

### 3 Comparação entre os Métodos

Foram considerados dois modelos para a precificação da opção *flex fuel*: árvore quadrinomial e simulação com fluxos de caixa dinâmicos. Os dois modelos serão testados nesse capítulo através de um exemplo hipotético de valoração do gasto com combustível do carro *flex fuel*. Esse exemplo será resolvido segundo o modelo de árvore de decisão quadrinomial e posteriormente o mesmo exemplo hipotético será solucionado segundo o modelo de simulações com fluxos de caixa dinâmicos.

O exemplo hipotético de um automóvel *flex fuel*, que pode ser abastecido com álcool e gasolina em qualquer proporção entre eles, tem as seguintes características:

- Capacidade do tanque do automóvel *flex fuel*: 40 litros
- Eficiência do álcool: 70%
- Consumo mensal gasolina: 2,5 tanques
- Volatilidade mensal do preço da gasolina: 1,34%
- Volatilidade mensal do preço do álcool: 2,61%
- Correlação entre álcool e gasolina: 0,5999
- Taxa livre de risco: 0,55% a.m.
- Períodos: 10 meses
- Preço inicial da gasolina: R\$2,50
- Preço inicial do álcool: R\$1,75

É importante ressaltar que o consumidor é indiferente ao consumo de álcool ou gasolina no tempo inicial, pois assumimos de forma conservadora, que os preços iniciais dos dois combustíveis nesse exemplo são equivalentes, respeitando a eficiência de 70% do álcool em relação à gasolina, como pode ser visto a seguir:

- Gasto com gasolina: quantidade de tanques de gasolina consumidos em um mês x capacidade do tanque em litros x preço da

gasolina/litro. Assim, o gasto mensal com gasolina é de R\$250 ( $2,5 \times 40 \times R\$2,50 = R\$250$ ).

- Gasto com álcool: (quantidade de tanques de gasolina consumidos em um mês/eficiência do álcool) x capacidade do tanque em litros x preço da gasolina/litro. Assim, o gasto mensal com álcool é de R\$250 ( $[2,5/0,7] \times 40 \times R\$1,75 = R\$250$ ).

Espera-se encontrar resultados equivalentes para as duas soluções (árvore quadrinomial e simulação com fluxos dinâmicos), fortalecendo o uso do modelo de simulação com fluxos dinâmicos visto sua simplicidade para a resolução do problema.

### 3.1. Modelo da Árvore Quadrinomial

Para calcular as probabilidades neutras ao risco serão usados o crescimento mensal dos preços do álcool ( $g_{al}$ ), o crescimento mensal dos preços da gasolina ( $g_{gas}$ ) e as volatilidades de cada combustível do exemplo hipotético. Substituindo os valores nas fórmulas de  $V_{gas}$  e  $V_{al}$ , vistas na seção 2.2.3, tem-se:

$$v_{gas} = \frac{0,55\% - (1,34\%)^2}{2} = 0,54\%$$

$$v_{al} = \frac{0,55\% - (2,61\%)^2}{2} = 0,52\%$$

Substituindo o valor do exemplo hipotético nas fórmulas de probabilidades neutras ao risco vistas na seção 2.2.3, tem-se:

$$Pu_{gas}u_{al} = \frac{1}{4} \times \left[ 1 + \left( \frac{0,52\%}{2,61\%} + \frac{0,54\%}{1,34\%} \right) \times 1^{\frac{1}{2}} + 0,5999 \right] = 0,550331$$

$$Pu_{gas}d_{al} = \frac{1}{4} \times \left[ 1 + \left( \frac{0,52\%}{2,61\%} - \frac{0,54\%}{1,34\%} \right) \times 1^{\frac{1}{2}} - 0,5999 \right] = 0,048508$$

$$Pd_{gas}u_{al} = \frac{1}{4} \times \left[ 1 - \left( \frac{0,52\%}{2,61\%} - \frac{0,54\%}{1,34\%} \right) \times 1^{\frac{1}{2}} - 0,5999 \right] = 0,151542$$

$$Pd_{gas}d_{al} = \frac{1}{4} \times \left[ 1 - \left( \frac{0,52\%}{2,61\%} + \frac{0,54\%}{1,34\%} \right) \times 1^{\frac{1}{2}} + 0,5999 \right] = 0,249619$$

De forma resumida tem-se a probabilidade neutra ao risco na Tabela II:

$Pu_{gas}u_{al}$	0,550331
$Pu_{gas}d_{al}$	0,048508
$Pd_{gas}u_{al}$	0,151542
$Pd_{gas}d_{al}$	0,249619

