabla^2\} = -k^2$, em que $k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$. Assim sendo, a equação da continuidade no espaço recíproco de Fourier (ou espaço de número de onda) fica

$$\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = 0. \quad (2-53)$$

Aplicando a transformada de Fourier à equação de quantidade de movimento, e considerando por ora que o monopolo está concentrado na origem, obtém-se

$$\mu k^2 \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) + i\mathbf{k} \hat{p}(\mathbf{k}) = -\mathbf{F} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x},$$

Usando a propriedade (2-48) da distribuição delta de Dirac, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} = e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{0}} = 1,$$

e a equação da quantidade de movimento no espaço recíproco reduz-se a

$$\mu k^2 \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) + i\mathbf{k} \hat{p}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \mathbf{F}. \quad (2-54)$$

Multiplicando-se escalarmente a equação (2-54) por \mathbf{k} e usando a equação da continuidade (2-53),

$$\hat{p}(\mathbf{k}) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{F}}{k^2}. \quad (2-55)$$

Substituindo (2-55) em (2-54) e isolando $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$, obtém-se

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2} \mu k^2} \mathbf{F} \cdot \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2} \right) \quad (2-56)$$

As equações (2-55) e (2-56) são expressões para os campos de pressão e velocidade, respectivamente, no espaço recíproco. Para determinar os campos correspondentes no espaço físico usa-se a transformada inversa de Fourier (2-50) e a propriedade (2-52), de maneira que

$$p(x) = \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{2/3}} \frac{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{F}}{k^2} \right\} = \frac{1}{8\pi^3} \mathbf{F} \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \frac{i\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{k^2} d\mathbf{k} = \frac{1}{8\pi^3} \mathbf{F} \cdot \nabla \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{k^2} d\mathbf{k}$$

e, portanto, desde que $\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{k^2} d\mathbf{k} = \frac{2\pi^2}{x}$ em que $x = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}$, é possível verificar que

$$p(\mathbf{x}) = -\frac{1}{8\pi}\mathbf{F}\cdot\left(2\frac{\mathbf{x}}{x^3}\right). \quad (2-57)$$

De maneira semelhante, o campo de velocidade no espaço físico é determinado como

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{-\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\mu k^2}\mathbf{F}\cdot\left(\mathbf{I}-\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2}\right)\right\} = -\frac{1}{8\pi^3\mu}\mathbf{F}\cdot\left[\mathbf{I}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{k^2}d\mathbf{k}-\nabla\nabla\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{k^4}d\mathbf{k}\right].$$

Como $\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{k^4} d\mathbf{k} = -\pi^2 x$, mostra-se que

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{8\pi\mu}\mathbf{F}\cdot\left(\frac{\mathbf{I}}{x}+\frac{\mathbf{x}\mathbf{x}}{x^3}\right). \quad (2-58)$$

Se o ponto de força não estiver na origem, então a solução fica modificada apenas por uma translação, podendo ser escrita de forma geral como

$$p(\mathbf{x}-\mathbf{x}_o) = -\frac{1}{8\pi}\mathbf{F}\cdot\mathcal{P}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_o) \quad (2-59)$$

e

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_o) = -\frac{1}{8\pi\mu}\mathbf{F}\cdot\mathcal{G}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_o) \quad (2-60)$$

em que

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}) = 2\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (2-61)$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}\mathbf{I} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^3}, \quad (2-62)$$

são funções de Green, $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_o$ e $r = \sqrt{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}$. Os campos $p(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)$ e $\mathbf{u}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)$ são, respectivamente, os distúrbios de pressão e velocidade produzidos por uma singularidade (monopolo) de força com intensidade \mathbf{F} , localizada na posição \mathbf{x}_o . Esses campos mostram como é a interação hidrodinâmica entre partículas infinitesimais em escoamentos de Stokes. O vetor \mathcal{P} e o tensor de segunda ordem \mathcal{G} são conhecidos como propagadores dos distúrbios de pressão e velocidade, respectivamente. O tensor \mathcal{G} também é referenciado na literatura como *tensor de Oseen-Burgers* (Kim & Karrila, 1991). O campo de velocidade induzido por \mathbf{F} , dado por $\mathbf{u} = (8\pi\mu)^{-1}\mathbf{F}\cdot\mathcal{G}$ é denominado na literatura como “Stokeslet” (Batchelor, 1970). Vale ressaltar o fato dos propagadores serem funções geométricas apenas da distância relativa ou configuração de monopolos no espaço. Além disso, os distúrbios se propagam com decaimento

lento $\mathcal{O}(1/r)$. Dessa forma, mesmo partículas relativamente afastadas umas das outras, interagem de forma significativa (interações de longo alcance) em escoamentos de Stokes. Para suspensões diluídas pode-se aproximar as interações hidrodinâmicas entre as partículas por interações de ponto. Assim, se uma partícula teste sedimenta em baixo número de Reynolds em uma suspensão diluída de N partículas, então sua velocidade \mathbf{U} é dada por

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{U}^o(\mathbf{x}_i) + \sum_{j=1, i \neq j}^N \mathcal{G}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}_j), \quad (2-63)$$

em que \mathbf{U}^o é a velocidade da partícula teste isolada no escoamento e o somatório computa o distúrbio devido as partículas vizinhas.

O tensor de tensões para esse escoamento pode ser expresso em termos das funções de Green $\mathcal{P}(\mathbf{r})$ e $\mathcal{G}(\mathbf{r})$. Para isto, basta aplicar as equações (2-61) e (2-62) na definição do tensor de tensões, de forma que

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{8\pi} \mathbf{F} \cdot [\mathcal{P}(\mathbf{r})\mathbf{I} - (\nabla\mathcal{G}(\mathbf{r}) + (\nabla\mathcal{G})^T(\mathbf{r}))],$$

sendo possível mostrar que

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi} \mathbf{F} \cdot \mathcal{T}(\mathbf{r}), \quad (2-64)$$

em que

$$\mathcal{T}(\mathbf{r}) = -\frac{6}{r^5} \mathbf{r}\mathbf{r}\mathbf{r}. \quad (2-65)$$

O triádico $\mathcal{T}(\mathbf{r})$ é uma função de Green tensorial de terceira ordem associada à propagação do distúrbio de tensão gerado por um dipolo hidrodinâmico em um escoamento de Stokes, com partículas livres de torque.

2.4.1

Propriedades das funções de Green

As funções de Green ou funções mobilidade relacionadas à solução fundamental do escoamento de Stokes têm propriedades importantes para o desenvolvimento da representação integral do escoamento nas superfícies de partículas. Além disso, essas funções são cruciais em determinadas etapas do desenvolvimento da formulação do Método Integral de Contorno para esse tipo de escoamento.

Considerando a equação da continuidade em que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, temos que $\int_V \nabla \cdot \mathbf{u} dV = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0$. Considerando apenas o distúrbio causado por um ponto de força em que $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 1/(8\pi\mu)\mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{F}$, temos que

$$\int_S \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = 0. \quad (2-66)$$

A equação da quantidade de movimento associada a um ponto de força (2-46) pode ser escrita na forma $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) = \mathbf{F}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)$. Considerando que a solução fundamental tal que $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)$ é dado pela equação (2-64), mostra-se que

$$\nabla \cdot \mathcal{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) = -8\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)\mathbf{I} \quad (2-67)$$

Integrado (2-67) em um volume regular V e aplicando o teorema da divergência de Gauss no lado esquerdo desta equação temos que

$$\int_S \mathcal{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) = -8\pi\mathbf{I} \int_V \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) dV(\mathbf{x}). \quad (2-68)$$

Usando as propriedades do Delta de Dirac (Abramovitz & Stegun, 1964) e assumindo que a superfície S tem vetor normal contínuo em toda sua extensão, ou seja, não há “bicos” ou “quinas” em S (superfície de Lyapunov), segue que

$$\int_V \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) dV(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x}_o \notin V \\ 1/2, & \mathbf{x}_o \in S \\ 1, & \mathbf{x}_o \in \bar{V} \end{cases}.$$

Aqui $\bar{V} = V - S$, isto é, o conjunto dos pontos que pertencem a V e não pertencem à superfície S , é possível mostrar que

$$\int_S \mathcal{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = -\mathbf{I} \begin{bmatrix} 0 \\ 4\pi \\ 8\pi \end{bmatrix}, \quad (2-69)$$

em que os termos nos colchetes são os valores da constante que multiplica o tensor identidade para os casos em que $\mathbf{x}_o \notin V$, $\mathbf{x}_o \in S$ e $\mathbf{x}_o \in V$, respectivamente. De forma semelhante, da lei de conservação do momento da quantidade de movimento (Pozrikidis, 1992) aplicada ao escoamento provocado por um ponto de força obtemos

$$\int_S \mathbf{x} \times \mathbf{F} \cdot \mathcal{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) = -8\pi \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{F} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) dV(\mathbf{x}). \quad (2-70)$$

Desde que \mathbf{F} é um vetor arbitrário, invertendo-se a ordem do produto vetorial no dois lados da equação (2-70) e usando as propriedades da distribuição Delta de Dirac obtém-se que

$$\int_S \mathbf{x} \cdot \mathcal{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}_o \begin{bmatrix} 0 \\ 4\pi \\ 8\pi \end{bmatrix}, \quad (2-71)$$

em que mais uma vez as constantes entre colchetes multiplicam o vetor \mathbf{x} quando \mathbf{x}_o está fora de V , sobre S ou no interior de V , respectivamente.

Além das propriedades mencionadas nesta seção, é importante destacar a simetria das funções de Green em relação ao produto escalar por um vetor \mathbf{v} qualquer, ou seja, $\mathcal{G} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathcal{G}$ e $\mathcal{T} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathcal{T}$, o caráter de função par de \mathcal{G} , isto é $\mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) = \mathcal{G}(\mathbf{x}_o - \mathbf{x})$ e de função ímpar e \mathcal{T} , ou seja, $\mathcal{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) = -\mathcal{T}(\mathbf{x}_o - \mathbf{x})$. Essas propriedades podem ser verificadas diretamente das definições das equações (2-62) e (2-64).

2.5

Representação integral do escoamento de Stokes

A representação integral do escoamento de Stokes fornece a base da formulação do Método Integral de Contorno para a solução do escoamento nas vizinhanças de uma gota (Pozrikidis, 1992). Essa representação transforma o problema diferencial tridimensional original em um problema de integral de superfície. A redução dimensional é um avanço significativo no sentido de se obter métodos numéricos eficientes para a solução de problemas em microhidrodinâmica, envolvendo superfícies livres como movimento de gotas, cápsulas e células, em suspensões. Outras características do método serão mencionadas oportunamente.

No sentido de se obter a representação integral geral para soluções de escoamentos em regimes de baixos números de Reynolds, partimos da identidade recíproca dada pela equação (2-31), com o par de escoamentos $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{0})$ e $(\mathbf{u}', \boldsymbol{\sigma}', \mathbf{f}')$. O primeiro escoamento é livre de forças de campo, de tal forma que (2-31) reduz-se $\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}' - \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{f}' \cdot \mathbf{u}$. Considerando agora que o segundo escoamento é produzido por um monopolo com intensidade \mathbf{F} na posição \mathbf{x}_o tal que $\mathbf{f}' = -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' = -\mathbf{F}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)$, temos que

$$\frac{1}{8\pi\mu} \mathbf{F} \cdot \nabla \cdot [\mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mu \mathcal{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{u}] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}. \quad (2-72)$$

Integrando a equação (2-72) em um volume V qualquer de fluido, aplicando o teorema da divergência de Gauss e considerando \mathbf{F} arbitrário, obtemos

$$\int_V \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \mathbf{u}(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi\mu} \int_S \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS - \frac{1}{8\pi\mu} \int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{T}(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS. \quad (2-73)$$

De maneira geral, dependendo da localização do ponto de força em relação ao volume de integração V e das propriedades da distribuição Delta de Dirac (Abramovitz & Stegun, 1964), a representação integral do escoamento de Stokes pode ser escrita na forma

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}_o \in \bar{V}, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}_o) \\ \mathbf{x}_o \in S, \quad \frac{1}{2}\mathbf{u}(\mathbf{x}_o) \\ \mathbf{x}_o \notin V, \quad \mathbf{0} \end{array} \right\} = \frac{1}{8\pi\mu} \int_S \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \\ - \frac{1}{8\pi} \int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}). \quad (2-74)$$

A equação (2-74) fornece uma representação integral para o distúrbio de velocidade em uma posição \mathbf{x}_o . A primeira integral do lado direito de (2-74) quantifica os efeitos de uma distribuição contínua de pontos de força de intensidade $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ sobre a superfície S e é conhecida como *simplex camada potencial*¹¹. Já a outra integral pode ser interpretada como uma distribuição contínua de dipolos hidrodinâmicos ao longo de S , em analogia à teoria potencial eletromagnética (Kim & Karrila, 1991), sendo conhecida na literatura como *dupla camada potencial*¹². Outra demonstração para a equação (2-74) está disponível no apêndice A.2

2.5.1

Formulação do Método Integral de Contorno para partículas deformáveis

Para obtemos a formulação do Método Integral de Contorno (MIC) para a cálculo do escoamento na superfícies de partículas deformáveis (gotas) é necessário dispor de uma representação integral deste escoamento. Para isso supomos a presença de um escoamento não-perturbado $\mathbf{u}^\infty(\mathbf{x})$, longe da partícula de forma que o campo de velocidade em qualquer ponto é dado por $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^\infty(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^d(\mathbf{x})$, em que $\mathbf{u}^d(\mathbf{x})$ é o distúrbio de velocidade gerado pela presença da gota. Vale observar que longe da partícula os distúrbios de velocidade e tensão podem ser desconsiderados, uma vez que decaem à razão de $1/r$ e $1/r^2$, respectivamente, em que r é a distância a partir do centro da partícula (Happel & Brenner, 1991).

Seja o fluido que constitui a gota denominado fluido 1, de viscosidade $\lambda\mu$, e o fluido ambiente (fase contínua) de fluido 2, de viscosidade μ , como ilustra a figura (2.2). Deseja-se obter uma representação integral para o escoamento

¹¹Do inglês “*single-layer potential*”

¹²Do inglês “*double-layer potential*”

exatamente sobre a superfície S da gota, em termos do salto de tensões através da mesma. Para isso, consideramos as seguintes expressões para o campo de velocidade em S :

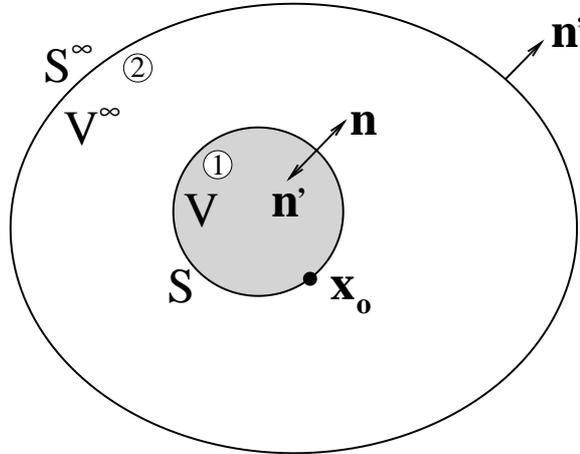


Figura 2.2: Representação das variáveis do escoamento dentro e fora de uma gota em uma emulsão infinitamente diluída. Fluido 1: $\lambda\mu$; Fluido 2: μ

- (i) $\mathbf{x} \in V$: O distúrbio de velocidade é calculado segundo a equação (2-74) para $\mathbf{x}_o \in S$, em que o fluido confinado pela superfície de integração é o fluido 1, que constitui a gota. Nesse caso

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathbf{u}(\mathbf{x}_o) &= \frac{1}{8\pi\lambda\mu} \int_S \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot [\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})] dS(\mathbf{x}) \\ &\quad - \frac{1}{8\pi} \int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2-75)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}_1$ é o tensor de tensões calculado usando as propriedades e o escoamento do fluido 1;

- (ii) $\mathbf{x} \in V^\infty$: O fluido agora está confinado entre as superfícies S e S^∞ , de forma que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathbf{u}(\mathbf{x}_o) &= \frac{1}{8\pi\mu} \int_S \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot [\boldsymbol{\sigma}_2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}'(\mathbf{x})] dS(\mathbf{x}) \\ &\quad - \frac{1}{8\pi} \int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{n}'(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \\ &\quad + \frac{1}{8\pi\mu} \int_{S^\infty} \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot [\boldsymbol{\sigma}_2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}'(\mathbf{x})] dS(\mathbf{x}) \\ &\quad - \frac{1}{8\pi} \int_{S^\infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{n}'(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2-76)$$