Tabela II – Probabilidade Neutra ao Risco

Para a resolução do problema com árvores de decisão foi desenvolvido uma macro utilizando programação em Visual Basic no Excel, mostrada com mais detalhes no anexo I, que calcula o valor para cada ramificação da árvore através do método recursivo<sup>8</sup>, levando em consideração as probabilidades neutras ao risco. Posteriormente, o programa calcula o valor presente de cada ramificação da árvore, descontando o fluxo à taxa livre de risco. Depois, é feito o somatório do valor presente de cada ramo, para todos os caminhos da árvore de decisão. Ao final, o programa escolhe aquele somatório mais eficiente. No caso em questão é escolhido o VPL de menor valor, pois o problema hipotético do carro *flex fuel* trata de custo de combustível e quanto menor for o custo mais eficiente o resultado será para o consumidor.

Uma importante vantagem desse modelo para a solução do gasto com o carro *flex fuel* é o tempo levado para realizar os cálculos. Como o programa armazena apenas a solução de cada caminho possível da árvore de decisão, e não a árvore completa, é possível realizar diversas simulações com uma velocidade alta.

---

<sup>8</sup> Para maiores informações sobre método recursivo ver: Szwarcfiter J., Markenzon, L. Estruturas de Dados e Seus Algoritmos. Ed LTC: Rio de Janeiro, 1994. p. 4-7.

Como input do programa tem-se:

- Volatilidade do álcool
- Volatilidade da gasolina
- Correlação entre álcool e gasolina
- Taxa livre de risco
- Preço inicial do álcool
- Preço inicial da gasolina

Assim, com o uso da árvore quadrinomial, assumindo que é possível escolher a cada mês o combustível mais barato para o cliente, sem desconsiderar a menor eficiência do álcool, foram imputados todos os valores do exemplo hipotético no programa. Como resultado, tem-se o valor presente mais eficiente do total de gastos com combustível durante 10 meses: R\$ 2.703. Além disso, uma análise de sensibilidade em relação às volatilidades do álcool e da gasolina mostra que o custo diminui a medida que a volatilidade aumenta, como era de se esperar. A

Figura X mostra o custo com combustível a medida que varia a volatilidade da gasolina de 1% a 5%, para diversos níveis de volatilidade do álcool.

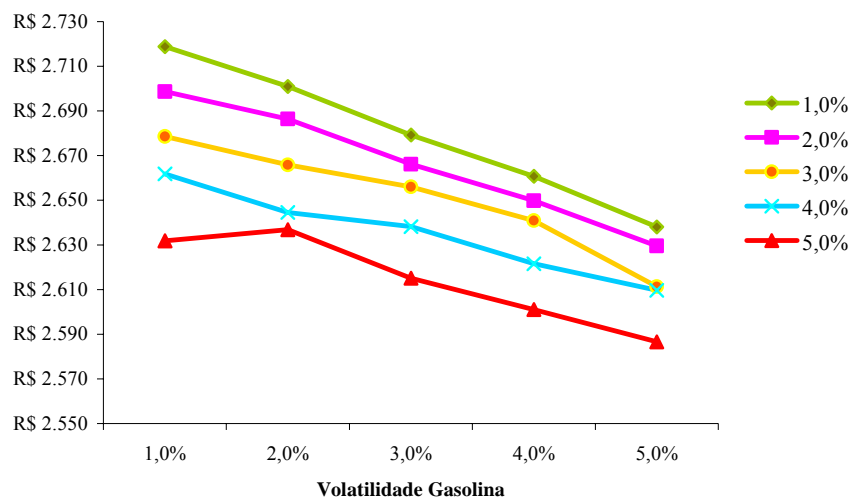


Figura X – Custo do Combustível com o Carro *Flex Fuel*

### 3.2.

#### Modelo de Simulação com Fluxos de Caixa Dinâmicos

Com o método de simulação, em primeiro lugar é feito o fluxo de caixa tradicional para 10 meses considerando somente a possibilidade de abastecer com gasolina. Posteriormente, é feito outro fluxo de caixa, também com 10 meses, mas dessa vez considerando apenas a possibilidade de abastecer com álcool.