Para $\mathbf{x} \in S$ temos que $\mathbf{n}' = -\mathbf{n}$. Desde que S^∞ está longe o suficiente da gota para que os distúrbios de velocidade e tensão não sejam notados, reconhecemos nas duas integrais na superfície S^∞ a representação integral do escoamento não-perturbado em $\mathbf{x}_o \in S$ de forma que (2-76) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathbf{u}(\mathbf{x}_o) &= \mathbf{u}^\infty(\mathbf{x}_o) - \frac{1}{8\pi\mu} \int_S \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot [\boldsymbol{\sigma}_2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})] dS(\mathbf{x}) \\ &+ \frac{1}{8\pi} \int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2-77)$$

Sendo assim, multiplicando a equação (2-75) por λ e somando com a equação (2-77) podemos mostrar que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}_o) &= \frac{2}{1+\lambda} \mathbf{u}^\infty(\mathbf{x}_o) - \frac{1}{4\pi(1+\lambda)\mu} \int_S \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \\ &+ \frac{1-\lambda}{4\pi(1+\lambda)} \int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2-78)$$

em que o salto de tensões através da superfície S é $\Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}) = [\boldsymbol{\sigma}_2(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$. Para interfaces viscosas com tensão superficial o salto de tensões é dado por (Tanzosh *et. al.* (1992) & Pozrikidis (1992))

$$\Delta \mathbf{f} = 2\sigma \bar{\kappa} \mathbf{n} - \nabla_s \sigma - \Delta \rho (\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{n}, \quad (2-79)$$

em que σ é o coeficiente de tensão superficial, $\bar{\kappa} = (\nabla_s \cdot \mathbf{n})/2$ é a curvatura média da superfície, $\nabla_s = (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}) \cdot \nabla$ é o vetor gradiente projetado sobre a superfície e $\Delta \rho = \rho_1 - \rho_2$ a diferença de massas específicas. A equação (2-79) inclui o salto de tensões normais ($2\sigma \bar{\kappa} \mathbf{n}$) e tangenciais ($-\nabla_s \sigma$) através de S , além do efeito gravitacional líquido devido à diferença entre as massas específicas dos fluidos. Saltos de tensão tangencial através de S podem ser originados devido a gradientes de temperatura ou gradientes superficiais de surfactantes. Outros efeitos também podem ser considerados como os de origem eletromagnética (Sherwood, 1988) ou de membrana elástica (Li *et. al.*, 1988), em particular a resistência a flexão de membranas e a conservação da área superficial.

Ainda que a dependência temporal não tenha sido levada em conta explicitamente nas equações de Stokes para a derivação da representação integral do escoamento, mudanças na configuração da superfície S podem ser consideradas. Isso é possível desde que o tempo característico de propagação de vorticidade (em outras palavras, de quantidade de movimento) $\tau_\xi = \rho a^2 / \mu_c$ seja muito menor do que um tempo característico da mudança na configuração

da superfície, $\tau_d = \min\{\mathcal{O}(\dot{\gamma}_c^{-1}), \mathcal{O}(a\mu_c/\sigma)\}$, em que a é o raio da gota não-deformada, $\dot{\gamma}_c$ uma taxa de cisalhamento característica do escoamento não-perturbado e μ_c a maior viscosidade entre as dos fluidos 1 e 2. Nesse caso, em que $\tau_\xi \ll \tau_d$, as mudanças na forma de S podem ser determinadas pela equação cinemática evolutiva

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S \quad (2-80)$$

em um contexto de variações virtuais ou *quasi-estáticas* da posição das partículas que constituem a superfície. Essa condição significa que todo o fluido se ajusta imediatamente às mudanças de localização das partículas em S devido à rápida difusão de vorticidade pelo meio, comparado como o tempo de relaxação da partícula.

2.6

Forma adimensional da representação integral

No caso em que apenas o salto de tensões normais é importante, ou seja, os efeitos gravitacionais são desprezíveis e a superfície da gota é livre de gradientes de tensão superficial, então $\Delta \mathbf{f} = 2\sigma \bar{\kappa} \mathbf{n}$. Nessa situação a adimensionalização da equação (2-78) é feita levando-se em consideração que a escala de tempo característica do escoamento é $\tau_{u^\infty} = \dot{\gamma}_c^{-1}$, em que $\dot{\gamma}_c$ é uma taxa de cisalhamento típica. A escala de tempo de relaxação da gota é $\tau_\sigma = a\mu_c/\sigma$, em que a é o raio da gota não-deformada, σ o coeficiente de tensão interfacial e $\mu_c = \max\{\mu, \lambda\mu\}$. A escala de comprimento característica do escoamento é a . Define-se as seguintes grandezas adimensionais

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_o &= \frac{\mathbf{x}_o}{a}, & \tilde{\mathbf{x}} &= \frac{\mathbf{x}}{a}, & \tilde{\kappa} &= \bar{\kappa}a, & \tilde{\mathbf{u}}^\infty &= \frac{\mathbf{u}^\infty}{\dot{\gamma}_c a}, \\ \tilde{\mathbf{u}} &= \frac{\mu_c \mathbf{u}}{\sigma}, & \tilde{\mathcal{G}} &= a \mathcal{G}, & \tilde{\mathcal{T}} &= a^2 \mathcal{T}, & \tilde{dS} &= \frac{dS}{a^2}, \end{aligned} \quad (2-81)$$

em que o til indica a variável adimensional. A equação (2-78) pode ser escrita em termos das quantidades adimensionais definidas em (2-81) como sendo

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}_o) &= \frac{2}{1+\lambda} \frac{\dot{\gamma}_c a \mu_c}{\sigma \mu} \tilde{\mathbf{u}}^\infty(\tilde{\mathbf{x}}_o) - \frac{1}{4\pi(1+\lambda)} \frac{\mu_c}{\mu} \int_S 2\tilde{\kappa} \tilde{\mathcal{G}}(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}_o) \cdot \mathbf{n} \tilde{dS}(\tilde{\mathbf{x}}) \\ &+ \frac{1-\lambda}{4\pi(1+\lambda)} \int_S \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}) \cdot \tilde{\mathcal{T}}(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}_o) \cdot \mathbf{n}(\tilde{\mathbf{x}}) \tilde{dS}(\tilde{\mathbf{x}}). \end{aligned} \quad (2-82)$$

Define-se então o número de capilaridade como

$$Ca = \frac{\dot{\gamma}_c a \mu}{\sigma} \quad (2-83)$$

e a constante $c_\lambda = \mu_c/\mu$ tal que

$$c_\lambda = \begin{cases} 1, & \mu_c = \mu \\ \lambda, & \mu_c = \lambda\mu. \end{cases} \quad (2-84)$$

A constante c_λ é um parâmetro que sistematiza a seleção da viscosidade apropriada para a adimensionalização das equações, diferenciando os limites de altas e baixas razões de viscosidade. Vale lembrar que a seleção da viscosidade da gota como referência reflete-se na definição do tempo de relaxação da mesma, na forma adimensional da formulação integral de contorno e da tensão induzida pela fase dispersa, como se verá na seção 2.9. Usando as definições das equações (2-83) e (2-84) e suprimindo a diferenciação explícita de variável adimensional pelo uso do til obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}_o) &= \frac{2c_\lambda}{1+\lambda} Ca \mathbf{u}^\infty(\mathbf{x}_o) - \frac{c_\lambda}{4\pi(1+\lambda)} \int_S 2\kappa \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \\ &+ \frac{1-\lambda}{4\pi(1+\lambda)} \int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2-85)$$

O número de capilaridade é o parâmetro central no estudo da reologia de emulsões. Pode ser interpretado como uma taxa de cisalhamento adimensional e quantifica o quão forte é o escoamento que age sobre a gota. Por outro lado, representa a razão entre o tempo característico de relaxação da gota τ_σ e o tempo característico do escoamento não-perturbado τ_{u^∞} . Dessa maneira, fica clara a analogia entre o número de capilaridade e o número de Deborah (Bird *et.al.*, 1987). Esse último é um parâmetro importante no estudo da reologia de soluções poliméricas, que expressa a razão entre o tempo característico de relaxação do polímero e o tempo característico do escoamento não-perturbado. Também é o número de capilaridade que correlaciona a macroescala do escoamento e a microhidrodinâmica da gota. Já a constante c_λ é um parâmetro operacional que ajuda a definir a viscosidade característica da microescala. Em estudos específicos sobre emulsões de altas razões de viscosidade, define-se o número de capilaridade em função da viscosidade da gota, de maneira que $Ca_\lambda = c_\lambda Ca$ (Oliveira *et. al.*, 2005). Outra discussão sobre o número de capilaridade será feita no capítulo 4.