Em seguida, os dois fluxos de caixa tradicionais são convertidos para fluxos de caixa dinâmicos, em que assumimos que os preços do álcool e da gasolina seguem um processo de difusão de acordo com um Movimento Geométrico Browniano na seguinte forma:

$$\text{Gasolina:} \quad dG = \mu_G G dt + \sigma_G G dz_G$$

$$\text{Álcool:} \quad dA = \mu_A A dt + \sigma_A A dz_A$$

onde  $dG$  e  $dA$  representam respectivamente as variações nos preços da gasolina e do álcool num espaço de tempo  $dt$ ,

$\mu_A$  e  $\mu_G$  são respectivamente a taxa de crescimento do preço da gasolina e do álcool

$\sigma_A$  e  $\sigma_G$  são as volatilidades dos preços da gasolina e do álcool e

$dz_G = \varepsilon_G \sqrt{dt}$  e  $dz_A = \varepsilon_A \sqrt{dt}$  onde são respectivamente o processo de Wiener da gasolina e do álcool

Assim, é feito o preço do combustível no período  $t+1$ , em cada fluxo, como sendo igual ao preço do período  $t$  multiplicado pela exponencial de uma normal com média  $v$  ( $v = r - \frac{(\sigma)^2}{2}$ , onde  $r$  = taxa de juros livre de risco) e variância igual à volatilidade estimada do preço do combustível.

$$\text{Preço Gasolina: } P_{gas_{t+1}} = P_{gas_t} \exp\{RiskNormal(v_{gas}; \sigma_{gas})\}$$

$$\text{Preço Álcool: } P_{al_{t+1}} = P_{al_t} \exp\{RiskNormal(v_{al}; \sigma_{al})\}$$

No exemplo em questão,  $v_{gas} = 0,54\%$ ,  $v_{al} = 0,52\%$ ,  $\sigma_{gas} = 1,34\%$  e  $\sigma_{al} = 2,61\%$ . Passamos a ter dois fluxos: fluxo dinâmico somente álcool e fluxo dinâmico somente gasolina.

Por fim, assumimos que o rendimento do tanque do automóvel *flex fuel* é equivalente ao rendimento do automóvel movido a gasolina, quando esse combustível é escolhido. O mesmo ocorre para o álcool, ou seja, o carro *flex fuel* possui o rendimento do carro à álcool quando este combustível é escolhido.

Assim, é feito um terceiro fluxo de caixa, também dinâmico, em que este escolhe o melhor resultado em cada período entre os dois fluxos dinâmicos: somente álcool e somente gasolina. Esse terceiro fluxo pode ser chamado de fluxo dinâmico álcool e gasolina, respeitando a fórmula a seguir:

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{\min(\text{preço álcool}_i ; \text{preço gasolina}_i)}{(1+k)^i}$$

Após 10.000 interações de Monte Carlo realizada no programa computacional @Risk, calcula-se o valor presente de cada fluxo de caixa dinâmico. Dessa forma, o valor presente do total de gastos durante 10 meses com combustível, usando o método de simulação, é :

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{\min(\text{preço álcool}_i ; \text{preço gasolina}_i)}{(1+k)^i} = \text{R\$}2.685$$

### 3.3. Comparação dos Modelos

Como vimos anteriormente, segundo o modelo de árvore de decisão tem-se o valor de R\$ 2.703 para o gasto de combustível em 10 meses com o carro *flex fuel*, e de acordo com o modelo de simulação com fluxos dinâmicos, o custo com combustível é de R\$ 2.685. Assim, a diferença entre os dois modelos é menor que 0,7%.

Foram testados diversos casos com a árvore quadrinomial e com o modelo de simulação do fluxos de caixa dinâmicos com 1.000 interações de Monte Carlo através do programa computacional @Risk. As variáveis de volatilidade do preço do álcool e volatilidade do preço da gasolina foram alteradas formando 25 combinações diferentes, enquanto todas as demais variáveis do modelo foram fixadas como segue:

- Capacidade do tanque do automóvel *flex fuel*: 40 litros
- Eficiência do álcool: 70%
- Consumo mensal gasolina: 2,5 tanques
- Taxa livre de risco: 0,55% a.m.
- Períodos: 10 meses
- Preço inicial do álcool = R\$1,75
- Preço inicial da gasolina = R\$2,50

Na Tabela III são apresentados todos os resultados dos testes para as 25 combinações de volatilidade do álcool e da gasolina segundo o método de árvore de decisão quadrinomial.