2.7

Aspectos computacionais

A representação integral do escoamento de Stokes é singular em $\mathbf{x} = \mathbf{x}_o$. Esse fato traz complicações para a solução numérica de problemas que utilizam essa formulação. Outro ponto importante refere-se às propriedades algébricas da equação (2-85) que serão discutidas oportunamente na seção (2.7.2). Nesta seção, alguns pontos relevantes para o procedimento numérico adotado nas simulações numéricas serão abordados. Isso será feito de maneira puramente analítica, e apenas a forma em que se apresenta a equação (2-85) é alterada, a fim de gerar um procedimento numérico mais preciso e robusto.

2.7.1

Subtração de singularidades

A subtração das singularidades das camadas potenciais simples e dupla é um procedimento algébrico que permite que as integrais de superfície presentes na representação integral sejam calculadas numericamente de forma acurada (Pozrikidis (1992), Loewenberg & Hinch (1996) & Zinchenko *et. al.* (1997)). Mais uma vez consideraremos a situação em que apenas o salto de tensões normais é importante. Nesse caso a contribuição da camada potencial simples na equação (2-85) é dada por

$$\mathbf{I}_S = \frac{c_\lambda}{4\pi(1+\lambda)} \int_S 2\kappa(\mathbf{x}) \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}). \quad (2-86)$$

De acordo com a equação (2-66), $\int_S \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Desde que $\kappa(\mathbf{x}_o)$ é uma constante em relação à integração na variável \mathbf{x} , podemos escrever

$$\frac{c_\lambda}{4\pi(1+\lambda)} \int_S 2\kappa(\mathbf{x}_o) \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = 0. \quad (2-87)$$

Subtraindo (2-87) de (2-86) obtemos

$$\mathbf{I}_S = \frac{c_\lambda}{4\pi(1+\lambda)} \int_S 2[\kappa(\mathbf{x}) - \kappa(\mathbf{x}_o)] \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}). \quad (2-88)$$

A equação (2-88) é a integral \mathbf{I}_S com a singularidade em \mathbf{x}_o subtraída. Esse procedimento garante que ao serem computados os valores do integrando em \mathbf{I}_S as ordens de magnitude do numerador e do denominador das frações resultantes do produto $[\kappa(\mathbf{x}) - \kappa(\mathbf{x}_o)] \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)$ sejam as mesmas. Isso acontece porque o termo $\kappa(\mathbf{x}) - \kappa(\mathbf{x}_o)$ tende a zero quando \mathbf{x} tende a \mathbf{x}_o . Sendo assim, ao avaliar-se o valor do integrando de \mathbf{I}_S , ainda que \mathbf{x} esteja muito próximo de

\mathbf{x}_o , obtém-se um valor numericamente consistente. Vale mencionar que mesmo depois de subtraída a singularidade, ainda assim não se pode avaliar o valor de $\mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)$ em $\mathbf{x} = \mathbf{x}_o$, de forma que o cálculo de \mathbf{I}_S deve ser limitado por uma pequena região ao redor de \mathbf{x}_o .

Quando o salto de tensões através de S também inclui os efeitos gravitacionais líquidos um procedimento semelhante pode ser adotado. No lugar de $\kappa(\mathbf{x}_o)$ utiliza-se $\Delta\rho\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}_o$ e desta maneira a singularidade pode ser subtraída sem dificuldade. Por outro lado, no caso das diferenças de tensão tangencial serem importantes, isto é, se $\nabla^s\sigma \neq 0$, aparentemente não há como realizar uma subtração de singularidade usando as idéias expostas nesta seção. Nesse caso, formulações completamente não-singulares (Bazhlekov *et. al.*, 2004) ou soluções exatas das integrais podem ser utilizadas.

Para realizarmos a subtração de singularidade da camada dupla potencial lançamos mão da identidade (2-69) para o caso em que $\mathbf{x}_o \in S$, de sorte que

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_o) \cdot \left[\int_S \mathcal{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) + 4\pi\mathbf{I} \right] = 0. \quad (2-89)$$

Sendo assim, subtrai-se da camada dupla potencial \mathbf{I}_D a equação (2-89) de forma que

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_D &= \frac{1 - \lambda}{4\pi(1 + \lambda)} \left[\int_S [\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_o)] \cdot \mathcal{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \right. \\ &\quad \left. - 4\pi\mathbf{u}(\mathbf{x}_o) \right]. \end{aligned} \quad (2-90)$$

Os mesmos comentários acerca dos efeitos da subtração da singularidade feitos no caso de \mathbf{I}_S valem para \mathbf{I}_D , com a vantagem de que nesse caso, o procedimento é de certa forma universal, já que independe da equação constitutiva para o salto de tensões através de S .

2.7.2

Regularização da dupla camada potencial

Dada uma certa configuração de S , a solução numérica da equação (2-85) em geral passa por um processo de discretização espacial da superfície em que um número finito de pontos de controle \mathbf{x}_i , $i = 1 \dots N$ são definidos sobre S . Nesse contexto, \mathbf{x} é substituído por \mathbf{x}_i , e a equação (2-85) constitui um sistema linear de $3N$ incógnitas, referentes aos valores das três componentes da velocidade em cada nó da malha, que deve ser resolvido. Um algoritmo simples para esse propósito consiste em realizar substituições sucessivas utilizando (2-85) a partir de uma condição inicial, até que não haja mais variação no

valor do campo de velocidade em cada ponto, dentro de uma certa tolerância arbitrariamente definida. Esse método é, na verdade, o método de Gauss-Jacobi ou o de Gauss-Seidel, se há medida que se calcula um novo valor de $\mathbf{u}(\mathbf{x}_i)$, este resultado é incorporado no processo iterativo. Tipicamente, a condição inicial pode ser obtida a partir do valor de \mathbf{u} calculado para $\lambda = 1$, já que nesse caso $\mathbf{I}_D = \mathbf{0}$ e a equação (2-85) pode ser resolvida diretamente. No entanto, quando $\lambda \gg 1$ ou $\lambda \ll 1$ o sistema linear formado a partir de (2-85) torna-se cada vez mais mal condicionado, de forma que sua solução passa a ser de difícil convergência, mesmo quando métodos de solução de sistema lineares mais sofisticados são empregados. A origem desse problema está na existência de auto-soluções da parte homogênea da equação (2-85) relacionadas à movimentos de corpo rígido e expansões uniformes da gota. Para que o Método Integral de Contorno para a determinação da distribuição de velocidade sobre a superfície das gotas possa ser implementado de maneira eficaz é preciso que essas auto-soluções sejam removidas do espectro de solução da dupla camada potencial.

A equação (2-85) pode ser representada algebricamente na forma

$$\mathbf{u} = \beta \mathbf{L} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{b}, \quad (2-91)$$

em que $\beta = (1 - \lambda)/(1 + \lambda)$, \mathbf{b} é o vetor resultante das contribuições do escoamento não-perturbado e da simples camada potencial e \mathbf{L} é uma aplicação linear definida em função da dupla camada potencial tal que

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{4\pi} \int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}). \quad (2-92)$$

A forma homogênea da equação (2-91), em que $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, pode ser escrita como $\mathbf{L} \cdot \mathbf{u} = \alpha \mathbf{u}$, em que $\alpha = 1/\beta$. Portanto, se α for igual a um autovalor de \mathbf{L} ou de seu operador adjunto \mathbf{L}^A (Lima, 1996), então o sistema (2-91) não admite solução.

Sabe-se que movimentos de corpo rígido $\mathbf{u} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}$, com \mathbf{V} e $\boldsymbol{\Omega}$ constantes, são autovetores de (2-91) (Pozrikidis, 1992). Considerando separadamente a translação e a rotação, fazemos inicialmente $\mathbf{u} = \mathbf{V}$ e substituímos na versão homogênea de (2-85) de forma que

$$\frac{1}{4\pi} \mathbf{V} \cdot \int_S \mathcal{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \alpha \mathbf{V}. \quad (2-93)$$

Da propriedade do Stresslet expressa na equação (2-69) para $\mathbf{x}_o \in S$, a integral de superfície em (2-93) é igual a $-4\pi \mathbf{I}$ de maneira que $\alpha = -1$ é o autovalor associado ao autovetor \mathbf{V} . De forma inteiramente análoga, se $\mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_o$ temos que

$$\frac{1}{4\pi} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_o \cdot \int_S \boldsymbol{\mathcal{T}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \alpha \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_o. \quad (2-94)$$

Novamente usando a propriedade (2-69) a integral em (2-94) é igual a $-4\pi \mathbf{I}$ e $\alpha = -1$ também é autovalor do autovetor $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}$. Desde que $\beta = 1/\alpha$, fica claro que no limite $\beta \rightarrow -1$ o sistema linear associado à equação (2-85) torna-se cada vez mais mal condicionado. A interpretação física desse resultado pode ser dada observando que para $\beta \rightarrow -1$ é preciso que $\lambda \rightarrow \infty$, ou seja, a viscosidade da gota deve ser muito maior do que a viscosidade da fase contínua. Nesse caso, a gota comportar-se como uma partícula rígida que translada e gira junto com a vorticidade do escoamento e não como uma gota que se deforma.