Árvore		Volatilidade Álcool				
		1,0%	2,0%	3,0%	4,0%	5,0%
Volatilidade Gasolina	1,0%	R\$ 2.733	R\$ 2.714	R\$ 2.693	R\$ 2.670	R\$ 2.648
	2,0%	R\$ 2.733	R\$ 2.715	R\$ 2.693	R\$ 2.678	R\$ 2.657
	3,0%	R\$ 2.693	R\$ 2.697	R\$ 2.698	R\$ 2.680	R\$ 2.661
	4,0%	R\$ 2.670	R\$ 2.697	R\$ 2.680	R\$ 2.680	R\$ 2.662
	5,0%	R\$ 2.648	R\$ 2.657	R\$ 2.661	R\$ 2.662	R\$ 2.663

Tabela III – VP do Custo com Combustível usando Árvore Quadrinomial

Na Tabela IV são apresentados todos os resultados dos testes para as 25 combinações de volatilidade do álcool e da gasolina segundo o modelo de fluxos dinâmicos com 1.000 interações de Monte Carlo.

Simulação		Volatilidade Álcool				
		1,0%	2,0%	3,0%	4,0%	5,0%
Volatilidade Gasolina	1,0%	R\$ 2.719	R\$ 2.699	R\$ 2.679	R\$ 2.662	R\$ 2.632
	2,0%	R\$ 2.701	R\$ 2.686	R\$ 2.666	R\$ 2.645	R\$ 2.637
	3,0%	R\$ 2.679	R\$ 2.666	R\$ 2.656	R\$ 2.638	R\$ 2.615
	4,0%	R\$ 2.661	R\$ 2.650	R\$ 2.641	R\$ 2.622	R\$ 2.601
	5,0%	R\$ 2.638	R\$ 2.630	R\$ 2.611	R\$ 2.610	R\$ 2.587

Tabela IV – VP do Custo com Combustível usando Simulação

Como visto na Tabela III e na Tabela IV, o exemplo hipotético apresentado neste capítulo foi repetido diversas vezes, e para todos os casos analisados o valor percentual referente à diferença entre os dois modelos ficou muito baixo, como mostrado na Tabela V.

%		Volatilidade Álcool				
		1,0%	2,0%	3,0%	4,0%	5,0%
Volatilidade Gasolina	1,0%	-0,5%	-0,6%	-0,5%	-0,3%	-0,6%
	2,0%	-1,2%	-1,1%	-1,0%	-1,2%	-0,8%
	3,0%	-0,5%	-1,1%	-1,5%	-1,5%	-1,7%
	4,0%	-0,4%	-1,7%	-1,4%	-2,2%	-2,3%
	5,0%	-0,4%	-1,0%	-1,9%	-2,0%	-2,9%

Tabela V – VP do Custo com Combustível: Árvore Quadrinomial x Simulação

Quanto maior for o número de interações de Monte Carlo, menor será a diferença entre os dois modelos, pois com isso aumenta-se a precisão do resultado do método por simulação de fluxos de caixa dinâmicos. Por exemplo, se ao invés de 1.000 interações fizermos 10.000 interações, o valor resultante para o cenário volatilidade do álcool 5,0% e volatilidade da gasolina 5,0% passa de R\$ 2.663 para R\$ 2.587 e a diferença percentual entre os dois modelos cai de -2,9% para -2,7%. Assim, pode ser visto que a diferença encontrada entre o modelo quadrinomial e o modelo de fluxos de caixa dinâmicos é significativamente pequena. Contudo, a diferença entre os dois modelos tende a aumentar quando, tanto a volatilidade do álcool como a volatilidade da gasolina são altas.



No modelo quadrinomial o número de ramificações da árvore de decisão cresce exponencialmente, segundo a equação:  $N = 4^t$ , onde  $N$  = número de nós de decisão na árvore quadrinomial e  $t$  = número de períodos da árvore quadrinomial. No exemplo hipotético desse capítulo, para encontrar o gasto com combustível do carro *flex fuel* são necessários 1.048.576 nós de decisão para construir a árvore quadrinomial completa. Considerando um caso mais amplo para o carro *flex fuel*, utilizar um período de 10 meses é pouco para a análise, sendo necessário 10 anos, ou seja, 120 meses, para uma análise consistente do produto. Nesse caso é preciso construir uma árvore quadrinomial com  $4^{120}$  nós de decisão, o que tomaria um tempo considerável.

Devido à pequena diferença demonstrada nesse capítulo, entre o valor presente dos gastos com combustível durante 10 meses no carro *flex fuel*, resultante dos métodos de simulação de fluxos de caixa dinâmicos e da árvore quadrinomial, e considerando a simplicidade do modelo de simulação com fluxos de caixa dinâmicos frente a árvore quadrinomial, a valoração do carro *flex fuel* será feita através do modelo de simulação de fluxos de caixa dinâmicos.