De igual forma, os autovetores do operador adjunto de \mathbf{L} produzem o mal condicionamento do sistema linear associado à (2-93). Por definição do operador adjunto de \mathbf{L} temos que $(\mathbf{L} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{u}) = (\mathbf{v}, \mathbf{L}^A \cdot \mathbf{u})$, em que

$$\mathbf{L}^A \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{n}(\mathbf{x}_o) \cdot \int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\mathcal{T}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) dS(\mathbf{x}), \quad (2-95)$$

conforme demonstrado no anexo A.3. O problema linear $\mathbf{L}^A \mathbf{u} = \alpha \mathbf{u}$ admite o auto vetor $\mathbf{u} = \mathbf{n}$. O autovalor associado é calculado fazendo

$$-\frac{1}{4\pi} \mathbf{n}(\mathbf{x}_o) \cdot \int_S \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\mathcal{T}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) dS(\mathbf{x}) = \alpha \mathbf{n}(\mathbf{x}_o). \quad (2-96)$$

Mais uma vez usando (2-69) mostra-se que $\alpha = 1$ é o autovalor associado ao autovetor \mathbf{n} . Fisicamente, para que $\alpha \rightarrow 1$ é preciso que $\lambda \rightarrow 0$ que é o limite em que a gota aproxima-se de uma bolha invíscida.

Em resumo, os autovalores $\alpha_1 = -1$ ($\lambda = \infty$) e $\alpha_2 = 1$ ($\lambda = 0$), relativos à movimentos de corpo rígido ou de bolha invíscida (expansão uniforme), prejudicam o condicionamento e chegam a impossibilitar a solução do sistema linear resultante da discretização espacial de (2-85). Em face desse resultado é preciso que esses autovetores sejam removidos do espectro de \mathbf{L} . Um procedimento apropriado para esse fim é conhecido como “*deflação de autovalores*” de Wielandt (Wilkinson, 1965). A essência desse método consiste em substituir o operador \mathbf{L} por $\mathbf{L}' = \mathbf{L} - \alpha_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{r} - \alpha_2 \mathbf{s} \mathbf{v}_2$, em que $\{\alpha_1, \mathbf{v}_1\}$ e $\{\alpha_2, \mathbf{v}_2\}$ são os pares de autovalores e autovetores de \mathbf{L} e \mathbf{L}^A , respectivamente, e \mathbf{r} e \mathbf{s} dois vetores arbitrários tais que $(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1) = 1$ e $(\mathbf{s}, \mathbf{v}_2) = 1$, em que $(\ , \)$ representa o produto interno desse espaço de funções vetoriais definido no anexo A.3, pela equação (A-12). O operador modificado \mathbf{L}' têm os mesmos autovalores de \mathbf{L} com exceção de α_1 e α_2 que são substituídos por zero.

No presente contexto, o problema original (2-91) é substituído por (Zinchenko *et. al.* (1997) & Pozrikidis (1992))

$$\mathbf{w} = \beta [\mathbf{L} \cdot \mathbf{w} - \alpha_1 \mathbf{v}_1(\mathbf{r}, \mathbf{w}) - \alpha_2 \mathbf{s}(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})] + \mathbf{b}, \quad (2-97)$$

sendo que \mathbf{u} é recuperado utilizando-se

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} + \frac{\beta \alpha_1}{1 - \beta \alpha_1} \mathbf{v}_1(\mathbf{r}, \mathbf{w}). \quad (2-98)$$

O termo $\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, \mathbf{w}) = \mathbf{w}'$ pode ser interpretado como a projeção de \mathbf{w} em um espaço de vetores de movimento de corpo rígido e é calculado por meio de (Zinchenko *et. al.*, 1997)

$$\mathbf{w}' = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{x}}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_c \quad (2-99)$$

em que \mathbf{x}_c é a coordenada do centróide da gota. Sendo S a área da gota, $\mathbf{V} = \frac{1}{S} \int_S \mathbf{w} dS$ é a projeção de \mathbf{w} na direção de uma velocidade de translação arbitrária e $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_i \mathbf{e}_i$ a projeção de \mathbf{w} na direção de uma velocidade de rotação arbitrária, cujas componentes podem ser determinadas pela solução do sistema

$$\mathcal{D}_{ij} \Omega_j = \int_S \mathbf{w} \cdot (\mathbf{e}_i \times \hat{\mathbf{x}}) dS, \quad (2-100)$$

em que \mathbf{e}_i são os vetores da base canônica do \mathbb{R}^3 e \mathcal{D} o tensor momento de inércia da superfície S definido por

$$\mathcal{D} = \int_S [\mathbf{I}(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}) - \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}] dS. \quad (2-101)$$

O termo $\mathbf{s}(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$ pode ser calculado observando que, se $\mathbf{v}_2 = \mathbf{n}$, então uma escolha apropriada para \mathbf{s} é $\mathbf{s} = \mathbf{n}/S$, desde que $(\mathbf{n}, \mathbf{n}/S) = 1$. Dessa forma, a projeção de \mathbf{w} no espaço de movimentos de bolha invíscida pode ser determinada por

$$\mathbf{v}_2(\mathbf{s}, \mathbf{w}) = \frac{\mathbf{n}}{S} \int_S \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2-102)$$

A implementação desse procedimento de regularização da dupla camada potencial faz com que os sistemas lineares resultantes da discretização de (2-85) sejam bem condicionados e que métodos iterativos como o de Gauss-Seidel atinjam a convergência rapidamente (nas situações mais difíceis em que $\lambda > 50$ em menos de 5 iterações). Em resumo, para a solução do sistema de equações lineares definido por (2-85) deve-se proceder da seguinte maneira:

- (i) Em lugar de se resolver diretamente a equação (2-91), resolve-se (2-97) em que $\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, \mathbf{w})$ é determinado pela equação (2-99) e $\mathbf{s}(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$ por (2-102);
- (ii) Para a determinação de $\mathbf{L}\mathbf{w}$ e \mathbf{b} as singularidades das camadas potenciais simples e dupla devem ser subtraídas utilizado as equações (2-88) e (2-90);
- (iii) A solução para \mathbf{u} deve ser obtida utilizando a equação (2-98).

2.8

Tensor de tensões equivalente de uma suspensão

O objetivo dos desenvolvimentos subseqüentes será a determinação das propriedades reológicas de uma suspensão, vista como um fluido homogêneo efetivo, por meio de uma análise do escoamento na escala das partículas. No presente contexto, não é relevante explicitamente a natureza das partículas, isto é, se são sólidas ou líquidas. O ponto central do desenvolvimento apresentado a seguir é a determinação de uma equação constitutiva que descreva a suspensão como um meio contínuo homogêneo. Para esse fim, premissas básicas devem ser obedecidas, de forma a garantir que uma descrição contínua seja viável para o material em questão. Em princípio, é preciso que exista uma escala de comprimento suficientemente grande para que uma descrição média do material seja representativa. No entanto, é necessário que tal escala seja pequena o bastante para ser considerada uma escala local do escoamento macroscópico.

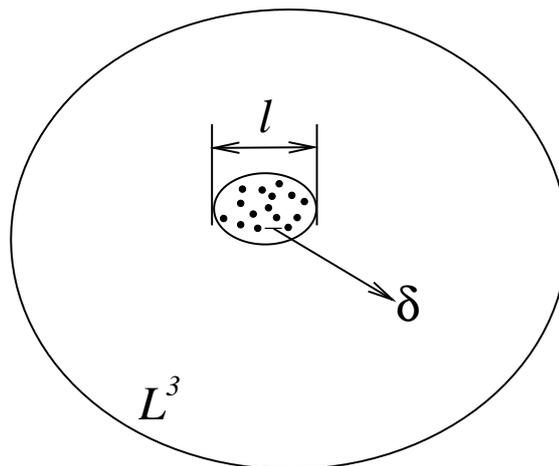


Figura 2.3: L : escala de variação do escoamento macroscópico (escala externa ou integral); l : escala local da suspensão vista como um meio contínuo (escala intermediária ou local), $V \sim l^3$; δ : escala interna da suspensão;

O desenvolvimento que se segue está restrito a suspensões estatisticamente homogêneas, de forma que a função densidade de probabilidade associada à distribuição de raios de partículas não dependa da posição. De outra forma, é preciso que a média volumétrica da tensão induzida por um conjunto de partículas contidas em determinado volume corresponda à média de probabilidade tomada sobre partículas escolhidas aleatoriamente. Essa condição, correspondente à ergodicidade da estrutura interna da suspensão, deve ser satisfeita para que se possa tratar a emulsão como um fluido contínuo equivalente. Quando há a ocorrência de eventos como migração ou difusão hidrodinâmica

de gotas ou partículas, sedimentação ou outros efeitos associados à inércia na escala interna do material, ou ainda se a topologia da emulsão não é estável devido a coalescência ou ruptura de gotas, essa hipótese não é mais válida e uma abordagem de escoamento multifásico deve ser adotada. Assim sendo, o tensor de tensões médio de uma suspensão pode ser determinado como sendo

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (2-103)$$

Em (2-103), o volume de integração V deve conter um número suficiente de partículas para que a média volumétrica esteja bem estabelecida. No entanto, não deve ser tão grande que capture variações de propriedades na escala macroscópica do escoamento. O tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ está definido tanto em posições no exterior das partículas como em pontos internos às mesmas. Em princípio, não é necessário fazer a hipótese de suspensão diluída, mas a ergodicidade deve ser admitida para garantir que a média espacial seja equivalente à média de probabilidade, conforme mencionado acima. De forma simbólica, para que uma descrição contínua seja possível, é preciso que $\delta^3 \ll \ell^3 \ll L^3$, em que δ , ℓ e L representam, respectivamente, a escala interna das partículas, a escala intermediária e a escala de variação do escoamento macroscópico. Essa hipótese está vinculada ao princípio da *ação local* para materiais simples (Truesdell & Noll, 1965). Segundo esse princípio, apenas as partículas que definem um ponto material, ou seja, partículas contidas em um volume $V \sim \ell^3$, influenciam as propriedades locais do material. Considerando que $\nabla \mathbf{u} \sim 1/\ell$, então, termos de maior ordem (como $\nabla \nabla \mathbf{u} \sim 1/\ell^2$) são desprezados, já que ℓ é uma escala muito pequena comparada com a escala macroscópica do escoamento. Dessa maneira, o tensor de tensões local é função, apenas, do gradiente de velocidade e da história do escoamento. Simbolicamente,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\{\nabla \mathbf{u}(t), \mathcal{C}(t)\}, \quad (2-104)$$

em que $\mathcal{C}(t)$ representa a história da configuração da estrutura da suspensão, que pode ser, em princípio a orientação (de fibras ou gotas deformadas), grau de deformação de gotas ou, simplesmente, a distribuição espacial de partículas. Outro princípio do formalismo constitutivo para materiais simples descrito por Truesdell & Noll (1965) refere-se a indiferença material à mudança de referencial, também conhecido como *princípio da objetividade*. Esse princípio é garantido levando-se em conta que não há efeitos de inércia na escala da partícula, como consequência de $Re_a = a^2 \|\nabla \mathbf{u}\|/\nu \ll 1$ em suspensões líquido-sólido ou líquido-líquido, como emulsões, e $St = \rho_p \|\nabla \mathbf{u}\| a^2/\mu = Re_a(\rho_p/\rho) \ll 1$, já que considera-se $(\rho_p/\rho) \sim 1$, em que ρ_p é a massa específica das partículas.

Como a inércia das partículas é desprezível, consequência direta do número de Reynolds, as propriedades ou funções materiais são indiferentes a qualquer observador. Mais especificamente, podemos dizer que de acordo com o princípio da objetividade, a lei de formação da equação constitutiva é invariante em relação à uma mudança de referencial do tipo $\mathbf{x}' = \mathbf{b}(t) \cdot \mathbf{I} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}$ (transformação homogênea), em que \mathbf{Q} é um tensor ortogonal próprio, isto é $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I}$ e $\det(\mathbf{Q}) = 1$. Em outras palavras, se $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\{\nabla \mathbf{u}(t), \mathcal{C}(t)\}$ então $\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathcal{F}\{\nabla' \mathbf{u}'(t), \mathcal{C}'(t)\}$ em que o asterisco indica a quantidade após a mudança de referencial. Sabe-se também que, se todas as quantidades envolvidas na equação constitutiva do material obedecerem às leis de transformação ortogonal para tensores, vetores e escalares, então a equação constitutiva será objetiva. Em suspensões também estão presentes mecanismos de restauração (efeito de memória), oriundos de fatores como a ação da tensão superficial em emulsões ou de forças de restauração Brownianas, atuantes nas macro moléculas de suspensões poliméricas, sendo natural que o comportamento desse tipo de material apresente características não-newtonianas, viscoelásticas.

Observa-se que o volume de integração usado em (2-103) pode ser dividido em dois, considerando as fases contínua e dispersa do material, como sugere (2-105)

$$V = V_f + \sum_{\alpha=1}^N V_\alpha, \quad (2-105)$$

em que V_f é o volume de fluido da fase contínua, V_α o volume de cada partícula pertencente a V e N o número total de partículas. Dessa forma, e considerando que o fluido ambiente é newtoniano, (2-103) pode ser reescrita na forma

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_f} [-p\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] dV + \frac{1}{V} \sum_{\alpha=1}^N \int_{V_\alpha} \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (2-106)$$

Por outro lado, considerando a média do gradiente de velocidades, temos que

$$\langle \nabla \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \nabla \mathbf{u} dV = \frac{1}{V} \int_{V_f} \nabla \mathbf{u} dV + \frac{1}{V} \sum_{\alpha=1}^N \int_{V_\alpha} \nabla \mathbf{u} dV. \quad (2-107)$$

Aplicando o teorema da divergência de Gauss ao último termo de (2-107), $\int_{V_\alpha} \nabla \mathbf{u} dV = \int_{S_\alpha} \mathbf{u} \mathbf{n} dS$ e reorganizando as parcelas da equação, obtém-se

$$\frac{1}{V} \int_{V_\alpha} \nabla \mathbf{u} dV = \langle \nabla \mathbf{u} \rangle - \frac{1}{V} \sum_{\alpha=1}^N \int_{S_\alpha} \mathbf{u} \mathbf{n} dS. \quad (2-108)$$

Desenvolvendo de forma análoga o gradiente de tensão transposto,

$$\frac{1}{V} \int_{V_\alpha} \nabla \mathbf{u}^T dV = \langle \nabla \mathbf{u}^T \rangle - \frac{1}{V} \sum_{\alpha=1}^N \int_{S_\alpha} \mathbf{n} \mathbf{u} dS. \quad (2-109)$$

Utilizando a identidade vetorial $\nabla \cdot (\mathbf{x} \boldsymbol{\sigma}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{x} + \boldsymbol{\sigma}^T$, considerando a simetria do tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$ e também que no presente contexto as partículas são livres de inércia e forças de campo, ou seja, $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$, podemos escrever, para o termo de tensão na partícula,

$$\int_{V_\alpha} \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{V_\alpha} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{x}) dV. \quad (2-110)$$

Substituindo (2-108), (2-109) e (2-110) em (2-106), e utilizando o teorema da divergência em (2-110), mostra-se que

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = -\langle p \rangle \mathbf{I} + \mu (\langle \nabla \mathbf{u} \rangle + \langle \nabla \mathbf{u}^T \rangle) + \frac{1}{V} \sum_{\alpha=1}^N \int_{S_\alpha} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \mathbf{x} - \mu(\mathbf{u} \mathbf{n} + \mathbf{n} \mathbf{u})) dS,$$

ou ainda, definindo-se o número de densidade médio de partículas como sendo $n = N/V$, temos que

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = -\langle p \rangle \mathbf{I} + 2\mu \langle \mathbf{E} \rangle + n \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \int_{S_\alpha} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \mathbf{x} - \mu(\mathbf{u} \mathbf{n} + \mathbf{n} \mathbf{u})) dS. \quad (2-111)$$

Define-se o tensor de tensões adicional devido à presença das partículas no escoamento¹³ como sendo

$$\boldsymbol{\sigma}^d = n \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{S}_\alpha, \quad (2-112)$$

em que

$$\mathbf{S}_\alpha = \int_{S_\alpha} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \mathbf{x} - \mu(\mathbf{u} \mathbf{n} + \mathbf{n} \mathbf{u}) dS. \quad (2-113)$$

O tensor $\boldsymbol{\sigma}^d$ é conhecido como tensor de Landau-Batchelor (Batchelor, 1970) e depende da configuração das partículas, ou seja, do tamanho, da forma, orientação e distribuição das mesmas. Vale notar que \mathbf{S}_α é um dipolo hidrodinâmico, ou ainda, a tensão adicional gerada pela partícula α sobre o fluido ambiente. Vale lembrar que, ainda que na escala da gota exija-se que não haja inércia, essa hipótese não precisa ser feita quando observa-se o escoamento do ponto de vista macroscópico. Dessa forma, é clara a distinção entre os escoamentos nas vizinhanças da gota e escoamento da emulsão vista como um fluido contínuo equivalente. Portanto, para a definição de $\boldsymbol{\sigma}^d$, requer-se que sejam válidas as equações de Stokes no escoamento ao redor da partícula. Uma

¹³O termo apropriado em inglês é *stresslet*, conforme sugerido primeiramente por Batchelor (1970).

vez definido e calculada essa quantidade, a equação governante do escoamento da escala integral é

$$\rho \frac{D\langle \mathbf{u} \rangle}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^N + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^d + \rho \mathbf{g}, \quad (2-114)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}^N = -\langle p \rangle \mathbf{I} + 2\mu \langle \mathbf{E} \rangle$ é a parte newtoniana do tensor de tensões.

2.9

Tensor de Landau-Batchelor em termos do escoamento sobre a superfície da gota

Na equação (2-113) a superfície S^α é definida como sendo a primeira camada de fluido fora da partícula, desde que o volume V_f é preenchido completamente pelo fluido da fase contínua. Portanto, no caso de haver uma interface fluida na qual efeitos de tensão superficial devam ser levados em consideração, a região da partícula delimitada por S^α deve conter a camada interfacial (Batchelor (1970), p.554). Para isso, define-se um volume V_ε , de espessura ε , que contém S , delimitado pelas superfícies S_2 e S_1 , conforme ilustra a figura (2.4). Os vetores \mathbf{n}_2 e \mathbf{n}_1 são os vetores normais às superfícies S_2 e S_1 , respectivamente.

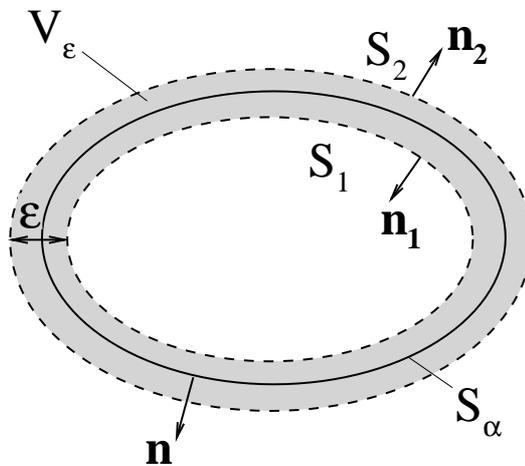


Figura 2.4: Representação das superfícies que delimitam o volume V_ε de espessura ε que contém a interface fluida onde atua a tensão superficial.

O volume V_ε é simplesmente conexo, desde que é tridimensional. No entanto, o mesmo é delimitado por duas superfícies, S_1 e S_2 , tal que (2-113) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_\alpha &= \int_{S_1} [\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \mathbf{x} - \lambda \mu (\mathbf{u} \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_1 \mathbf{u})] dS \\ &+ \int_{S_2} [\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \mathbf{x} - \mu (\mathbf{u} \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_2 \mathbf{u})] dS. \end{aligned} \quad (2-115)$$

Para obtermos uma representação para o stresslet em termos de uma integral de superfície sobre S^α , podemos realizar um processo limite no qual $\varepsilon \rightarrow 0$ de maneira que S_1 e S_2 colapsam em S^α . Sabendo que se $\varepsilon \rightarrow 0$ então $S_2 \rightarrow S^\alpha$, $S_1 \rightarrow S^\alpha$, $\mathbf{n}_2 \rightarrow \mathbf{n}$ e $\mathbf{n}_1 \rightarrow -\mathbf{n}$, e sendo $\Delta \mathbf{f} = (\boldsymbol{\sigma}_2 - \boldsymbol{\sigma}_1) \cdot \mathbf{n}$, obtemos

$$\mathbf{S}_\alpha = \int_{S^\alpha} [\Delta \mathbf{f} \mathbf{x} + \mu(\lambda - 1)(\mathbf{u} \mathbf{n} + \mathbf{n} \mathbf{u})] dS. \quad (2-116)$$

A equação (2-116) traz uma expressão para o tensor de tensões induzidas por uma gota delimitada pela superfície S^α , expresso em termos do salto de tensões através da superfície e da velocidade sobre a mesma (Batchelor, 1970). O tensor de tensões de uma emulsão, vista como um fluido contínuo equivalente, pode, então, ser escrito na forma

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = -\langle p \rangle \mathbf{I} + 2\mu \langle \mathbf{E} \rangle + \boldsymbol{\sigma}^d. \quad (2-117)$$

Na equação (2-117) ficam claras as contribuições das fases contínua ($-\langle p \rangle \mathbf{I} + 2\mu \langle \mathbf{E} \rangle$) e dispersa ($\boldsymbol{\sigma}^d$) para a constituição do tensor de tensões equivalente do material. Nota-se que o tensor de Landau-Batchelor é avaliado por meio de integrais sobre as superfícies das gotas. O tensor \mathbf{S}_α associado a cada partícula pode ainda ser decomposto em uma parte simétrica e outra anti-simétrica, sendo a primeira associada às tensões devidas à deformação do material e a segunda a torques induzidos sobre a partícula (Batchelor, 1970). Os esforços realizados em estudos teóricos sobre reologia das suspensões concentram-se na determinação de $\boldsymbol{\sigma}^d$ como função da estrutura do escoamento na escala das partículas.

No caso de partículas rígidas em que a velocidade na superfície das mesmas é descrita por movimentos de corpo rígido, em virtude da condição de não deslizamento, temos que

$$\int_{S^\alpha} (\mathbf{u} \mathbf{n} + \mathbf{n} \mathbf{u}) dS = \mathbf{0}. \quad (2-118)$$

Nesse caso, a contribuição de cada partícula rígida para a tensão é dada simplesmente por

$$\mathbf{S}_\alpha = \int_{S^\alpha} \Delta \mathbf{f} \mathbf{x} dS. \quad (2-119)$$

2.10

Formulação polidispersa para emulsões diluídas

Em um contexto em que a emulsão é formada por gotas de raios diferentes, podemos escrever o tensor de tensões da fase dispersa como

$$\boldsymbol{\sigma}^d = n \frac{1}{N} \sum_{i=1}^M N_i \mathbf{S}_i(a_i), \quad (2-120)$$

em que M é o número de espécies¹⁴ de gotas e N_i é o número indivíduos cujo raio da partícula não-deformada é a_i . Só é possível proceder dessa forma se a emulsão é tal que o escoamento nas proximidades de uma gota é livre dos distúrbios gerados por suas vizinhas. Assim, a contribuição individual de uma gota de determinado raio pode ser simplesmente multiplicada pelo número de indivíduos de mesmo tamanho. Portanto, é importante salientar que a equação (2-120) só é válida para emulsões diluídas. Passando $1/N$ para dentro do somatório, identificamos a probabilidade incondicional de a_i dada por $p(a_i) = N_i/N$. Podemos ainda relacionar a fração volumétrica ϕ ao volume médio das gotas da emulsão usando $\phi = \sum_{\alpha=1}^N V_\alpha/V = n\langle V \rangle$, em que

$$\langle V \rangle = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N V_\alpha = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^M N_i v_i = \sum_{i=1}^M p(a_i) v_i. \quad (2-121)$$

em que v_i é o volume de uma gota da espécie i . Pela incompressibilidade das gotas o volume é invariante e sempre igual a $v_i = 4\pi a_i^3/3$, a contribuição média para o tensor de tensões da fase dispersa pode ser então calculada por

$$\boldsymbol{\sigma}^d = \frac{3\phi \sum_{i=1}^M p(a_i) \mathbf{S}_i(a_i)}{4\pi \sum_{i=1}^M p(a_i) a_i^3}, \quad (2-122)$$

ou, no caso em que uma aproximação de distribuição contínua de raios de gotas pode ser empregada,

$$\boldsymbol{\sigma}^d = \frac{3\phi \int_0^\infty p(a) \mathbf{S}(a) da}{4\pi \int_0^\infty p(a) a^3 da}. \quad (2-123)$$

Na equação (2-123) a função $p(a)$ é a função densidade de probabilidade associada à distribuição de raios de gotas em uma emulsão. Em geral, essa função é necessária para que a reologia da emulsão possa ser completamente determinada.

¹⁴Entende-se por uma espécie o conjunto de gotas de mesmo raio de partícula não-deformada.

Uma formulação polidispersa para suspensões não diluídas pode ser desenvolvida de maneira alternativa à apresentada anteriormente, sendo útil tanto para simulações numéricas como para experimentos com emulsões concentradas em que o cálculo direto em termos da função densidade de probabilidade torna-se inviável. Nesse sentido, consideremos que

$$\boldsymbol{\sigma}^d = \sum_{i=1}^M n_i \bar{\mathbf{S}}^i, \quad (2-124)$$

em que n_i é o número de densidade de gotas da espécie i , dado por $n_i = N_i/V$, e $\bar{\mathbf{S}}^i$ é dado por

$$\bar{\mathbf{S}}^i = \frac{1}{N_i} \sum_{\alpha=1}^{N_i} \mathbf{S}_{\alpha}^i. \quad (2-125)$$

Vale notar que no caso de emulsões diluídas $\mathbf{S}_1^i = \mathbf{S}_2^i = \dots = \mathbf{S}_{N_i}^i = \mathbf{S}^i$ de sorte que (2-125) reduz-se a $\bar{\mathbf{S}}^i = \mathbf{S}^i$. Substituindo esse resultado em (2-124) e sendo $n_i = N_i/V$, é possível recuperar a equação (2-120), como esperado. Substituindo (2-125) em (2-124) e, mais um vez usando $n_i = N_i/V$, chega-se a

$$\boldsymbol{\sigma}^d = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^M \sum_{\alpha=1}^{N_i} \mathbf{S}_{\alpha}^i. \quad (2-126)$$

Desde que $V = n/N$ e $n = \phi/\langle V \rangle$ podemos escrever

$$\boldsymbol{\sigma}^d = \frac{\phi}{NV} \sum_{i=1}^M \sum_{\alpha=1}^{N_i} \mathbf{S}_{\alpha}^i. \quad (2-127)$$

A equação (2-127) não tem a restrição de emulsão diluída como no caso anterior e pode ser empregada em resultados de simulações ou experimentos sem a necessidade de se conhecer a função densidade de probabilidade associada à distribuição de raios de gotas, para qualquer fração volumétrica ϕ .

2.10.1

Forma adimensional do tensor de Landau-Batchelor para emulsões diluídas

Considerando a expressão para o tensor de Landau-Batchelor para emulsões diluídas dada pela equação (2-123) em que o salto de tensões através da superfície da gota acontece apenas na direção normal à mesma, temos

$$\mathbf{S}(a) = \int_S [2\sigma\kappa\mathbf{n}\mathbf{x} + \mu(\lambda - 1)(\mathbf{u}\mathbf{n} + \mathbf{n}\mathbf{u})] dS. \quad (2-128)$$

Podemos fazer uma parametrização de (2-128) tal que $\tilde{\mathbf{u}} = \mu_c/\sigma\mathbf{u}$, $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/a$, $\tilde{\kappa} = a\kappa$ e $\tilde{dS} = dS/a^2$, de maneira semelhante ao que foi feito em (2-81). Como o raio da gota não-deformada a é constante em relação à integração na superfície S podemos escrever

$$\mathbf{S}(a) = \sigma a^2 \tilde{\mathbf{S}}, \quad (2-129)$$

em que

$$\tilde{\mathbf{S}} = \int_S [2\tilde{\kappa}\mathbf{n}\tilde{\mathbf{x}} + c_\lambda^{-1}(\lambda - 1)(\tilde{\mathbf{u}}\mathbf{n} + \mathbf{n}\tilde{\mathbf{u}})] d\tilde{S}. \quad (2-130)$$

Substituindo esse resultado em (2-123), dividindo o numerador e o denominador da fração resultante pelo raio médio das gotas $\langle a \rangle$ e definindo um parâmetro associado à polidispersidade da emulsão como $\beta = a/\langle a \rangle$, podemos escrever σ^d como

$$\sigma^d = \frac{3\phi\sigma}{4\pi\langle a \rangle} \frac{\int_0^\infty p(\beta)\beta^2 \tilde{\mathbf{S}}(\beta) d\beta}{\int_0^\infty p(\beta)\beta^3 d\beta}. \quad (2-131)$$

É importante salientar que $\tilde{\mathbf{S}}$ deve ser mantido dentro da integral em (2-131). Mesmo que seu integrando não dependa explicitamente do valor de a (e portanto de β), a forma da superfície de integração na equação (2-129) é função do tamanho da gota. Isso acontece porque gotas de menor raio (maior tensão superficial) tendem a deformar menos do que gotas maiores. A respeito da razão de aspecto β , vista como um conjunto estocástico, temos que $\beta > 0$ e que a média de β é unitária, por definição.

Retomando a equação (2-117) e definido quantidades adimensionais tais que

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle}{\mu\dot{\gamma}_c}, \quad \tilde{p} = \frac{\langle p \rangle}{\mu\dot{\gamma}_c}, \quad \tilde{\mathbf{E}} = \frac{\langle \mathbf{E} \rangle}{\dot{\gamma}_c}, \quad (2-132)$$

temos que

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = -\tilde{p}\mathbf{I} + 2\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^d, \quad (2-133)$$

em que a contribuição da fase dispersa na forma adimensional é dada por

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^d = \frac{3\phi}{4\pi} C a_{\langle a \rangle}^{-1} \frac{\int_0^\infty p(\beta)\beta^2 \tilde{\mathbf{S}}(\beta) d\beta}{\int_0^\infty p(\beta)\beta^3 d\beta}, \quad (2-134)$$

em que $C a_{\langle a \rangle}$ é o número de capilaridade baseado no raio médio das gotas da emulsão. No caso particular de uma suspensão monodispersa, $\beta = 1$ e todas as gotas deformam da mesma maneira. Sendo assim, nesse caso, a equação (2-134) reduz-se simplesmente a

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^d = \frac{3\phi}{4\pi} C a^{-1} \tilde{\mathbf{S}}, \quad (2-135)$$

em que $C a$ é o número de capilaridade como definido na equação (2-83).

De outra forma, para emulsões diluídas temos que $\mathbf{S}(a) = -2\mu(4\pi a^3/3)\mathbf{B}$ (Frankel & Acrivos, 1970), em que \mathbf{B} é um tensor com dimensões de taxa de cisalhamento e que depende apenas da geometria da gota. Portanto, sendo $\sigma a^2 \tilde{\mathbf{S}} = -2\mu(4\pi a^3/3)\dot{\gamma}_c \tilde{\mathbf{B}}$, em que $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B}/\dot{\gamma}_c$, o tensor $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^d$ pode ser escrito como

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^d = -2\phi \frac{\int_0^\infty p(\beta)\beta^3 \tilde{\mathbf{B}}(\beta) d\beta}{\int_0^\infty p(\beta)\beta^3 d\beta}. \quad (2-136)$$

Em emulsões monodispersas em que o número de capilaridade é pequeno, é possível mostrar que $\tilde{\mathbf{B}} = -(5\lambda/2 + 1)/(\lambda + 1)\tilde{\mathbf{E}}$ (Oliveira *et. al* (2005) & vide seção 4.1). No caso de uma emulsão polidispersa, a condição de pequenas deformações em regimes de baixas taxas de cisalhamento é obtida se o escoamento nas vizinhanças de cada gota é tal que $\beta Ca_{(a)} \ll 1$. Em outras palavras, se o número de capilaridade local do escoamento nas vizinhanças da gota é pequeno. Nesse caso, o tensor $\tilde{\mathbf{B}}$ é independente de β e sai da integral em (2-136), de maneira que $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^d = 2\phi(5\lambda/2 + 1)/(\lambda + 1)\tilde{\mathbf{E}}$. Conclui-se daí que emulsões diluídas, polidispersas, escoando em regimes de baixos número de capilaridade têm o mesmo comportamento reológico de uma emulsão monodispersa equivalente, cujo raio das gotas é igual ao raio médio das gotas da primeira. Esse fato alivia o requisito de se conhecer detalhadamente a estrutura interna (função densidade de probabilidade) da emulsão, uma vez que apenas o raio médio (além das constantes materiais elementares como σ , μ e ϕ) é necessário para se estabelecer a reologia do material.